FUNKCJA – DEFINICJA I WŁASNOŚCI

Niech X i Y będą niepustymi dowolnymi zbiorami.

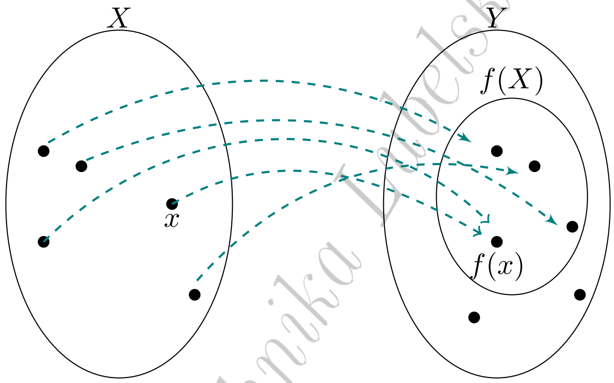
Definicja 1. **Funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y** nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi x zbioru X dokładnie jednego elementu y ze zbioru Y. Symbolicznie piszemy $f : X \to Y$.

Funkcję f zapisujemy w postaci

$$y = f(x),\ x \in X,\ y \in Y,$$

przy czym każdy element $x \in X$ nazywamy argumentem funkcji f, a element $y = f(x)$ nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f (i oznaczamy D_f), zbiór Y zaś – przeciwdziedziną. Zbiorem wartości funkcji nazywamy zbiór

$$f(X) = \{f(x) \in Y : x \in D_f\}.$$



Definicja 2. **Wykresem funkcji** $f : X \to Y$ *w kartezjańskim układzie współrzędnych, nazywamy zbiór wszystkich punktów* $(x, f(x))$, $x \in X$, *tj.*

$$\mathbf{W}_f = \{(x, y) : x \in X \wedge y = f(x)\}.$$

Wykres funkcji jest podzbiorem płaszczyzny *oxy* złożonym z tych punktów, których odcięta x równa jest argumentowi funkcji, a rzędna y – wartości funkcji odpowiadającej argumentowi x.

W trakcie tego wykładu będziemy rozważać funkcje liczbowe zmiennej rzeczywistej tzn. funkcje $f : X \to Y$, gdzie zbiory X i Y są niepustymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Często zdarza się, że podaje się jedynie wzór definiujący funkcję bez sprecyzowania jej dziedziny X lub zbioru Y. Uważa się wówczas, że dziedziną funkcji jest największy zbiór, dla którego wyrażenie określające tę funkcję ma sens. Zbiór ten nazywamy dziedziną naturalną funkcji. Jako zbiór Y, jeżeli nie jest on wyraźnie określony, przyjmuje się zbiór $\mathbb{R}$.

DZIAŁANIA NA FUNKCJACH

Definicja 3. *Jeżeli* $f : X \to \mathbb{R}$ *i* $g : X \to \mathbb{R}$ *są funkcjami, to można określić funkcje* $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ *wzorami*

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dziedziną każdej z funkcji $f + g$, $f - g$, fg *jest zbiór* X, *natomiast dziedziną funkcji* $\frac{f}{g}$ *jest zbiór* $X \setminus \{x \in X : g(x) = 0\}$.

Definicja 4. **Miejscem zerowym funkcji** $f : X \to Y$ nazywamy każdy punkt $x_0 \in X$ o tej własności, że $f(x_0) = 0$.

Definicja 5. **Dwie funkcje** f **i** g **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy

- ✓ $D_f = D_g$,
- ✓ $\bigwedge_{x \in D_f} f(x) = g(x)$.

Piszemy wtedy $f = g$.

Definicja 6. *Niech* $f : X \to Y$ *i niech* $A \subseteq X$. *Funkcję* $f_{|A} : A \to Y$ *określoną wzorem*

$$f_{|A}(x) = f(x),$$

dla każdego elementu $x \in A$, *nazywamy* **funkcją obciętą (lub zredukowaną) do zbioru** A.

WŁASNOŚCI FUNKCJI:

Niech $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$.

- Funkcja f jest **funkcją parzystą w zbiorze** X, jeśli spełnia warunki

$$\bigwedge_{x \in X} \left(-x \in X \wedge \underline{f(-x) = f(x)}\right).$$

- Funkcja f jest **funkcją nieparzystą w zbiorze** X, jeśli spełnia warunki

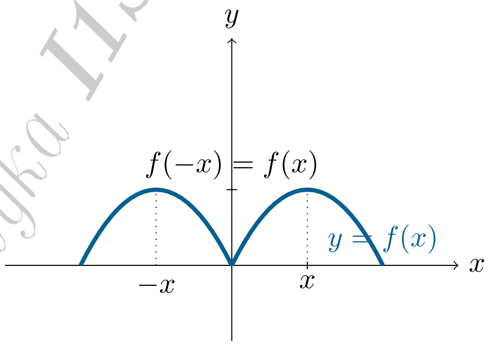
$$\bigwedge_{x \in X} \left(-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)\right).$$

- Funkcję f nazywamy **funkcją okresową w zbiorze** X, jeśli

$$\bigvee_{T \neq 0} \bigwedge_{x \in X} \left((x+T) \in X \ \wedge f(x+T) = f(x)\right),$$

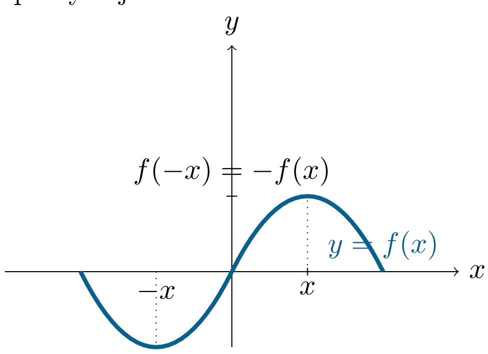
T – okres funkcji f. Najmniejszy dodatni okres funkcji f nazywamy okresem podstawowym. (Zwróćmy uwagę, że taki najmniejszy okres nie musi istnieć!)

Obrazowo: funkcja f jest parzysta, gdy oś oy jest osią symetrii jej wykresu.

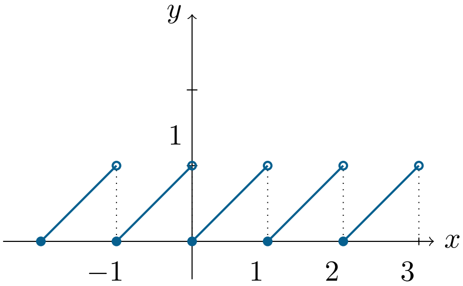


Rysunek 1. Przykładowy wykres funkcji parzystej.

Funkcja f jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.



Rysunek 2. Przykładowy wykres funkcji nieparzystej.



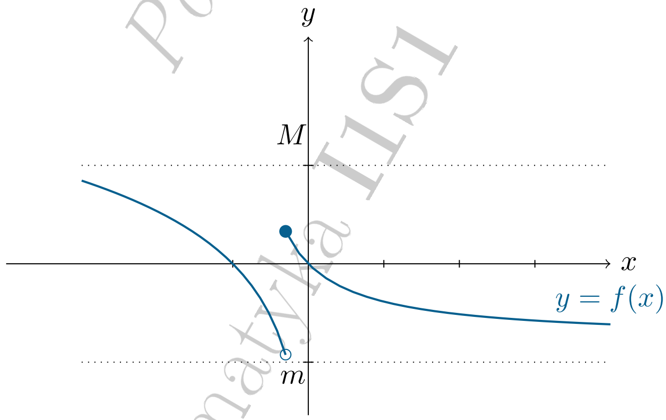
Rysunek 3. Przykładowy wykres funkcji okresowej.

Obrazowo: T jest okresem dla funkcji f, gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $\vec{v} = [-T, 0]$ nałoży się na siebie.

Uwaga 1. Jeżeli funkcja f jest funkcją okresową o okresie T, zaś $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to funkcja $f_1(x) = f(x) + a$ oraz $f_2(x) = af(x)$ ma ten sam okres, natomiast funkcja $f_3(x) = f(ax)$ ma okres $\frac{T}{|a|}$.

Definicja 7.

- *Funkcję* $f : X \to \mathbb{R}$ *nazywamy* **ograniczoną z góry,** jeśli jej zbiór wartości $f(X)$ jest ograniczony od góry, tzn. jeśli
$$\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in X} f(x) \leq M.$$
- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną z dołu,** jeśli jej zbiór wartości $f(X)$ jest ograniczony od dołu, tzn. jeśli
$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x).$$
- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną,** jeśli jest ograniczona od góry i od dołu, tzn. jeśli
$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x) \leq M.$$



Rysunek 4. Przykładowy wykres funkcji ograniczonej.

Definicja 8. *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **funkcją różnowartościową (iniekcją) na zbiorze** X wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$
lub, równoważnie,
$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2).$$

Zastosowanie różnowartościowości do rozwiązywania równań, przedstawia następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa na swojej dziedzinie, to dla dowolnych x_1, $x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:*
$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Definicja 9. *Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest* **funkcją „na" (suriekcją) na zbiorze** X, jeśli

$$f(X) = Y,$$

tzn. jeśli dla dowolnego $y \in Y$ istnieje taki $x \in X$, że $y = f(x)$.

Definicja 10. *Funkcję $f : X \to Y$, która jest jednocześnie iniekcją i suriekcją nazywamy* **bijekcją (funkcją wzajemnie jednoznaczną)**.

Definicja 11. *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy*

- **rosnącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A} (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)),$$

- **malejącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A} (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)),$$

- **nierosnącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A} (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)),$$

- **niemalejącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A} (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)),$$

- **monotoniczną na zbiorze** $A \subset X$ jeżeli jest ona rosnąca, malejąca, nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze.

Funkcje malejące i rosnące nazywamy także funkcjami ściśle monotonicznymi.
Pojęcie funkcji monotonicznej jest przydatne do rozwiązywania pewnych typów nierówności. Korzysta się tu z następujących twierdzeń:

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja f jest rosnąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja f jest malejąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

OBRAZ I PRZECIWOBRAZ ZBIORU PRZEZ FUNKCJĘ

Definicja 12. *Niech $f : X \to Y$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$*

- *Obrazem zbioru A wyznaczonego przez funkcję f nazywamy zbiór:*

$$f(A) = \{y \in Y : \bigvee_{x\in A} y = f(x)\} = \{y \in Y : \bigvee_{x\in X} x \in A \wedge y = f(x)\}.$$

- *Przeciwobrazem zbioru B wyznaczonego przez funkcję f nazywamy zbiór:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}.$$

Rysunek 5. Interpretacja geometryczna obrazu i przeciwobrazu zbioru wyznaczonego przez funkcję.

Własności obrazów danego zbioru wyznaczonych przez funkcję f

Twierdzenie 4. *Niech $f : X \to Y$. Dla dowolnych $A_1, A_2 \subseteq X$ zachodzą następujące warunki:*

- $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1) \backslash f(A_2) \subseteq f(A_1 \backslash A_2)$

Twierdzenie 5. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją różnowartościową. Dla dowolnych $A_1, A_2 \subseteq X$ zachodzą następujące warunki:*

- $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1) \backslash f(A_2) = f(A_1 \backslash A_2)$

Własności przeciwobrazów danego zbioru wyznaczonych przez funkcję f

Twierdzenie 6. *Niech $f : X \to Y$. Dla dowolnych $B_1, B_2 \subseteq Y$ zachodzą następujące warunki:*

- $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f(B_2)$
- $f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \backslash B_2)$

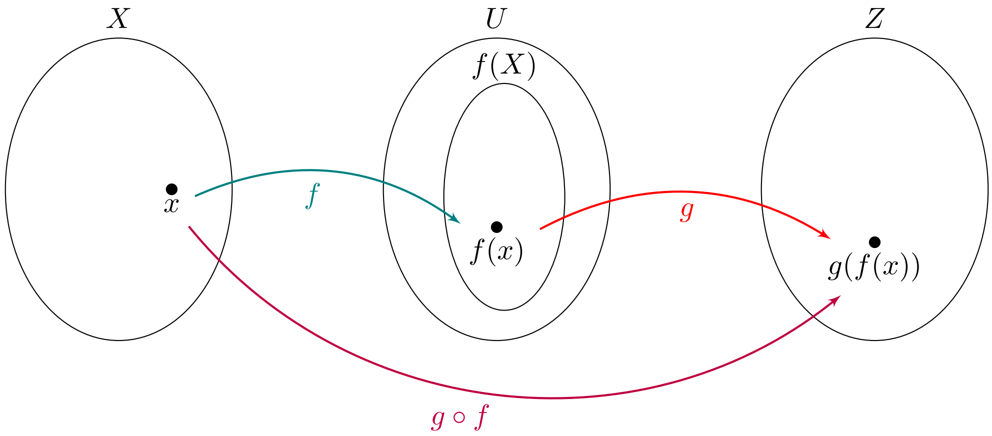
ZŁOŻENIE (SUPERPOZYCJA) FUNKCJI

Definicja 13. *Niech $f : X \to Y$ i $g : U \to Z$. Załóżmy dodatkowo, że $f(X) \subset U$. Funkcję $h : X \to Z$ określoną wzorem*

$$h(x) = g(f(x))$$

nazywać będziemy **złożeniem (superpozycją) funkcji f z funkcją** g i oznaczać symbolem $g \circ f$.

Funkcję f przyjęto nazywać funkcją wewnętrzną, zaś g – funkcją zewnętrzną funkcji h.



Własności superpozycji funkcji.

- Składanie funkcji nie jest przemienne: istnieją takie funkcje f i g, że $f \circ g \neq g \circ f$.
- Składanie funkcji jest łączne: dla dowolnych funkcji f, g, h jeżeli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to V$ to $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Twierdzenie 7. *Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to W$.*

- *Jeżeli f i g są funkcjami różnowartościowymi, to $g \circ f$ jest funkcją różnowartościową.*
- *Jeżeli funkcje f i g są odwzorowaniami „na", to $g \circ f : X \to W$ jest odwzorowaniem „na".*
- *Jeżeli funkcje f i g są wzajemnie jednoznaczne, to $g \circ f : X \to W$ jest wzajemnie jednoznaczne.*

Z definicji superpozycji funkcji złożonej, funkcji rosnącej i malejącej, wynikają następujące własności:

- złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą,
- złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą,
- złożenie funkcji rosnącej i funkcji malejącej w dowolnej kolejności jest funkcją malejącą.

FUNKCJA ODWROTNA

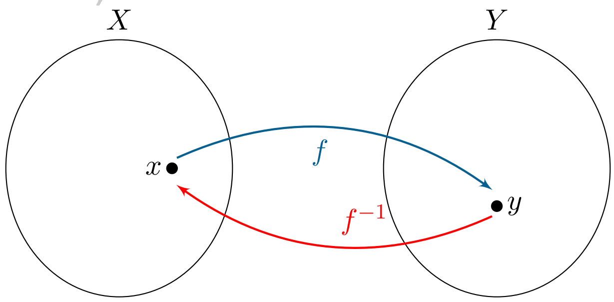
Definicja 14. **Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy odwracalną , jeśli istnieje funkcja $g : Y \to X$, taka, że**

$$\bigwedge_{x \in X} g\left(f(x)\right) = x \quad \textbf{oraz} \quad \bigwedge_{y \in Y} f\left(g(y)\right) = y.$$

Funkcję g mającą powyższą własność nazywamy funkcją odwrotna do funkcji f i oznaczamy f^{-1}.

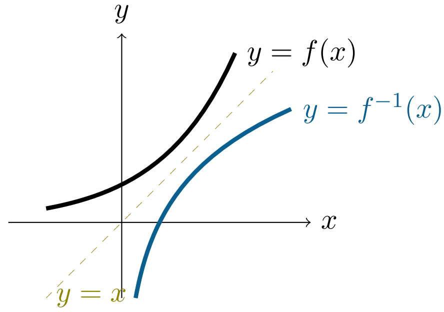
Zatem

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$



Twierdzenie 8. *Funkcja $f : X \to Y$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.*

Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwracalna, to jej wykres jest odbiciem symetrycznym względem prostej $y = x$ wykresu funkcji do niej odwrotnej.



Rysunek 6. Przykładowy wykres funkcji f i funkcji do niej odwrotnej f^{-1}.

Funkcja odwrotna do funkcji f jest tak samo monotoniczna jak funkcja f, o czym mówi następujące twierdzenie

Twierdzenie 9. *Jeśli f jest funkcją malejącą (rosnącą), to funkcja do niej odwrotna f^{-1} jest malejąca (rosnąca).*

FUNKCJE ELEMENTARNE

Podstawowe funkcje elementarne obejmują następujące rodzaje funkcji: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne.

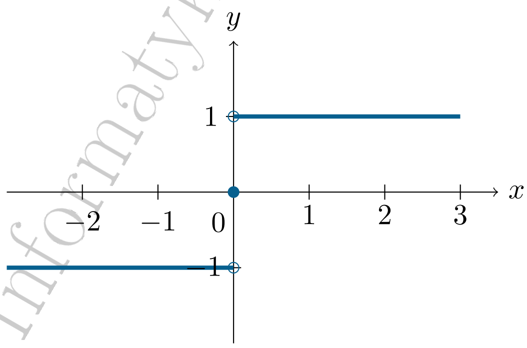
Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej ilości działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji nazywamy funkcjami elementarnymi.

NIEKTÓRE FUNKCJE NIEELEMENTARNE

1. Funkcję określoną wzorem

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   nazywamy funkcją **signum**.



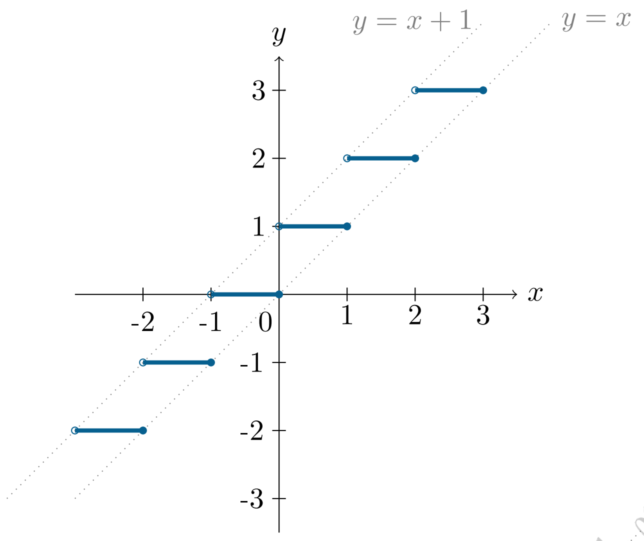
Rysunek 7. Wykres funkcji signum.

2. Funkcję zmiennej rzeczywistej, która przyjmuje wartość 1, gdy argument jest liczbą wymierną i wartość 0, gdy argument jest liczbą niewymierną nazywamy **funkcja Dirichleta**.

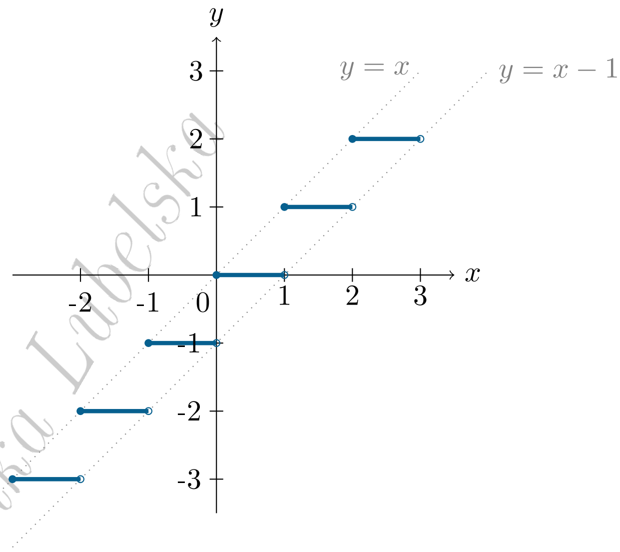
$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. Funkcję całkowitoliczbową $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od x nazywamy **funkcją podłoga**
$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}.$$

4. Funkcję całkowitoliczbową $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x nazywamy **funkcją sufit**
$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant x\}.$$



(a) $f(x) = \lceil x \rceil$



(b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Rysunek 8. Wykresy funkcji sufit i podłoga.

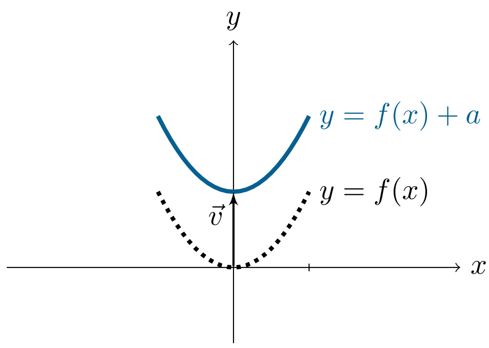
Podstawowe własności funkcji podłoga i sufit

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1,$$
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil,$$
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor,$$
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,$$
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n.$$

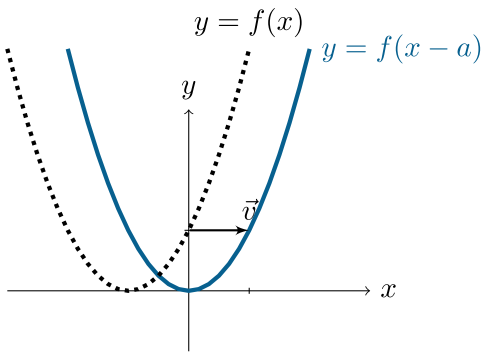
PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będzie dowolną funkcją i niech liczby $a, b, k \in \mathbb{R}$ spełniają warunki $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$.

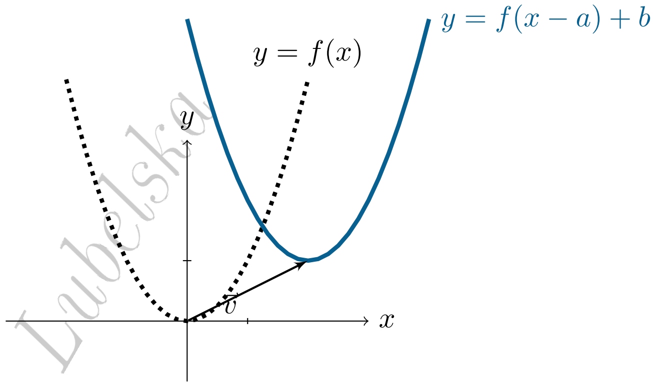
- Wykres funkcji $y = f(x) + a$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [0, a]$.



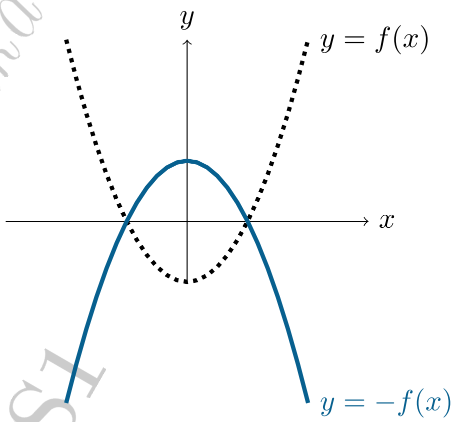
- Wykres funkcji $y = f(x-a)$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a, 0]$.



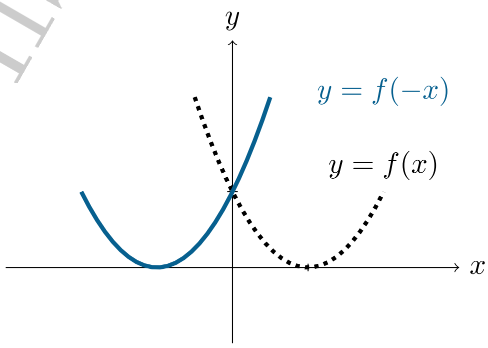
- Wykres funkcji $y = f(x-a) + b$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a, b]$.



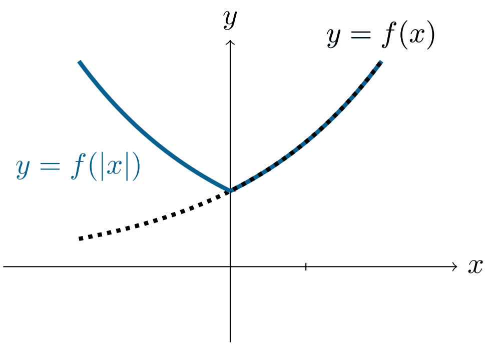
- Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi ox.



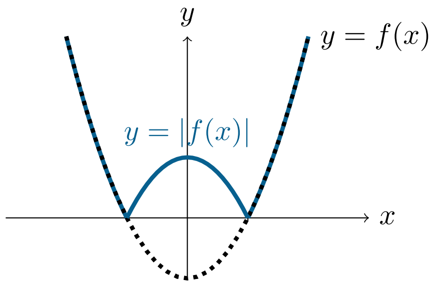
- Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi oy.



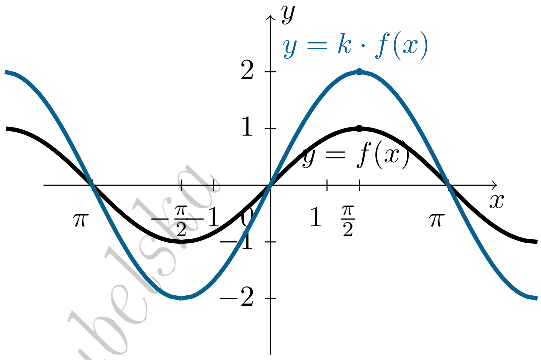
- Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez obcięcie fragmentu, który leży po ujemnej stronie osi ox, a następnie uzupełnienie pozostałej jego części o odbicie względem osi oy.



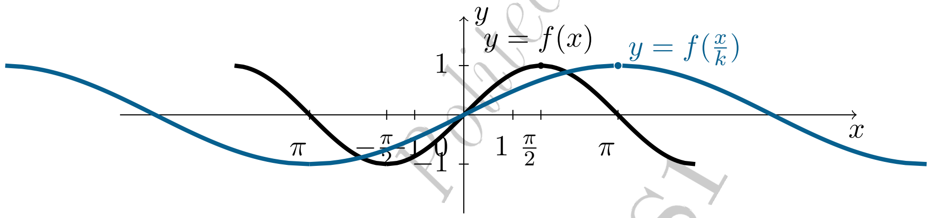
- Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez odbicie względem osi ox fragmentu, który leży po ujemnej stronie osi oy, oraz pozostawienie tych części które leżą po nieujemnej części osi oy.



- Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi ox i skali k.
  Innymi słowy wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez jego „rozciągnięcie” (o ile $k > 1$) lub „ściśnięcie” (jeśli $k \in (0, 1)$) wzdłuż osi oy.



- Wykres funkcji $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi oy i skali k.
  Innymi słowy wykres funkcji $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez jego „rozciągnięcie” (jeśli $k > 1$) lub „ściśnięcie” (jeśli $k \in (0, 1)$) wzdłuż osi ox.



ZADANIA

ZADANIE 1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{(x+7)^2}{(x+7)(x-3)}$;

b) $f(x) = \sqrt{3 - 2|x|}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{|x|} - 12}$;

d) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{4}{x}} + \sqrt[3]{1+x} + \dfrac{1}{x+1}$;

e) $f(x) = \dfrac{x+5}{1 + |x+2|}$;

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x| - 2}}{x - |x+1| + 1}$;

g) $f(x) = \sqrt[4]{8 - |3x+6| + |x-2|}$;

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6 - |x|} \cdot (x-4)}{(x^2 - 6x + 9)(\frac{1}{2}x^2 - 2)}$;

i) $f(x) = \sqrt{|x-2| - x - 3}$.

ZADANIE 2. Zbadać czy funkcje f i g są równe.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, $\qquad g(x) = x + 3$;

b) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)(x+3)}{x-1}$, $\quad g(x) = x^2 + 4x + 3$;

c) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$, $\quad g(x) = 1$;

d) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$, $\quad g(x) = x^2 - 1$.

ZADANIE 3. Zbadać, czy podane funkcje są parzyste czy nieparzyste na swoich dziedzinach naturalnych:

a) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$;

b) $f(x) = x^3 + x|x|$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^5 + 2x}$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{x-2}{|x-2|} + \dfrac{x+2}{|x+2|}$.

e) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-3}$;

ZADANIE 4. Wykazać, że funkcja $f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$

- jest malejąca na zbiorze $(-1, \infty)$;
- jest malejąca na zbiorze $(-\infty, -1)$;
- nie jest malejąca na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

ZADANIE 5. Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = 3x - 2, \quad \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^2 + 1, \quad \langle 0, \infty)$;

c) $f(x) = x^2 + x, \quad \langle -\frac{1}{2}, \infty)$;

d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}, \quad (-\infty, 1)$;

e) $f(x) = x^2 + 3x + 3, \quad (-\infty, -\frac{3}{2}\rangle$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$, $(i)\ (-\infty, 0)$; $\quad (ii)\ (1, \infty)$;

g) $f(x) = x^3, \quad \mathbb{R}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}, \quad (-\infty, 0)$;

i) $h(x) = \sqrt{4-x} - 2\sqrt{x}$, dziedzina naturalna.

ZADANIE 6. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznaczyć:

a) $f(\{1, 2\})$,

b) $f(\langle 0, 1\rangle)$,

c) $f(\langle -2, -1\rangle)$,

d) $f^{-1}(\{0\})$,

e) $f^{-1}(\langle 0, 2\rangle)$,

f) $f^{-1}((-\infty, -6))$.

ZADANIE 7. Dana jest funkcja f oraz zbiory A iB. Wyznaczyć obraz $f(A_1), f(A_2)$ i przeciwobraz $f^{-1}(B)$:

a) $f(x) = -|5 - x|$, $A_1 = \langle -1, 5)$, $A_2 = (0, 7\rangle$, $B = (-\infty, -5\rangle \cup \{0\}$,

b) $f(x) = |x| + 1$, $A_1 = \{1\} \cup (2, 3)$, $B = (-1, 1\rangle$,

c) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 0; \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$, $A_1 = \langle -2, 1\rangle$, $B = \langle -2, 1\rangle$.

b) $f(x) = x^3 + x|x|$

$f(-x) = f(x)$ parzysta $f(-x) = -f(x)$ nieparzysta

$f(-x) = (-x)^3 - x|x| = -x^3 - x^2$

$f(-x) = -f(x)$ $-x^3 - x|x| = -x^2 - x|x|$

$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + 2x}$

$\frac{-x^3 + x}{-x^5 - 2x} = \frac{+(x^3 - x)}{+(x^5 + 2x)}$

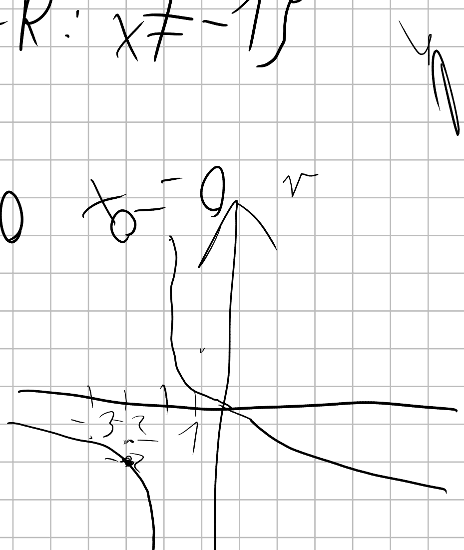
parzysta $f(-x) = f(x)$

$f(x) = \frac{-x}{x+1}$

$D = \{x \in R : x \neq -1\}$

MZ:

$\frac{-x}{x+1} = 0$ $x_0 = 0$



$\frac{2}{-1} = -2$

$\frac{3}{-2} = -1{,}5$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ $f(x) \searrow$ $x \in (-\infty, -1)$

$f(x) \searrow \quad x \in (1, +\infty)$

$f(x) \cancel{\searrow} \quad x \in \{1\}$

ZADANIE 8. Dane są funkcje f i g określone wzorami

a) $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1;$

b) $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = |x| - 1;$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2;$

d) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x + 1;$

e) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x;$

f) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2x + 1;$

g) $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = \sqrt{x - 1};$

h) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}, \quad g(x) = x^2 - 3;$

i) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ x^2 + 2, & x \geq 0, \end{cases}.$

Dokonując ewentualnego zawężenia dziedzin wyznaczyć złożenia $f \circ g$ i $g \circ f$ oraz znaleźć wzory określające te złożenia.

ZADANIE 9. Dane są funkcje $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^4$, $h(x) = \cos x$. Utworzyć złożenia $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ g$, $h \circ f$, $h \circ h$, $f \circ g \circ h$, $h \circ f \circ g$.

ZADANIE 10. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 5$ i $g(x) = \sqrt{3x + 1}$. Dokonując ewentualnego zwężenia dziedziny wyznaczyć złożenia $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$.

ZADANIE 11. Wskazać funkcje w wyniku złożenia których otrzymano funkcję h

a) $h(x) = \sqrt[4]{2x - 1};$

b) $h(x) = (1 + \sin x)^3;$

c) $h(x) = \dfrac{1 + |x|}{2 - 3|x|};$

d) $h(x) = \log(x + 1);$

e) $h(x) = \sin^2(2x + 1);$

f) $h(x) = |2 - \sqrt{x^2 + 3x - 1}|;$

g) $h(x) = \cos^3 3x;$

h) $h(x) = \sqrt[3]{(1 + x^2)^2}.$

ZADANIE 12. Wyznaczyć funkcje odwrotne do danych (o ile takowe istnieją). Naszkicować wykres obu funkcji: danej i odwrotnej.

a) $f(x) = 2x - 3;$

b) $f(x) = -3x + 2;$

c) $f(x) = x^2 - 2x, \; x \geq 1;$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 7, \; x \geq 3;$

e) $f(x) = \sqrt{2x + 4}, \; x \geq -2;$

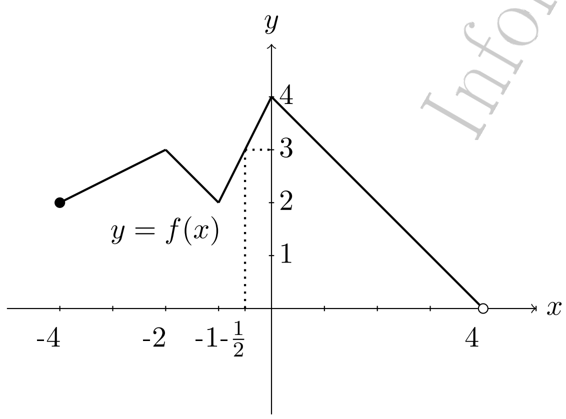
f) $f(x) = x^2 + 3x + 3, \; x \leq -\frac{3}{2};$

g) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\};$

h) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

Zbadać różnowartościowość powyższych funkcji korzystając z definicji.

ZADANIE 13. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicować wykresy funkcji $g_1(x) = \lfloor f(x) \rfloor$ i $g_2(x) = \lceil f(x) \rceil$



ZADANIE 14. Naszkicować wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(4x + 13)$, **b)** $f(x) = \dfrac{6}{\operatorname{sgn}(x+3)}$, **c)** $f(x) = -\lfloor x \rfloor + 3$, $x \in \langle 2, 5\rangle$.

ZADANIE 15. Odpowiednio przekształcając wykres funkcji f, narysować wykres funkcji g:

a) $f(x) = x$, $g(x) = |x + 1| - 2$;

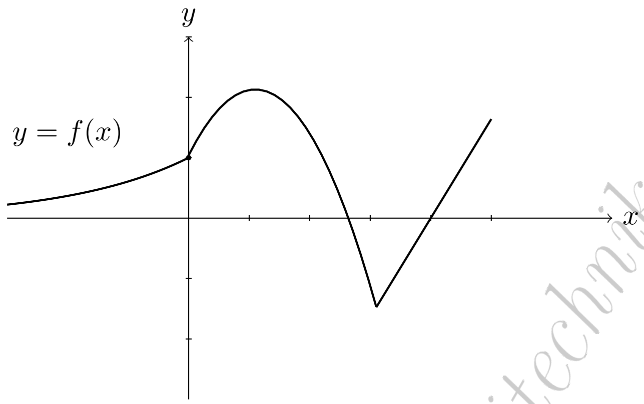
b) $f(x) = x$, $g(x) = ||x - 1| - 1|$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = |\sqrt{4 - x} - 2|$.

ZADANIE 16. Wskazać trzy kolejne przekształcenia wykresów funkcji prowadzące od wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, do wykresu funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory

a) $g(x) = f(|x + 6|) - 1$; **b)** $g(x) = -|f(x)| + 2$; **c)** $g(x) = |f(x) + 4| + 1$.

ZADANIE 17. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych

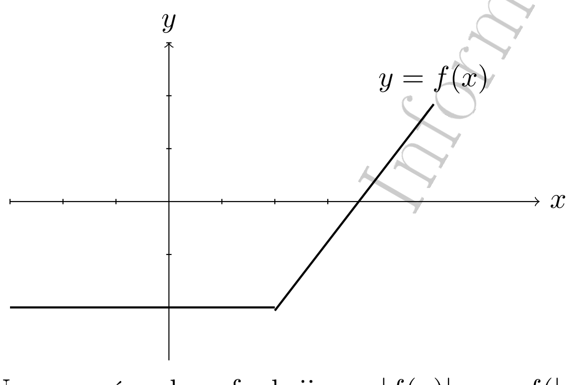


Narysować wykres funkcji g będącej

- przesunięciem o wektor $[2, 0]$ wykresu funkcji f,
- przesunięcie o wektor $[0, 1]$ wykresu funkcji f,
- przesunięcie o wektor $[2, 1]$ wykresu funkcji f,
- odbiciem symetrycznym względem osi ox wykresu funkcji f,
- odbiciem symetrycznym względem osi oy wykresu funkcji f.

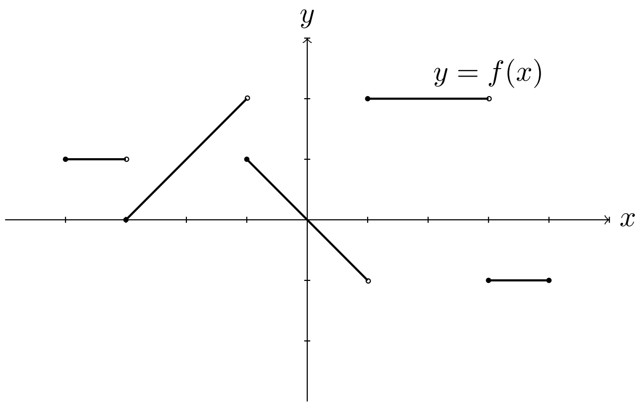
Jakim wzorem jest opisana funkcja g?

ZADANIE 18. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych



Narysować wykres funkcji $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ oraz $y = |f(|x|)|$.

ZADANIE 19. Dana jest funkcja, której dziedziną jest przedział $\langle -4, 4\rangle$.



Narysować wykresy funkcji $y = 2f(x)$, $y = 2f(|x|)$, $y = 2f(|x|) - 3$, $y = |2f(|x|) - 3|$.

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ZADAŃ

ZADANIE 1. ***a)*** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-7, 3\}$; ***b)*** $D_f = \langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$; ***c)*** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-64, 64\}$;
d) $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup \langle 4, \infty)$; ***e)*** $D_f = \mathbb{R}$; ***f)*** $D_f = (-\infty, -2\rangle$;
g) $D_f = \langle -3, 0\rangle$; ***h)*** $D_f = \langle -6, 6\rangle \setminus \{-2, 2, 3\}$; ***i)*** $D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$;

ZADANIE 12. *a)* $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$;
b) $f^{-1}(x) = \frac{-x+2}{3}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$;
c) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$, $D_{f^{-1}} = \langle -1, \infty)$;
d) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+2}$, $D_{f^{-1}} = \langle -2, \infty)$;
e) $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} - 2$, $D_{f^{-1}} = \langle 0, \infty)$;
f) $f^{-1}(x) = -\frac{3}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}$, $D_{f^{-1}} = \langle \frac{3}{4}, \infty)$;
g) $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
h) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Literatura

[1] Kowalczyk R., Niedziałomski K., Obczyński C., *Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium.* PWN, Warszawa 2013.

[2] Skoczylas Z., Gewert M., *Wstęp do analizy i algebry.* Oficyna Wydawnicza GIS, 2011

[3] Bryński N., Dróbka K., Szymański K., *Matematyka dla zerowego roku studiów wyższych.* PWN, Warszawa 1994.

[4] Kiełbasa A., *Matura z Matematyki, poziom podstawowy i rozszerzony część I.* Wydawnictwo 2000, 2006.

[5] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników klasa I-IV.* Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 1999.

[6] Leksiński W., Macukow B., Żakowski W., *Matematyka dla maturzystów. Definicje, twierdzenia, wzory, przykłady.* WNT, Warszawa 1992.

[7] Leksiński W., Macukow B., Żakowski W., *Matematyka dla maturzystów. Zadania.* , WNT, Warszawa 1997.

[8] Topp J. *Wstęp do matematyki.* , Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2015.