

FUNKCJA – DEFINICJA I WŁASNOŚCI

Niech X i Y będą niepustymi dowolnymi zbiorami.

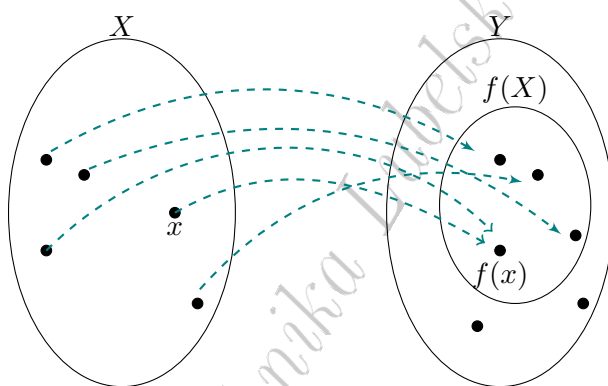
Definicja 1. Funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi x zbioru X dokładnie jednego elementu y ze zbioru Y . Symbolicznie piszemy $f : X \rightarrow Y$.

Funkcję f zapisujemy w postaci

$$y = f(x), x \in X, y \in Y,$$

przy czym każdy element $x \in X$ nazywamy argumentem funkcji f , a element $y = f(x)$ nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x . Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f (i oznaczamy D_f), zbiór Y zaś – przeciwdziedziną. Zbiorem wartości funkcji nazywamy zbiór

$$f(X) = \{f(x) \in Y : x \in D_f\}.$$



Definicja 2. Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ w kartezjańskim układzie współrzędnych, nazywamy zbiór wszystkich punktów $(x, f(x))$, $x \in X$, tj.

$$W_f = \{(x, y) : x \in X \wedge y = f(x)\}.$$

Wykres funkcji jest podzbiorem płaszczyzny oxy złożonym z tych punktów, których odcięta x równa jest argumentowi funkcji, a rzędna y – wartości funkcji odpowiadającej argumentowi x .

W trakcie tego wykładu będziemy rozważać funkcje liczbowe zmiennej rzeczywistej tzn. funkcje $f : X \rightarrow Y$, gdzie zbiory X i Y są niepustymi podzbiórmi zbioru liczb rzeczywistych. Często zdarza się, że podaje się jedynie wzór definiujący funkcję bez sprecyzowania jej dziedziny X lub zbioru Y . Uważa się wówczas, że dziedziną funkcji jest największy zbiór, dla którego wyrażenie określające tę funkcję ma sens. Zbiór ten nazywamy dziedziną naturalną funkcji. Jako zbiór Y , jeżeli nie jest on wyraźnie określony, przyjmuje się zbiór \mathbb{R} .

DZIAŁANIA NA FUNKCJACH

Definicja 3. Jeżeli $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami, to można określić funkcje $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$ wzorami

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x);$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x);$
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x);$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$

Dziedziną każdej z funkcji $f + g$, $f - g$, fg jest zbiór X , natomiast dziedziną funkcji $\frac{f}{g}$ jest zbiór $X \setminus \{x \in X : g(x) = 0\}$.

Definicja 4. Miejscem zerowym funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy każdy punkt $x_0 \in X$ o tej własności, że $f(x_0) = 0$.

Definicja 5. Dwie funkcje f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\checkmark D_f = D_g,$$

$$\checkmark \bigwedge_{x \in D_f} f(x) = g(x).$$

Piszemy wtedy $f = g$.

Definicja 6. Niech $f : X \rightarrow Y$ i niech $A \subseteq X$. Funkcję $f|_A : A \rightarrow Y$ określoną wzorem

$$f|_A(x) = f(x),$$

dla każdego elementu $x \in A$, nazywamy **funkcją obciętą (lub zredukowaną) do zbioru A** .

WŁASNOŚCI FUNKCJI:

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$.

- Funkcja f jest **funkcją parzystą w zbiorze X** , jeśli spełnia warunki

$$\bigwedge_{x \in X} (-x \in X \wedge \underline{f(-x) = f(x)}).$$

- Funkcja f jest **funkcją nieparzystą w zbiorze X** , jeśli spełnia warunki

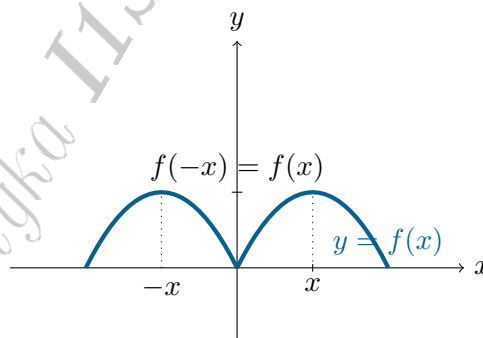
$$\bigwedge_{x \in X} (-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)).$$

- Funkcję f nazywamy **funkcją okresową w zbiorze X** , jeśli

$$\bigvee_{T \neq 0} \bigwedge_{x \in X} ((x+T) \in X \wedge f(x+T) = f(x)),$$

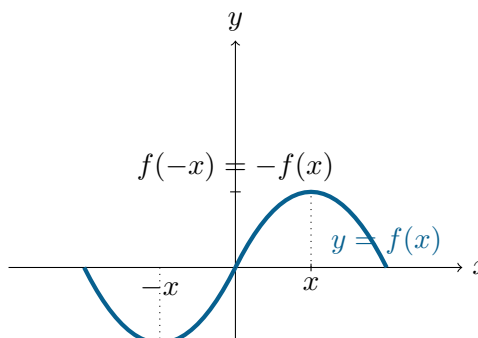
T – okres funkcji f . Najmniejszy dodatni okres funkcji f nazywamy okresem podstawowym. (Zwróćmy uwagę, że taki najmniejszy okres nie musi istnieć!)

Obrazowo: funkcja f jest parzysta, gdy oś oy jest osią symetrii jej wykresu.

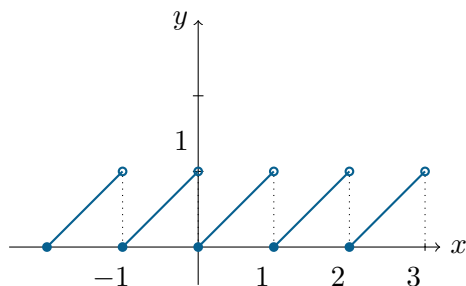


Rysunek 1. Przykładowy wykres funkcji parzystej.

Funkcja f jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.



Rysunek 2. Przykładowy wykres funkcji nieparzystej.



Obrazowo: T jest okresem dla funkcji f , gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $\vec{v} = [-T, 0]$ nałoży się na siebie.

Rysunek 3. Przykładowy wykres funkcji okresowej.

Uwaga 1. Jeżeli funkcja f jest funkcją okresową o okresie T , zaś $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to funkcja $f_1(x) = f(x) + a$ oraz $f_2(x) = af(x)$ ma ten sam okres, natomiast funkcja $f_3(x) = f(ax)$ ma okres $\frac{T}{|a|}$.

Definicja 7.

- Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną z góry**, jeżeli jej zbiór wartości $f(X)$ jest ograniczony od góry, tzn. jeśli

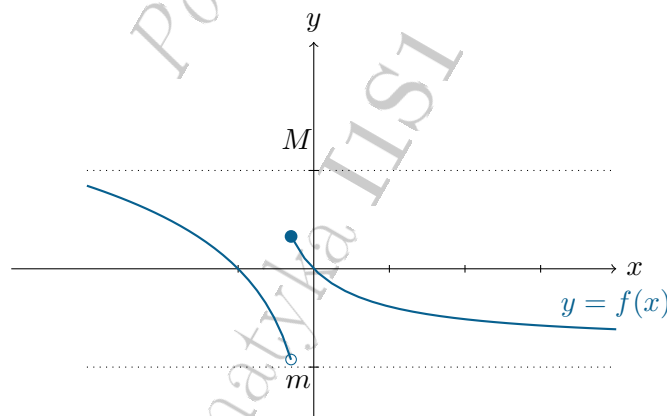
$$\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in X} f(x) \leq M.$$

- Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną z dołu**, jeżeli jej zbiór wartości $f(X)$ jest ograniczony od dołu, tzn. jeśli

$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x).$$

- Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną**, jeżeli jest ograniczona od góry i od dołu, tzn. jeśli

$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x) \leq M.$$



Rysunek 4. Przykładowy wykres funkcji ograniczonej.

Definicja 8. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **funkcją różnowartościową (iniekcją) na zbiorze X** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

lub, równoważnie,

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2).$$

Zastosowanie różnowartościowości do rozwiązywania równań, przedstawia następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Definicja 9. Mówimy, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją „na” (suriekcją) na zbiorze X , jeśli

$$f(X) = Y,$$

tzn. jeśli dla dowolnego $y \in Y$ istnieje taki $x \in X$, że $y = f(x)$.

Definicja 10. Funkcję $f : X \rightarrow Y$, która jest jednocześnie iniekcją i suriekcją nazywamy **bijekcją** (funkcją wzajemnie jednoznaczną).

Definicja 11. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy

- **rosnącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)),$$

- **malejącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)),$$

- **nierosnącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)),$$

- **niemalejącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)),$$

- **monotoniczną na zbiorze** $A \subset X$ jeżeli jest ona rosnąca, malejąca, nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze.

Funkcje malejące i rosnące nazywamy także funkcjami ściśle monotonicznymi.

Pojęcie funkcji monotonicznej jest przydatne do rozwiązywania pewnych typów nierówności. Korzysta się tu z następujących twierdzeń:

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja f jest rosnąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja f jest malejąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

OBRAZ I PRZECIWOBRAZ ZBIORU PRZEZ FUNKCJĘ

Definicja 12. Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$

- **Obrazem zbioru** A wyznaczonego przez funkcję f nazywamy zbiór:

$$f(A) = \{y \in Y : \bigvee_{x \in A} y = f(x)\} = \{y \in Y : \bigvee_{x \in X} x \in A \wedge y = f(x)\}.$$

- **Przeciwobrazem zbioru** B wyznaczonego przez funkcję f nazywamy zbiór:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}.$$



Rysunek 5. Interpretacja geometryczna obrazu i przeciwobrazu zbioru wyznaczonego przez funkcję.

Własności obrazów danego zbioru wyznaczonych przez funkcję f

Twierdzenie 4. Niech $f : X \rightarrow Y$. Dla dowolnych $A_1, A_2 \subseteq X$ zachodzą następujące warunki:

- $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$

Twierdzenie 5. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie funkcją różnowartościową. Dla dowolnych $A_1, A_2 \subseteq X$ zachodzą następujące warunki:

- $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1) \setminus f(A_2) = f(A_1 \setminus A_2)$

Własności przeciwobrazów danego zbioru wyznaczonych przez funkcję f

Twierdzenie 6. Niech $f : X \rightarrow Y$. Dla dowolnych $B_1, B_2 \subseteq Y$ zachodzą następujące warunki:

- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$

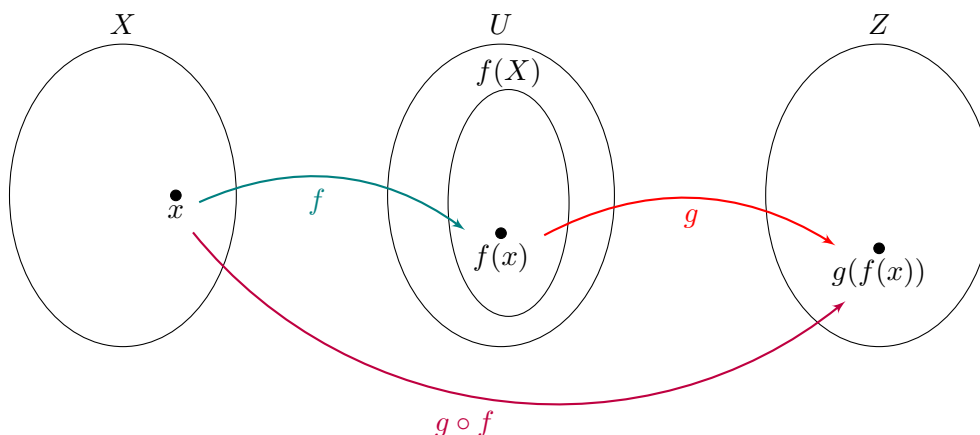
ZŁOŻENIE (SUPERPOZYCJA) FUNKCJI

Definicja 13. Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : U \rightarrow Z$. Załóżmy dodatkowo, że $f(X) \subset U$. Funkcję $h : X \rightarrow Z$ określoną wzorem

$$h(x) = g(f(x))$$

nazywać będziemy **złożeniem (superpozycją) funkcji f z funkcją g** i oznaczać symbolem $g \circ f$.

Funkcję f przyjęto nazywać funkcją wewnętrzną, zaś g – funkcją zewnętrzną funkcji h .



Własności superpozycji funkcji.

- Składanie funkcji nie jest przemienne: istnieją takie funkcje f i g , że $f \circ g \neq g \circ f$.
- Składanie funkcji jest łączne: dla dowolnych funkcji f, g, h jeżeli $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ i $h : Z \rightarrow V$ to $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Twierdzenie 7. Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow W$.

- Jeżeli f i g są funkcjami różnowartościowymi, to $g \circ f$ jest funkcją różnowartościową.
- Jeżeli funkcje f i g są odwzorowaniami „na”, to $g \circ f : X \rightarrow W$ jest odwzorowaniem „na”.
- Jeżeli funkcje f i g są wzajemnie jednoznaczne, to $g \circ f : X \rightarrow W$ jest wzajemnie jednoznaczne.

Z definicji superpozycji funkcji złożonej, funkcji rosnącej i malejącej, wynikają następujące własności:

- złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą,
- złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą,
- złożenie funkcji rosnącej i funkcji malejącej w dowolnej kolejności jest funkcją malejącą.

FUNKCJA ODWROTNA

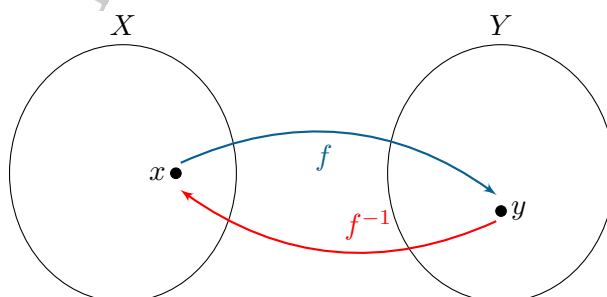
Definicja 14. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje funkcja $g : Y \rightarrow X$, taka, że

$$\bigwedge_{x \in X} g(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{y \in Y} f(g(y)) = y.$$

Funkcję g mającą powyższą własność nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f i oznaczamy f^{-1} .

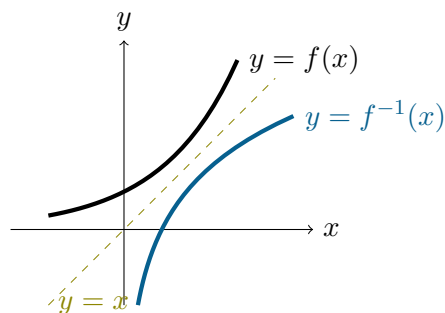
Zatem

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$



Twierdzenie 8. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.

Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwracalna, to jej wykres jest odbiciem symetrycznym względem prostej $y = x$ wykresu funkcji do niej odwrotnej.



Rysunek 6. Przykładowy wykres funkcji f i funkcji do niej odwrotnej f^{-1} .

Funkcja odwrotna do funkcji f jest tak samo monotoniczna jak funkcja f , o czym mówi następujące twierdzenie

Twierdzenie 9. Jeśli f jest funkcją malejącą (rosnącą), to funkcja do niej odwrotna f^{-1} jest malejąca (rosnąca).

FUNKCJE ELEMENTARNE

Podstawowe funkcje elementarne obejmują następujące rodzaje funkcji: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne.

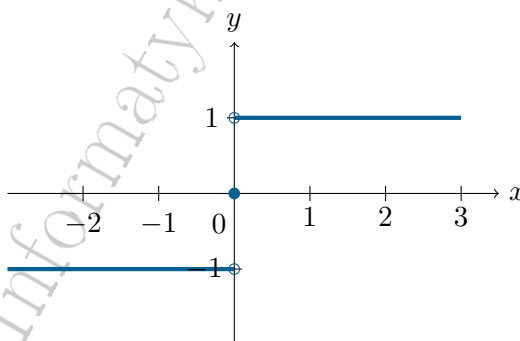
Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej ilości działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji nazywamy funkcjami elementarnymi.

NIEKTÓRE FUNKCJE NIEELEMENTARNE

1. Funkcję określoną wzorem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

nazywamy funkcją **signum**.



Rysunek 7. Wykres funkcji signum.

2. Funkcję zmiennej rzeczywistej, która przyjmuje wartość 1, gdy argument jest liczbą wymierną i wartość 0, gdy argument jest liczbą niewymierną nazywamy **funkcją Dirichleta**.

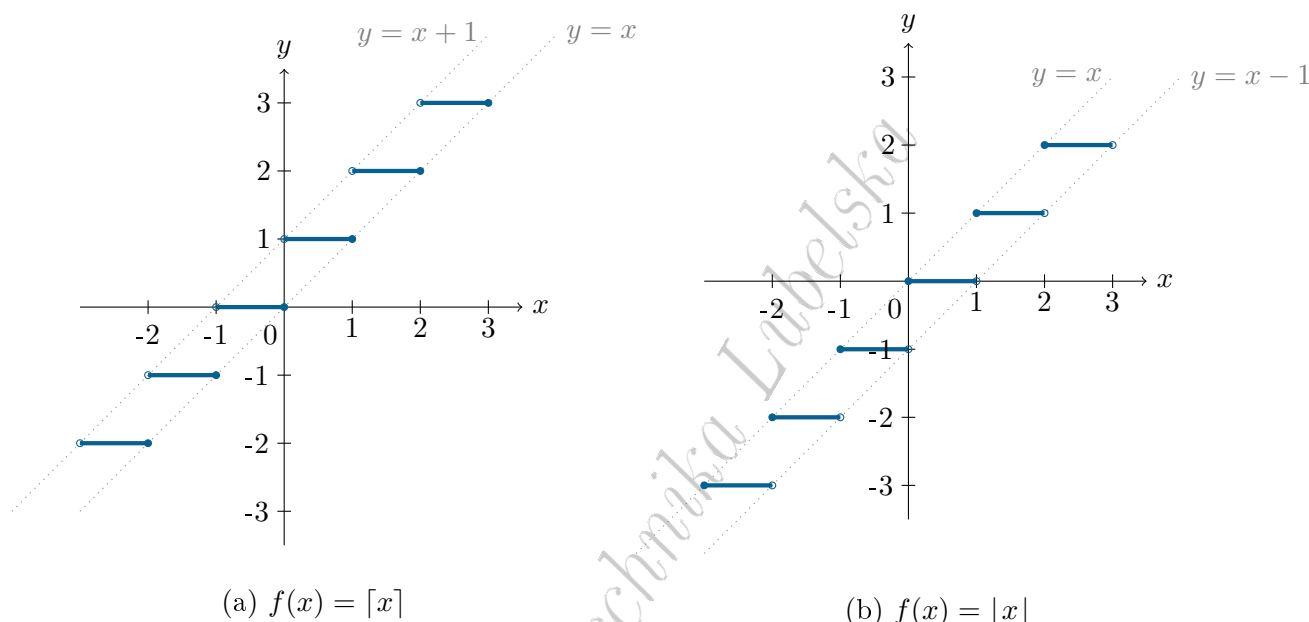
$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. Funkcję całkowitoliczbową $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od x nazywamy **funkcją podłoga**

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

4. Funkcję całkowitoliczbową $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x nazywamy **funkcją sufit**

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}.$$



Rysunek 8. Wykresy funkcji sufit i podłoga.

Podstawowe własności funkcji podłoga i sufit

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil,$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor,$$

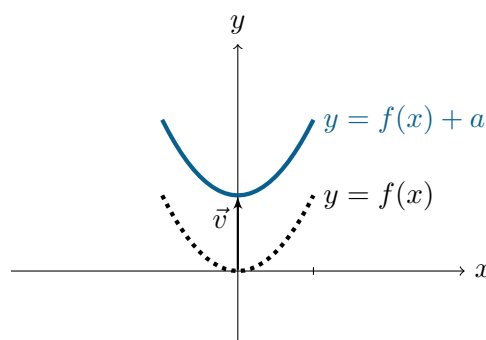
$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{Z}} \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{Z}} \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n.$$

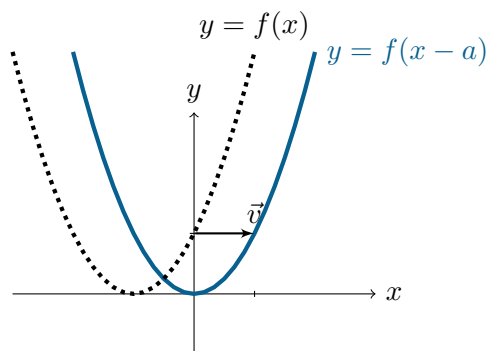
PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, będzie dowolną funkcją i niech liczby $a, b, k \in \mathbb{R}$ spełniają warunki $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$.

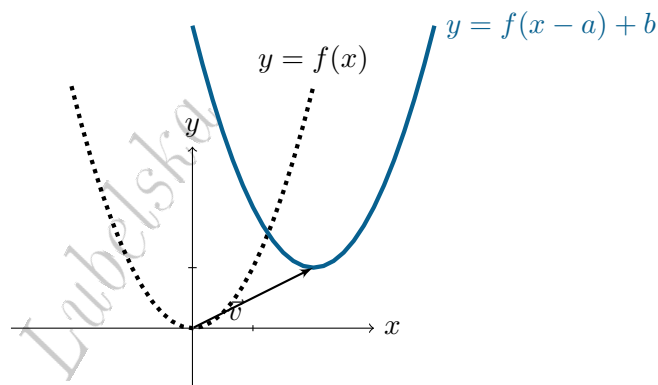
- Wykres funkcji $y = f(x) + a$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [0, a]$.



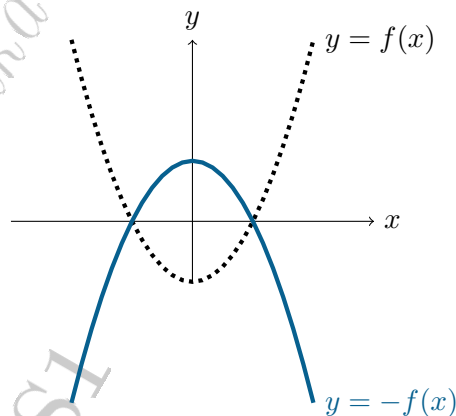
- Wykres funkcji $y = f(x - a)$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a, 0]$.



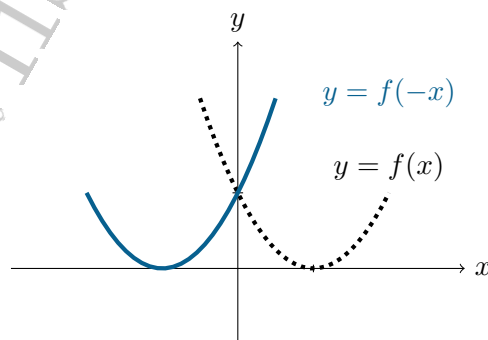
- Wykres funkcji $y = f(x - a) + b$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a, b]$.



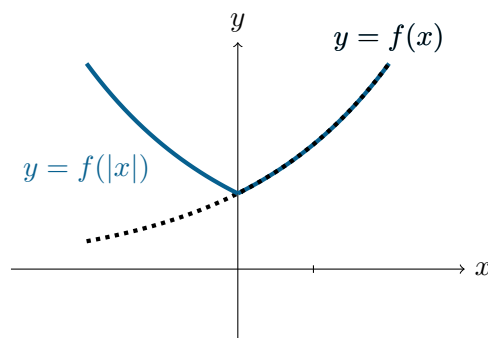
- Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi ox .



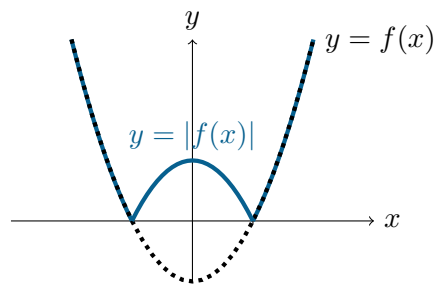
- Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi oy .



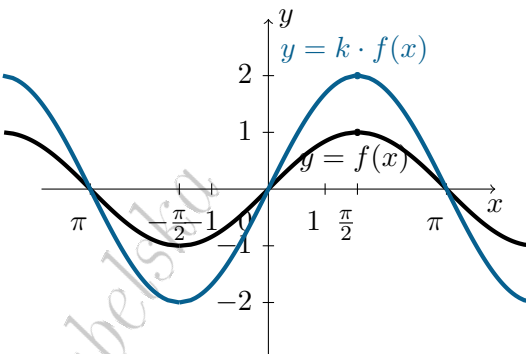
- Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez obcięcie fragmentu, który leży po ujemnej stronie osi ox , a następnie uzupełnienie pozostałej jego części o odbicie względem osi oy .



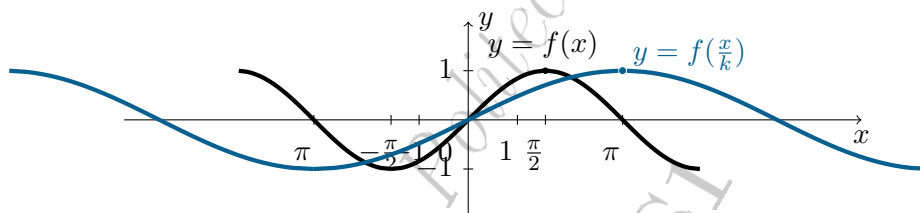
- Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez odbicie względem osi ox fragmentu, który leży po ujemnej stronie osi oy , oraz pozostawienie tych części które leżą po nieujemnej części osi oy .



- Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi ox i skali k . Innymi słowy wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez jego „rozciągnięcie” (o ile $k > 1$) lub „ściśnięcie” (jeśli $k \in (0, 1)$) wzdłuż osi oy .



- Wykres funkcji $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi oy i skali k . Innymi słowy wykres funkcji $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez jego „rozciągnięcie” (jeśli $k > 1$) lub „ściśnięcie” (jeśli $k \in (0, 1)$) wzdłuż osi ox .



ZADANIA

ZADANIE 1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji:

a) $f(x) = \frac{(x+7)^2}{(x+7)(x-3)}$;

b) $f(x) = \sqrt{3-2|x|}$;

c) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{|x|}-12}$;

d) $f(x) = \sqrt{1-\frac{4}{x}} + \sqrt[3]{1+x} + \frac{1}{x+1}$;

e) $f(x) = \frac{x+5}{1+|x+2|}$;

f) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x-|x+1|+1}$;

g) $f(x) = \sqrt[4]{8-|3x+6|+|x-2|}$;

h) $f(x) = \frac{\sqrt{6-|x|} \cdot (x-4)}{(x^2-6x+9)(\frac{1}{2}x^2-2)}$;

i) $f(x) = \sqrt{|x-2|-x-3}$.

ZADANIE 2. Zbadać czy funkcje f i g są równe.

a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $g(x) = x+3$;

$$\text{b) } f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x + 3)}{x - 1}, \quad g(x) = x^2 + 4x + 3;$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}, \quad g(x) = 1;$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}, \quad g(x) = x^2 - 1.$$

ZADANIE 3. Zbadać, czy podane funkcje są parzyste czy nieparzyste na swoich dziedzinach naturalnych:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2};$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{x - 2}{|x - 2|} + \frac{x + 2}{|x + 2|}.$$

$$\text{b) } f(x) = x^3 + x|x|;$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + 2x};$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 3};$$

ZADANIE 4. Wykazać, że funkcja $f(x) = \frac{-x}{x + 1}$

- jest malejąca na zbiorze $(-1, \infty)$; ✓
- jest malejąca na zbiorze $(-\infty, -1)$;
- nie jest malejąca na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

ZADANIE 5. Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

$$\text{a) } f(x) = 3x - 2, \quad \mathbb{R};$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{1}{x - x^2}, \quad (i) (-\infty, 0); \quad (ii) (1, \infty);$$

$$\text{b) } f(x) = x^2 + 1, \quad \langle 0, \infty \rangle;$$

$$\text{g) } f(x) = x^3, \quad \mathbb{R};$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + x, \quad \langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle;$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}, \quad (-\infty, 0);$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}, \quad (-\infty, 1);$$

$$\text{i) } h(x) = \sqrt{4 - x} - 2\sqrt{x}, \text{ dziedzina naturalna.}$$

$$\text{e) } f(x) = x^2 + 3x + 3, \quad (-\infty, -\frac{3}{2});$$

ZADANIE 6. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznaczyć:

$$\text{a) } f(\{1, 2\}),$$

$$\text{c) } f(\langle -2, -1 \rangle),$$

$$\text{e) } f^{-1}(\langle 0, 2 \rangle),$$

$$\text{b) } f(\langle 0, 1 \rangle),$$

$$\text{d) } f^{-1}(\{0\}),$$

$$\text{f) } f^{-1}((-\infty, -6)).$$

ZADANIE 7. Dana jest funkcja f oraz zbiory A i B . Wyznaczyć obraz $f(A_1)$, $f(A_2)$ i przeciwobraz $f^{-1}(B)$:

$$\text{a) } f(x) = -|5 - x|, A_1 = \langle -1, 5 \rangle, A_2 = (0, 7), B = (-\infty, -5) \cup \{0\},$$

$$\text{b) } f(x) = |x| + 1, A_1 = \{1\} \cup (2, 3), B = (-1, 1),$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 0; \\ x, & x \leq 0. \end{cases}, A_1 = \langle -2, 1 \rangle, B = \langle -2, 1 \rangle.$$

$$b) f(x) = x^3 + x|x|$$

$$f(-x) = f(x) \text{ parzysta } f(-x) = -f(x) \text{ nieparzysta}$$

$$f(x) = x^3 - x|x| = -x^3 - x^2$$

$$f(x) = -f(x) - x^3 - x|x| = -x^2 - x|x|$$

$$\square x f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + 2x}$$

$$\frac{-x^3 + x}{-x^5 - 2x} = + \frac{(x^3 - x)}{(x^5 + 2x)}$$

$$\text{parzysta } f(x) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$$

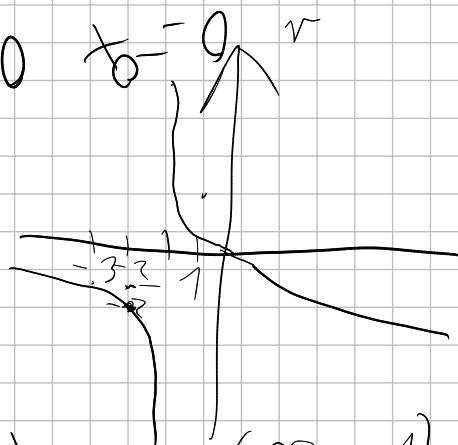
$\mathbb{M}\mathbb{Z}$:

$$\frac{-x}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{3}{-1} = -3$$

$$\frac{3}{-2} = -1,5$$

$$\frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \quad f(x) \quad x \in (-\infty, -1)$$



$$f(x) \searrow x \in (1, +\infty)$$

$$f(x) \searrow x \in \{1\}$$

ZADANIE 8. Dane są funkcje f i g określone wzorami

a) $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1;$

f) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2x + 1;$

b) $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = |x| - 1;$

g) $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = \sqrt{x - 1};$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2;$

h) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad g(x) = x^2 - 3;$

d) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x + 1;$

i) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ x^2 + 2, & x \geq 0, \end{cases}.$

Dokonując ewentualnego zawężenia dziedzin wyznaczyć złożenia $f \circ g$ i $g \circ f$ oraz znaleźć wzory określające te złożenia.

ZADANIE 9. Dane są funkcje $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^4, h(x) = \cos x$. Utworzyć złożenia $f \circ g, f \circ f, g \circ g, g \circ f, f \circ h, h \circ g, h \circ f, h \circ h, f \circ g \circ h, h \circ f \circ g$.

ZADANIE 10. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 5$ i $g(x) = \sqrt{3x + 1}$. Dokonując ewentualnego zawężenia dziedziny wyznaczyć złożenia $f \circ g, f \circ f, g \circ g, g \circ f$.

ZADANIE 11. Wskazać funkcje w wyniku złożenia których otrzymano funkcję h

a) $h(x) = \sqrt[4]{2x - 1};$

e) $h(x) = \sin^2(2x + 1);$

b) $h(x) = (1 + \sin x)^3;$

f) $h(x) = |2 - \sqrt{x^2 + 3x - 1}|;$

c) $h(x) = \frac{1 + |x|}{2 - 3|x|};$

g) $h(x) = \cos^3 3x;$

d) $h(x) = \log(x + 1);$

h) $h(x) = \sqrt[3]{(1 + x^2)^2}.$

ZADANIE 12. Wyznaczyć funkcje odwrotne do danych (o ile takowe istnieją). Naszkicować wykres obu funkcji: danej i odwrotnej.

a) $f(x) = 2x - 3;$

f) $f(x) = x^2 + 3x + 3, x \leq -\frac{3}{2};$

b) $f(x) = -3x + 2;$

g) $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\};$

c) $f(x) = x^2 - 2x, x \geq 1;$

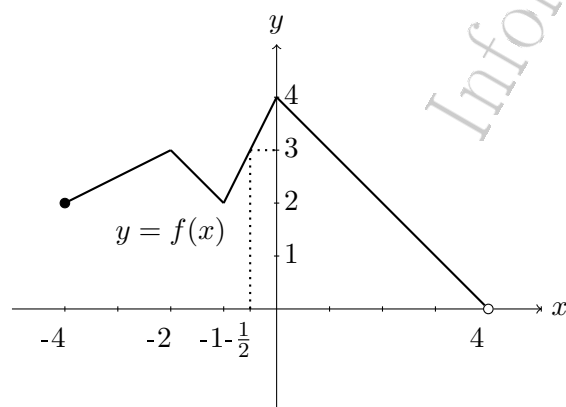
d) $f(x) = x^2 - 6x + 7, x \geq 3;$

e) $f(x) = \sqrt{2x + 4}, x \geq -2;$

h) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

Zbadać różnowartościowość powyższych funkcji korzystając z definicji.

ZADANIE 13. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicować wykresy funkcji $g_1(x) = \lfloor f(x) \rfloor$ i $g_2(x) = \lceil f(x) \rceil$



ZADANIE 14. Naszkicować wykres funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(4x + 13)$, b) $f(x) = \frac{6}{\operatorname{sgn}(x + 3)}$, c) $f(x) = -\lfloor x \rfloor + 3, x \in \langle 2, 5 \rangle$.

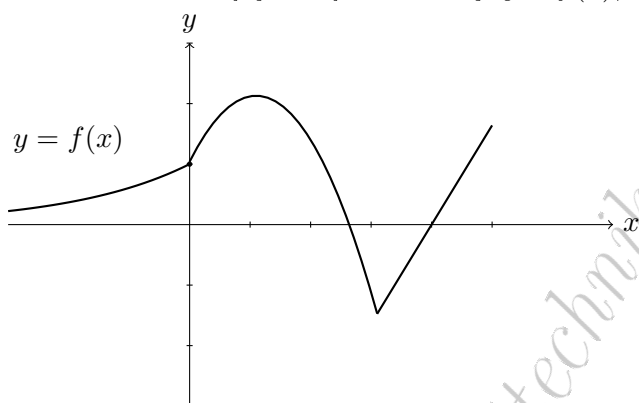
ZADANIE 15. Odpowiednio przekształcając wykres funkcji f , narysować wykres funkcji g :

a) $f(x) = x, g(x) = |x + 1| - 2$;
 b) $f(x) = x, g(x) = ||x - 1| - 1|$;
 c) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = |\sqrt{4 - x} - 2|$.

ZADANIE 16. Wskazać trzy kolejne przekształcenia wykresów funkcji prowadzące od wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, do wykresu funkcji $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory

a) $g(x) = f(|x + 6|) - 1$; b) $g(x) = -|f(x)| + 2$; c) $g(x) = |f(x) + 4| + 1$.

ZADANIE 17. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych

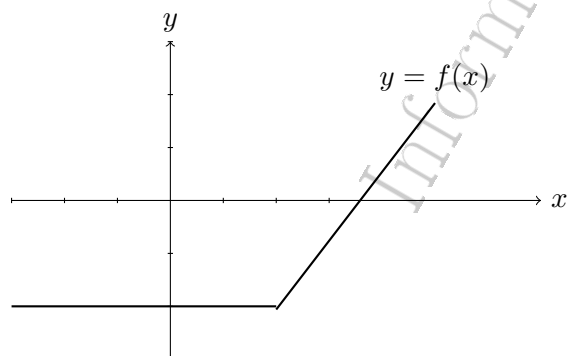


Narysować wykres funkcji g będącej

- przesunięciem o wektor $[2, 0]$ wykresu funkcji f ,
- przesunięciem o wektor $[0, 1]$ wykresu funkcji f ,
- przesunięciem o wektor $[2, 1]$ wykresu funkcji f ,
- odbiciem symetrycznym względem osi ox wykresu funkcji f ,
- odbiciem symetrycznym względem osi oy wykresu funkcji f .

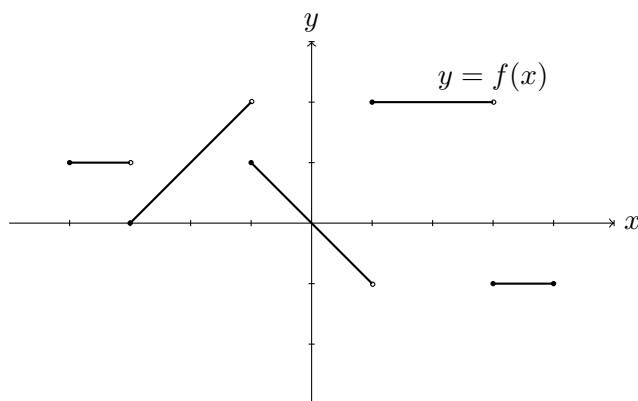
Jakim wzorem jest opisana funkcja g ?

ZADANIE 18. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych



Narysować wykres funkcji $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ oraz $y = |f(|x|)|$.

ZADANIE 19. Dana jest funkcja, której dziedziną jest przedział $\langle -4, 4 \rangle$.



Narysować wykresy funkcji $y = 2f(x)$, $y = 2f(|x|)$, $y = 2f(|x|) - 3$, $y = |2f(|x|) - 3|$.

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ZADAŃ

ZADANIE 1. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-7, 3\}$; b) $D_f = \langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$; c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-64, 64\}$;
d) $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (4, \infty)$; e) $D_f = \mathbb{R}$; f) $D_f = (-\infty, -2)$;
g) $D_f = \langle -3, 0 \rangle$; h) $D_f = \langle -6, 6 \rangle \setminus \{-2, 2, 3\}$; i) $D_f = (-\infty, -\frac{1}{2})$;

ZADANIE 12. a) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$;
b) $f^{-1}(x) = \frac{-x+2}{3}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$;
c) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$, $D_{f^{-1}} = \langle -1, \infty \rangle$;
d) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+2}$, $D_{f^{-1}} = \langle -2, \infty \rangle$;
e) $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} - 2$, $D_{f^{-1}} = \langle 0, \infty \rangle$;
f) $f^{-1}(x) = -\frac{3}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}$, $D_{f^{-1}} = \langle \frac{3}{4}, \infty \rangle$;
g) $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
h) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Literatura

- [1] Kowalczyk R., Niedziałomski K., Obczyński C., *Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium*. PWN, Warszawa 2013.
- [2] Skoczylas Z., Gewert M., *Wstęp do analizy i algebry*. Oficyna Wydawnicza GIS, 2011
- [3] Bryński N., Dróbka K., Szymański K., *Matematyka dla zerowego roku studiów wyższych*. PWN, Warszawa 1994.
- [4] Kielbasa A., *Matura z Matematyki, poziom podstawowy i rozszerzony część I*. Wydawnictwo 2000, 2006.
- [5] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników klasa I-IV*. Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 1999.
- [6] Leksiński W., Macukow B., Żakowski W., *Matematyka dla maturzystów. Definicje, twierdzenia, wzory, przykłady*. WNT, Warszawa 1992.
- [7] Leksiński W., Macukow B., Żakowski W., *Matematyka dla maturzystów. Zadania*. WNT, Warszawa 1997.
- [8] Topp J. *Wstęp do matematyki*. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2015.