Matematyka dyskretna 24.11.2023

Relacje:

- rachunek zdań (logika)
- teoria mnogości
- funkcje

Relacje porządku — Relacje równoważności

X Y – dowolne zbiory

relacja R – dowolny podzbiór:

$$R \subset X \times Y$$

$$(x,y) \in R \equiv xRy \equiv x \text{ jest w relacji z } y$$

Własności

1) zwrotność (jest w relacji z sobą) $X = Y$, $R \subset X \times X$

każda para xRx

$$\bigwedge_x xRx$$

2) symetryczność (za odwrotną)

$$\bigwedge_{x,y} xRy \Rightarrow yRx$$

3) Antysymetryczność (symetryczność prawdziwa do równości)

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

4) Przechodniość

$$\bigwedge_{x,y,z} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

5) Spójność (przynajmniej jedno jest w relacji z drugim)

$$\bigwedge_{x,y} xRy \vee yRx$$

Przykład

$X = \mathbb{Z}$ $\quad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

4 dzieli $x-y$

$x, y \in \mathbb{Z}$; $xRy \Leftrightarrow 4 \mid (x-y) \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k$

$1R5 \equiv T$ $\quad 2R4 \equiv F$ $\quad 4R9 \equiv T$

1) Zwrotna

$x \in \mathbb{Z}$ $\quad xRx \Leftrightarrow 4 \mid x - x$ $\quad 4 \mid 0$ ✓

2) Symetryczna

$x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad xRy \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} y - x = 4(-k)$ ✓

3) Antysymetryczna

$x=1, y=5$ ✗

$(1 R 5 \wedge 5 R 1 \Rightarrow 1=5) \equiv F$

4) Przechodniość

$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$[xRy \wedge yRz] \Leftrightarrow [\bigvee_{k,m \in \mathbb{Z}} x-y=4k \wedge y-z=4m]$

$x-z=(x-y)(y-z)$ $\quad m, k \in \mathbb{Z} \; m+k \in \mathbb{Z}$

$k, m \in \mathbb{Z} \quad x-z=4k+4m=4(k+m)$

$k+m=(\quad xRz \Leftrightarrow (x-z)=4l$ ✓

5. Spójność

$x=0, y=1$

$\neg(0R1) \vee \neg(1R0)$ ✗

Relacje porządku

$R \subset X \times X$

R nazywamy relacją częściowego porządku jeżeli jest ona:

zwrotna,
antysymetryczna,
i przechodnia

Jeżeli R jest relacją częściowego porządku i jest ona jednocześnie spójna to nazywamy ją relacją (liniowego lub całkowitego porządku)

$R, x \leqslant y$

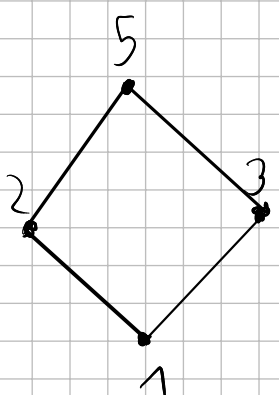
Jeżeli R jest relacją porządku $x R y$

piszemy $x \{ y$ x poprzedza y; y następuje po x

$R_{\leqslant}$

$x \in \{1,2,3,4,5\}$ $\{ \in \{(1,2);(1,3);(1,5),$
$(2,5);(3,5);$
$(1,1);(2,2);(3,3);$
$(4;4),(5,5)\}$

$1 \{ 2$
$1 \{ 3$



- $(\mathbb{R}, \leq)$ ← porządek całkowity
- $(\mathbb{N}, |)$ $\quad x, y \in \mathbb{N}$

$x \,|\, y \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x | y$

zwrotna $\quad x | x \wedge x \in \mathbb{N} \equiv T$ ✓

antysymetryczna

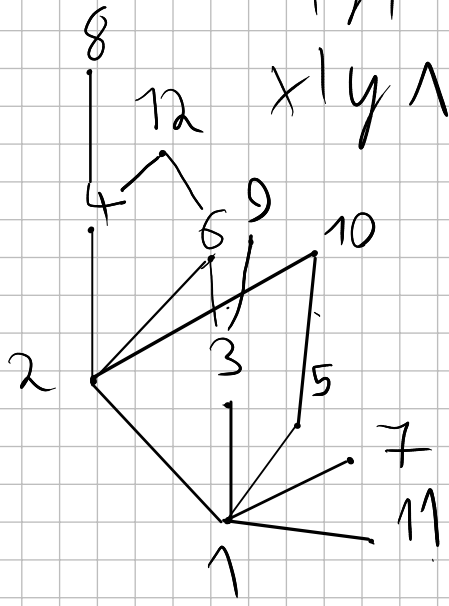
$$x | y \wedge y | x \Rightarrow x = y \equiv T \checkmark$$

przechodniość

$x, y, z \in \mathbb{N}$

$$x | y \wedge y | z \Rightarrow x | z$$

$(y = x \cdot k \wedge z = y \cdot m) \Rightarrow z = y \cdot m = (x \cdot k) m = x(k \cdot m)$

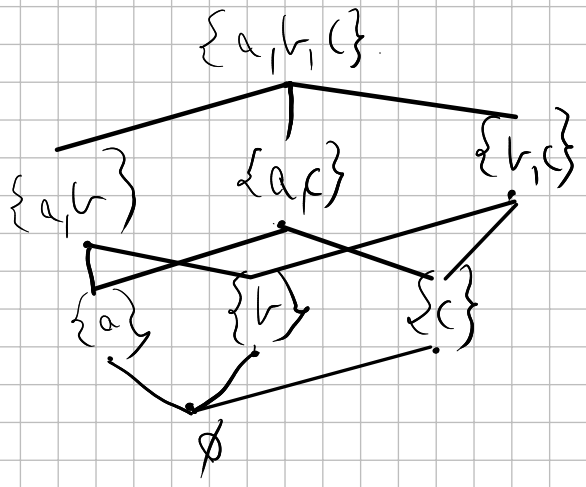


$A \neq \emptyset \quad X = 2^A$

$x, y \in 2^A \quad x \{ y \iff x \subset y$

$A \{a, b, c\}$

$A = \{a, b, c\}$



Elementy wyróżnione

$(X, <)$ $x \in X$ nazywamy elementem maksymalnym jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} x \{ y \Rightarrow X = y \iff \neg \bigvee_{y \in X} y \neq X \wedge x \{ y$$

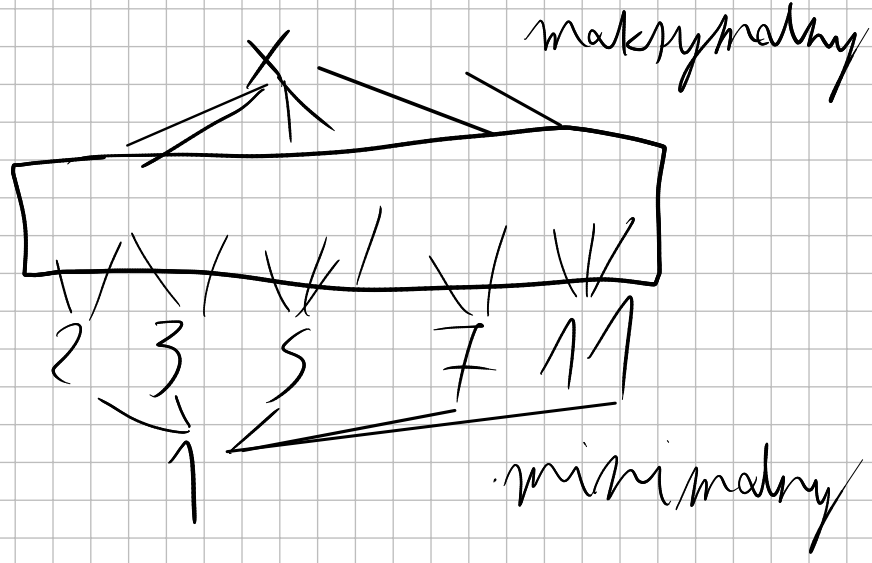
$x \in X$ nazywamy elementem minimalnym jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} y \{ x \Rightarrow x = y$$

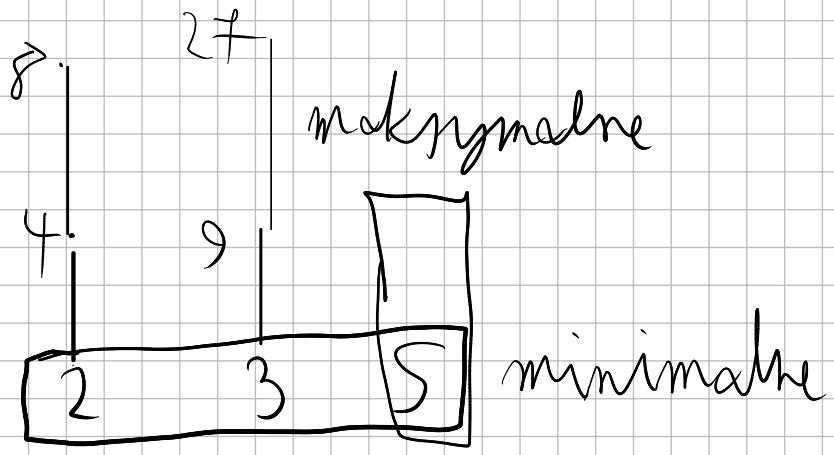
- $(R, \leqslant)$ brak elementu minimalnego czy maksymalnego

$(\langle 0,1 \rangle, \leqslant)$ brak elementu maksymalnego

minimalny = 0



$X\{2^n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{3^n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{5\}$



$(X, \subseteq)$

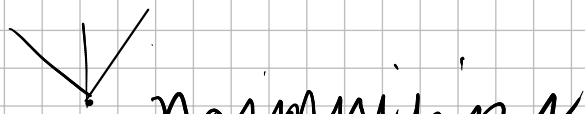
$x\in X$ nazywamy największym, jeżeli

$\bigwedge_{y\in X} y \subseteq x$

$(X, \subseteq)$

$x\in X$ nazywamy najmniejszym, jeżeli

$\bigwedge_{y\in X} x \subseteq y$



$(\langle 0,1), \leq)$

↑ największy

$(\{2^n\} \cup \{3^n\} \cup 5, |)$

$(X, \subseteq)$ istnieje element największy to jest jedyny

dwa elementy $\{X$ i y te w rozgałęzieniu

$X \neq \emptyset \wedge X$ skończony $(X, \subseteq)$ istnieje element maksymalny i minimalny

Dowód:

1. $|X|=1$ $[X=\{x\}] \Rightarrow [x$ jest el. maksymalnym$]$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $|X|=n+1$

$x \in X$ istnieje Y dla którego $X = Y \cup \{x\}$

$|Y|=n$

z założenia Q wynika, że

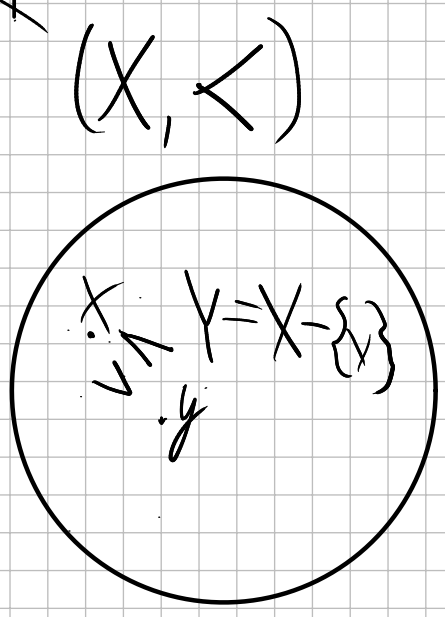
1) $x < y$

$\Rightarrow y$ jest maksymalnym

2) $y \prec X$

$(X, <)$

$(X, \prec)$, X niepusty i skończony jest to el. największy



Ograniczenia i kresy 01.12.2023

$(X, \leq)$ $A \subset X$, $(A, \leq)$

$x \in X$ jest ograniczeniem górnym zb. A

$$\bigwedge_{x \in A} a \leq x$$

Jeżeli zbiór ograniczeń górnych ma el. najmniejszy to nazywamy go kresem górnym zbioru A

Jeżeli zbiór ograniczeń dolnych ma el. największy to nazywamy go kresem dolnym zb. A

$((0,1), \leq)$ $(0,1) \subset \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, \leq)$

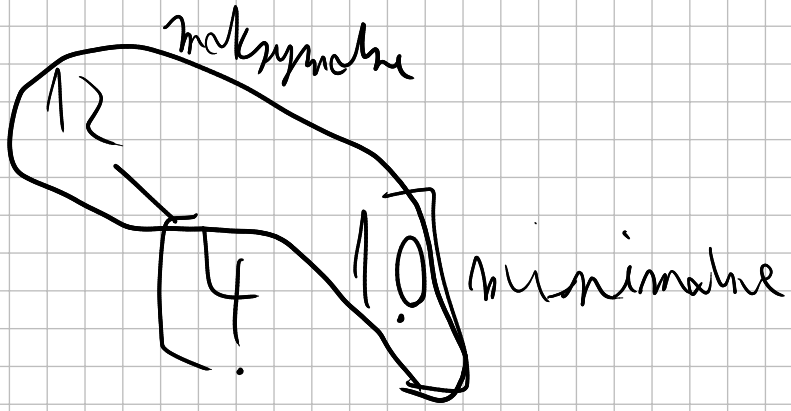
0 ↑ el najmniejszy

zb ograniczeń dolnych $= (-\infty, 0]$ ↑ el. największy

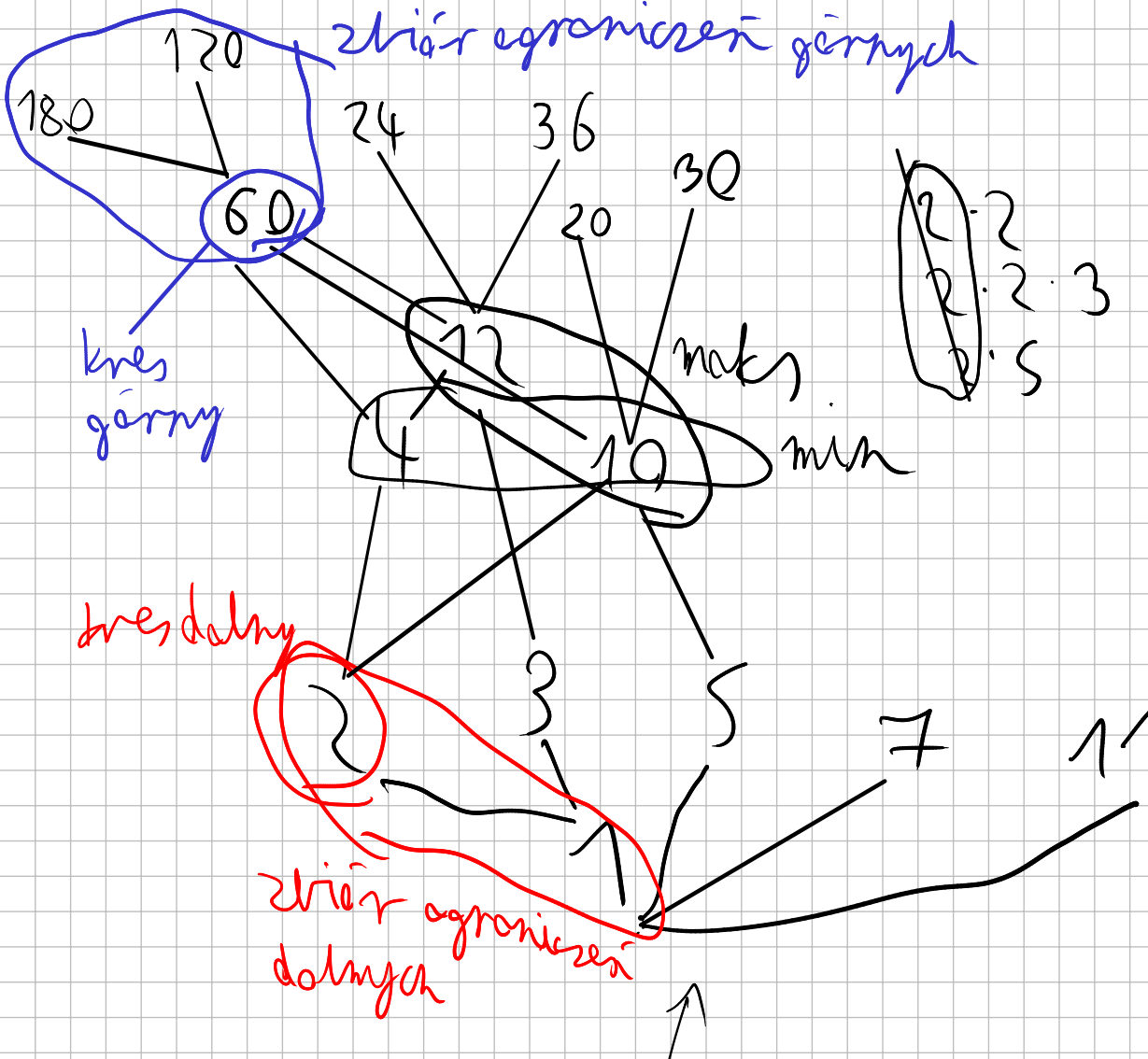
zb ograniczeń górnych $= [1, +\infty)$ ↑ el. najmniejszy

$(N, 1)$ $A = \{4, 10, 12\}$

~~największy najmniejszy~~



4 10 12



Nie mam pojęcia o co chodzi

Relacje równoważności

operator == (class & rhs) { } // C++ operator overloading

(X, R) $R \subset X \times X$

R - relacja równoważności jeżeli jest ona

1) zwrotna
2) symetryczna
3) przechodnia

zamiast xRy będziemy pisać $x \sim y$

klasa abstrakcji el. $x \in X$ to zbiór wszystkich el. $y \in X$, które są w relacji $\sim$ z X

Klasa abstrakcji x oznaczona jest przez $[x]$

$$[x] := \{ y \in X : x \sim y \}$$

$X = \mathbb{Z}$ $[x \sim y] \Leftrightarrow [3 \mid x - y]$

$[0] = \{ \ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \} = \{ 3n : n \in \mathbb{Z} \}$

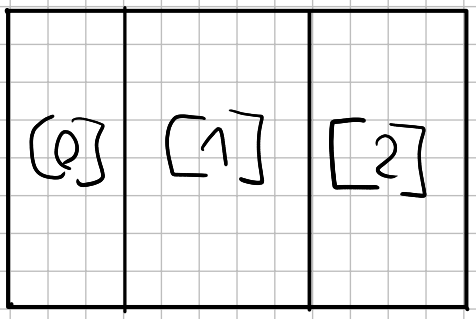
$[1] = \{ 3n + 1 : n \in \mathbb{Z} \}$

$[2] = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$

$[3] = [0] = [-3] = [-6]$

$[4] = [1]$

$[5] = [2]$



$2^{137438953472}$ maksymalna liczba w standardowym systemie

$16GB \Rightarrow 16 \cdot 1024^3 \cdot 8b =$ + rejestry - pamięć programowa (instrukcje) - 1

$\frac{1}{1024}$

$\frac{1}{1024} \quad \frac{10000}{1024 \cdot 1024 \cdot 1024}$

Jeżeli $\sim$ jest relacją równoważności w X

to)

1) $\bigwedge_{X \in X} [X] = \emptyset \quad \{ X \in [X]$

2) $\bigwedge_{X,Y \in X} [X] = [Y] \vee [X] \cap [Y] \neq 0$

3) $X = \{[x] \cup [y] \vee [z] \cup \ldots\} =$

$= \bigcup_{X \in X} [X]$

Podzielność

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a \mid b$ a dzieli b $\Rightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} b = ak$

b dzieli się przez a

$\bigcap_{x \in \langle 101, 2^{64}) }$ $n \mid 0$ $0 \mid 0$ $0 = 0 \cdot 0$

$n \mid n$ $n \mid n$ $n = n \cdot 1$

$1 \mid n, -1 \mid n$

$0 \mid n \Leftrightarrow n = 0$

---

(1) podzielność jest relacją w $\mathbb{Z}$

jest przechodnia $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

$m = qn + r$ $0 \leqslant r < n$

$m \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{N}$ $17 = 3 \cdot 5 + 2$

Dowód

$\frac{m}{n} - 1 < q \leqslant \frac{m}{n}$ $q \in \left(\frac{m}{n} 1, \frac{m}{n}\right)$

$m - qn \geqslant 0$

$m - qn < n$ $\begin{cases} r := m - qn \\ 0 \leqslant r < n \end{cases}$

Jedyność q i r

Załóżmy, że dla (q, r) i (q_1, r_1)

$$m = qn + r = q_1 n + r_1$$

$$\frac{qn + r}{m} - \frac{q_1 n + r_1 = 0}{m}$$

$$n(q - q_1) + r - r_1 = 0$$

$$\boxed{m = qn + r}$$

iloraz reszta

x & 1 = reszta

x << 2 = iloraz

$33 : 3$

101

9

11

9

2

$m \sim 2^{100}$

$n = 7$

q	r
0	17
1	12
2	7
3	2

while q

Jeżeli liczba jest niesamiennikiem

$386 : 2$

6

17

16

13

12

1

$\log_2 n$

x >> 1

NWD

1) 1|m i 1|n

2) skończona ilość dzielników

3) zbiór dzielników m i n jest skończony

$\Rightarrow$ istnieje

NWD (135, 120)

$135 = 3^2 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $NWD = 3 \cdot 5 = 15$

135	3
45	3
15	3
5	5
1	

120	2
60	2
30	2
15	5
3	3
1	

NWD (kurwa, mać)

```
while a != b:
    tmp = b
    b = a % b
    a = tmp
return a
```

421

101 5·4

000

090

000

101

10100

16 8 4 2 1

16+4