

Matematyka dyskretna 24.11.2023

Relacje:

- rachunki z dan (logika)
- teoria mnogości
- funkcje

Relacje przedział

$X \times Y$ - dawelne zbiory

relacja R - dawalny podzbiór:

$$R \subseteq X \times Y$$

$(x, y) \in R \equiv x R y \quad x \text{ jest w relacji } z y$

Własności

1) Zwracalność (jest w relacji $x = y$, $P \subseteq X \times X$)

każda para $x R x$

$$\bigwedge_x x R x$$

2) Symetryczność (za akcentem)

$$\bigwedge_{x, y} x R y \Rightarrow y R x$$

3) Antysymetryczność (symetryczność przeciwna do rewersji)

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x=y$$

4) Przecodmierś

$$\bigwedge_{x,y,z} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

5) Spełnialność (przyjmij jąka jest w relacji drugim)

$$\bigwedge_{x,y} xRy \vee yRx$$

Przykład

$$X = \mathbb{Z} \quad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

4 dzieli $x-y$

$$x, y \in \mathbb{Z}; xRy \Leftrightarrow 4 \mid (x-y)$$

$$1 \text{ RS} \equiv T$$

$$2 \text{ R4} \equiv F$$

$$1 \text{ R9} \equiv T$$

$$\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x-y=4k$$

1) Zawartna

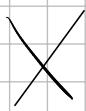
$$x \in \mathbb{Z} \quad xRx \Leftrightarrow 4 \mid x-x \quad 4 \mid 0 \checkmark$$

2) Symetryczna

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad xRy \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x-y=4k \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} y-x=4(-k) \checkmark$$

3) Antysymetryczna

$$x=1, y=5$$



$$(1 \text{ R } 5 \vee 5 \text{ R } 1 \Rightarrow 1=5) \equiv F$$

4) Przedawnicie

$$x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$[x R y \wedge y R z] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall k, m \in \mathbb{Z} \\ x - y = 4k \wedge y - z = 4m \end{array} \right]$$

$$x - z = (x - y) + (y - z) \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad m + l \in \mathbb{Z}$$

$$k, m \in \mathbb{Z} \quad x - z = 4k + 4m = 4(k + m)$$

$$k + m = (\cancel{x R z}) \Rightarrow x - z = 4(l) \quad \checkmark$$

5. Spójnica

$$x=0, y=1$$

$$\neg(0 R 1) \vee \neg(1 R 0) \quad \checkmark$$

Relacje porządku

$$R \subset X \times X$$

R nazywamy relacją częściowego porządku jeśli jest ona:

zurawna,
antysymetryczna,
i przeliczalna

Jedeli R jest relacją częściowego porządku i jest ona jednoznacznie spójna to nazywamy ją relacją (uniwnego lub całkowitego porządku)

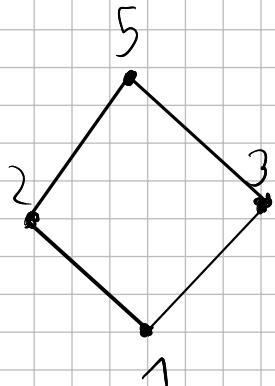
$$R, X \leqslant Y$$

Jedeli R jest relacją porządku $X^R Y$

przemy $X \setminus Y$ \times poprzedza y ; y następuje po x

$$R_{\leqslant}$$

$$\begin{matrix} 1 & \{2 \\ 1 & \{3 \end{matrix}$$



$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad t \in \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (3, 4)\}$$

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (3, 4)\}$$

• $(R, \leq) \leftarrow$ paralek catkovitý

• $(N, |)$

$$x, y \in N$$
$$x \mid y \stackrel{\text{def.}}{\iff} x \mid y$$

Zrozumieć $x \mid x \wedge x \in N \equiv T \checkmark$

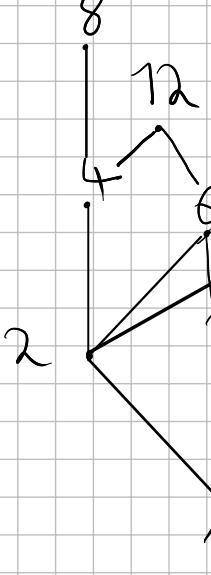
antysymetryzm

$$x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y \equiv T \checkmark$$

przechodniość

$$x, y, z \in N$$

$$x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$$

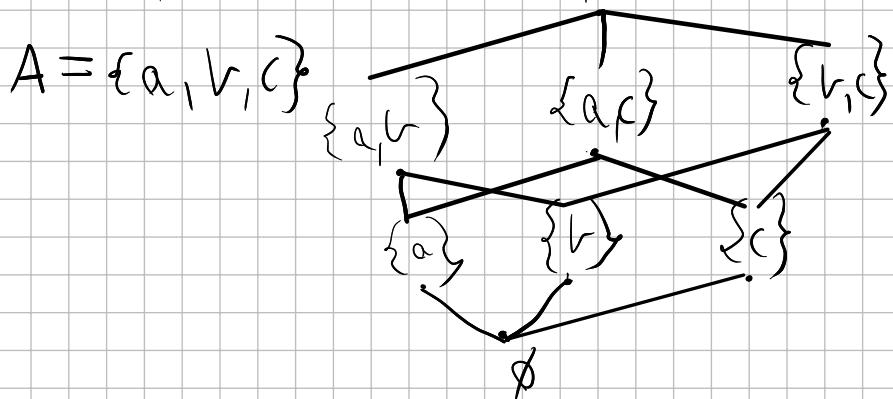


$$(y = x \cdot k_1 \wedge z = y \cdot m) \Rightarrow z = y \cdot m = (x \cdot k_1) \cdot m = x(k_1 \cdot m)$$

$$A \neq \emptyset \quad X = 2^A$$

$$x, y \in 2^A \quad x \setminus y \Leftrightarrow x \subset y$$

$$A = \{a, b, c\}$$



Elementy wyznaczone

$$(x, <)$$

$x \in X$ nazywamy elementem maksymalnym jeśli

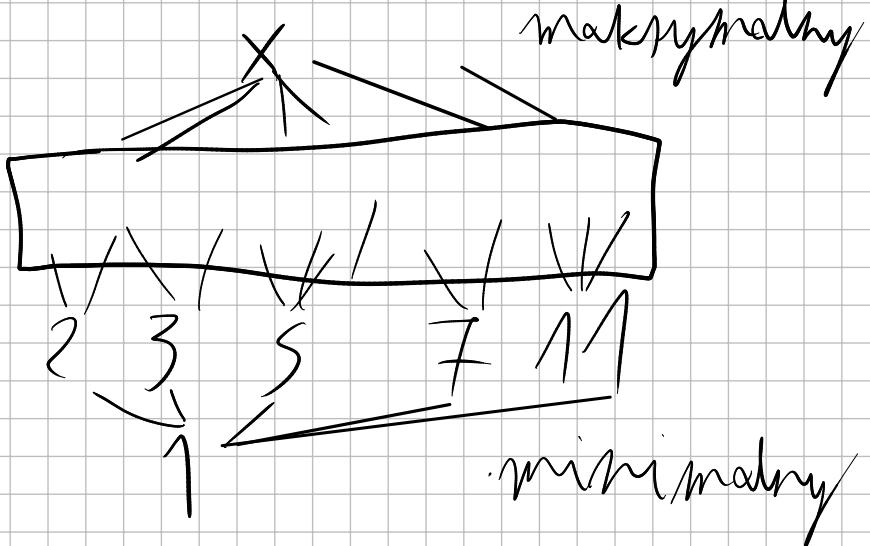
$$\bigwedge_{y \in X} x \setminus y \Rightarrow x = y \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee_{y \in X} y \neq x \wedge x \setminus y$$

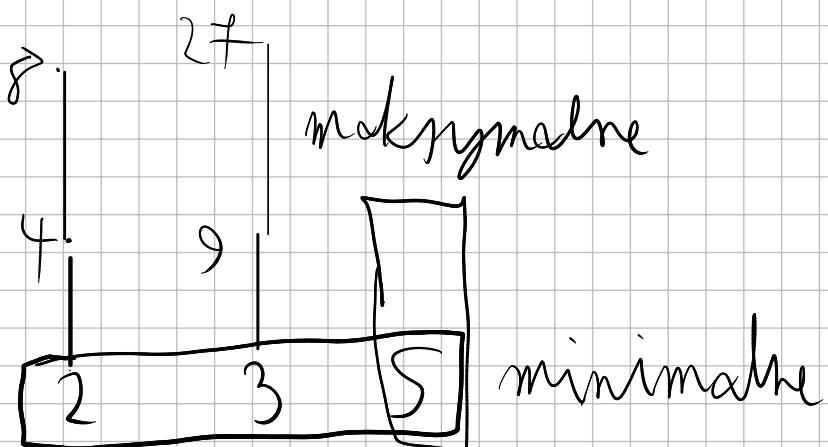
$x \in X$ nazywamy elementem minimalnym jeśli

$$\bigwedge_{y \in X} y \setminus x \Rightarrow x = y$$

• (R, \leq) wuk elementu minimalnego czy maksymalnego

$(\langle 0, 1 \rangle, \leq)$ wuk elementu maksymalnego
minimalny = 0



$$X \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}$$

 (x_i)

$x \in X$ nazywamy największym, jeśli

$$\begin{array}{l} \forall y \in X \\ y < x \\ (x_i) \end{array}$$

$x \in X$ nazywamy najmniejszym, jeśli

$$\begin{array}{l} \forall y \in X \\ x < y \\ (x_i) \end{array}$$

największy

najmniejszy

$(\{0, 1\}, \leq)$

najmniejszy

$(\{2^n\} \cup \{3^n\} \cup 5, |)$

$(X, \{ \})$ istnieje element największy to jest, jedyny

dwa elementy X i y te w relacji
 $y \in X$.

$X \neq \emptyset \wedge X$ skończony

$(X, \{ \})$ istnieje element maksymalny i minimalny

Dowód:

1. $|X|=1$ $[X=\{x\}] \Rightarrow [x \text{ jest el. maksymalnym}]$
2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $|X|=n+1$

$x \in X$ istnieje Y dla którego $X = Y \cup \{x\}$

$$|Y|=n$$

z zdefiniowania \emptyset wynika, że

$$1) x < y$$

$$2) y < x$$

$\Rightarrow y$ jest maksymalnym

$(X, <)$

$(X, <)$, X niepusty
i skierowany jest
to el. największym

$$\begin{array}{c} x \\ \vee \\ y \end{array} \quad Y = X - \{x\}$$

Ograniczenia i kresy 01.12.2023

$$(\times, \{) A \subset \times, (A, \leftarrow)$$

$x \in X$ jest ograniczeniem górnym zb. A

$$\begin{array}{c} \wedge \\ x \in A \end{array} \text{ a } x$$

Jeżeli zbiór ograniczeń ma el. najmniejszy
to nazywamy go kresem górnym zbioru A

Jeżeli zbiór ograniczeń dolnych ma el. największy
to nazywamy go kresem dolnym zb. A

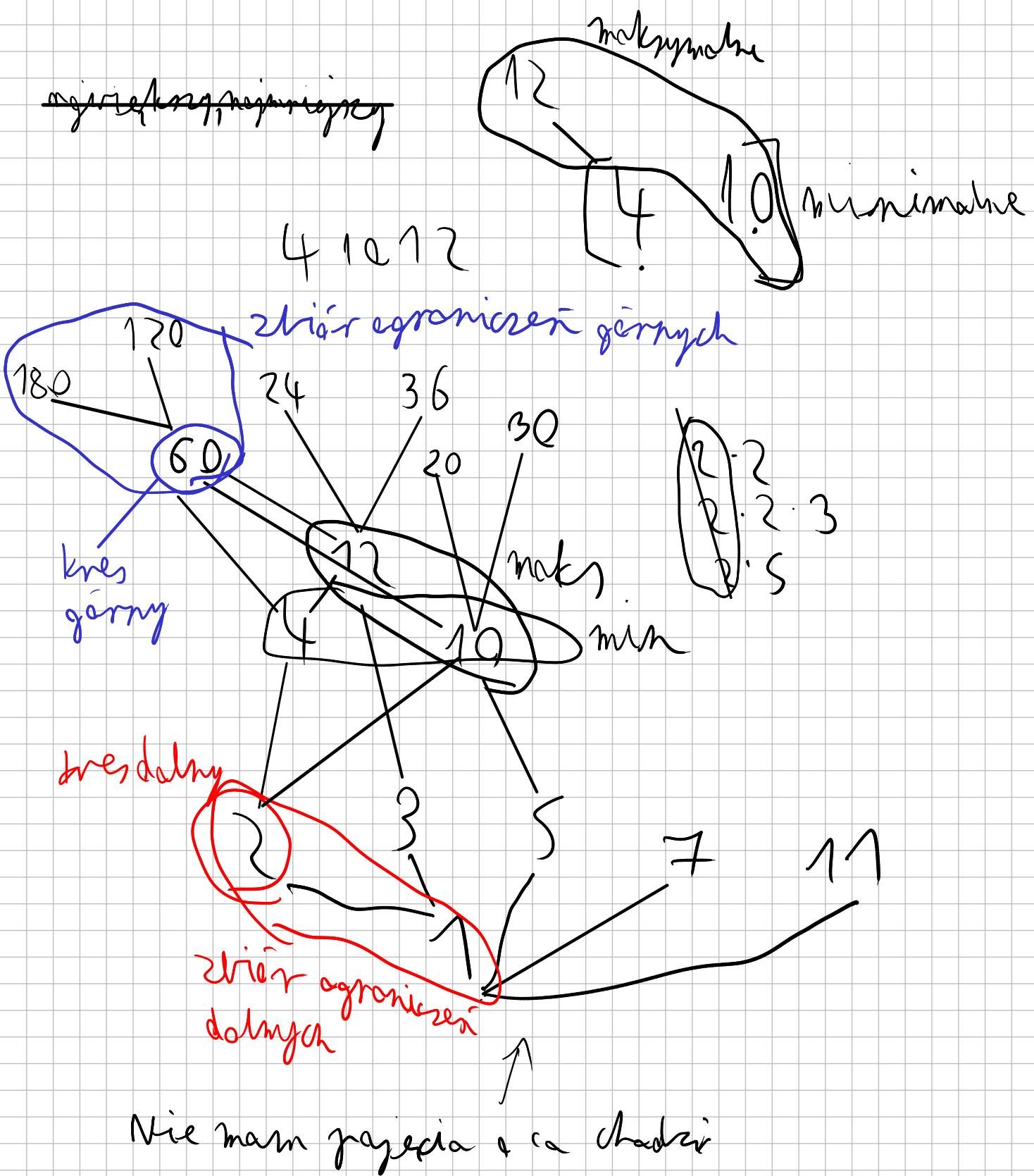
$$(\leftarrow 0, 1), (\leq) \quad < 0, 1) \subset R \quad (R, \leq)$$

el. najmniejszy

$$\text{zb. ograniczeń dolnych} = (-\infty, 0]$$

$$\text{zb. ograniczeń górnego} = (1, +\infty) \quad \begin{array}{l} \text{el. największy} \\ \uparrow 1 \\ \text{el. najmniejszy} \end{array}$$

$$(N, I) \quad A = \{4, 10, 12\}$$



Relacje równoznaczące

operator \equiv (Class & rhs) {} // C++ operator overloading

$$(X, R) \quad R \subset X \times X$$

R - relacja równoznacząca jeśli jest ona

- 1) zwartna
- 2) symetryczna
- 3) przechodnia

Zamiast $x R y$ będziemy pisać $x \sim y$

Klasa abstrakcji el. $x \in X$ to zbiór wszystkich

el. $y \in X$, które są w relacji \sim z x

Klasa abstrakcji X oznacza jest pierw [x]

$$[\downarrow x] := \{ y \in X : x \sim y \}$$

$$X = \bigcup [x \sim y] \Rightarrow [3 | x - y]$$

$$[0] = \{ \dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \} = \{ 3n : n \in \mathbb{Z} \}$$

$$[1] = \{ 3n + 1 : n \in \mathbb{Z} \}$$

$$[2] = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[3] = [0] = [-3] = [-6]$$

$$[4] = [1]$$

$$[5] = [2]$$

[0]	[1]	[2]

$2^{137438953472}$ maksymalna liczba w standardowym systemie

$16\text{ GB} \Rightarrow 16 \cdot 1024^3 \cdot 8 \text{ b} =$ + rejestrów - pamięć programu
 (instrukcji) - 1

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1024 \\ 1024 \end{array} \frac{10000}{1024 \cdot 1024 \cdot 1024}$$

Jeżeli ~ jest relacja równoważności w X

to)

$$1) \bigwedge_{x \sim X} [x] = \emptyset \quad \{x \in [x]\}$$

$$2) \bigwedge_{x, y \in X} [x] = [y] \vee [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

$$3) X = \{[x] \cup [y] \cup [z] \cup \dots\} = \\ = \bigcup_{X \subset X} [x]$$

Podzielność

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

$$a|b \text{ a dzieli } b \Rightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} b = ak$$

b dzieli się przez a

$$\bigcap_{x \in (101, 2^{64})}$$

$$n|0 \quad 0|0 \quad 0=0 \cdot 0$$

$$n|n \quad n|n \quad n=n \cdot 1$$

$$1|n, -1|n$$

$$0|n \Leftrightarrow n=0$$

(1) podzielność jest relacją w \mathbb{Z}

jest przechodnia $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

$$m = qn + r \quad 0 \leq r < n$$

$$m \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N} \quad 17 = 3 \cdot 5 + 2$$

Dowód

$$\frac{m}{n} - 1 \times q \leq \frac{m}{n} \quad q \in \left(\frac{m}{n} - 1, \frac{m}{n} \right)$$

$$m - qn > 0$$

$$m - qn < n \quad \begin{cases} r := m - qn \\ 0 \leq r < n \end{cases}$$

Jedynoscj g i r

zalozimy, ze dla (q, r) i (q_1, r_1)

$$m = qn + r = q_1 n + r_1$$

$$\frac{qn+r}{n} - \frac{q_1 n + r_1}{n} = 0$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ x \in \mathbb{R} \end{array}$$
$$0n+r$$

$$n(q - q_1) + r - r_1 = 0$$

$$r \in \mathbb{R} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$m = qn + r$$

ilosc r reszta

$x \times 1 = \text{reszta}$

$x \leftarrow 2 = \text{ilosc}$

$$\begin{array}{c|c} q & r \\ \hline 0 & 17 \\ 1 & 12 \\ 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{array}$$

while q

$$\begin{array}{r} 33 \\ 101 \cdot 3 \\ \hline 9 \\ 11 \\ \hline 2 \end{array}$$

$m \sim 2^{100}$
 $n = 7$

Teretli liczbę jest nieskończonymi

$$\begin{array}{r} 386 \\ 773 : 2 \\ \hline 6 \\ \hline 17 \\ 16 \\ \hline 13 \\ 12 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log n \\ x \leftarrow 1 \end{array}$$

NWD

1) $1 \mid m \wedge 1 \mid n$

2) skończona ilość dzieliń

3) zbiór dzieliń m i n jest skończony

\Rightarrow istnieje

NWD (135, 120)

$$135 \left| 3 \text{ NWD} \left(3^2 \cdot 5, 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \right) = 15 \right.$$

45	3	120	2
15	3	60	2
5	5	30	2
1		15	5
		3	3
		1	

NWD (kursa, mod)

421

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 4 \\ \hline 090 \\ -090 \\ \hline 000 \end{array}$$

while $a \neq b$:

$$\text{tmp} = b$$

$$b = a \% b$$

$$a = \text{tmp}$$

$$\begin{array}{r} 10100 \\ 10100 \\ -10100 \\ \hline 00000 \\ 168421 \\ -164 \\ \hline 4 \end{array}$$

return a

$n, m \in N$

$m > n$

$\text{NW D}(m, n)$

$d \mid m \wedge d \mid n \Rightarrow d \mid \underline{m-n}$

$\wedge d \mid n$

$d \mid m-n \wedge d \mid n \Leftrightarrow d \mid m \wedge d \mid n$

int gcd(int a, int b) {

while $b \neq 0$ {

int tmp = b;

$b = a \% b$;

$a = b$

→

return a;

→

$a \quad b \quad 32 \text{ clock cycles}$
45 30 per iteration

30 15

15 0

alt gcd(a, b):

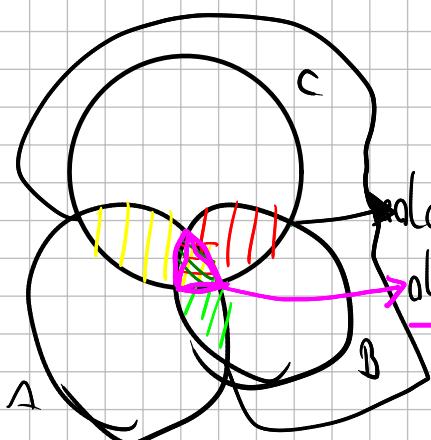
while $b \neq 0$:

$tmp = b$

$b = a \% b$

$a = tmp$

return a



gcd done 2 way (ministe 1 way)

gcd done 3 way (ministe 3 way)

$$(A \vee B \vee C) - (A \wedge B) - (B \wedge C) - (A \wedge C) \cup (A \wedge B \wedge C)$$

$$A = \{x \in K : 2 \mid x\}$$

$$K \subset N \quad D = \{x \in K : 7 \mid x\}$$

$$B = \{x \in K : 3 \mid x\}$$

$$K \subset \{100, 101, \dots, 2^{64} - 1, 2^{64}\}$$

$$C = \{x \in K : 5 \mid x\}$$

$|X|$ ilość unikalnych elementów wiven X

2	A	B	C
4	3	5	7
6	6	10	15
8	9	12	20
10	15	25	30
12			
14			
16			
18			
20			
22			
24			
26			
28			
30			

$$|A| = \frac{2}{2^{64}-1}$$

$$|B| = \frac{3}{2^{64}-1} - \frac{3 \cdot 2}{2^{64}-1}$$

$$|C| = \left[\frac{5}{2^{64}-1} - \left(\frac{5 \cdot 2}{2^{64}-1} - \left[\frac{5 \cdot 3}{2^{64}-1} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2^{64}-1} \right] \right) \right]$$

wyświetl

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 30 & 30 & 30 \\ \downarrow & & \swarrow \\ 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 \\ 10130 & & \end{array} \left. \begin{array}{l} 30 \text{ parz.} \\ \text{nie 1 razy} \\ \text{a tu parz.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30 \text{ parz.} \\ \text{nie 1 razy} \\ \text{a tu parz.} \end{array}$$

$$\begin{aligned} |D| = & \left[\frac{7}{2^{64}-1} - \left(\frac{7 \cdot 2}{2^{64}-1} - \left[\frac{7 \cdot 3}{2^{64}-1} - \left(\frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{2^{64}-1} - \left[\frac{7 \cdot 5}{2^{64}-1} + \left(\frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{2^{64}-1} + \left[\frac{7 \cdot 5 \cdot 7}{2^{64}-1} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & + 2 \left[\frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2^{64}-1} \right] + \left[\frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{2^{64}-1} \right] \end{aligned}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$42$$

$$42$$

$$42$$

$$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$$

$$10$$

$$210$$

$$210$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$70$$

$$70$$

$$3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$70$$

$$705$$

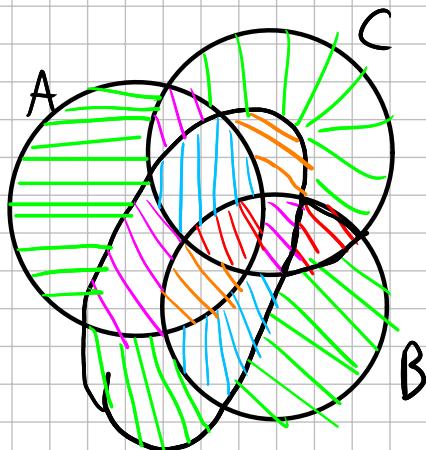
można to sprawdzić

w retkowym

$$\text{num}(A) - \text{num_cols}(B, C, D)$$

$$\text{num}(B) - \text{num_cols}(C, D)$$

$$nm(C) = nm - \text{cores}(D)$$



$$(A \cup B \cup C \cup D)$$

This shit looks like abstract art

Int Int \rightarrow Int Haskell :(
encalinty

$$(n, 0) \Rightarrow n$$

$$(a, b) \Rightarrow \text{encalintm}(b, a - (a/b) \cdot b)$$

\downarrow
adivr

$$a \% b$$

$$a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b$$

$a \leq 10 \text{ ms}$

$$\begin{aligned} b_2 &= 15 - \overbrace{(15 / 10)}^1 \cdot 10 \\ b_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$10 - (10 \text{ div } 15) \cdot 15$$

$$10 - 0 \cdot 15$$

$$\begin{matrix} a & b \\ 15 & 10 \end{matrix}$$

$$15 - \underbrace{(15 \text{ div } 10)}_2 \cdot 10$$

$$\begin{matrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{matrix}$$

$$5 - (5 / 10) \cdot 0 = 5$$

$$(s, s') = (1, 0) \quad d \parallel 0$$

$$(t, t') = (0, 1)$$

$$(d, d')$$

5. Sprawdź, czy następujące relacje R w zbiorze X są zwrotne, symetryczne, antysymetryczne, przechodnie i spójne:

- | | |
|---|--|
| a) $X = \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow 3 x - y,$ | g) $X = \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x^3 = y^3,$ |
| b) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow 2 x + y,$ | h) $X = \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x < y ,$ |
| c) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow 3 x + y,$ | i) $X = \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x + y = 3,$ |
| d) $X = \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow 5 x^3 - y^3,$ | j) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow x > y \vee y > x,$ |
| e) $X = \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2,$ | k) $X = \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q},$ |
| f) $X = \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x^2 \neq y^2,$ | l) $X = 2^{\mathbb{N}}, xRy \Leftrightarrow x \Delta y < +\infty.$ |

a)

$$X = \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow 3 | x - y$$

$$x = 5 \quad y = -7$$

$$5 R -7 \Leftrightarrow 3 | 5 + 7$$

$$4 R 8 \Leftrightarrow 3 | 4 - 8$$

1. zwrotność

$$\boxed{\bigwedge_{x \in X} xRx}$$

$$3 | x - x$$

$$3 | 0 \Leftrightarrow T$$

2. Symetryczna

$$\bigwedge_{x,y \in X} x R y \Rightarrow y R x$$

$$x R y \Rightarrow -x -y$$

$$3|x-y \Leftrightarrow 3|x-y \Leftrightarrow x R y$$

3. Przedawnicza

$$x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

$$3|x-y \wedge 3|y-z \Rightarrow 3|x-z$$

$$x-y=3k_1 \quad y=x-3k_1$$

$$y-z=3k_2$$

\cap

$$x-z=3(k_1+k_2)$$

jest przedawnicza

zwracająca

symetryczna

$$3|3(k_1+k_2)$$

relacja równoważności

4. Asymetryczna

$$x R y \wedge y R x \Rightarrow x=y$$

$$3|5-2 \wedge 3|2-5 \nRightarrow 5=2$$

5. Sprawdzić

$$\forall x \forall y (xRy \wedge yRx)$$

$$3 \nmid 5-6 \quad 1 \quad 3 \mid 6-5$$

$$R = X \times X$$

zgodna i symetryczna

wszystkie elementy są ze sobą w relacji

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \forall y (xRy \wedge yRx) \\ \forall x \forall y (xRy \Rightarrow yRx) \end{array} \right.$$

hell:

gato hell;

PD S) T)

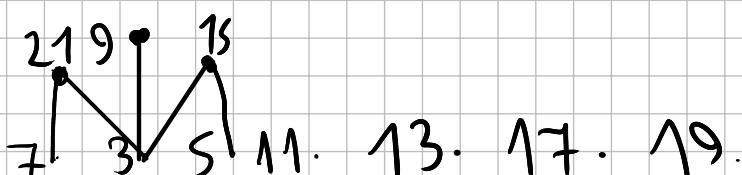
$$xRy \Rightarrow x \in R$$

8. Niech zbiór $X = \{3, 5, 7, 9, \dots, 19, 21\}$ będzie uporządkowany przez relację podzielności. Znajdź elementy wyróżnione.

Relacja porządku: zwrotne, przeciwdawnie i antysymetryczna

\nwarrow, \nearrow	zwrotne	antysymetryczna	przeciwdawnie
$, $	$x \nwarrow x \nearrow$	$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$	$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
$, X$	$x \mid x \vee$	$x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y$	

$\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$ $x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z \vee$



jest element maksymalny $\{21, 9, 15, 11, 13, 17, 19\}$

jest element minimalny $\{7, 3, 5, 11, 13, 17, 19\}$

nie ma ani elementu największego, ani najmniejszego

Największy następuje po $\text{KA} \supseteq D \setminus M$

Najmniejszy $\text{KA} \supseteq D \setminus Y$ następuje po nim

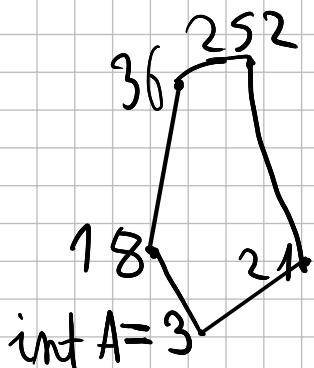
9. Niech

- $X = \mathbb{N}, A = \{18, 21, 36\}$,
- $X = \{2n - 1: n \in \mathbb{N}\}, A = \{3, 7, 9, 21, 27\}$,
- $X = \{2^n \cdot 3^k: n, k \in \mathbb{N}_0\}, A = X \cap \{20, 21, \dots, 119, 120\}$,

przy czym X jest zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności. Wyznacz kresy zbioru A .

1

$$X = \mathbb{N}, A = \{18, 21, 36\}$$



$$36 \cdot 2 = 72$$

$$\begin{array}{l} 21 = 7 \cdot 3 \\ 18 = 6 \cdot 3 \end{array}$$

$$\underline{\underline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}}$$

kresy zbioru a

$\inf A$ - kres dolny A

$\sup A$ - kres górny A

zwracająca
symetryczna

mającą przedmiot

zwracająca, symetryczna, przechodziąca

$$R \subset X \times X$$

klasa abstrakcji

$$[x]_R = \{y \in X : x R y\}$$

$[x]_R$ klasa abstrakcyjna do której elementów
w relacji $\sim X$

$$[x]_R \neq \emptyset \text{ bo } x \in [x]_R$$

$$[x_1]_R = [x_2]_R \iff x_1 R x_2$$

$$[x_1]_R \neq [x_2]_R \Rightarrow [x_1]_R \cap [x_2]_R = \emptyset$$

$$\bigcup [x]_R = X$$

$$X = \mathbb{Z}, x R y \iff 3 | x - y$$

zwracająca, symetryczna, przechodziąca

to jest relacja równoważności

$$[0]_R = \{y \in \mathbb{Z} : 3 | 0 - y\}$$

$$[0]_R = \{y \in \mathbb{Z} : 3 | -y\} \quad [0]_R = \{-3, -6, -9, \dots\} \cup \{0\} \cup \{3, 6, 9\}$$

$$[1]_R \{ y \in \mathbb{Z} : 3 | 1-y \} [1]_R = \{ 4, 7, 10, \dots \} \cup \{ -2, -5, -8, \dots \}$$

$$[2]_R \{ y \in \mathbb{Z} : 3 | 2-y \}$$

$$[2]_R = \{ 2, 5, 8, \dots \} \cup \{ 2 \} \cup \{ 1, 4, 7, \dots \}$$

$$[3]_R = [0]_R$$

$$3 | 2-y$$

[element] = {every other element}

$$[0]_R \cup [1]_R \cup [2]_R = \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}y \bmod 3 &= 0 \\y \bmod 3 &= 1 \\y \bmod 3 &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x R y \Leftrightarrow & (x \in A_1 \wedge y \in A_1) \vee (x \in A_2 \wedge y \in A_2) \\& \vee (x \in A_3 \wedge y \in A_3)\end{aligned}$$

Punkty na płaszczyźnie.

$$X = \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \{ (u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

zurzatna

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \quad \checkmark$$

symetryczna

$$(x, y) \{ (u, v) \Rightarrow (v, u) \{ (x, y) \quad \checkmark$$

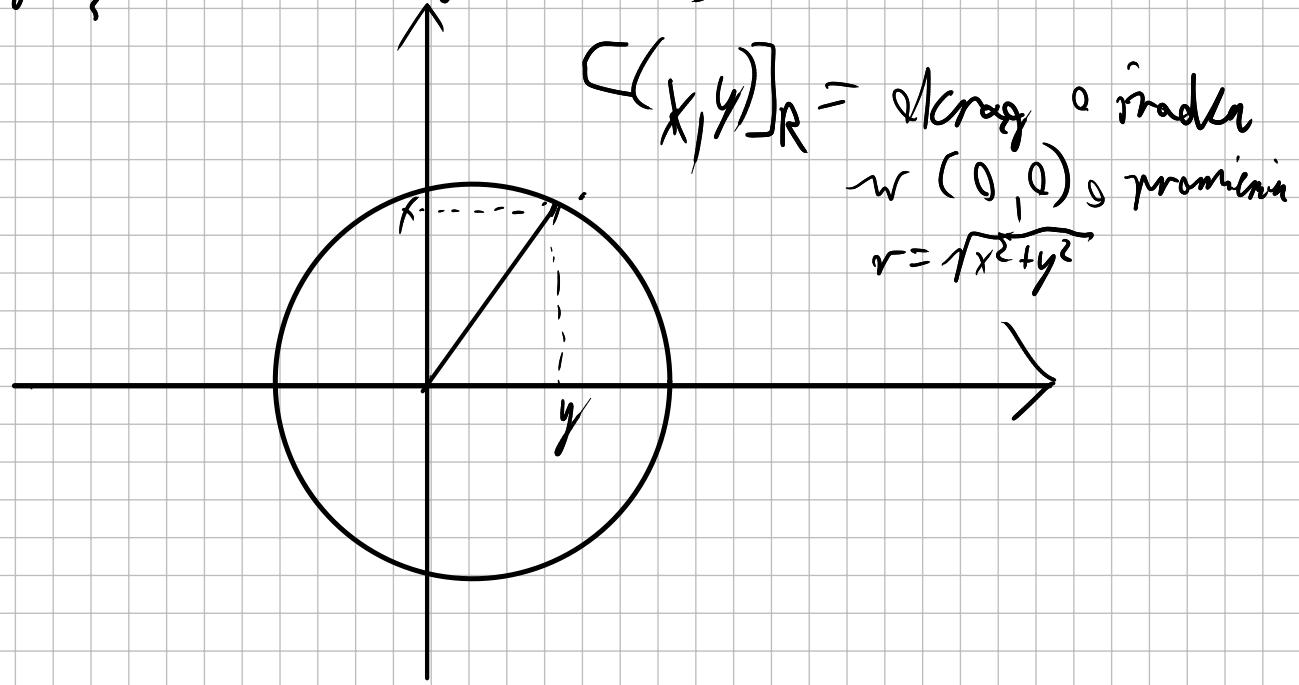
przechodniaśc

$$(x, y) \{ (u, v) \wedge (u, v) \{ (a, b) \Rightarrow (x, y) \{ (a, b)$$

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \wedge \frac{u^2 + v^2}{\text{niedziałające}} = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

$$[(x, y)]_g = \{(u, v) : x^2 + y^2 = u^2 + v^2\}$$



g) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, (m, n) R(a, b) \Leftrightarrow mb = na.$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ $(m, n) R(a, b) \Leftrightarrow mb = na$

(\mathbb{Z}, \mathbb{N}) zwracana

$(1, s) R(1, s) \quad 1 \cdot s = s \cdot 1$

symetryczna

$(-1, 2) = (-\frac{s}{2}, s) \Rightarrow (-\frac{s}{2}, s) = (-1, 2)$

$mb = \underline{na} \Rightarrow \underline{\frac{na}{mb}} = mb$
 qlet.

przechodnia

$$\underline{mb} = na \wedge \underline{na} = cd \Rightarrow mb = cd$$

zadostawiajce

$$\begin{cases} b \cdot m = na \\ na = cd \end{cases} \Rightarrow b \cdot m = cd$$

$$m \cdot b = n \cdot a \wedge m d = c a$$

$$(a, b) R (c, d)$$

$$\frac{mb}{na} = \frac{n}{l-m} \wedge ad = bc$$

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{l-m}$$

$$\frac{a}{l-m} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{l-m} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{d} \quad md = cn$$

$$[-2, 3]_R = \left\{ \underline{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : (-2, 3) R (x, y)} \right\}$$

$$[-2, 3]_R = \overbrace{\{-2 \leq a \leq 3, b \geq 0\}}$$

$$\frac{a}{l-m} = -\frac{2}{3} \quad a < 0$$

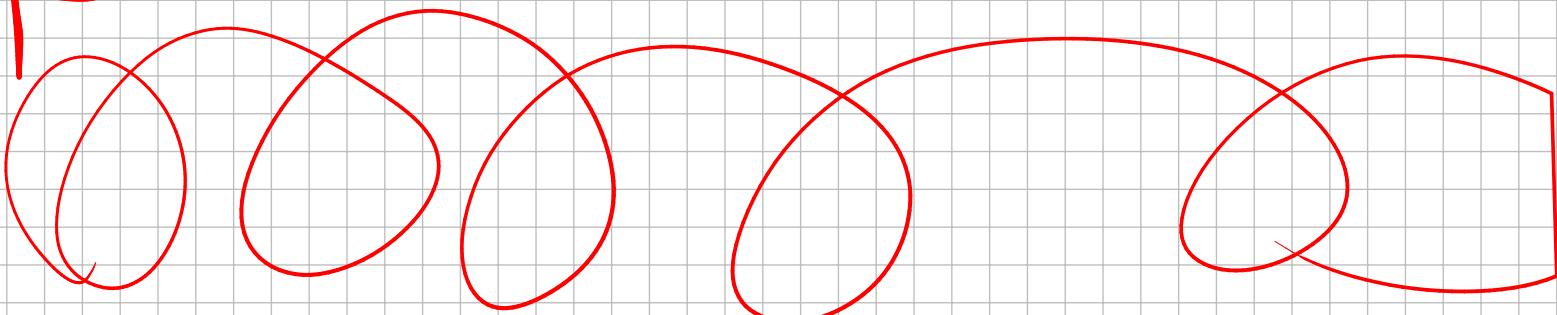
$$\wedge \forall k \in \mathbb{Z} \quad a = 2k$$

KLASY ABSTRAKCYJNE I TYLKO DLA RÓWNOŚCI

WAŻNOŚĆ!

Termin naprawki.

Punkty z zadani.



x/q

zbior ilorazowy

\mathbb{Z}_p

zwracanie
symetryczne
wrechodniakie

$$q = \left[\frac{n}{m} \right]$$

$$n = m \cdot q + r \quad \downarrow \text{resta}$$

$$\frac{n}{m} = q + r$$

$$n | n_1 \wedge n | n_2$$

$$\text{NWD}(m, n)$$

$$3 | 6 \wedge 3 | 12$$

$$= \text{NWD}(n, m)$$

współne dzielniki:

m	n
30	45
45	15
15	0
0	15

$$\text{NWD}(m, n) = \text{NWD}(n, r)$$

$$\text{NWD}(0, x) = x$$

$$\text{NWD}(x, 0) = x$$

$$\text{NWD}(x, y) = \text{NWD}(y \% x, x)$$

1. Wykorzystując algorytm

a) $m = 2000, n = 987,$

$$\begin{array}{r}
 2000 \% 987 \\
 (26, 987) \\
 (25, 26) \\
 (1, 25)
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_3 + n_5 = d$$

matcya Relaya