$$A \times B = B \times A.$$

a) $(A \subset B \wedge C \subset D) \quad \Rightarrow \quad (A \cup C \subset B \cup D)$,

$$\underbrace{[x\in A \wedge x\in B \wedge x\in C \wedge x\in D]}_{T} \Rightarrow [(x\in A \vee x\in C)\wedge(x\in B \vee x\in D)]$$

$x\in A \equiv T \rightarrow x\in A$

$x\in B \equiv T \rightarrow x\in B$

$x\in C \equiv T \rightarrow x\in C$

$x\in D \equiv T \rightarrow x\in D$

Nie może być fałszem skoro x należy do wszystkich wspomnianych zbiorów

$$[x\in A \Rightarrow x\in B \wedge x\in C \Rightarrow x\in D] \Rightarrow$$

$$[x\in A \vee x\in C \Rightarrow x\in B \vee x\in D]$$

$$\underbrace{(x\notin A \vee x\in B)\wedge(x\notin C \vee x\in D)}$$

założmy T

$$\underbrace{(x\notin A \wedge x\notin C)}_{F} \vee \underbrace{(x\in B \vee x\in D)}$$

$$\underbrace{x\in B \overset{F}{\vee} x\in D}_{T}$$

9. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory $A \times B$ i $B \times A$ dla:

a) $A = \{y \in \mathbb{R}\colon\ -1 < y < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x \leqslant 1\}$,

b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \langle 1, 2)$,

c) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 + x - 2 \geqslant 0\}$, $B = \{b \in \mathbb{N}\colon 2^b < 11\}$,

d) $A = \{x \in \langle 0, \infty)\colon \frac{x-1}{x+1} < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 \leqslant 4\}$.

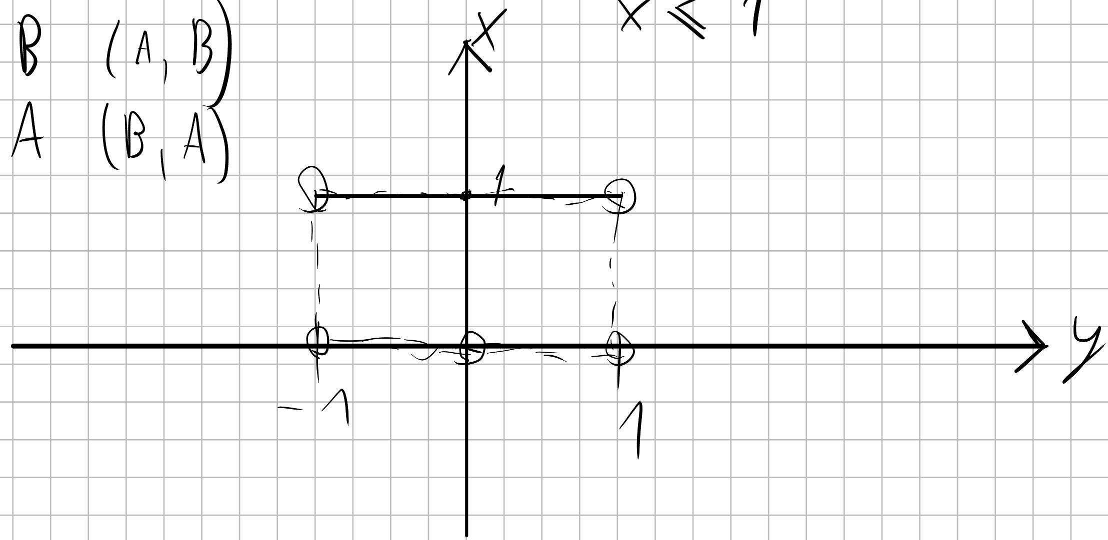
A×B   a) $A=\{y\in R: -1<y<1\}$ $B=\{x\in R, 0<x\leq 1\}$

$y>-1 \wedge y<1$ $x>0 \wedge$

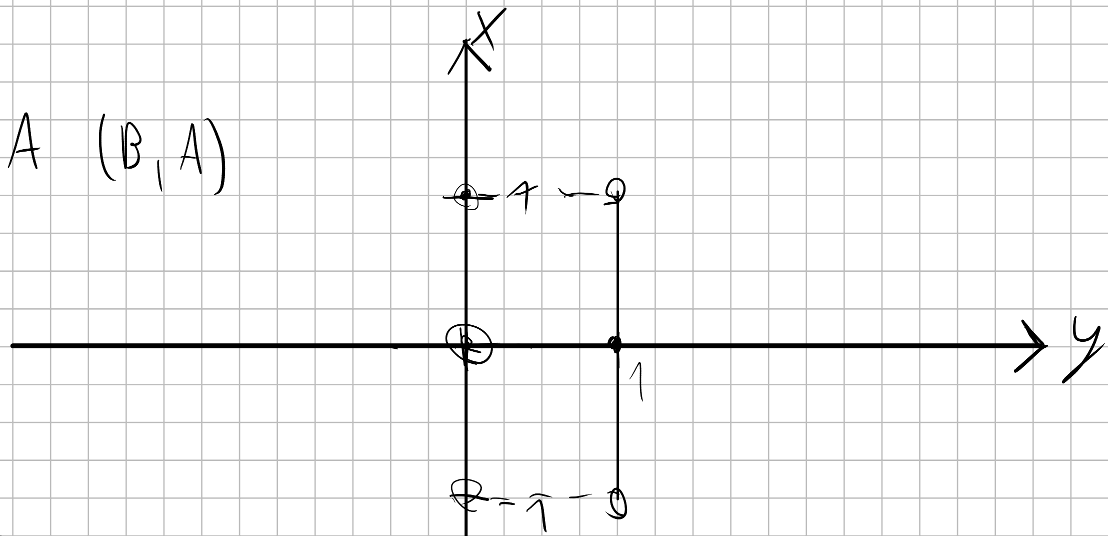
$x\leqslant 1$

A×B (A, B)

B×A (B, A)



B×A (B, A)

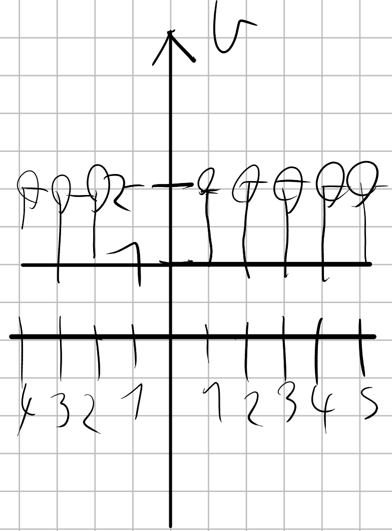


$(A\times B)\times C = ((a,b),c)$ $a\in A, b\in B, c\in C$

$A\times(B\times C) = (a,(b,c))$ $a\in A, b\in B, c\in C$

b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \langle 1, 2)$,

$A \times B$



$$\underbrace{(A \cup B) \times C}_{L} = \underbrace{(A \times C) \cup (B \times C)}_{R}$$

$(x, y) \in L$ $\qquad$ $(x, y) \in R \wedge (z, y) \in R$

$(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$ $\qquad$ $x \in A$ $\quad$ $z \in B$

$y \in C$ $\quad$ $y \in C$

$(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$

$[(x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C]$

11. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego

$$\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\}} A_k \in \mathcal{A} \qquad \text{oraz} \qquad X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{A}.$$

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

$A_1 \ldots A_n$

$\bigwedge_{k \in \{1, 2, \ldots, n\}} A_k \in A : \quad X \in A \wedge Y \in A \Rightarrow X \cup Y \in A$

$$\bigwedge_{k\in\{1,2,\dots,n\}} A_k$$

$$\frac{X\in A \wedge Y\in A \Rightarrow X\cup Y\in A}{T}$$

$$X\in A \quad Y\in A$$

$$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_1$$

A_k – różne niepuste

A

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$

$A_1\vee A_2$

$A_1\vee A_3$

$A_1\vee A_4$

$A_2\cup A_3$

$\binom{n}{2}$

1 2 4 8

$$2^n-1=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{1(n-1)!}+\frac{n!}{2(n-2)!}+\frac{n!}{6(n-3)!}+\dots\frac{n!}{n!(n-n)!}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n-1}\ \frac{n!}{n!(n-n)!}=1$$

$$\parallel$$

$$2n$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\,y^k$$

Dwumian Newtona

$x = 1$

To ten zjebany trójkąt?

AHHHHHHHHHHH!

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 5 4 1

1 5 9 9 5 1

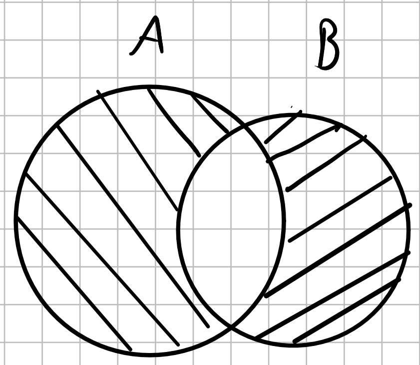
1 6 14 18 14 6 1

INDUKCJA

$$\left[p(1) \wedge \bigwedge_{n} p(n) \Rightarrow p(n+1)\right] \Rightarrow \left[\bigwedge_{n} p(n)\right]$$

efekt domina

$A \Delta B \quad (A \cup B) - (A \cap B)$



2. Wyznacz iloczyn kartezjański $A \times B$ i $B \times A$ dla zbiorów:

a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$,

b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$,

c) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$.

a1)

$A \times B = \{(0,1); (0,2); (1,1); (1,2)\}$

a2)

$B \times A = \{(1,0); (1,1); (2,0); (2,1)\}$

b1)

$A \times B = \{(0,2); (0,3); (1,2); (1,3); (2,2); (2,3)$

b2)

$B \times A = \{(2,0); (2,1); (2,2); (3,0); (3,1); (3,2)\}$

$A \times B = B \times A \Rightarrow \dfrac{A = B}{F}$

$(a_i, b_i) = (b_i, a_i)$

$a_i = b_i$

skoro zbiór elementów jest różny
poszczególne elementy będą różne

5. Wyznacz zbiór potęgowy dla zbiorów:

a) $\{1, 2, 3\}$,

b) $\emptyset$,

c) $\{\emptyset\}$,

d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

a) $A = \{1, 2, 3\}$

$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\},$
$\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$A = \emptyset \qquad A = \{\emptyset\}$

$2^A = \emptyset \qquad 2^A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

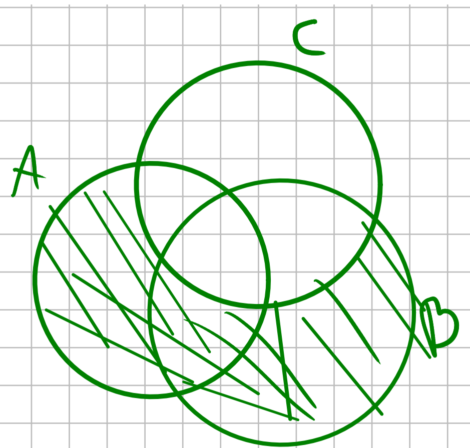
$2^A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,
d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
e) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$,
f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
g) $(A \triangle B)^c = A^c \triangle B^c$.

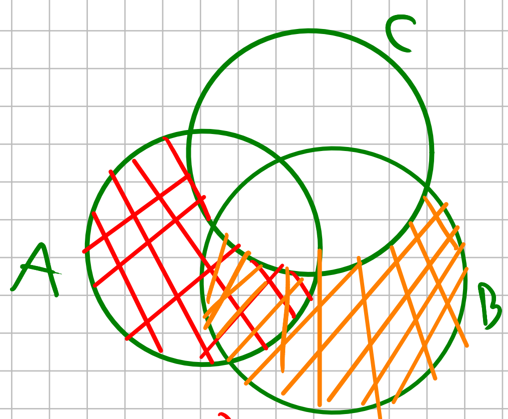
a)

$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$



$A \cup B - C$

$=$



$(A - C) \cup (B - C)$

b)

$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$

$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in C \wedge x \in A)$

$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,
d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
e) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$,
f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
g) $(A \triangle B)^c = A^c \triangle B^c$.

c)

$$(A-B)\cup C = [(A\cup C)-B]\cup(B\cap C)$$

$$(x\in A \wedge x\notin B)\vee x\in C$$

$$[(x\in A \vee x\in C)\wedge x\notin B]\vee(x\in B\wedge x\in C)$$

$$(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in C\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\in C)$$

$$(x\in A\vee x\in C)\wedge(\underline{x\notin B}\vee \underline{x\in C})$$

$$(A-B)\cup C = [(A\cup C)-B]\cup(B\cap C)$$

$A-B=$

$$(A-B)\cup(C-B)\cup(B\cap C)$$

$$C-B=C-B\cap C$$

$$(A-B)\cup(C-\cancel{(B\cap C)})\cup\cancel{(B\cap C)}$$

$x\notin$ $\quad$ $x\in$

$$[A-(A\cap B)]\cup C$$

$$[A-(A\cap B)]\cup(C\cap A)\cup C$$

skoro $B\cap C$ należy to $C-B\cap C=C$

$$(A-B)\cup C$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,
d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
e) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$,
f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
g) $(A \triangle B)^c = A^c \triangle B^c$.

$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

$\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \notin B}_{r} \wedge \underbrace{x \in C}_{q} \wedge \underbrace{x \notin D}_{s} \iff$

$\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in C}_{q} \wedge \underbrace{x \notin B}_{r} \wedge \underbrace{x \notin D}_{s}$

$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

$A \triangle B \iff (A \cup B) - (A \cap B)$

$(A \cup Q) - (A \cap Q)$

$Q = (B \cup C) - (B \cap C)$

$(Z \cup C) - (Z \cap C)$

$Z = (A \cup B) - (A \cap B)$

$(A \cup B \cup C) - (B \cap C) - (A \cap B \cap C$

2. Określ wartość logiczną zdań:

a) $\bigwedge_x \bigvee_y 2x - y = 0$,

b) $\bigwedge_x \bigvee_y x - 2y = 0$,

c) $\bigwedge_x x < 10 \Rightarrow \left(\bigwedge_y y < x \Rightarrow y < 9\right)$,

d) $\bigwedge_x \bigvee_y (y > x \wedge \bigvee_z y + z = 100)$,

gdy zakresem zmienności wszystkich zmiennych są $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$.

$-5(2)$

$-10 - -10$

$\bigwedge_x \bigvee_y 2x - y = 0 \Leftrightarrow T$

$y = 2x$

$\bigwedge_x \bigvee_y x - 2y = 0 \Leftrightarrow T$

$y = \frac{1}{2}x$

$\bigwedge_x (x < 10) \Rightarrow (\bigwedge_y [y < x] \Rightarrow [y < 9])$

dla $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ T

dla $\mathbb{R}$ F

$x < 10 \qquad y < x$

$$\underbrace{\underline{9{,}6 < 10}}_{T} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\underline{[9 < 9{,}6]}}_{T} \Rightarrow \underbrace{\underline{9 < 9}}_{F}}_{F}$$

d) $\bigwedge_x \bigvee_y (y > x \wedge \bigvee_z y + z = 100)$,

gdy zakresem zmienności wszystkich zmiennych są $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$.

$\bigwedge_x \bigvee_y (y > x \wedge \bigvee_z y + z = 100)$

$y > 0 \qquad y + z = 100$

$z = 100 - y$

$$y + z = 100$$

$$z = 100 - y$$

$$\bigwedge_x \bigvee_y \left(y > x \wedge \bigvee_z y + z = 100\right)$$

3. Określ wartość logiczną zdań (zakresem zmienności wszystkich zmiennych jest $\mathbb{R}$):

a) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 > 0$,

b) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = 0$,

c) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y = 0$,

d) $\bigvee_x \bigwedge_y x^2 + y = 0$,

e) $\bigvee_a \bigwedge_x (a-3)x^2 + (a+1)x + 1 < 0$,

f) $\bigvee_a \bigvee_x x^2 - 2x + \log_{\frac{1}{2}} a = 0$,

g) $\bigvee_a \bigwedge_x a^2x^2 + ax - 4 > 0$,

h) $\bigvee_a \bigwedge_x x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}\right)^a > 0$.

a) $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2 + y^2 > 0 \Leftrightarrow F$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geqslant 0$$

b)

$$\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y^2 = 0$$

$$100 + y^2 = 0$$

$$100 = -y^2 \quad y^2 \neq -100$$

c) $\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y = 0$,

d) $\bigvee_x \bigwedge_y x^2 + y = 0$,

c)

$$\bigwedge_x \bigvee_y x^2 + y = 0 \Leftrightarrow T$$

$$-x^2 = y$$

d)

$$\bigvee_x \bigwedge_y x^2 + y = 0 \Leftrightarrow F$$

$-x^2 = y$ $\quad -x^2$ nie campl. $\Rightarrow$ y nie canst

e) $\bigvee_{a}\bigwedge_{x}(a-3)x^2+(a+1)x+1<0,$

f) $\bigvee_{a}\bigvee_{x} x^2-2x+\log_{\frac{1}{2}} a=0,$

$$\bigvee_{a}\bigwedge_{x} (a-3)x^2+(a+1)x+1<0 \Rightarrow F$$

$a-3<0 \wedge \Delta<0$

$a<3$

$a^2+2a+1-4a+12<0$

$a^2-2a+13<0$

$\Delta_a=4-1\cdot 13<0$

$\Delta_a<0 \wedge a_a>0 \Rightarrow \Delta_x>0$

e) $\bigvee_{a}\bigwedge_{x}(a-3)x^2+(a+1)x+1<0,$

f) $\bigvee_{a}\bigvee_{x} x^2-2x+\log_{\frac{1}{2}} a=0,$

f)

$$\bigvee_{a}\bigvee_{x} x^2-2x+\log_{\frac{1}{2}} a=0$$

$x^2-2x=0$ $\quad\quad (\frac{1}{2})^0=1$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0$ $\quad x=2$