

# 컴퓨터 그래픽스

## 제8장 3차원 객체의 모델링

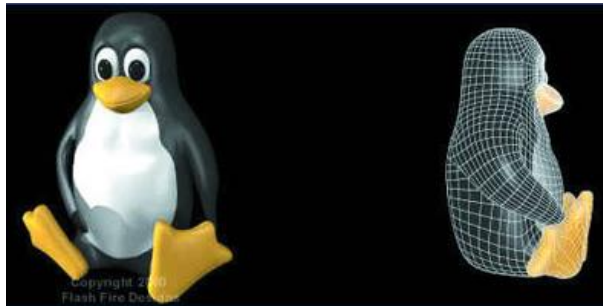
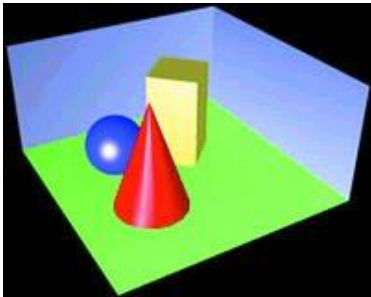
2017년 2학기

## 8장 학습 내용

- 3차원 객체의 모델링
  - 다각형 면
  - 평면 방정식
  - 스플라인

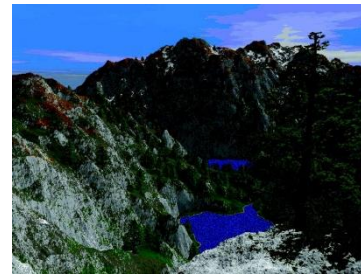
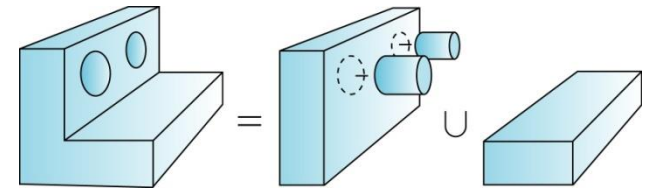
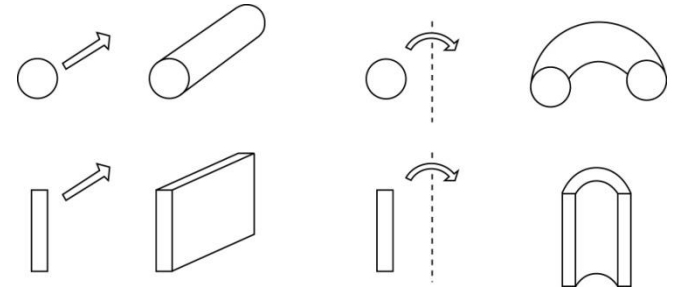
# 객체 모델링

- 3차원 객체 표현
  - 다각형 면이나 2차 곡면을 이용하여 객체 표현
    - 매시 (Mesh, 삼각형이나 사각형을 서로 연결하여 사용)로 표현
  - 임의의 모양을 가진 3차원 객체를 표현
  - 곡선 또는 곡면 함수를 이용하여 부드러운 물체 표현
    - Bezier 곡선, 스플라인(Spline), NURBS 곡선 및 곡면



# 객체 모델링

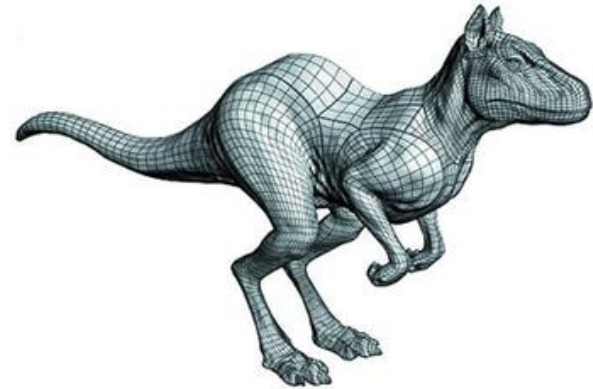
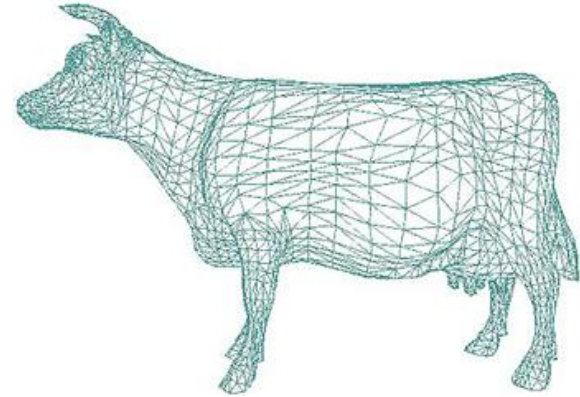
- 스위핑 (Sweeping) 기법을 이용
  - 간단한 평면 도형을 공간상에서 이동 또는 회전시켜 복잡한 3차원 객체를 생성하는 기법
  - 원 → 원기둥, 도우넛...
- CSG (Constructive Solid Geometry, 조립적 입체기하학) 기법 이용
  - 기본적인 3차원 개체들을 집합 연산시켜 새로운 객체를 만들어내고, 이를 반복함으로서 점차 복잡한 객체를 생성한다.
- 프랙탈 기하학 또는 입자시스템 이용
  - 기본 객체를 규칙에 따라 반복적으로 처리하여 자연물과 같은 불규칙적인 모습의 객체를 규칙적으로 모델링한다.



# 다각형 면 모델링

- 다각형 매시 표현

- 곡면을 삼각형이나 사각형으로 구성된 그물 형태로 표현한 그래픽 표현 기법
  - 삼각 매시법(Triangular Mesh): 삼각형을 이용하여 곡면을 표현하는 기법
  - 사각 매시법(Quadrilateral Mesh): 사각형을 이용
- 삼각형 면: 1차 방정식 ( $Ax + By + Cz + D = 0$ )를 이용
  - 공간상에 일직선상에 놓여있지 않은 3 점을 이용하여 하나의 평면을 구성



# 평면 방정식

- 다각형 면은 평면으로 구성

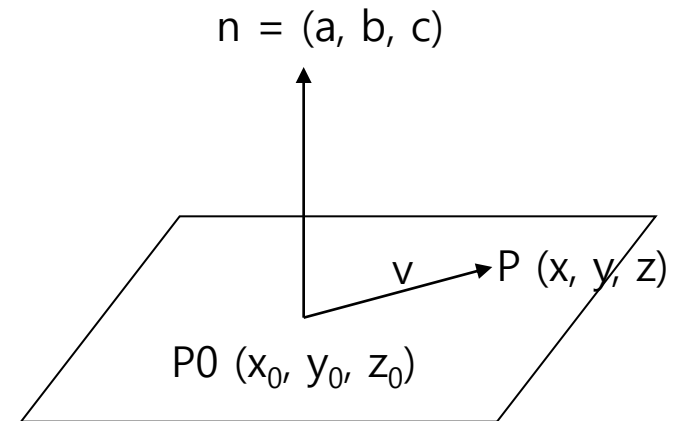
- 평면 방정식 유도:

- $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 이 평면 위의 점이고  $n = (a, b, c)$ 는 평면에 수직인 벡터일 때, 임의의 점  $P(x, y, z)$ 이 평면 위의 점이라면, 벡터  $v = P - P_0$ 도 평면 위의 벡터이다.

- $n \cdot v = 0$
    - $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
    - $ax + by + cz + d = 0,$   
 $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

- 임의의 세 점  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ 으로 평면 구성할 때, 평면 방정식은

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



# 평면 방정식

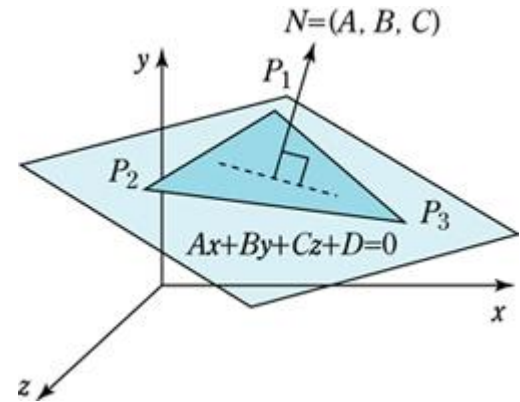
Cramer's rule에 의해서 계수는,

$$A = y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)$$

$$B = z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)$$

$$C = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

$$D = -x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$$



- 공간상에 점과 평면과의 위치

- 점 P가  $Ax + By + Cz + D < 0$ 이면 → 평면의 안쪽
- 점 P가  $Ax + By + Cz + D = 0$ 이면 → 평면 위
- 점 P가  $Ax + By + Cz + D > 0$ 이면 → 평면의 바깥쪽

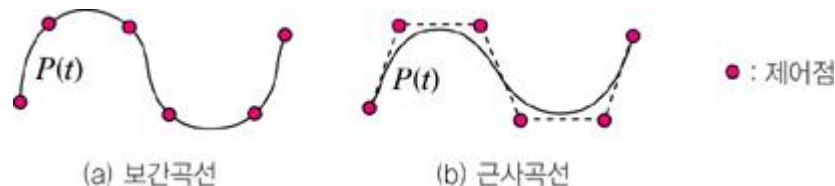
# 스플라인 곡선

- 스플라인 (Spline)

- 간단한 다항식(Polynomial)으로 표현되는 부드러운 형태의 곡선
- 곡선의 중요한 위치를 나타내는 제어점을 지정하여 곡선의 형태를 만들 수 있다.
- 용도: 곡선 설계, 곡면 설계, 애니메이션의 동작 경로

- 스플라인 종류

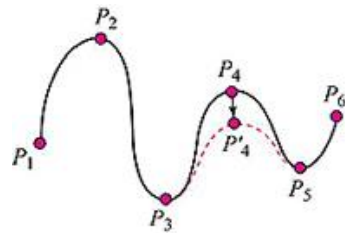
- 보간 스플라인 (Interpolate spline): 주어진 점을 모두 지나는 부드러운 곡선
  - 일반 스플라인 곡선
- 근사 스플라인 (Approximate spline): 주어진 점들을 지나지 않으면서 제어점을 연결하는 선들의 모양에 근사하는 부드러운 곡선
  - 부드러움을 위해 제어점을 통과하지 않고 제어점은 곡선을 끌어당기는 역할을 한다.
  - 베지어 곡선, B-스플라인 곡선, NURBS 곡선0



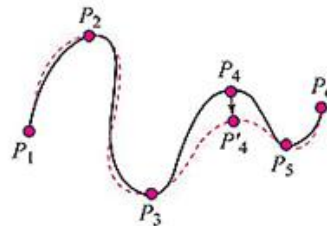


# 스플라인 곡선

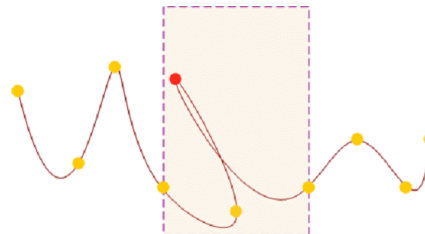
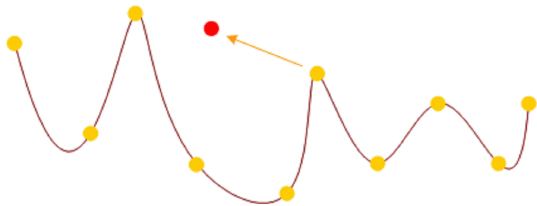
- 곡선의 국부 제어 (Locality): 제어점 하나가 바뀔 때 영향을 미치는 부분
  - 제어점 하나를 이동시켰을 때, 제어점과 인접한 일부분의 모양만 바뀌면 국부 제어 가능
  - 제어점 하나를 이동시켰을 때, 곡선 전체의 모양이 바뀌면 국부 제어가 가능하지 않다.



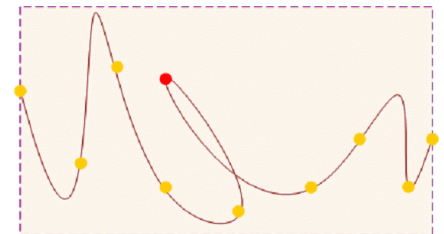
(a) 국부제어가 되는 경우



(b) 국부제어가 되지 않는 경우



(a)

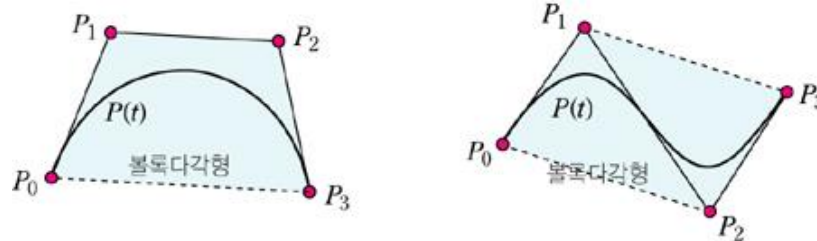


(b)

# 스플라인 곡선

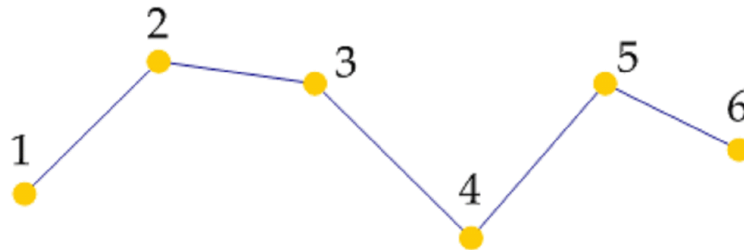
- Convex hull (볼록 다각형):

- 제어점들을 모두 둘러싸고 있는 최소 면적의 볼록한 형태의 경계
  - 구간별 3차 다항식: 4개의 인접한 제어점
  - 구간별 2차 다항식: 3개의 인접한 제어점
- 스플라인 곡선이 항상 볼록다각형 내부에 존재 → 곡선의 형태 파악



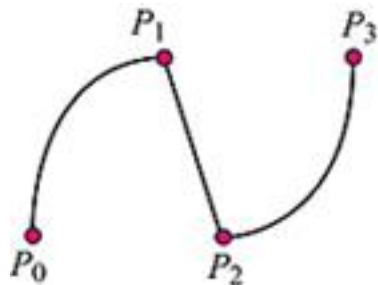
- Control graph (제어 그래프):

- 근사 곡선에서 제어점들을 연결한 직선 형태

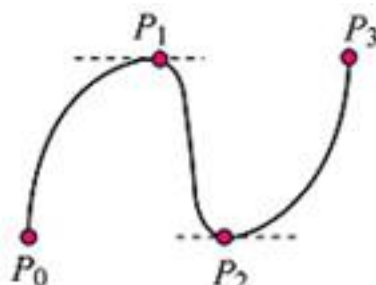


# 스플라인 곡선의 연속성

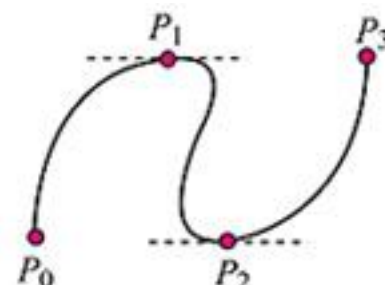
- 스플라인 곡선  $P(x, y, z)$ 의 매개변수 형태
  - $x = x(u), y = y(u), z = z(u) \quad 0 \leq u \leq 1$
  - $n$ 차 스플라인: 변수  $x, y, z$  가 매개변수  $u$ 의  $n$ 차식으로 표현되는 스플라인
- Continuity: 분할된 곡선을 연결하여 하나의 긴 곡선을 설계할 때 연결되는 지점에 다양한 연결 조건
  - $C^0$ 연속성: 두 곡선이 단순히 연결, 양쪽 곡선의 좌표 값이 동일
  - $C^1$ 연속성: 곡선의 기울기가 동일, 즉, 1차 도함수가 동일 (접선 벡터의 방향이 동일하다)
  - $C^2$ 연속성: 양쪽 곡선의 곡률이 동일, 즉, 1차 및 2차 도함수가 동일



(a) 곡선의  $C^0$  연속성



(b) 곡선의  $C^1$  연속성



(c) 곡선의  $C^2$  연속성

## 3차 스플라인 곡선

- 변수  $x, y, z$ 가 매개변수  $u$ 의 3차 식으로 표현
- $n+1$ 개의 제어점이 주어지고 이들 제어점을 보간하는  $n$ 개의 곡선으로 구성
- $C^1$  및  $C^2$  연속성을 만족
- 다음의 다항식을 만족
  - $x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$
  - $y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y$
  - $z(u) = a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z$
  - 위의 식의 행렬 형태,

단,  $0 \leq u \leq 1$

$$x(u) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \bullet$$

$$= U \bullet C \quad (U: \text{매개변수 } u \text{의 행렬} \quad C: \text{계수 행렬})$$

$$= U \bullet M_{\text{spline}} \bullet M_{\text{geom}}$$

$M_{\text{geom}}$ : 경계조건 행렬

$M_{\text{spline}}$ : 커브의 모양을 나타내는 행렬

# 허마이트 스플라인 (Hermite Spline)

- 스플라인 조건:

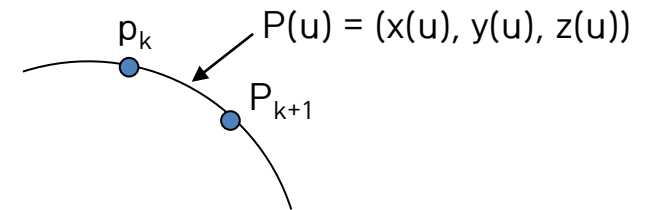
- 제어점과 기울기 값에 의해서 스플라인 커브를 결정
- 두 끝점에 관계되기 때문에 부분적으로 바꿀 수 있다.
- $P(u)$ : 제어점  $p_k$ 와  $p_{k+1}$  사이의 매개변수 3차원 함수

$$P(0) = p_k$$

$$P(1) = p_{k+1}$$

$$P'(0) = Dp_k$$

$$P'(1) = Dp_{k+1}$$



- $P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d \quad 0 \leq u \leq 1$

$$\text{행렬: } P(u) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

- $P'(u) = 3au^2 + 2bu + c$

$$\text{행렬: } P(u) = [3u^2 \ 2u \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

## 허마이트 스플라인 (Hermite Spline)

- 위의 식에서  $u$ 에 0과 1을 넣어 다시 풀면,

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ Dp_k \\ Dp_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

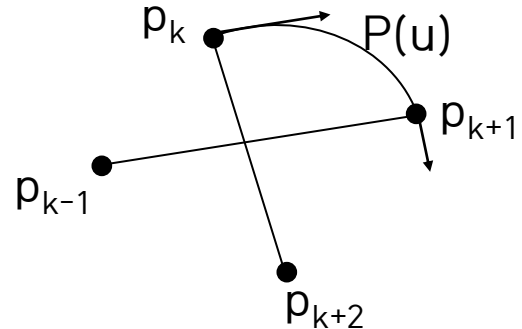
- $P(u) =$

# 카디널 스플라인

- 스플라인 조건:

- 각 곡선 부분의 경계에서 지정된 끝점 접선으로 3차 곡선들을 보간한다
- 제어점의 기울기 값은 두 이웃 제어점 좌표로부터 계산된다.
  - 4개의 연속되는 제어점으로 지정
    - 중간 두 제어점은 부분 끝점
    - 다른 두 제어점은 끝점 기울기 계산에 사용

- $P(0) = p_k$
- $P(1) = p_{k+1}$
- $P'(0) = \frac{1}{2}^* (1-t)^* (p_{k+1} - p_{k-1})$
- $P'(1) = \frac{1}{2}^* (1-t)^* (p_{k+2} - p_k)$



- $t$  (tension 매개변수): 스플라인이 입력 제어점에 얼마나 느슨하게 또는 단단하게 맞춰지는지 제어
  - »  $t < 0$  : 느슨한 곡선       $t > 0$ : 타이트한 곡선

# 카디널 스플라인

- 위의 식을 행렬로 풀면

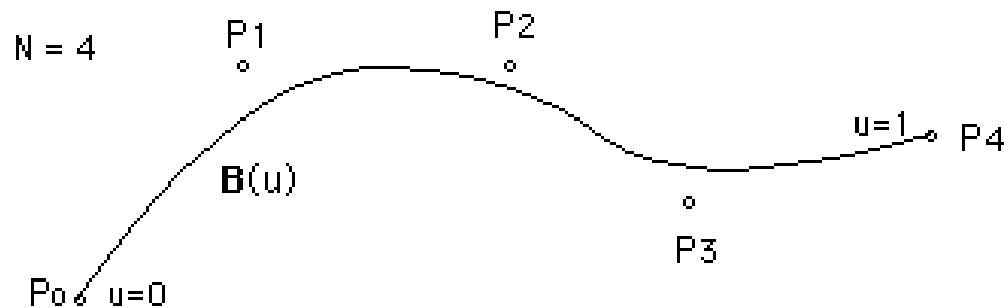
$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ s(p_{k+1} - p_{k-1}) \\ s(p_{k+2} - p_k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$



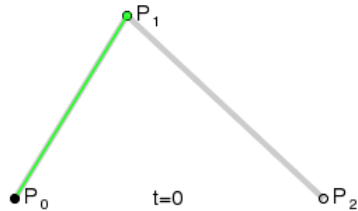
# 베지에 곡선

- 다항식으로 표현되는 근사곡선
  - CAD에서 많이 사용되는 커브
  - 주어진 제어점의 위치에 의해 곡선의 형태가 결정되는 근사곡선
  - 어떤 숫자의 제어점에도 베지에 커브는 적용될 수 있다.
  - 제어점의 수는 베지어 다항식의 차수를 결정
    - 2개의 제어점: 두 점 사이의 선분
    - 3개의 제어점: 2차원 곡선
    - 4개의 제어점: 3차원 곡선

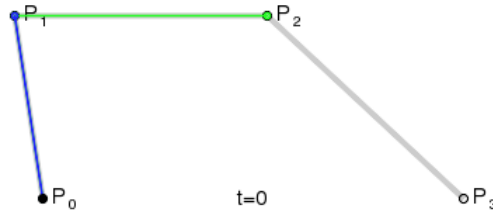


# 베지에 곡선

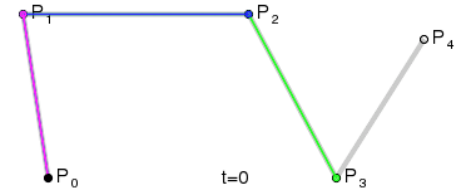
- 제어점 중 처음과 끝 점을 빼고는 보통 어느 조절점과도 만나지 않는다.



2차원 커브



3차원 커브



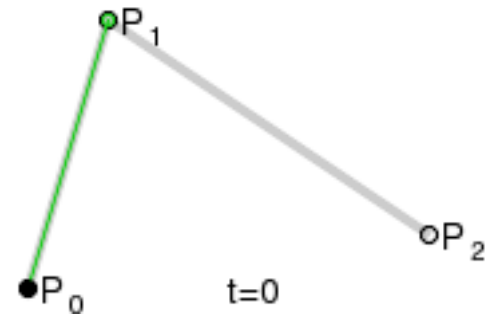
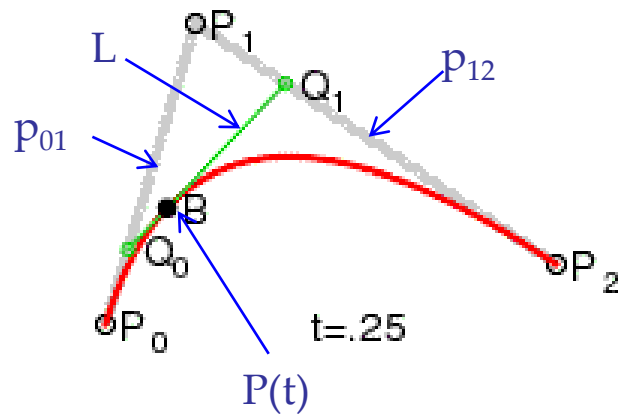
4차원 커브

- 곡선은, 항상 제어점으로 이루어진 다각형 안에 들어가고, 곡선이 조절점들 사이에서 크게 벗어나지 않는다.
- 배합함수(Blending Function)
  - 어느 한 점에서 각 제어점이 미치는 영향
  - 제어점의 차수보다 하나 작은 다항식

# 베지에 곡선

- 3개의 제어점을 가진 베지에 곡선

- $p_{01}(t) = (1-t)p_0 + tp_1$
- $p_{12}(t) = (1-t)p_1 + tp_2$
- $p(t) = (1-t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)$



# 베지에 곡선

- 4개의 제어점을 가진 베지에 곡선

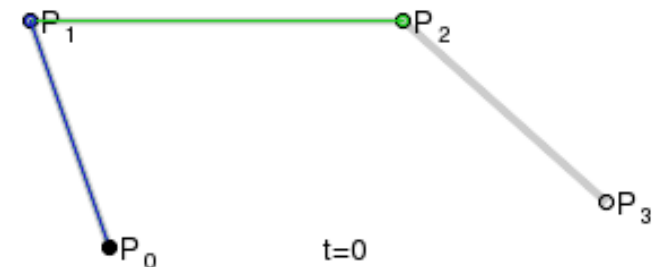
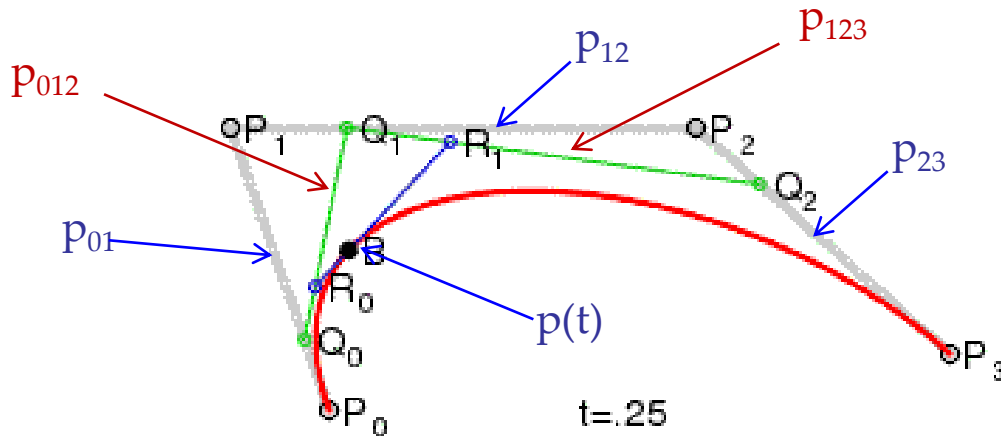
- $p_{012}(t) = (1-t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)$
- $p_{123}(t) = (1-t)p_{12}(t) + tp_{23}(t)$
- $p(t) = (1-t)p_{012}(t) + tp_{123}(t)$   

$$= (1-t) \{ (1-t)p_{01}(t) + tp_{12}(t) \} + t \{ (1-t)p_{12}(t) + tp_{23}(t) \}$$
  

$$= (1-t) [ (1-t) \{ (1-t)p_0 + tp_1 \} + t \{ (1-t)p_1 + tp_2 \} ]$$
  

$$+ t [ (1-t) \{ (1-t)p_1 + tp_2 \} + t \{ (1-t)p_2 + tp_3 \} ]$$
  

$$= p_0(1-t)^3 + 3p_1t(1-t)^2 + 3p_2t^2(1-t) + p_3t^3$$



# 베지에 곡선

- 베지에 곡선/곡면으로 생성된 객체

