Matematyka dyskretna 24.11.2023

Relacje:

- rachunek zdań (logika)
- teoria mnogości
- funkcje

Relacje porządku

Relacje równoważności

$X\ Y$ – dowolne zbiory

relacja R – dowolny podzbiór:

$$R \subset X \times Y$$

$(x,y) \in R \equiv xRy \equiv x$ jest w relacji z y

Własności

1) Zwrotność (jest w relacji z sobą) $X = Y$, $R \subset X \times X$

każda para xRx

$$\bigwedge_{x} xRx$$

2) Symetryczność (za odwrotną)

$$\bigwedge_{x,y} xRy \Rightarrow yRx$$

3) Antysymetryczność (symetryczność prowadzi do równości)

$$\bigwedge_{x,y} (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

4) Przechodniość

$$\bigwedge_{x,y,z} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

5) Spójność (przynajmniej jedno jest w relacji z drugim)

$$\bigwedge_{x,y} xRy \vee yRx$$

Przykład

$X = \mathbb{Z}$ $\quad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

4 dzieli $x-y$

$x, y \in \mathbb{Z};\ xRy \Leftrightarrow 4 \mid (x-y)$ $\quad \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k$

$1R5 \equiv T$ $\quad 2R4 \equiv F$ $\quad 4$

$1R9 \equiv T$

1) Zwrotna

$x \in \mathbb{Z}$ $\quad xRx \Leftrightarrow 4 \mid x - x$ $\quad 4 \mid 0$ ✓

2) Symetryczna

$x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad xRy \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} x - y = 4k \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \underline{y - x = 4(-k)}$ ✓

3) Antysymetryczna

$x = 1, y = 5$ ✗

$(1R5 \vee 5R1 \Rightarrow 1 = 5) \equiv F$

4) Przechodniość

$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$[xRy \wedge yRz] \Leftrightarrow [\bigvee_{k,m \in \mathbb{Z}} x - y = 4k \wedge y - z = 4m]$

$x - z = (x - y)(y - z)$

$m, k \in \mathbb{Z}$ $m + k \in \mathbb{Z}$

$k, m \in \mathbb{Z}$ $x - z = 4k + 4m = 4(k + m)$

$k + m = l$ $xRz \Leftrightarrow (x - z) = 4l$ ✓

5. Spójność

$x = 0, y = 1$

$\neg(0R1) \vee \neg(1R0)$ ✗

Relacje porządku

$R \subset X \times X$

R nazywamy relacją częściowego porządku jeżeli jest ona:

zwrotna,
antysymetryczna,
i przechodnia

Jeżeli R jest relacją częściowego porządku i jest ona jednocześnie spójna to nazywamy ją relacją (liniowego lub całkowitego porządku)

$R,\ x \leqslant y$

Jeżeli R jest relacją porządku xRy

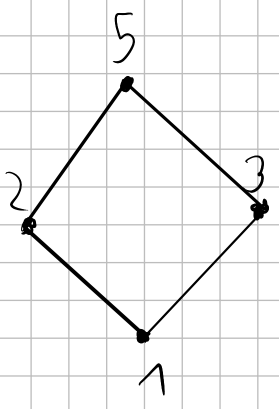
piszemy $x \preccurlyeq y$ x poprzedza y i y następuje po x

$R, \preccurlyeq$

$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\preccurlyeq \in \{(1,2); (1,3); (1,5), (2,5); (3,5); (1,1); (2,2); (3,3); (4;4); (5,5)\}$

$1 \preccurlyeq 2$

$1 \preccurlyeq 3$



- $(\mathbb{R}, \leq)$ ← porządek całkowity
- $(\mathbb{N}, |)$

$x, y \in \mathbb{N}$

$x \preceq y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x | y$

zwrotna $x | x \wedge x \in \mathbb{N} \equiv T$ ✓

antysymetryczna

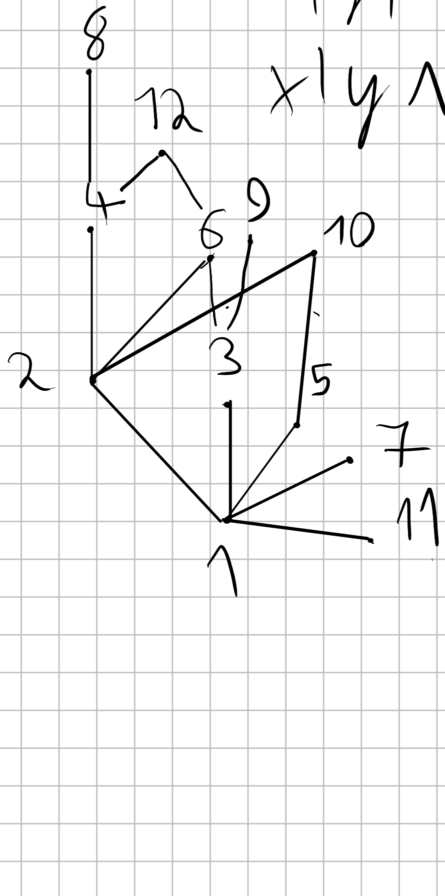
$x | y \wedge y | x \Rightarrow x = y \equiv T$ ✓

przechodniość

$x, y, z \in \mathbb{N}$

$x | y \wedge y | z \Rightarrow x | z$

$\begin{pmatrix} y = x \cdot k \\ z = y \cdot m \end{pmatrix} \Rightarrow z = y \cdot m = (x \cdot k) m = x(k \cdot m)$

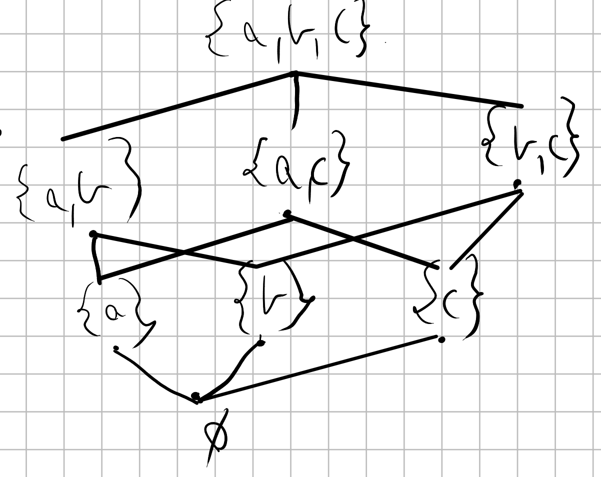


$A \neq \emptyset \quad X = 2^A$

$x, y \in 2^A \quad x \preceq y \Leftrightarrow x \subset y$

$A \{a, b, c\}$

$A = \{a, b, c\}$



Elementy wyróżnione

$(X, \preceq)$ $x \in X$ nazywamy elementem maksymalnym jeżeli

$$\left.\bigwedge_{y \in X} x \preceq y \Rightarrow x = y \right\} \Leftrightarrow \neg \bigvee_{y \in X} y \neq x \wedge x \preceq y$$

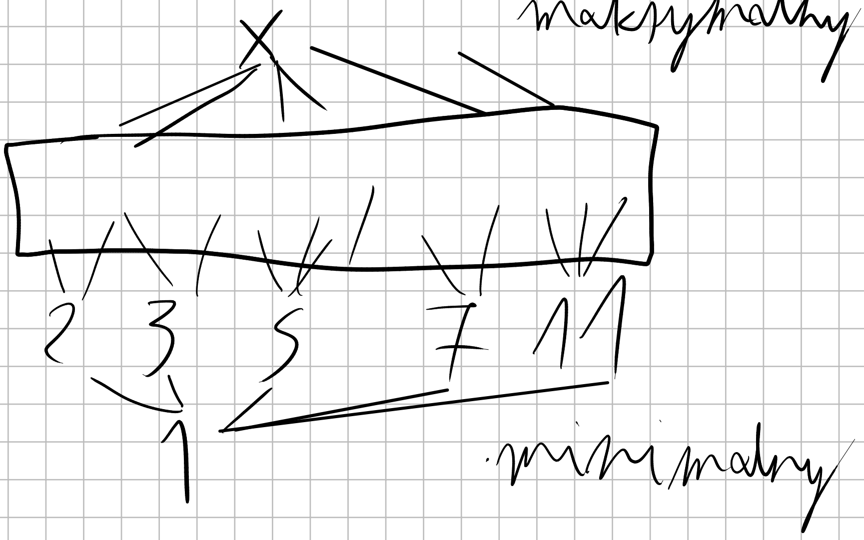
$x \in X$ nazywamy elementem minimalnym jeżeli

$$\bigwedge_{y \in X} y \preceq x \Rightarrow x = y$$

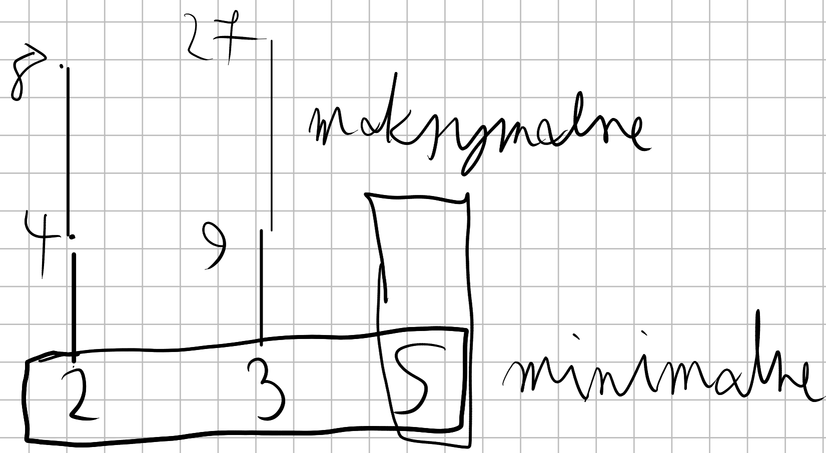
- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ brak elementu minimalnego czy maksymalnego

$(\langle 0, 1), \leqslant)$ brak elementu maksymalnego

minimalny $= 0$



$X\{2^n : n\in N\}\cup\{3^n : n\in N\}\cup\{5\}$



$(X, \preceq)$

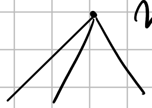
$x\in X$ nazywamy największym, jeżeli

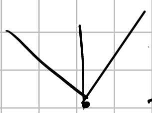
$$\bigwedge_{y\in X} y \preceq x$$

$(X, \preceq)$

$x\in X$ nazywamy najmniejszym, jeżeli

$$\bigwedge_{y\in X} x \preceq y$$

 największy

 najmniejszy

$(\langle 0,1), \leqslant)$

najmniejszy

$(\{2^n\} \cup \{3^n\} \cup 5, \mid)$

$(X, \preceq)$ istnieje element największy to jest jedyny

dwa elementy x i y to w szczególności $y \preceq x$.

$X \neq \emptyset \wedge X$ skończony $(X, \preceq)$ istnieje element maksymalny i minimalny

Dowód:

1. $|X|=1$ $[X=\{x\}] \Rightarrow [x$ jest el. maksymalnym$]$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $|X|=n+1$

$x \in X$ istnieje Y dla którego $X = Y \cup \{x\}$

$|Y|=n$

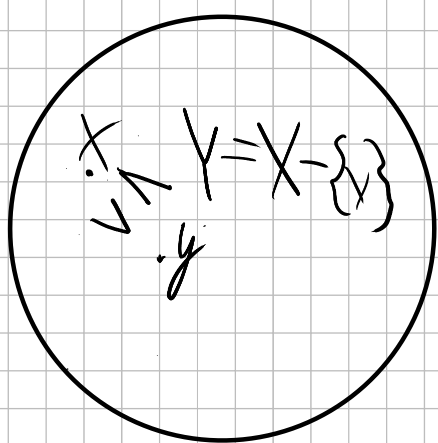
z założenia ② wynika, że

1) $x<y$ 2) $y<x$

~~$\Rightarrow$ y jest maksymalnym~~

$(X,<)$

$(X,<)$, X niepusty i skończony jest to el. największy



Ograniczenia i kresy 01.12.2023

$(X, \{)$ $A \subset X$, $(A, <)$

$x \in X$ jest ograniczeniem górnym zb. A

$$\bigwedge_{x \in A} a \{ x$$

Jeżeli zbiór ograniczeń jego ma el. najmniejszy to nazywamy go kresem górnym zbioru A

Jeżeli zbiór ograniczeń dolnych ma el. największy to nazywamy go kresem dolnym zb. A

$(\langle 0, 1), \leq)$ $\langle 0, 1) \subset R$ $(R, \leq)$

el. najmniejszy

zb. ograniczeń dolnych $= (-\infty, 0\rangle$

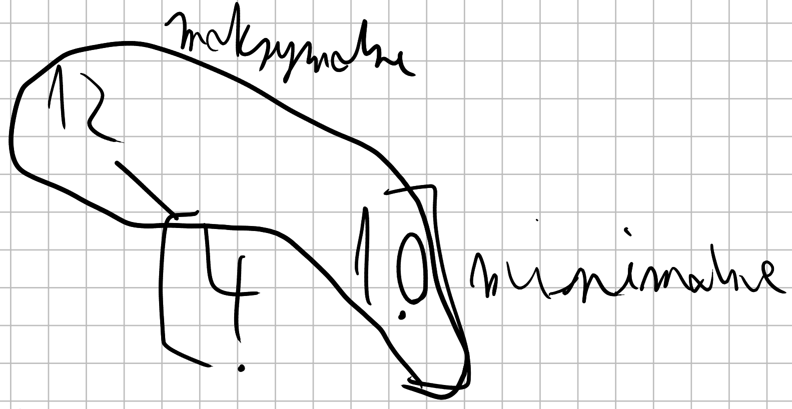
el. największy

zb. ograniczeń górnych $= \langle 1, +\infty)$

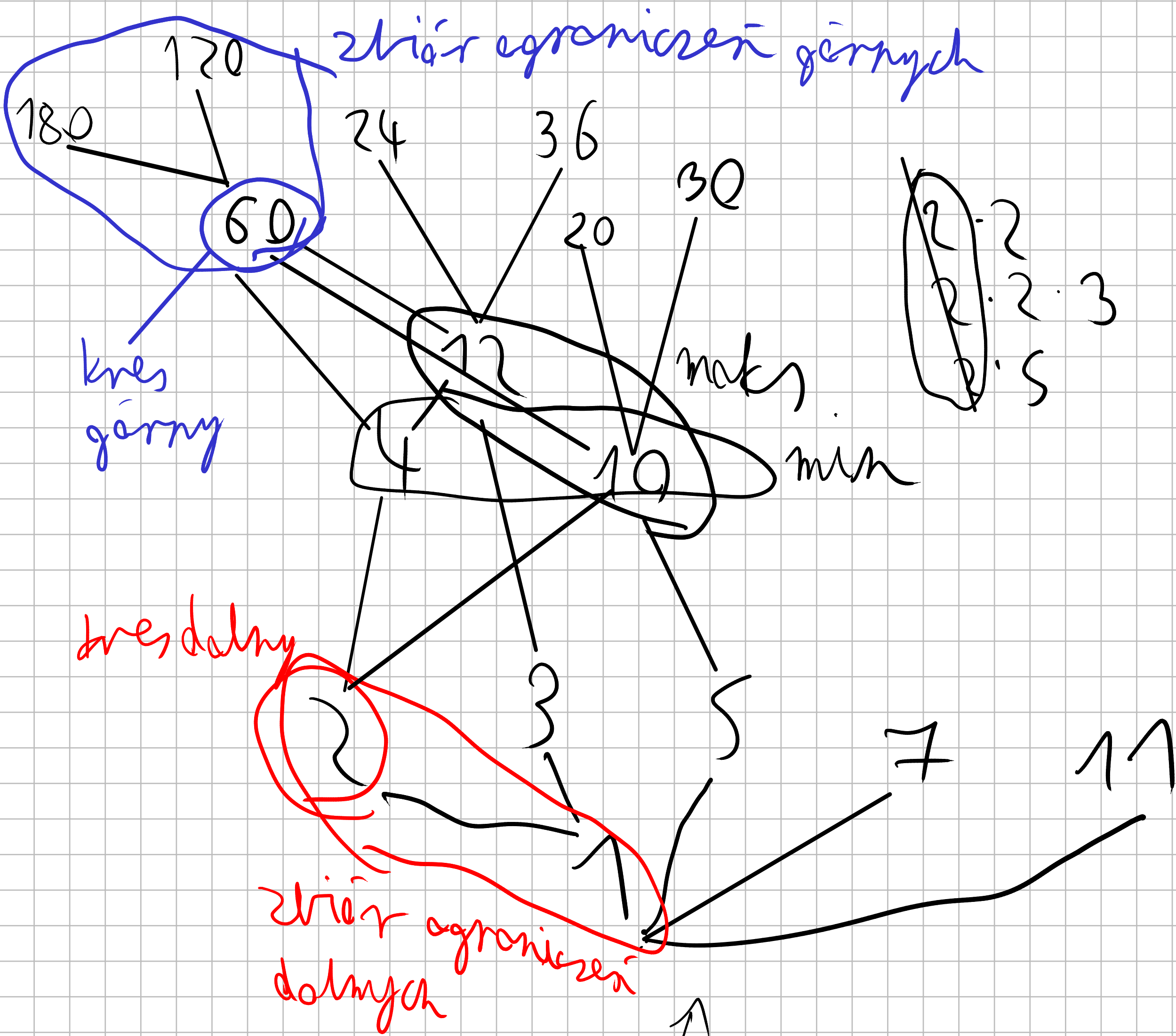
el. najmniejszy

$(\mathbb{N}, |) \quad A = \{4, 10, 12\}$

~~największy, najmniejszy~~



4 10 12



Nie mam pojęcia o co chodzi

Relacje równoważności

operator ==(Class &rhs){ } // C++ operator overloading

(X, R) $R \subset X \times X$

R - relacja równoważności jeżeli jest ona
1) zwrotna
2) symetryczna
3) przechodnia

zamiast xRy będziemy pisać $x \sim y$

klasa abstrakcji el. $x \in X$ to zbiór wszystkich el. $y \in X$, które są w relacji '$\sim$' z x

Klasa abstrakcji x oznaczona jest przez $[x]$

$$[x] := \{y \in X : x \sim y\}$$

$$X = \mathbb{Z} \quad [x \sim y] \Leftrightarrow [3 \mid x - y]$$

$$[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1] = \{3n+1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$[2] = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$

$[3] = [0] = [-3] = [-6]$

$[4] = [1]$

$[5] = [2]$

[0]	[1]	[2]

$2^{137438953472}$ maksymalna liczba w standardowym systemie

$16GB \to 16 \cdot 1024^3 \cdot 8\,b =$ + rejestry − pamięć programu (instrukcje) − 1

$\cdot 1$

1024

1024 $\frac{10000}{1024 \cdot 1024 \cdot 1024}$

Jeśli ~ jest relacją równoważności w X to)

1) $\bigwedge_{x \in X} [x] \neq \emptyset$ $\{ x \in [x]$

2) $\bigwedge_{x,y \in X} [x] = [y] \vee [x] \cap [y] \neq 0$

3) $X = \{[x] \cup [y] \cup [z] \cup \ldots\} = \bigcup_{x \in X} [x]$