

Matematyka dyskretna 24.11.2023

Relacje:

- rachunek zdań (logika)
- teoria mnogości
- funkcje

Relacje porządku

Relacje równoważności

X, Y – dowolne zbiory

relacja R – dowolny podzbiór:

$$R \subseteq X \times Y$$

$$(x, y) \in R \equiv x R y \equiv x \text{ jest w relacji z } y$$

Własności

1) Zwrótność (jest w relacji $X=Y$, $R \subseteq X \times X$)
każda para $x R x$
 $\bigwedge_x x R x$

2) Symetryczność (za odwrotną)

$$\bigwedge_{x, y} x R y \Rightarrow y R x$$

3) Antysymetryczność (symetryczność prowadzi do równości)

$$\bigwedge_{x,y} (x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y$$

4) Przechodność

$$\bigwedge_{x,y,z} x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

5) Spójność (przynajmniej jedno jest w relacji z drugim)

$$\bigwedge_{x,y} x R y \vee y R x$$

Przykład

$$X = \mathbb{Z} \quad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

4 dzieli $x - y$

$$x, y \in \mathbb{Z}; \quad x R y \Leftrightarrow 4 \mid (x - y)$$

$$1 R 5 \equiv T$$

$$2 R 4 \equiv F$$

$$1 R 9 \equiv T$$

$$\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k$$

1) Zwrótna

$$x \in \mathbb{Z} \quad x R x \Leftrightarrow 4 \mid x - x \quad 4 \mid 0 \quad \checkmark$$

2) Symetryczna

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad x R y \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} y - x = 4(-k) \quad \checkmark$$

3) Antysymetryczna

$$x=1, y=5$$

X

$$(1RS \vee 5R1 \Rightarrow 1=5) \equiv F$$

4) Przechodność

$$x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$[xRy \wedge yRz] \Leftrightarrow \left[\bigvee_{k,m \in \mathbb{Z}} x-y=4k \wedge y-z=4m \right]$$

$$x-z = (x-y)(y-z)$$

$$m, k \in \mathbb{Z} \quad m+k \in \mathbb{Z}$$

$$k, m \in \mathbb{Z} \quad x-z = 4k + 4m = 4(k+m)$$

$$k+m = l \quad xRz \Leftrightarrow (x-z) = 4l \quad \checkmark$$

5. Spójność

$$x=0, y=1$$

$$\neg(0R1) \vee \neg(1R0)$$

X

Relacje porządku

$$R \subseteq X \times X$$

R nazywamy relacją częściowego porządku jeżeli jest ona;

zwrotna,
antyrefleksywna,
i przechodnia

Jeżeli R jest relacją częściowego porządku i jest ona jednocześnie spójna to nazywamy ją relacją (liniowego lub całkowitego porządku)

$$R, x \leq y$$

Jeżeli R jest relacją porządku $X \times Y$

nazywamy $x \leq y$ x poprzedza y ; y następuje po x

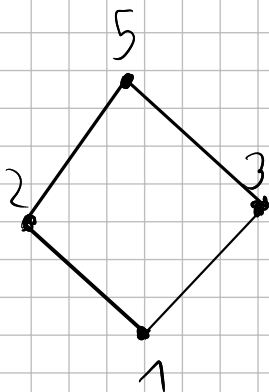
$$R, \leq$$

$$1 \leq 2$$

$$1 \leq 3$$

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad y \in \{(1, 2), (1, 3), (1, 5),$$

$$(2, 5), (3, 5), \\ (1, 1), (2, 2), (3, 3), \\ (4, 4), (5, 5)\}$$



• $(\mathbb{R}, \leq) \leftarrow$ porządek całkowity

• $(\mathbb{N}, |)$ $x, y \in \mathbb{N}$
 $x \mid y \stackrel{\text{def.}}{\iff} x \mid y$

zwrotna $x \mid x \wedge x \in \mathbb{N} \equiv T \checkmark$

anty symetryczna

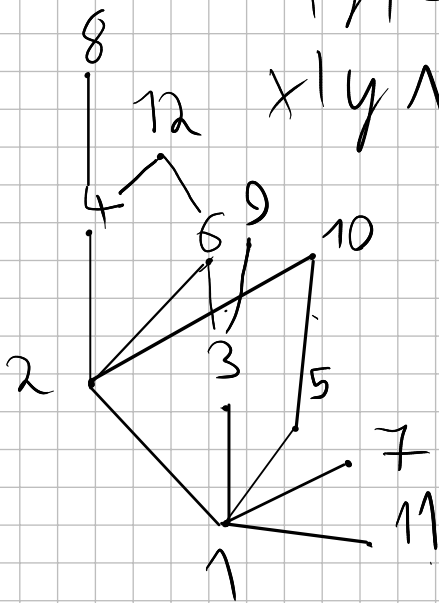
$x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y \equiv T \checkmark$

przechodność

$x, y, z \in \mathbb{N}$

$x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$

$(y = x \cdot k \wedge z = y \cdot m) \Rightarrow z = y \cdot m = (x \cdot k) \cdot m = x(k \cdot m)$

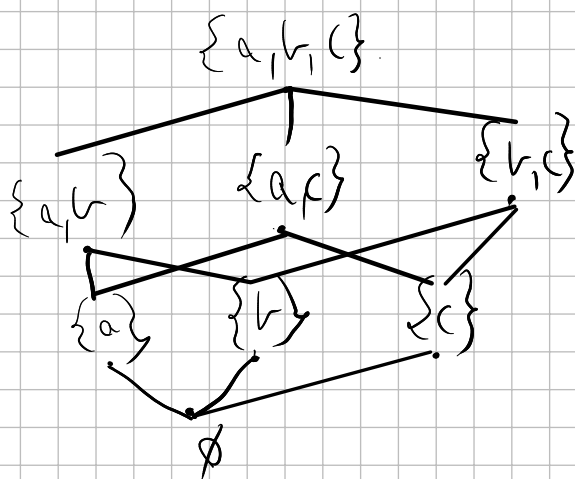


$$A \neq \emptyset \quad X = 2^A$$

$$x, y \in 2^A \quad x \not\supset y \Leftrightarrow x \subset y$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$



Elementy wyróżnione

$(X, <)$ $x \in X$ nazywamy elementem maksymalnym jeżeli

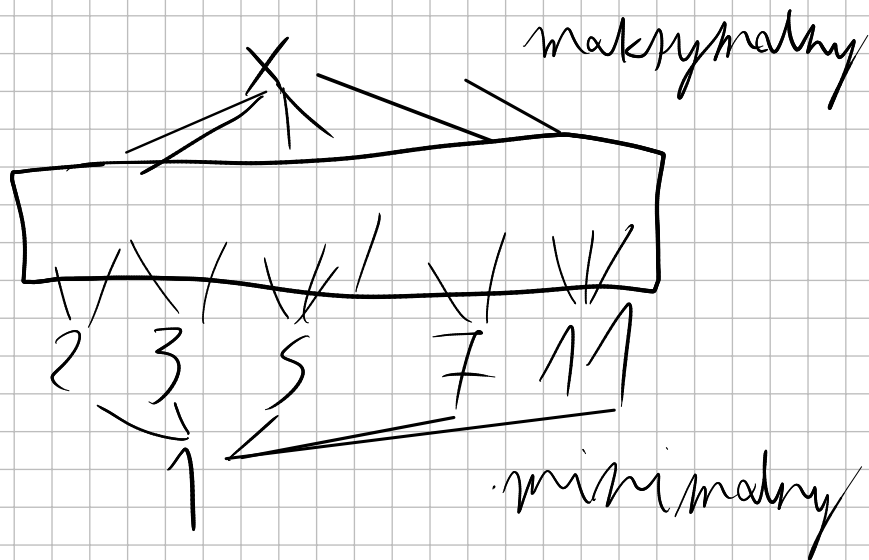
$$\bigwedge_{y \in X} x \not\supset y \Rightarrow x = y \Leftrightarrow \neg \bigvee_{y \in X} y \neq x \wedge x \not\supset y$$

$x \in X$ nazywamy elementem minimalnym jeżeli

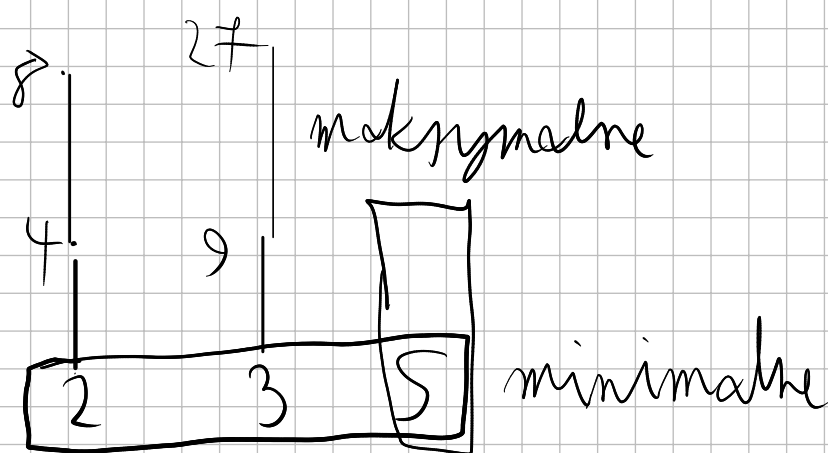
$$\bigwedge_{y \in X} y \not\supset x \Rightarrow x = y$$

(R, \leq) brak elementu minimalnego czy maksymalnego

$([0, 1], \leq)$ brak elementu maksymalnego
minimalny = 0



$$X = \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\}$$



(X, \leq)

$x \in X$ nazywamy największym, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} y \leq x$$

(X, \leq)

$x \in X$ nazywamy najmniejszym, jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} x \leq y$$

\bigwedge największy

\bigvee najmniejszy

(\leq, \geq)
 \uparrow
najmniejszy

$(\{2^n\} \cup \{3^n\} \cup 5, 1)$

(X, \leq) istnieje element największy to jest
jeden

dwa elementy x i y w relacji
 $y \leq x$.

$X \neq \emptyset \wedge X$ skończony
 (X, \leq) istnieje element maksymalny
i minimalny

Dowód:

1. $|X|=1 \quad [X=\{x\}] \Rightarrow [x \text{ jest el. maksymalnym}]$

2. Niech $n \in \mathbb{N}, |X|=n+1$

$x \in X$ istnieje Y dla którego $X = Y \cup \{x\}$

$|Y|=n$

z założenia 1) wynika, że

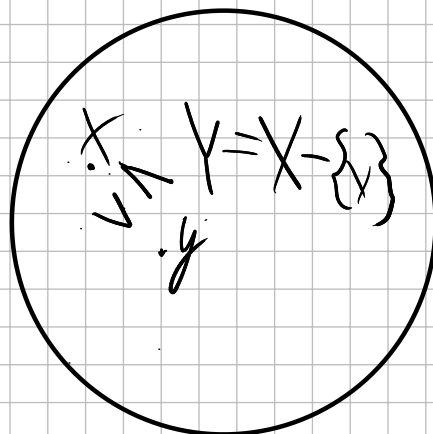
1) $x < y$

$\Rightarrow y$ jest maksymalnym

2) $y < x$

$(X, <)$

$(X, <)$, X niepusty
i skończony jest
to el. największy



Ograniczenia i kwasy 01.12.2023

$$(X, \leq) \quad A \subset X, (A, \leq)$$

$X \subset X$ jest ograniczeniem górnym zb. A

$$\bigwedge_{x \in A} x \leq x$$

Jeżeli zbiór ograniczeń ^{górnym} ma el. najmniejszy to nazywamy go kresem górnym zbioru A

Jeżeli zbiór ograniczeń dolnych ma el. największy to nazywamy go kresem dolnym zb. A

$$(\underbrace{0}_{\text{el. najmniejszy}}, 1) \leq \leq (0, 1) \subset \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, \leq)$$

$$\text{Zb. ograniczeń dolnych} = (-\infty, 0]$$

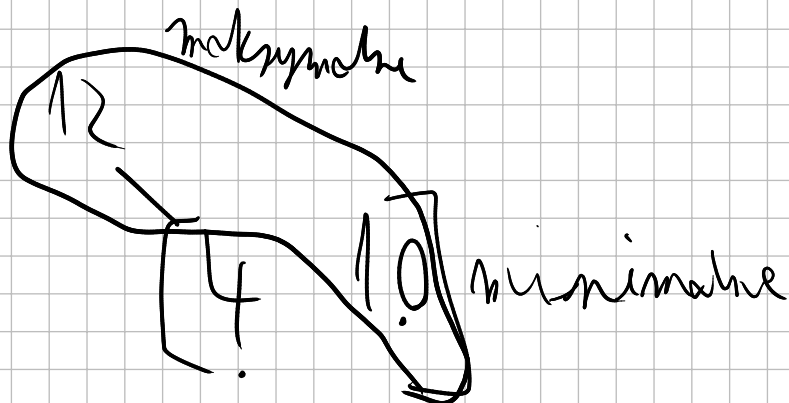
$$\text{Zb. ograniczeń górnych} = [1, +\infty)$$

el. największy

el. najmniejszy

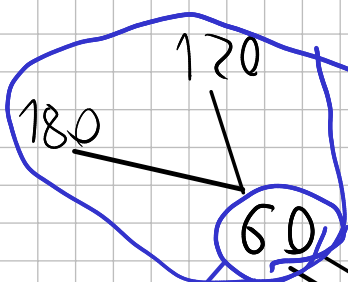
$$(N, 1) \quad A = \{4, 10, 12\}$$

~~ogólna ogólna~~

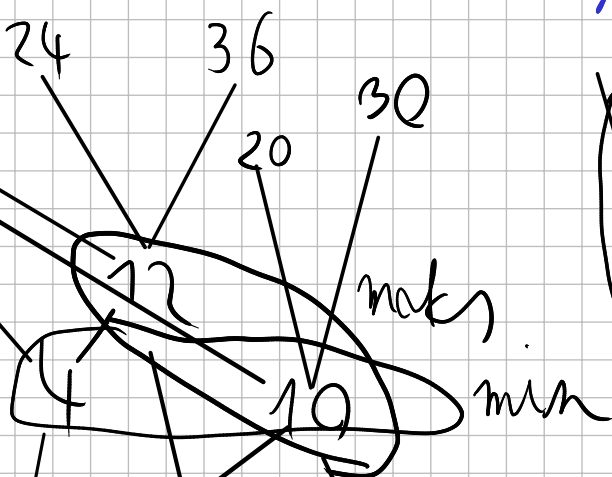


4 10 12

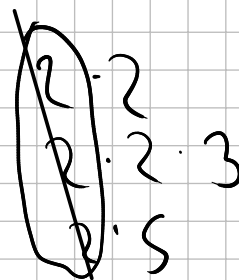
zbiór ograniczeń górnych



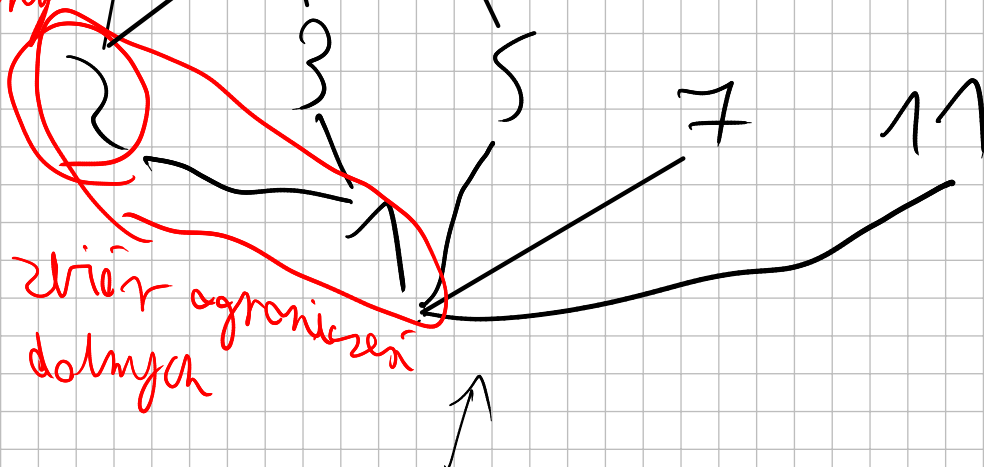
kres
górny



max
min



kres dolny



zbiór ograniczeń
dolnych

Nie mam pytań i ca chodzę

Relacje równoważności

operator $==$ (Class & rhs) { } // C++ operator overloading

$$(X, R) \quad R \subset X \times X$$

R - relacja równoważności jeżeli jest ona

- 1) zwrotna
- 2) symetryczna
- 3) przechodnia

Zamiast $x R y$ będziemy pisać $x \sim y$

Klasa abstrakcji el. $x \in X$ to zbiór wszystkich el. $y \in X$, które są w relacji \sim z x

Klasa abstrakcji x oznaczona jest przez $[x]$

$$[x] := \{y \in X : x \sim y\}$$

$$X = \mathbb{Z} \quad [x \sim y] \Leftrightarrow [3 \mid x - y]$$

$$[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1] = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[2] = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[3] = [0] = [-3] = [-6]$$

$$[4] = [1]$$

$$[5] = [2]$$

[0]	[1]	[2]
-----	-----	-----

137438953472 maksymalna liczba w standardowym systemie
 $16GB \rightarrow 16 \cdot 1024^3 \cdot 8 \text{ b} =$ + rejestry - pamiec programu (instrukcje) - 1

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1024 \\ 1024 \end{array} \frac{10000}{1024 \cdot 1024 \cdot 1024}$$

Jeżeli - jest relacja równoważności w X

$$1) \bigwedge_{x \in X} [x] = \emptyset \quad \{x \in [x]\}$$

$$2) \bigwedge_{x, y \in X} [x] = [y] \vee [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

$$3) X = \{[x] \cup [y] \cup [z] \cup \dots\} = \bigcup_{x \in X} [x]$$

