# FUNKCJA – DEFINICJA I WŁASNOŚCI

Niech $X$ i $Y$ będą niepustymi dowolnymi zbiorami.

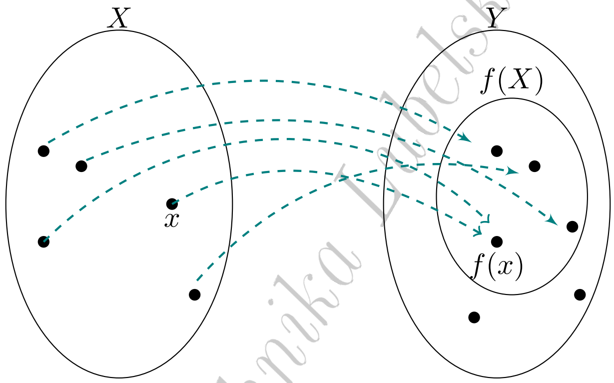
**Definicja 1.** **Funkcją odwzorowującą zbiór $X$ w zbiór $Y$** nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x$ zbioru $X$ dokładnie jednego elementu $y$ ze zbioru $Y$. Symbolicznie piszemy $f : X \to Y$.

Funkcję $f$ zapisujemy w postaci

$$y = f(x),\ x \in X,\ y \in Y,$$

przy czym każdy element $x \in X$ nazywamy argumentem funkcji $f$, a element $y = f(x)$ nazywamy wartością funkcji $f$ dla argumentu $x$. Zbiór $X$ nazywamy dziedziną funkcji $f$ (i oznaczamy $D_f$), zbiór $Y$ zaś – przeciwdziedziną. Zbiorem wartości funkcji nazywamy zbiór

$$f(X) = \{f(x) \in Y : x \in D_f\}.$$




**Definicja 2.** **Wykresem funkcji** $f : X \to Y$ *w kartezjańskim układzie współrzędnych, nazywamy zbiór wszystkich punktów* $(x, f(x))$, $x \in X$, *tj.*

$$\mathbf{W}_f = \{(x, y) : x \in X \wedge y = f(x)\}.$$

Wykres funkcji jest podzbiorem płaszczyzny *oxy* złożonym z tych punktów, których odcięta $x$ równa jest argumentowi funkcji, a rzędna $y$ – wartości funkcji odpowiadającej argumentowi $x$.

W trakcie tego wykładu będziemy rozważać funkcje liczbowe zmiennej rzeczywistej tzn. funkcje $f : X \to Y$, gdzie zbiory $X$ i $Y$ są niepustymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Często zdarza się, że podaje się jedynie wzór definiujący funkcję bez sprecyzowania jej dziedziny $X$ lub zbioru $Y$. Uważa się wówczas, że dziedziną funkcji jest największy zbiór, dla którego wyrażenie określające tę funkcję ma sens. Zbiór ten nazywamy dziedziną naturalną funkcji. Jako zbiór $Y$, jeżeli nie jest on wyraźnie określony, przyjmuje się zbiór $\mathbb{R}$.

## DZIAŁANIA NA FUNKCJACH

**Definicja 3.** *Jeżeli* $f : X \to \mathbb{R}$ *i* $g : X \to \mathbb{R}$ *są funkcjami, to można określić funkcje* $f + g$, $f - g$, $fg$, $\frac{f}{g}$ *wzorami*

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

*Dziedziną każdej z funkcji* $f + g$, $f - g$, $fg$ *jest zbiór* $X$, *natomiast dziedziną funkcji* $\frac{f}{g}$ *jest zbiór* $X \setminus \{x \in X : g(x) = 0\}$.

**Definicja 4.** **Miejscem zerowym funkcji** $f : X \to Y$ nazywamy każdy punkt $x_0 \in X$ o tej własności, że $f(x_0) = 0$.

**Definicja 5.** **Dwie funkcje** $f$ **i** $g$ **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy

✓ $D_f = D_g$,

✓ $\bigwedge\limits_{x \in D_f} f(x) = g(x)$.

Piszemy wtedy $f = g$.

**Definicja 6.** *Niech* $f : X \to Y$ *i niech* $A \subseteq X$. *Funkcję* $f_{|A} : A \to Y$ *określoną wzorem*

$$f_{|A}(x) = f(x),$$

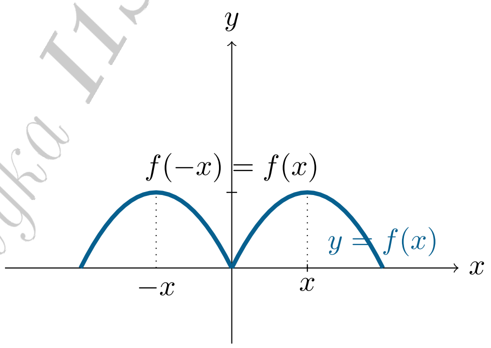
*dla każdego elementu* $x \in A$, *nazywamy* **funkcją obciętą (lub zredukowaną) do zbioru** $A$**.**

**WŁASNOŚCI FUNKCJI:**

Niech $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$.

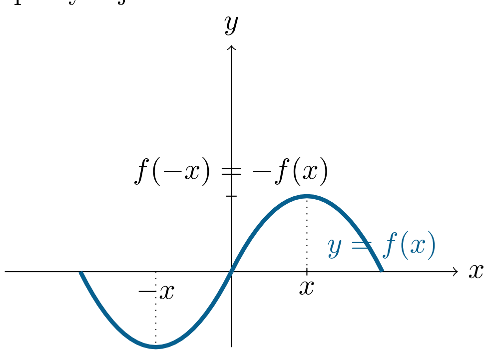
- Funkcja $f$ jest **funkcją parzystą w zbiorze** $X$, jeśli spełnia warunki
$$\bigwedge_{x \in X} \left(-x \in X \wedge f(-x) = f(x)\right).$$
- Funkcja $f$ jest **funkcją nieparzystą w zbiorze** $X$, jeśli spełnia warunki
$$\bigwedge_{x \in X} \left(-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)\right).$$
- Funkcję $f$ nazywamy **funkcją okresową w zbiorze** $X$, jeśli
$$\bigvee_{T \neq 0} \bigwedge_{x \in X} \left((x + T) \in X \ \wedge f(x + T) = f(x)\right),$$
$T$ – okres funkcji $f$. Najmniejszy dodatni okres funkcji $f$ nazywamy okresem podstawowym. (Zwróćmy uwagę, że taki najmniejszy okres nie musi istnieć!)

Obrazowo: funkcja $f$ jest parzysta, gdy oś $oy$ jest osią symetrii jej wykresu.

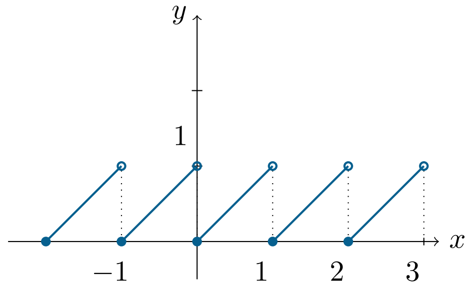



Rysunek 1. Przykładowy wykres funkcji parzystej.

Funkcja $f$ jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.




Rysunek 2. Przykładowy wykres funkcji nieparzystej.



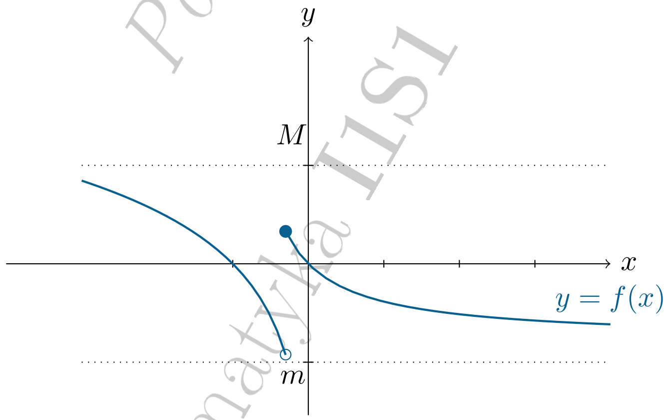

Rysunek 3. Przykładowy wykres funkcji okresowej.

Obrazowo: $T$ jest okresem dla funkcji $f$, gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $\vec{v} = [-T, 0]$ nałoży się na siebie.

**Uwaga 1.** Jeżeli funkcja $f$ jest funkcją okresową o okresie $T$, zaś $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, to funkcja $f_1(x) = f(x) + a$ oraz $f_2(x) = af(x)$ ma ten sam okres, natomiast funkcja $f_3(x) = f(ax)$ ma okres $\dfrac{T}{|a|}$.

**Definicja 7.**

- *Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy* **ograniczoną z góry,**jeśli jej zbiór wartości $f(X)$ jest ograniczony od góry, tzn. jeśli
$$\bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in X} f(x) \leq M.$$
- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną z dołu,**jeśli jej zbiór wartości $f(X)$ jest ograniczony od dołu, tzn. jeśli
$$\bigvee_{m\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in X} m \leq f(x).$$
- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną,** jeśli jest ograniczona od góry i od dołu, tzn. jeśli
$$\bigvee_{m\in\mathbb{R}} \bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in X} m \leq f(x) \leq M.$$




Rysunek 4. Przykładowy wykres funkcji ograniczonej.

**Definicja 8.** *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy* **funkcją różnowartościową (iniekcją) na zbiorze** $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\bigwedge_{x_1,x_2\in X} (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$
lub, równoważnie,
$$\bigwedge_{x_1,x_2\in X} (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)\,.$$

Zastosowanie różnowartościowości do rozwiązywania równań, przedstawia następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli funkcja $f$ jest różnowartościowa na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1$, $x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:*
$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

**Definicja 9.** *Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest* **funkcją „na" (suriekcją) na zbiorze** $X$, jeśli

$$f(X) = Y,$$

tzn. jeśli dla dowolnego $y \in Y$ istnieje taki $x \in X$, że $y = f(x)$.

**Definicja 10.** *Funkcję $f : X \to Y$, która jest jednocześnie iniekcją i suriekcją nazywamy* **bijekcją (funkcją wzajemnie jednoznaczną)**.

**Definicja 11.** *Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy*

- **rosnącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in A} \left(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\right),$$

- **malejącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in A} \left(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\right),$$

- **nierosnącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in A} \left(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\right),$$

- **niemalejącą na zbiorze** $A \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in A} \left(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\right),$$

- **monotoniczną na zbiorze** $A \subset X$ jeżeli jest ona rosnąca, malejąca, nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze.

Funkcje malejące i rosnące nazywamy także funkcjami ściśle monotonicznymi.
Pojęcie funkcji monotonicznej jest przydatne do rozwiązywania pewnych typów nierówności. Korzysta się tu z następujących twierdzeń:

**Twierdzenie 2.** *Jeżeli funkcja $f$ jest rosnąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

**Twierdzenie 3.** *Jeżeli funkcja $f$ jest malejąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność:*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

## OBRAZ I PRZECIWOBRAZ ZBIORU PRZEZ FUNKCJĘ

**Definicja 12.** *Niech $f : X \to Y$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$*

- *Obrazem zbioru $A$ wyznaczonego przez funkcję $f$ nazywamy zbiór:*

$$f(A) = \{y \in Y : \bigvee_{x \in A} y = f(x)\} = \{y \in Y : \bigvee_{x \in X} x \in A \wedge y = f(x)\}.$$

- *Przeciwobrazem zbioru $B$ wyznaczonego przez funkcję $f$ nazywamy zbiór:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}.$$


Rysunek 5. Interpretacja geometryczna obrazu i przeciwobrazu zbioru wyznaczonego przez funkcję.

**Własności obrazów danego zbioru wyznaczonych przez funkcję f**

**Twierdzenie 4.** *Niech $f : X \to Y$. Dla dowolnych $A_1, A_2 \subseteq X$ zachodzą następujące warunki:*

- $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1) \backslash f(A_2) \subseteq f(A_1 \backslash A_2)$

**Twierdzenie 5.** *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją różnowartościową. Dla dowolnych $A_1, A_2 \subseteq X$ zachodzą następujące warunki:*

- $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1) \backslash f(A_2) = f(A_1 \backslash A_2)$

**Własności przeciwobrazów danego zbioru wyznaczonych przez funkcję f**

**Twierdzenie 6.** *Niech $f : X \to Y$. Dla dowolnych $B_1, B_2 \subseteq Y$ zachodzą następujące warunki:*

- $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f(B_2)$
- $f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \backslash B_2)$

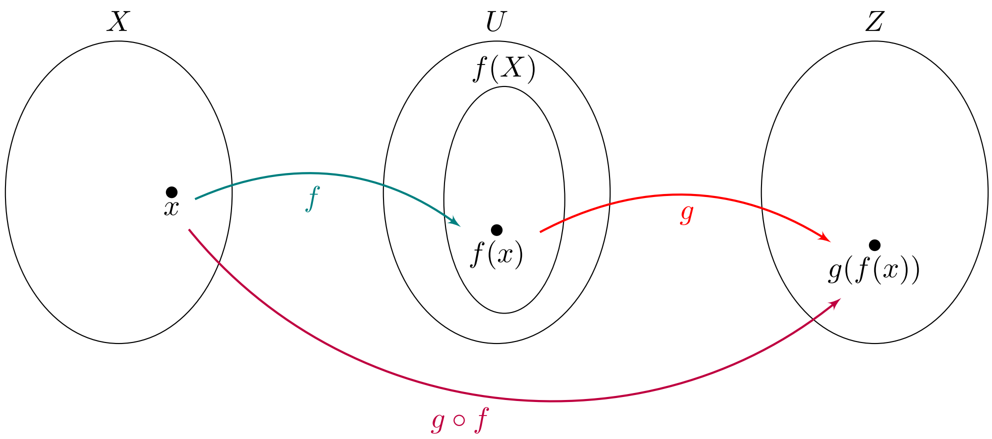
## ZŁOŻENIE (SUPERPOZYCJA) FUNKCJI

**Definicja 13.** *Niech $f : X \to Y$ i $g : U \to Z$. Załóżmy dodatkowo, że $f(X) \subset U$. Funkcję $h : X \to Z$ określoną wzorem*

$$h(x) = g(f(x))$$

*nazywać będziemy* **złożeniem (superpozycją) funkcji $f$ z funkcją** $g$ i oznaczać symbolem $g \circ f$.

Funkcję $f$ przyjęto nazywać funkcją wewnętrzną, zaś $g$ – funkcją zewnętrzną funkcji $h$.




**Własności superpozycji funkcji.**

- Składanie funkcji nie jest przemienne: istnieją takie funkcje $f$ i $g$, że $f \circ g \neq g \circ f$.
- Składanie funkcji jest łączne: dla dowolnych funkcji $f, g, h$ jeżeli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to V$ to $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

**Twierdzenie 7.** *Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to W$.*

- *Jeżeli $f$ i $g$ są funkcjami różnowartościowymi, to $g \circ f$ jest funkcją różnowartościową.*
- *Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są odwzorowaniami „na", to $g \circ f : X \to W$ jest odwzorowaniem „na".*
- *Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są wzajemnie jednoznaczne, to $g \circ f : X \to W$ jest wzajemnie jednoznaczne.*

Z definicji superpozycji funkcji złożonej, funkcji rosnącej i malejącej, wynikają następujące własności:

- złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą,
- złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą,
- złożenie funkcji rosnącej i funkcji malejącej w dowolnej kolejności jest funkcją malejącą.

## FUNKCJA ODWROTNA

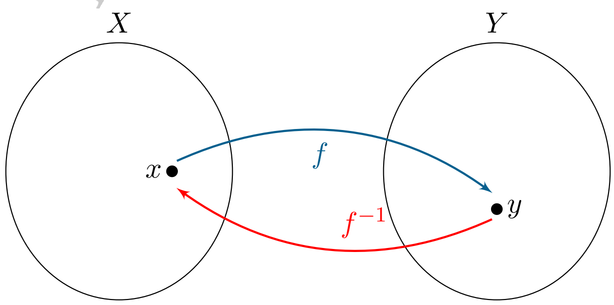
**Definicja 14.** **Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy odwracalną , jeśli istnieje funkcja $g : Y \to X$, taka, że**

$$\bigwedge_{x \in X} g\left(f(x)\right) = x \quad \textbf{oraz} \quad \bigwedge_{y \in Y} f\left(g(y)\right) = y.$$

**Funkcję $g$ mającą powyższą własność nazywamy funkcją odwrotna do funkcji $f$ i oznaczamy $f^{-1}$.**

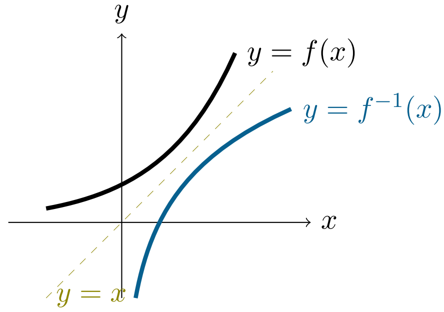
Zatem

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$



**Twierdzenie 8.** *Funkcja $f : X \to Y$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.*

Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwracalna, to jej wykres jest odbiciem symetrycznym względem prostej $y = x$ wykresu funkcji do niej odwrotnej.




Rysunek 6. Przykładowy wykres funkcji $f$ i funkcji do niej odwrotnej $f^{-1}$.

Funkcja odwrotna do funkcji $f$ jest tak samo monotoniczna jak funkcja $f$, o czym mówi następujące twierdzenie

**Twierdzenie 9.** *Jeśli $f$ jest funkcją malejącą (rosnącą), to funkcja do niej odwrotna $f^{-1}$ jest malejąca (rosnąca).*

## FUNKCJE ELEMENTARNE

Podstawowe funkcje elementarne obejmują następujące rodzaje funkcji: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne.

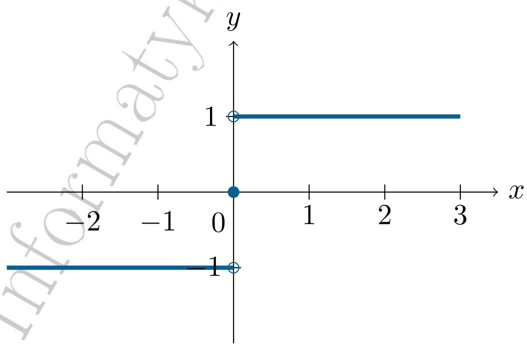
Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej ilości działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji nazywamy funkcjami elementarnymi.

## NIEKTÓRE FUNKCJE NIEELEMENTARNE

1. Funkcję określoną wzorem

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   nazywamy funkcją **signum**.




Rysunek 7. Wykres funkcji signum.

2. Funkcję zmiennej rzeczywistej, która przyjmuje wartość 1, gdy argument jest liczbą wymierną i wartość 0, gdy argument jest liczbą niewymierną nazywamy **funkcja Dirichleta**.

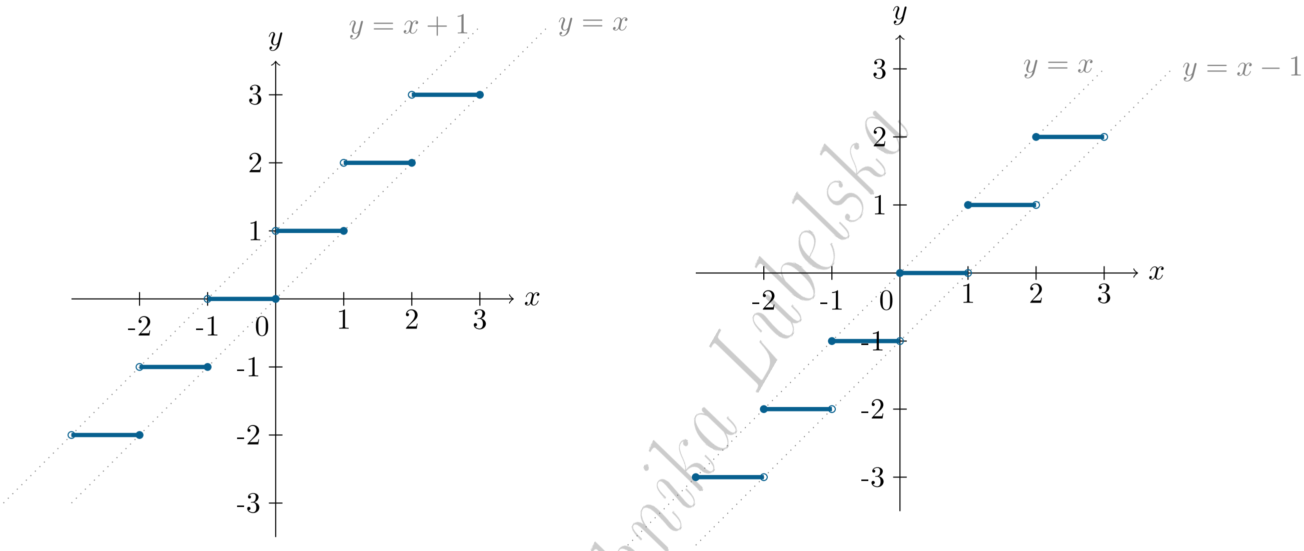
$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. Funkcję całkowitoliczbową $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej $x$ przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od $x$ nazywamy **funkcją podłoga**

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}.$$

4. Funkcję całkowitoliczbową $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej $x$ przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od $x$ nazywamy **funkcją sufit**

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant x\}.$$




(a) $f(x) = \lceil x \rceil$

(b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Rysunek 8. Wykresy funkcji sufit i podłoga.

**Podstawowe własności funkcji podłoga i sufit**

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1,$$

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil,$$

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor,$$

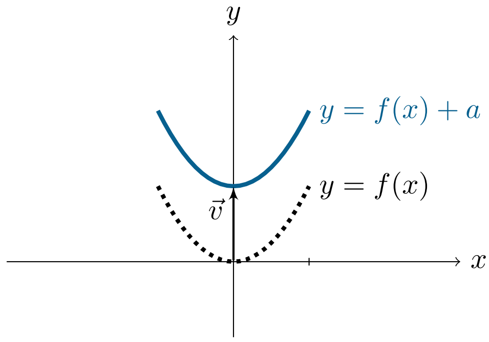
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,$$

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n.$$

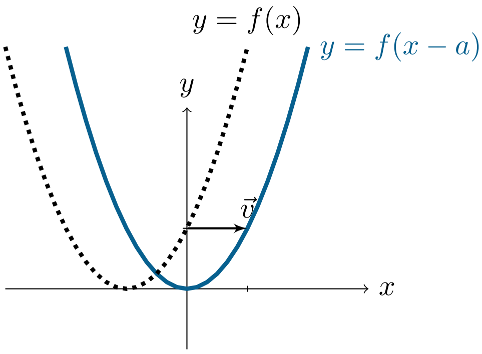
## PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będzie dowolną funkcją i niech liczby $a, b, k \in \mathbb{R}$ spełniają warunki $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$.

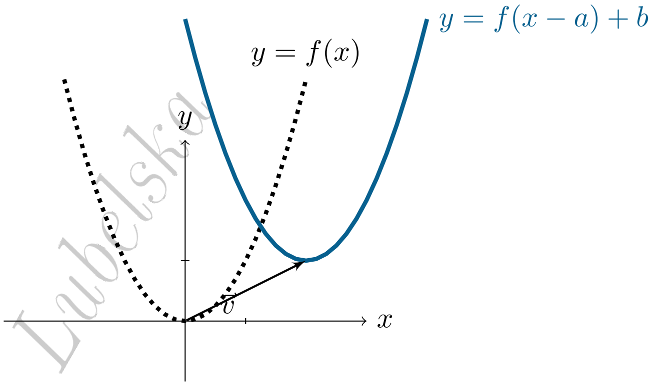
- Wykres funkcji $y = f(x) + a$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [0, a]$.



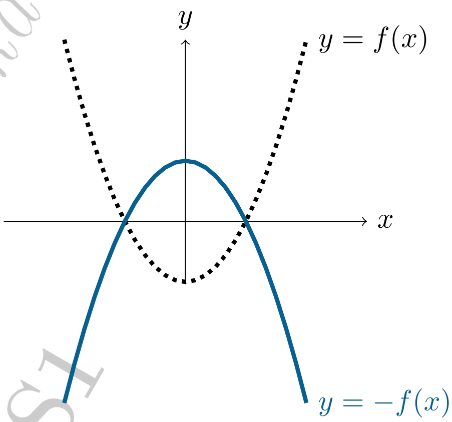
- Wykres funkcji $y = f(x-a)$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a, 0]$.



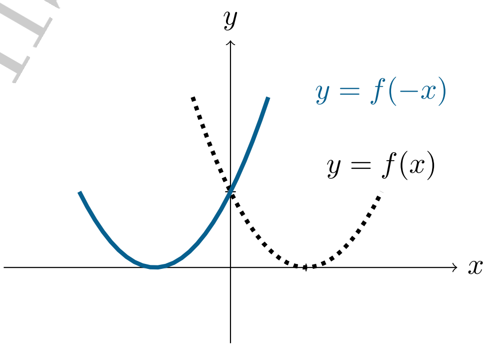

- Wykres funkcji $y = f(x-a) + b$ powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a, b]$.



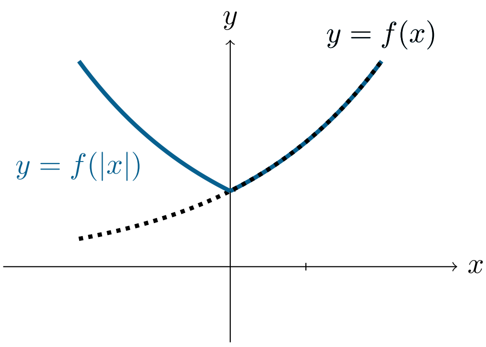

- Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi $ox$.



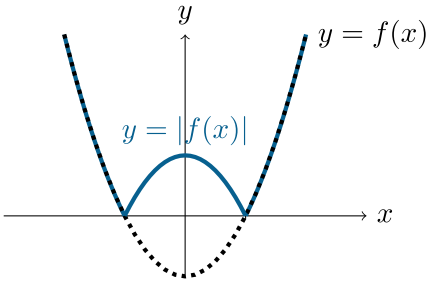

- Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi $oy$.



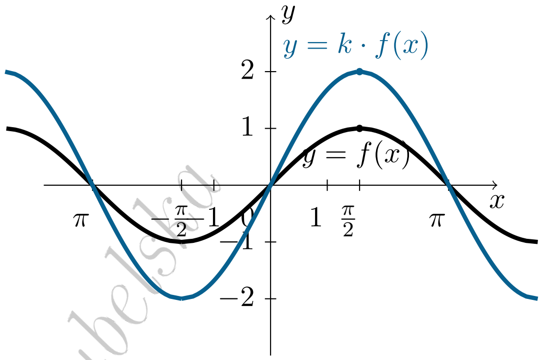

- Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez obcięcie fragmentu, który leży po ujemnej stronie osi $ox$, a następnie uzupełnienie pozostałej jego części o odbicie względem osi $oy$.



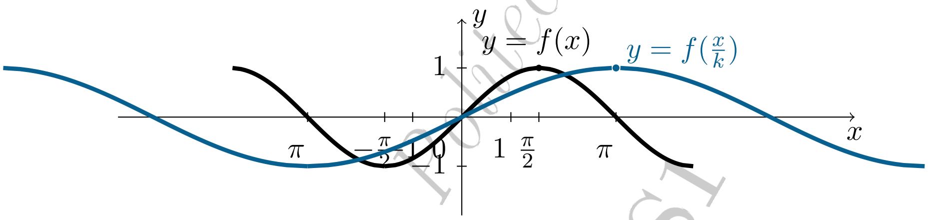
- Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez odbicie względem osi $ox$ fragmentu, który leży po ujemnej stronie osi $oy$, oraz pozostawienie tych części które leżą po nieujemnej części osi $oy$.




- Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi $ox$ i skali $k$. Innymi słowy wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez jego „rozciągnięcie" (o ile $k > 1$) lub „ściśnięcie" (jeśli $k \in (0, 1)$) wzdłuż osi $oy$.




- Wykres funkcji $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi $oy$ i skali $k$.
  Innymi słowy wykres funkcji $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez jego „rozciągnięcie" (jeśli $k > 1$) lub „ściśnięcie" (jeśli $k \in (0, 1)$) wzdłuż osi $ox$.








## ZADANIA

**ZADANIE 1.** Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji:

**a)** $f(x) = \dfrac{(x+7)^2}{(x+7)(x-3)}$;

**b)** $f(x) = \sqrt{3 - 2|x|}$;

**c)** $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{|x|} - 12}$;

**d)** $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{4}{x}} + \sqrt[3]{1+x} + \dfrac{1}{x+1}$;

**e)** $f(x) = \dfrac{x+5}{1 + |x+2|}$;

**f)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x| - 2}}{x - |x+1| + 1}$;

**g)** $f(x) = \sqrt[4]{8 - |3x+6| + |x-2|}$;

**h)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{6 - |x|} \cdot (x-4)}{(x^2 - 6x + 9)(\frac{1}{2}x^2 - 2)}$;

**i)** $f(x) = \sqrt{|x-2| - x - 3}$.

**ZADANIE 2.** Zbadać czy funkcje $f$ i $g$ są równe.

**a)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, $\qquad g(x) = x + 3$;

**b)** $f(x) = \dfrac{(x^2-1)(x+3)}{x-1}$, $\quad g(x) = x^2+4x+3$;

**c)** $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$, $\quad g(x) = 1$;

**d)** $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$, $\quad g(x) = x^2-1$.

**ZADANIE 3.** Zbadać, czy podane funkcje są parzyste czy nieparzyste na swoich dziedzinach naturalnych:

**a)** $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$;

**b)** $f(x) = x^3 + x|x|$;

**c)** $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^5+2x}$;

**d)** $f(x) = \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{x-2}{|x-2|} + \dfrac{x+2}{|x+2|}$.

**e)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-3}$;

**ZADANIE 4.** Wykazać, że funkcja $f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$

- jest malejąca na zbiorze $(-1,\infty)$; ✓
- jest malejąca na zbiorze $(-\infty,-1)$;
- nie jest malejąca na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

**ZADANIE 5.** Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

**a)** $f(x) = 3x-2, \quad \mathbb{R}$;

**b)** $f(x) = x^2+1, \quad \langle 0,\infty)$;

**c)** $f(x) = x^2+x, \quad \langle -\frac{1}{2},\infty)$;

**d)** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}, \quad (-\infty,1)$;

**e)** $f(x) = x^2+3x+3, \quad (-\infty,-\frac{3}{2}\rangle$;

**f)** $f(x) = \dfrac{1}{x-x^2}, (i)\ (-\infty,0); \quad (ii)\ (1,\infty)$;

**g)** $f(x) = x^3, \quad \mathbb{R}$;

**h)** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}, \quad (-\infty,0)$;

**i)** $h(x) = \sqrt{4-x} - 2\sqrt{x}$, dziedzina naturalna.

**ZADANIE 6.** Dana jest funkcja $f(x) = x^2-3x+2$. Wyznaczyć:

**a)** $f(\{1,2\})$,

**b)** $f(\langle 0,1\rangle)$,

**c)** $f(\langle -2,-1\rangle)$,

**d)** $f^{-1}(\{0\})$,

**e)** $f^{-1}(\langle 0,2\rangle)$,

**f)** $f^{-1}((-\infty,-6))$.

**ZADANIE 7.** Dana jest funkcja $f$ oraz zbiory $A$ i$B$. Wyznaczyć obraz $f(A_1), f(A_2)$ i przeciwobraz $f^{-1}(B)$:

**a)** $f(x) = -|5-x|$, $A_1 = \langle -1,5), A_2 = (0,7\rangle$, $B = (-\infty,-5\rangle \cup \{0\}$,

**b)** $f(x) = |x|+1$, $A_1 = \{1\} \cup (2,3)$, $B = (-1,1\rangle$,

**c)** $f(x) = \begin{cases} x-1, & x>0; \\ x, & x\le 0. \end{cases}$ $, A_1 = \langle -2,1\rangle$, $B = \langle -2,1\rangle$.

b) $f(x)=x^3+x|x|$

$f(-x)=f(x)$ parzysta $f(-x)=-f(x)$ nieparzysta

$f(-x)=(-x)^3-x|x|=-x^3-x^2$

$f(-x)=-f(x)$ $-x^3-x|x|=-x^2-x|x|$

---

$f(x)=\frac{x^3-x}{x^5+2x}$

$$\frac{-x^3+x}{-x^5-2x}=\frac{+(x^3-x)}{+(x^5+2x)}$$

parzysta $f(-x)=f(x)$

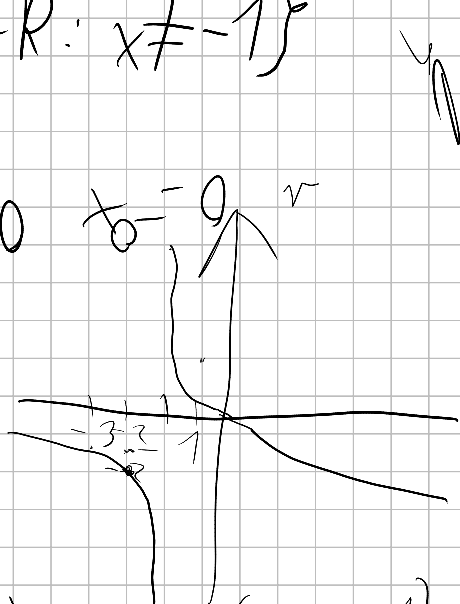
---

$f(x)=\frac{-x}{x+1}$

$D=\{x\in R:\ x\neq -1\}$

MZ:

$\frac{-x}{x+1}=0$ $x_0=0$




$\frac{2}{-1}=-2$

$\frac{3}{-2}=-1{,}5$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$ $f(x)\searrow$ $x\in(-\infty,-1)$

$f(x) \searrow \quad x \in (1, +\infty)$

$f(x) \not\searrow \quad x \in \{1\}$

**ZADANIE 8.** Dane są funkcje $f$ i $g$ określone wzorami

**a)** $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1;$

**b)** $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = |x| - 1;$

**c)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2;$

**d)** $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x + 1;$

**e)** $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x;$

**f)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2x + 1;$

**g)** $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = \sqrt{x-1};$

**h)** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}, \quad g(x) = x^2 - 3;$

**i)** $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ x^2 + 2, & x \geq 0, \end{cases}.$

Dokonując ewentualnego zawężenia dziedzin wyznaczyć złożenia $f \circ g$ i $g \circ f$ oraz znaleźć wzory określające te złożenia.

**ZADANIE 9.** Dane są funkcje $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^4$, $h(x) = \cos x$. Utworzyć złożenia $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ g$, $h \circ f$, $h \circ h$, $f \circ g \circ h$, $h \circ f \circ g$.

**ZADANIE 10.** Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 5$ i $g(x) = \sqrt{3x+1}$. Dokonując ewentualnego zwężenia dziedziny wyznaczyć złożenia $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$.

**ZADANIE 11.** Wskazać funkcje w wyniku złożenia których otrzymano funkcję $h$

**a)** $h(x) = \sqrt[4]{2x - 1};$

**b)** $h(x) = (1 + \sin x)^3;$

**c)** $h(x) = \dfrac{1 + |x|}{2 - 3|x|};$

**d)** $h(x) = \log(x + 1);$

**e)** $h(x) = \sin^2(2x + 1);$

**f)** $h(x) = |2 - \sqrt{x^2 + 3x - 1}|;$

**g)** $h(x) = \cos^3 3x;$

**h)** $h(x) = \sqrt[3]{(1 + x^2)^2}.$

**ZADANIE 12.** Wyznaczyć funkcje odwrotne do danych (o ile takowe istnieją). Naszkicować wykres obu funkcji: danej i odwrotnej.

**a)** $f(x) = 2x - 3;$

**b)** $f(x) = -3x + 2;$

**c)** $f(x) = x^2 - 2x$, $x \geq 1;$

**d)** $f(x) = x^2 - 6x + 7$, $x \geq 3;$

**e)** $f(x) = \sqrt{2x + 4}$, $x \geq -2;$

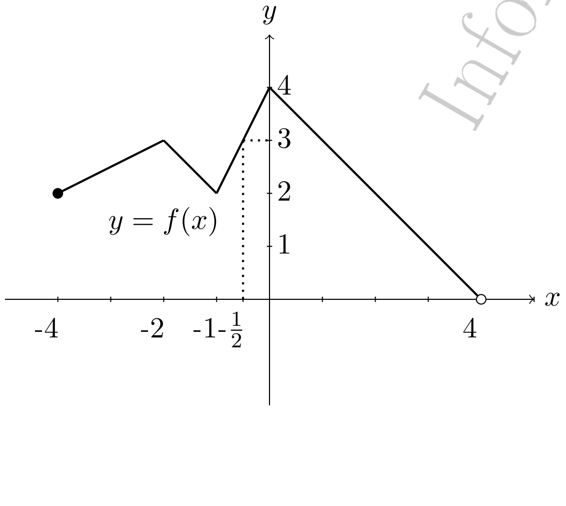
**f)** $f(x) = x^2 + 3x + 3$, $x \leq -\frac{3}{2};$

**g)** $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\};$

**h)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

Zbadać różnowartościowość powyższych funkcji korzystając z definicji.

**ZADANIE 13.** Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicować wykresy funkcji $g_1(x) = \lfloor f(x) \rfloor$ i $g_2(x) = \lceil f(x) \rceil$



**ZADANIE 14.** Naszkicować wykres funkcji $f$, jeśli:

**a)** $f(x) = \operatorname{sgn}(4x + 13)$, **b)** $f(x) = \dfrac{6}{\operatorname{sgn}(x+3)}$, **c)** $f(x) = -\lfloor x \rfloor + 3$, $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

**ZADANIE 15.** Odpowiednio przekształcając wykres funkcji $f$, narysować wykres funkcji $g$:

**a)** $f(x) = x$, $g(x) = |x+1| - 2$;

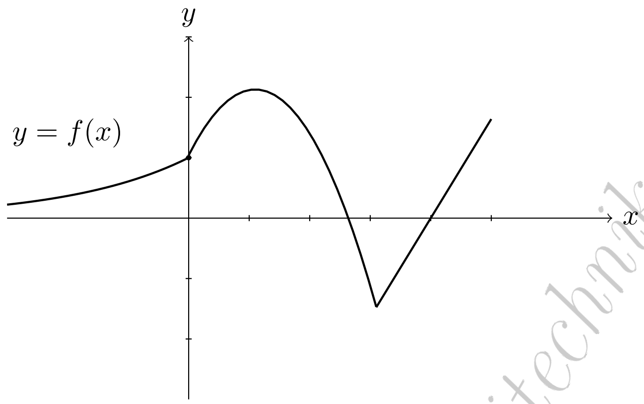
**b)** $f(x) = x$, $g(x) = ||x-1| - 1|$;

**c)** $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = |\sqrt{4-x} - 2|$.

**ZADANIE 16.** Wskazać trzy kolejne przekształcenia wykresów funkcji prowadzące od wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, do wykresu funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory

**a)** $g(x) = f(|x+6|) - 1$; **b)** $g(x) = -|f(x)| + 2$; **c)** $g(x) = |f(x) + 4| + 1$.

**ZADANIE 17.** Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych

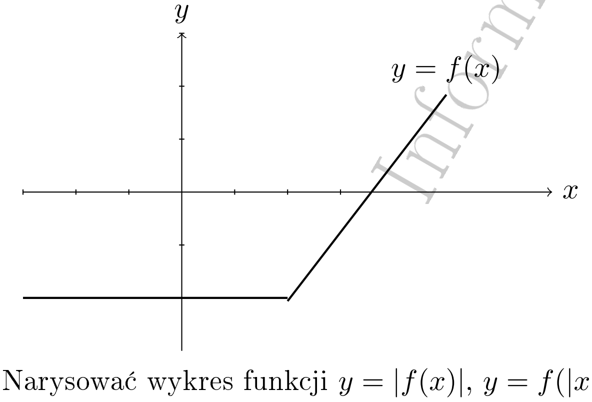



Narysować wykres funkcji $g$ będącej

- przesunięciem o wektor $[2, 0]$ wykresu funkcji $f$,
- przesunięcie o wektor $[0, 1]$ wykresu funkcji $f$,
- przesunięcie o wektor $[2, 1]$ wykresu funkcji $f$,
- odbiciem symetrycznym względem osi $ox$ wykresu funkcji $f$,
- odbiciem symetrycznym względem osi $oy$ wykresu funkcji $f$.

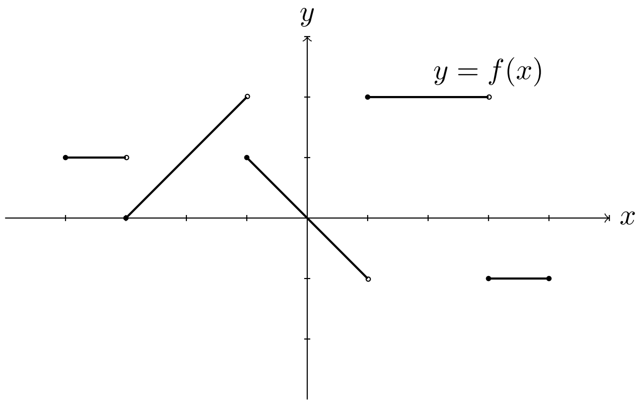
Jakim wzorem jest opisana funkcja $g$?

**ZADANIE 18.** Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych




Narysować wykres funkcji $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ oraz $y = |f(|x|)|$.

**ZADANIE 19.** Dana jest funkcja, której dziedziną jest przedział $\langle -4, 4\rangle$ .




Narysować wykresy funkcji $y = 2f(x)$, $y = 2f(|x|)$, $y = 2f(|x|) - 3$, $y = |2f(|x|) - 3|$.

## ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ZADAŃ

**ZADANIE 1.** ***a)*** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-7, 3\}$; ***b)*** $D_f = \langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$; ***c)*** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-64, 64\}$; ***d)*** $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup \langle 4, \infty)$; ***e)*** $D_f = \mathbb{R}$; ***f)*** $D_f = (-\infty, -2\rangle$; ***g)*** $D_f = \langle -3, 0\rangle$; ***h)*** $D_f = \langle -6, 6\rangle \setminus \{-2, 2, 3\}$; ***i)*** $D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$;

**ZADANIE 12.** *a)* $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$;
*b)* $f^{-1}(x) = \frac{-x+2}{3}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$;
*c)* $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$, $D_{f^{-1}} = \langle -1, \infty)$;
*d)* $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+2}$, $D_{f^{-1}} = \langle -2, \infty)$;
*e)* $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} - 2$, $D_{f^{-1}} = \langle 0, \infty)$;
*f)* $f^{-1}(x) = -\frac{3}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}$, $D_{f^{-1}} = \langle \frac{3}{4}, \infty)$;
*g)* $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
*h)* $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

# Literatura

[1] Kowalczyk R., Niedziałomski K., Obczyński C., *Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium.* PWN, Warszawa 2013.

[2] Skoczylas Z., Gewert M., *Wstęp do analizy i algebry.* Oficyna Wydawnicza GIS, 2011

[3] Bryński N., Dróbka K., Szymański K., *Matematyka dla zerowego roku studiów wyższych.* PWN, Warszawa 1994.

[4] Kiełbasa A., *Matura z Matematyki, poziom podstawowy i rozszerzony część I.* Wydawnictwo 2000, 2006.

[5] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników klasa I-IV.* Wydawnictwo Pazdro, Warszawa 1999.

[6] Leksiński W., Macukow B., Żakowski W., *Matematyka dla maturzystów. Definicje, twierdzenia, wzory, przykłady.* WNT, Warszawa 1992.

[7] Leksiński W., Macukow B., Żakowski W., *Matematyka dla maturzystów. Zadania.* , WNT, Warszawa 1997.

[8] Topp J. *Wstęp do matematyki.* , Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2015.