Matematyka dyskretna 24.11.2023

Relacje:

- rachunek zdań (logika)
- teoria mnogości
- funkcje

Relacje porządku

Relacja równoważności

X, Y – dowolne zbiory

relacja R – dowolny podzbiór:

$$R \subset X \times Y$$

$(x,y) \in R \equiv xRy \equiv x$ jest w relacji z y

Własności

1) Zwrotność (jest w relacji z sobą) $X = Y$, $R \subset X \times X$

każda para xRx

$$\bigwedge_x xRx$$

2) Symetryczność (są odwrotne)

$$\bigwedge_{x,y} xRy \Rightarrow yRx$$

3) Antysymetryczność (symetryczność prowadzi do równości)

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

4) Przechodniość

$$\bigwedge_{x,y,z} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

5) Spójność (przynajmniej jedno jest w relacji z drugim)

$$\bigwedge_{x,y} xRy \vee yRx$$

Przykład

$X = \mathbb{Z} \qquad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

4 dzieli $x-y$

$x,y \in \mathbb{Z};\ xRy \Leftrightarrow 4 \mid (x-y)$

$\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x-y = 4k$

$1R5 \equiv T \qquad 2R4 \equiv F \quad 4$

$1R9 \equiv T$

1) Zwrotna

$x \in \mathbb{Z} \quad xRx \Leftrightarrow 4 \mid x-x \qquad 4 \mid 0$ ✓

2) Symetryczna

$x,y \in \mathbb{Z} \quad xRy \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x-y=4k \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \underline{y-x=4(-k)}$ ✓

3) Antysymetryczna

$x=1, y=5$ ✗

$(1R5 \vee 5R1 \Rightarrow 1=5) \equiv F$

4) Przechodniość

$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$[xRy \wedge yRz] \Leftrightarrow \left[\bigvee_{k,m\in \mathbb{Z}} x-y=4k \wedge y-z=4m\right]$

$x-z=(x-y)(y-z)$

$m,k\in\mathbb{Z} \quad m+k\in\mathbb{Z}$

$k,m\in\mathbb{Z} \quad x-z=4k+4m=4(k+m)$

$k+m=l \quad xRz \Leftrightarrow (x-z)=4l$ ✓

5. Spójność

$x=0, y=1$

$\neg(0R1) \vee \neg(1R0)$ ✗

Relacje porządku

$R \subset X \times X$

R nazywamy relacją częściowego porządku jeżeli jest ona:

zwrotna,
antysymetryczna,
i przechodnia

Jeżeli R jest relacją częściowego porządku i jest ona jednocześnie spójna to nazywamy ją relacją (liniowego lub całkowitego porządku)

$R, \; x \leqslant y$

Jeżeli R jest relacją porządku xRy

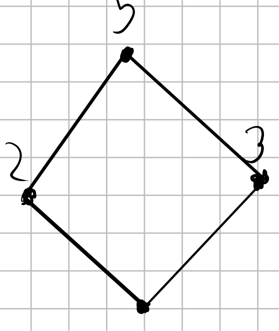
piszemy $x \prec y$ $\quad$ x poprzedza y i y następuje po x

$R, \leqslant$

$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad \prec \in \{(1,2); (1,3); (1,5), (2,5); (3,5); (1,1); (2,2); (3,3); (4;4); (5,5)\}$

$1 \prec 2$

$1 \prec 3$



- $(\mathbb{R}, \leq)$ ← porządek całkowity
- $(\mathbb{N}, |)$

$x, y \in \mathbb{N}$

$x \preceq y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x | y$

zwrotna $\quad x | x \wedge x \in \mathbb{N} \equiv T$ ✓

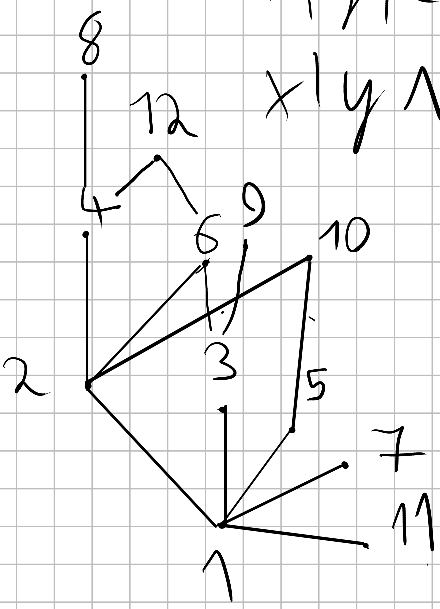
antysymetryczna

$$x | y \wedge y | x \Rightarrow x = y \equiv T$$ ✓

przechodniość

$x, y, z \in \mathbb{N}$

$x | y \wedge y | z \Rightarrow x | z$



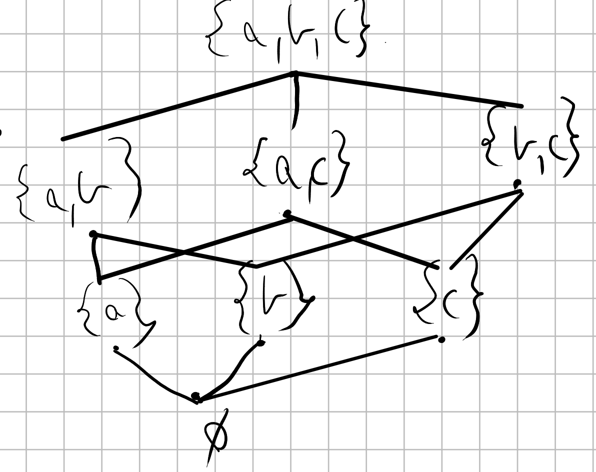
$\left(\begin{matrix} y = x \cdot k \\ z = y \cdot m \end{matrix} \right) \Rightarrow z = y \cdot m = (x \cdot k) m = x(k \cdot m)$

$A \neq \emptyset \quad X = 2^A$

$x, y \in 2^A \quad x \preceq y \Leftrightarrow x \subset y$

$A \{a, b, c\}$

$A = \{a, b, c\}$



Elementy wyróżnione

$(X, \preceq)$ $x \in X$ nazywamy elementem maksymalnym jeżeli

$$\left.\bigwedge_{y \in X} x \preceq y \Rightarrow x = y \right\} \Leftrightarrow \neg \bigvee_{y \in X} y \neq x \wedge x \preceq y$$

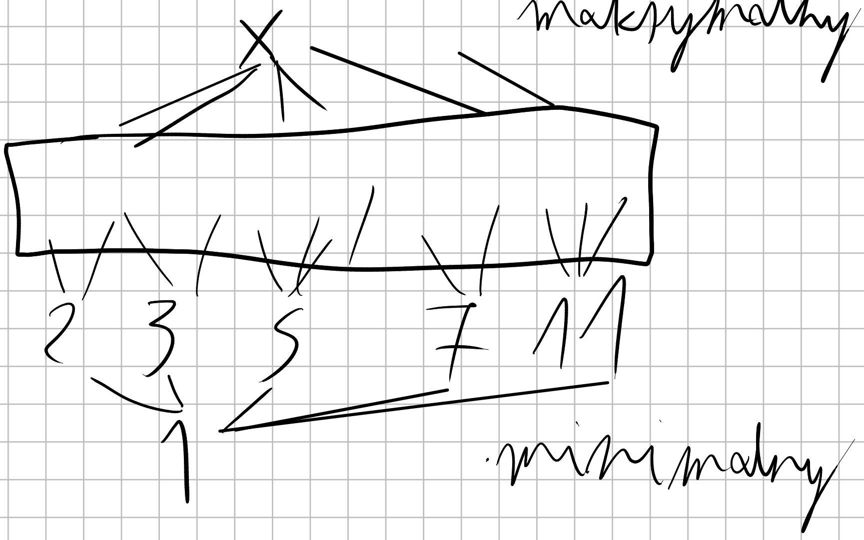
$x \in X$ nazywamy elementem minimalnym jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} y \preceq x \Rightarrow x = y$$

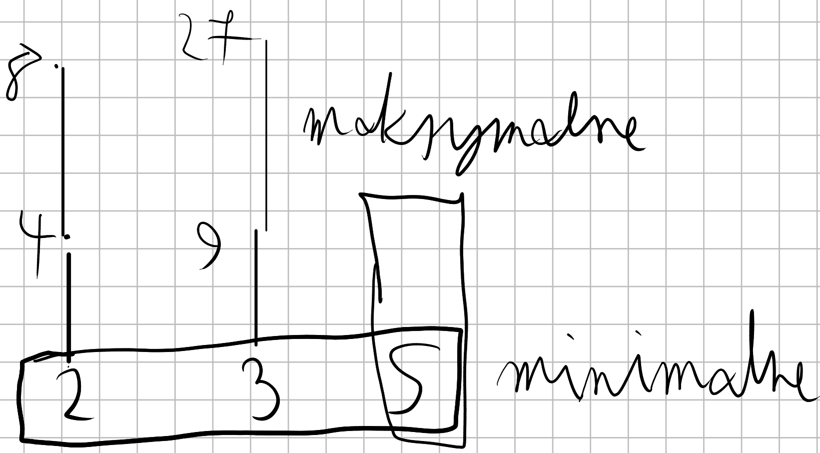
· $(\mathbb{R}, \leqslant)$ brak elementu minimalnego czy maksymalnego

$(\langle 0, 1), \leqslant)$ brak elementu maksymalnego

minimalny $= 0$



$X\{2^n : n \in N\} \cup \{3^n : n \in N\} \cup \{5\}$



$(X, \preceq)$

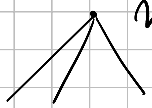
$x \in X$ nazywamy największym, jeżeli

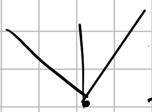
$\bigwedge_{y \in X} y \preceq x$

$(X, \preceq)$

$x \in X$ nazywamy najmniejszym, jeżeli

$\bigwedge_{y \in X} x \preceq y$


największy


najmniejszy

$(\langle 0,1), \leqslant)$

najmniejszy

$(\{2^n\} \cup \{3^n\} \cup 5, \,|\,)$

$(X, \preceq)$ istnieje element największy to jest jedyny

dwa elementy x i y to w szczególności $y \preceq x$.

$X \neq \emptyset \wedge X$ skończony
$(X, \preceq)$ istnieje element maksymalny i minimalny

Dowód:

1. $|X|=1$ $[X=\{x\}] \Rightarrow [x$ jest el. maksymalnym$]$

2. Niech $n\in\mathbb{N}$, $|X|=n+1$

$x\in X$ istnieje Y dla którego $X = Y\cup\{x\}$

$|Y|=n$

z założenia ② wynika, że

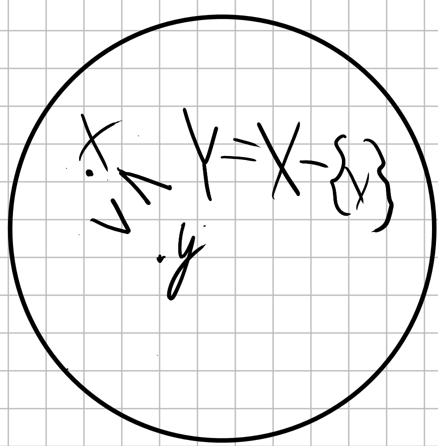
1) $x<y$

2) $y<x$

~~$\Rightarrow$ y jest maksymalnym~~

$(X,<)$

$(X,<)$, X niepusty i skończony jest to el. największy



Ograniczenia i kresy 01.12.2023

$(X, \preceq)$ $A \subset X$, $(A, \prec)$

$x \in X$ jest ograniczeniem górnym zb. A

$$\bigwedge_{x \in A} a \preceq x$$

Jeżeli zbiór ograniczeń górnych ma el. najmniejszy to nazywamy go kresem górnym zbioru A

Jeżeli zbiór ograniczeń dolnych ma el. największy to nazywamy go kresem dolnym zb. A

$(\langle 0, 1), \leq)$ $\langle 0, 1) \subset \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, \leq)$

el. najmniejszy

zb ograniczeń dolnych $= (-\infty, 0\rangle$

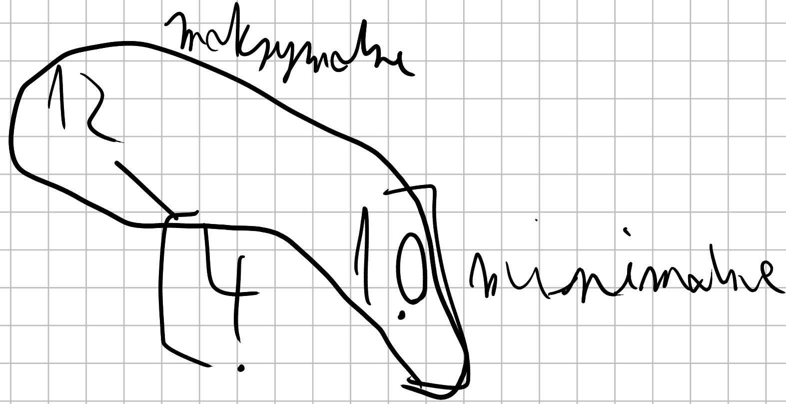
el. największy

zb ograniczeń górnych $= \langle 1, +\infty)$

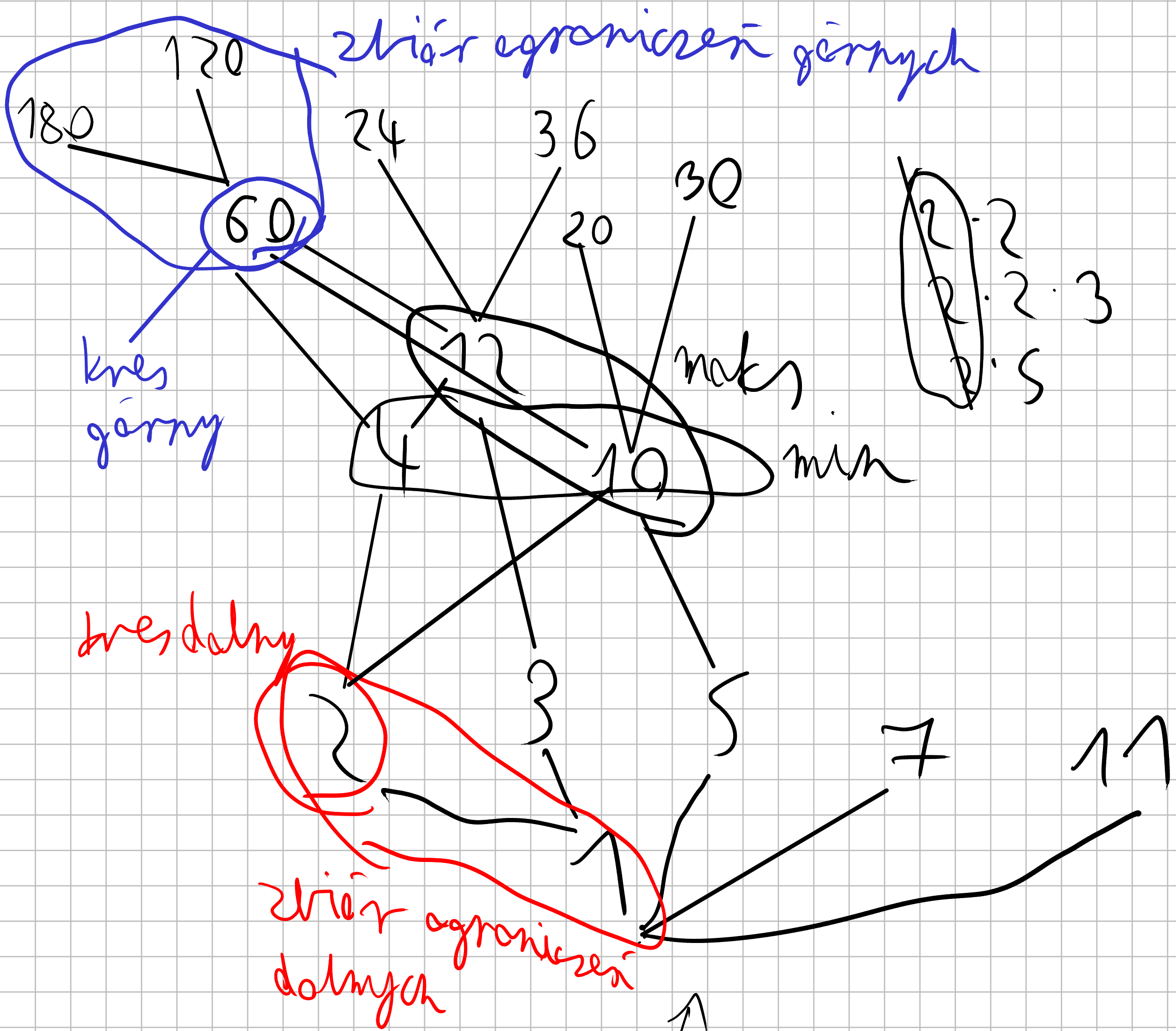
el. najmniejszy

$(\mathbb{N}, |)$ $A = \{4, 10, 12\}$

~~największy, najmniejszy~~



4 10 12



Nie mam pojęcia o co chodzi

Relacje równoważności

operator==(Class &rhs){} // C++ operator overloading

$(X, R) \quad R \subset X \times X$

R - relacja równoważności jeżeli jest ona

1) zwrotna
2) symetryczna
3) przechodnia

zamiast xRy będziemy pisać $x \sim y$

klasa abstrakcji el. $x \in X$ to zbiór wszystkich el. $y \in X$, które są w relacji '$\sim$' z x

Klasa abstrakcji x oznaczona jest przez $[x]$

$$[x] := \{y \in X : x \sim y\}$$

$$X = \mathbb{Z} \quad [x \sim y] \Leftrightarrow [3 \mid x - y]$$

$$[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1] = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$[2] = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$

$[3] = [0] = [-3] = [-6]$

$[4] = [1]$

$[5] = [2]$

$[0]$	$[1]$	$[2]$

$2^{137438953472}$ maksymalna liczba w standardowym systemie

$16GB \to 16 \cdot 1024^3 \cdot 8\,b =$ + rejestry − pamięć programu (instrukcje) − 1

X 1

1024

1024 $\frac{10000}{1024 \cdot 1024 \cdot 1024}$

Jeśli ~ jest relacją równoważności w X to

1) $\bigwedge_{x \in X} [x] \neq \emptyset \quad \{ x \in [x]$

2) $\bigwedge_{x,y \in X} [x] = [y] \vee [x] \cap [y] \neq 0$

3) $X = \{[x] \cup [y] \cup [z] \cup \dots\} = \bigcup_{x \in X} [x]$

Podzielność

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a \mid b$ a dzieli b $\Rightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} b = ak$

b dzieli się przez a

$\bigcap_{x \in \langle 101, 2^{64})}$

$n \mid 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 = 0 \cdot 0$

$n \mid n \quad n \mid n \quad n = n \cdot 1$

$1 \mid n, -1 \mid n$

$0 \mid n \Leftrightarrow n = 0$

---

(1) podzielność jest relacją w $\mathbb{Z}$

jest przechodnia $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

$m = qn + r \quad 0 \leqslant r < n$

$m \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N} \quad 17 = 3 \cdot 5 + 2$

Dowód

$$\frac{m}{n} - 1 < q \cancel{<} \leqslant \frac{m}{n} \quad q \in \left(\frac{m}{n} - 1, \frac{m}{n}\right\rangle$$

$m - qn \geqslant 0$

$m - qn < n$

$$\begin{cases} r := m - qn \\ 0 \leqslant r < n \end{cases}$$

Jedyność q i r

załóżmy, że dla (q, r) i (q_1, r_1)

$$m = qn + r = q_1 n + r_1$$

$$\frac{qn+r}{m} - \frac{q_1 n + r_1}{m} = 0 \qquad \bigwedge_{x \in R} q \mid n + r$$

$$n(q - q_1) + r - r_1 = 0 \qquad r \in R \land q \in Z \land n \in N$$

$$\boxed{m = qn + r}$$

ilaraz reszta

$x \,\&\, 1 =$ reszta

$x \ll 2 =$ ilaraz

$$\begin{array}{r} 33 \\ \hline 101 : 3 \\ 9 \\ \hline 11 \\ 9 \\ \hline 2 \end{array}$$

$m \sim 2^{100}$

$n = 7$

q	r
0	17
1	12
2	7
3	2

while q

Jeżeli liczba jest nieskończenikiem

$$\begin{array}{r} 386 \\ \hline 773 : 2 \\ 6 \\ \hline 17 \\ 16 \\ \hline 13 \\ 12 \\ \hline 1 \end{array}$$

$\log_2 n$

$x \ll 1$

NWD

1) $1 | m$ i $1 | n$

2) skończona ilość dzielników

3) zbiór dzielników m i n jest skończony

$\Rightarrow$ istnieje

NWD (135, 120)

135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$NWD(3^2 \cdot 3 \cdot 5, 2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 15$

120	2
60	2
30	2
15	5
3	3
1	

NWD (kurwa , mać)

```
while a != b:
    tmp = b
    b = a % b
    a = tmp
return a
```

421

101   5 · 4

000

000

000

101

10100

16 8 4 2 1

16+4

$n, m \in N$ $m > n$

$NWD(m, n)$

$d | m \wedge d | n \Rightarrow d | \underline{m-n}$

$\wedge d | n$

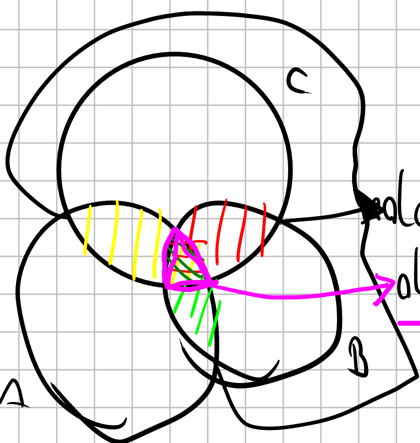
$d | m-n \wedge d | n \Leftrightarrow d | m \wedge d | n$

```
int euclides(int a, int b) {
  while b != 0 {
    int tmp = b;
    b = a % b;
    a = b
  }
  return a;
}
```

a	b
45	30
30	15
15	0

32 clock cycles per iteration

```
def euclides(a, b):
    while b != 0:
        tmp = b
        b = a % b
        a = tmp
    return a
```



dodane 2 razy (usunięte 1 raz)

dodane 3 razy (usunięte 3 razy)

$$\big((A \cup B \cup C) - (A \cap B) - (B \cap C) - (A \cap C)\big) \cup (A \cap B \cap C)$$

$A = \{x \in K : 2 \mid x\}$

$B = \{x \in K : 3 \mid x\}$

$C = \{x \in K : 5 \mid x\}$

$K \subset N$ $D = \{x \in K : 7 \mid x\}$

$K \in \{100, 101, \ldots 2^{64}-2, 2^{64}-1\}$

$|X|$ ilość unikalnych elementów zbioru X

A	B	C
2	3	5
4	6	10
6	9	15
8	12	20
10	15	25
12	18	30
14	21	
16	30	
18		
20		
30		

$$|A| = \left\lfloor \frac{2}{2^{64}-1} \right\rfloor$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{3}{2^{64}-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3 \cdot 2}{2^{64}-1} \right\rfloor$$

$$|C| = \left\lfloor \frac{5}{2^{64}-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5 \cdot 2}{2^{64}-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5 \cdot 3}{2^{64}-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2^{64}-1} \right\rfloor$$

usunięte

A	B	C
30	30	30
	$\cancel{30}$	$\cancel{30}$ $\cancel{30}$
		10 | 30
		15 | 30

30 pojawia się 1 raz a tu pojawia się 0 razy

$$|D| = \left\lfloor \frac{7}{2^{64}-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7 \cdot 2}{2^{64}-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7 \cdot 3}{2^{64}-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7 \cdot 5}{2^{64}-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{2^{64}-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7 \cdot 5 \cdot 2}{2^{64}-1} \right\rfloor$$
$$+ 2 \left\lfloor \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2^{64}-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7 \cdot 3 \cdot 5}{2^{64}-1} \right\rfloor$$

$2 \cdot 3 \cdot 7$
42 $\cancel{42}$ $\cancel{42}$

$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$
210 $\cancel{210}$ $\cancel{210}$ $\cancel{210}$

$2 \cdot 5 \cdot 7$
70 $\cancel{70}$ $\cancel{70}$

$3 \cdot 5 \cdot 7$
$\cancel{105}$ $\cancel{105}$

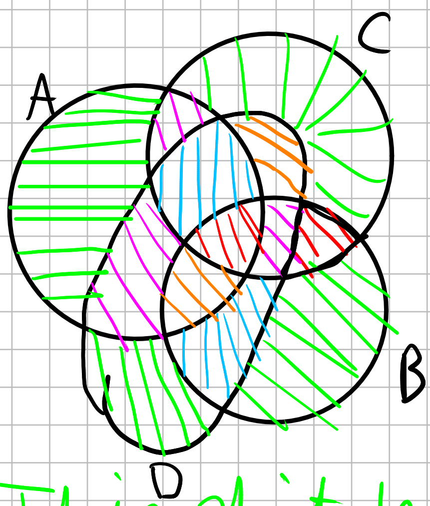
można to wypisać w rekurencji

sum(A) − rm_case(B, C, D)

sum(B) − rm_case(C, D)

$\downarrow$

sum(C) − sum-cases(D)



$(A \vee B \vee C \vee D)$

This shit looks like abstract art

Int Int → Int   Haskell :(

eucalintus

$(n, 0) \Rightarrow n$

$(a, b) \Rightarrow \text{eucalintus}(b, a - (a/b) \cdot b)$

$\downarrow$

a div b

$a \% b$

$a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b$

a=10 b=15

$10 - (10 \text{ div } 15) \cdot 15$

$10 - 0 \cdot 15$

$b_2 = 15 - \underbrace{(15/10)}^{1} \cdot 10$

$b_2 = 5$

$15 - (15 \text{ div } 10) \cdot 15$

a	b
15	10
10	5
5	0

$b = 10 - (\underbrace{10/5}_{2}) \cdot 5$

$5 - (5/0) \cdot 0 = 5$

$(s, s') = (1, 0)$ $d'! = 0$

$(t, t') = (0, 1)$

(d, d')

5. Sprawdź, czy następujące relacje R w zbiorze X są zwrotne, symetryczne, antysymetryczne, przechodnie i spójne:

a) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 3 \mid x - y$,
b) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow 2 \mid x + y$,
c) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow 3 \mid x + y$,
d) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 5 \mid x^3 - y^3$,
e) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$,
f) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$,
g) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^3 = y^3$,
h) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow |x| < |y|$,
i) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow |x| + |y| = 3$,
j) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow x > y \vee y > x$,
k) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$,
l) $X = 2^{\mathbb{N}}$, $xRy \Leftrightarrow |x \triangle y| < +\infty$.

a)

$X = \mathbb{Z}$, $xRx \Leftrightarrow 3 \mid x - y$

$x = 5$ $y = -7$

$5R-7 \Leftrightarrow 3 \mid 5 + 7$

$4R8 \Leftrightarrow 3 \mid 4 - 8$

1. zwrotność

$\boxed{\bigwedge_{x \in X} xRx}$ $3 \mid x - x$

$3 \mid 0 \Leftrightarrow T$

2. Symetryczna

$$\bigwedge_{x,y \in X} xRy \Rightarrow yRx$$

$$xRy \Rightarrow -x-y$$

$$3 \mid -(x-y) \Leftrightarrow 3 \mid x-y \Leftrightarrow xRy$$

3. Przechodniość

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

$$3 \mid x-y \wedge 3 \mid y-z \Rightarrow 3 \mid x-z$$

$$x-y=3k_1 \qquad y=x-3k_1$$

$$y-z=3k_2$$

$$\cap$$

$$x-z=3k_1+3k_2$$

Jest przechodnia
zwrotna
symetryczna

$$3 \mid 3(k_1+k_2)$$

relacja równoważności

4. Asymetryczność

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$$

$$3 \mid 5-2 \wedge 3 \mid 2-5 \not\Rightarrow 5=2$$

5. Spójność

$$\bigwedge_{x,y\in X} xRy \wedge yRx$$

$$3 \nmid 5-6 \wedge 3 \nmid 6-5$$

$$R = X \times X$$

spójna i symetryczna

wszystkie elementy są ze sobą w relacji

$$\begin{cases} \bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} xRy \wedge yRx \\ \bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} xRy \Rightarrow yRx \end{cases}$$

hell:

goto hell;

PD 5) 7)

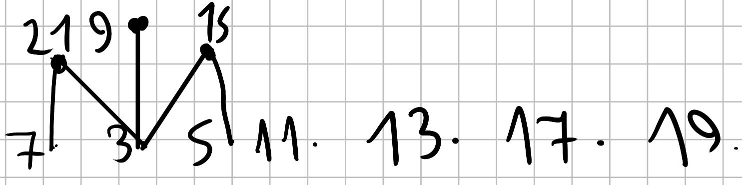
$$xRy \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

8. Niech zbiór $X = \{3, 5, 7, 9, \ldots, 19, 21\}$ będzie uporządkowany przez relację podzielności. Znajdź elementy wyróżnione.

Relacja porządku: zwrotna przechodnia i antysymetryczna

	zwrotna	antysymetryczna	przechodnia
$\preccurlyeq$, R	$x \preccurlyeq x$ ✓	$x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y$	$x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$ ✓
$\mid$, X	$x \mid x$ ✓	$x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y$ ✓	

$\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$ $\quad x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$ ✓



jest element maksymalny $\in \{21, 9, 15, 11, 13, 17, 19\}$

jest element minimalny $\in \{7, 3, 5, 11, 13, 17, 19\}$

nie ma ani elementu największego, ani najmniejszego

największy następuje po KAŻDYM

najmniejszy KAŻDY następuje po nim

9. Niech

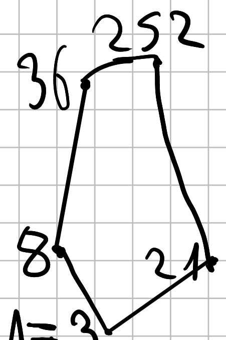
a) $X = \mathbb{N}$, $A = \{18, 21, 36\}$,

b) $X = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$, $A = \{3, 7, 9, 21, 27\}$,

c) $X = \{2^n \cdot 3^k : n, k \in \mathbb{N}_0\}$, $A = X \cap \{20, 21, \ldots, 119, 120\}$,

przy czym X jest zbiorem uporządkowanym przez relację podzielności. Wyznacz kresy zbioru A.

$X = N, A = \{18, 21, 36\}$



$\inf A = 3$

kresy zbioru a

$\inf A$ – kres dolny A

$\sup A$ – kres górny A

$36 \cdot 2 = 72$

$21 = 7 \cdot 3$

$18 = 6 \cdot 3$

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{3 \cdot 7}$