컴퓨터 그래픽스
제4장 2차원 그래픽스의 기본 요소

2017년 2학기

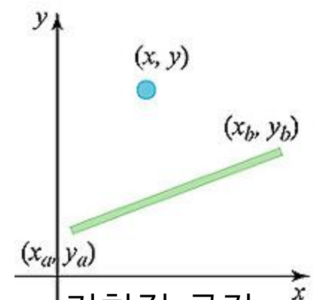
4장 학습 내용

- **2차원 그래픽스 기본 요소**
  - 점
  - 선
  - 원
  - 영역 채우기
  - 앨리어싱 효과

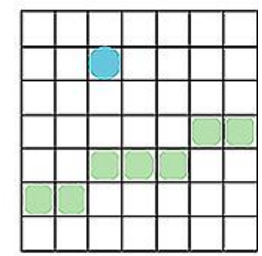
점과 선의 정의 및 속성

- 2차원 그래픽스의 기본적인 출력 요소
  - 점, 선, 다각형, 원, 타원, 곡선, 문자 등
  - 점과 선은 모든 2차원 그래픽스 객체 표현의 기본 요소

- 점 (Point)
  - 래스터 방식의 출력장치에서의 기본 요소
    - 점의 속성: 크기, 명암, 색상, 모양 등
  - 기하공간에서의 점: 좌표 (x, y)



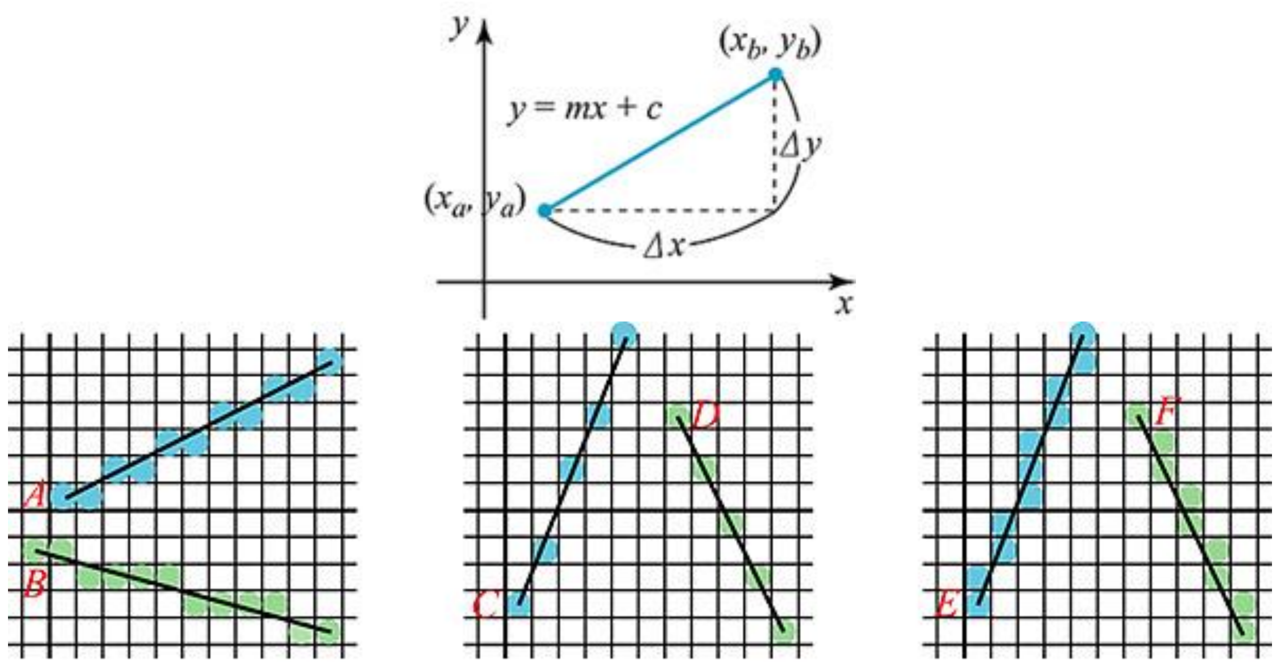
기하적 공간


출력장치 공간

- 선 (Line)
  - 시작점 (x_a, y_a)과 끝점 (x_b, y_b) 또는 시작점 좌표 (x_a, y_a)와 증가 값 (Δx, Δy)의 상대좌표로 정의
    - 선의 속성: 유형, 굵기, 색상, 선 끝 모양 등
  - 직선 방정식을 이용하여 선의 좌표 값 구하기
    - $y = mx + c$ m: 기울기 c: y축 절편
    - 두 끝점 (x1, y1) (x2, y2)를 사용하여 m과 c를 구한다
      - $m = (y2 - y1) / (x2 - x1)$
      - $c = y1 - mx1$

선 그리기: DDA 알고리즘

- DDA (Digital Differential Analyzer) 알고리즘
  - 선의 양끝 좌표로부터 래스터 출력 장치로 변환하는 가장 기본적인 알고리즘
  - 선의 공식을 y = mx + c의 형태로 계산
  - 0 $\leq$m $\leq$1 인 경우, x를 1씩 증가시키면 y값은 m만큼 증가
  - m >1인 경우, 그 반대로 y를 매번 1씩 증가시키면 x값이 $\frac{1}{m}$만큼씩 증가
  - 기울기 m이 음수인 경우, x 증가에 따라 y값이 증가 대신 감소



선 그리기: DDA 알고리즘

- **초기화를 한다.**
  - $\triangle x = x_b - x_a$, $\triangle y = y_b - y_a$,
  - $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
  - $x_1 = x_a$, $y_1 = y_a$

- **기울기에 m의 값에 따라 다음계산을 수행한다.**
  - 기울기 $|m| \leq 1$인 경우, 매번 k+1번 째 점에서 $(1 \leq k \leq \Delta x)$

    $x_{k+1} = x_k + 1$

    $y_{k+1} = y_k + m$

    y_{k+1}의 래스터 좌표 = $Round(y_{k+1})$

  - 기울기 $|m|>1$ 인 경우, 매번 k+1번 째 점에서 $(1 \leq k \leq \triangle y)$

    $y_{k+1} = y_k + 1$

    $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m}$

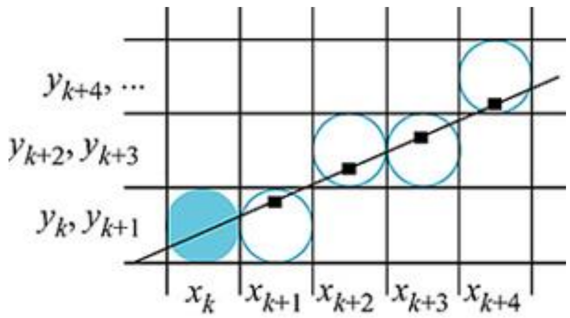
    x_{k+1}의 래스터 좌표 = $Round(x_{k+1})$

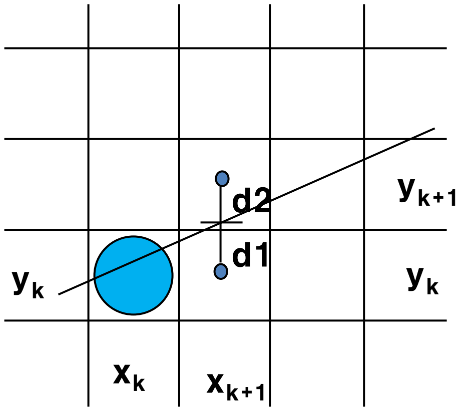
선 그리기: DDA 알고리즘

- DDA 알고리즘의 특징
  - 곱하기가 없이 소수점(Floating-point) 더하기 연산만을 반복
  - 부동 소수 연산 사용, 정수연산에 비해서는 상대적으로 속도가 떨어진다.
  - 반올림 연산 함수의 실행시간이 걸린다.
  - 매번 정수좌표를 구할 때마다 오차가 축적

선 그리기: 브레즌햄 알고리즘

- Bresenham 알고리즘
  - 선을 구성하고 있는 어느 한 점의 다음 점은 반드시 오른쪽 점 또는 오른쪽 바로 위의 점이 된다.
  - 가능한 두 점 중, 실 선과 두 개의 가능한 점의 차이 (아래 그림에서 d1과 d2)가 더 작은 점을 선택하여 선을 나타내는 알고리즘
  - 소수점 계산 없이 정수의 더하기 연산과 이동 연산만으로 처리되므로 속도가 빠르다.





선 그리기: 브레즌햄 알고리즘

- 알고리즘 초기화
  - 기울기가 1보다 작은 경우 (|m| < 1):
    - y = mx + c, m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
      - 시작점: (x_a, y_a),
      - 가능한 두 점: (x_a+1, y_a), (x_a+1, y_a+1)

      - 일반적인 k번째 점: (x_k, y_k),
      - 가능한 두 점: (x_k+1, y_k), (x_k+1, y_k+1)

선 그리기: 브레즌햄 알고리즘

– **다음 점 x_{k+1} 에서**

$y = mx_{k+1} + c$

$d_1 = y - y_k \qquad = m(x_k + 1) + c - y_k$

$d_2 = (y_k + 1) - y \qquad = (y_k + 1) - (m(x_k + 1) + c)$

$\mathbf{d_1 - d_2} = \{m(x_k + 1) + c - y_k\} - \{y_k + 1 - (m(x_k + 1) + c)\}$

$= 2m(x_k + 1) - 2y_k + 2c - 1$ ($d_1 - d_2$: 두 거리 사이의 차이)

– **양변에 Δx를 곱한다**

– **($d_1 - d_2$) Δx 를 p_k (판단매개변수)라고 하면 (m = △y / △x)**

$p_k = (d_1 - d_2)\,\Delta x$

$p_k = 2\,\Delta y\,(x_k + 1) + \Delta x(-2y_k + 2c - 1) = 2\,\Delta y x_k - 2\,\Delta x y_k + 2\,\Delta y + \Delta x\,(2c - 1)$

p_k 에 p_{k+1}를 대입하면,

$p_{k+1} = 2\,\Delta y \cdot x_{k+1} - 2\,\Delta x y_{k+1} + 2\,\Delta y + \Delta x(2c - 1)$

$p_{k+1} - p_k = 2\,\Delta y\,(x_{k+1} - x_k) - 2\,\Delta x\,(y_{k+1} - y_k)$

$p_{k+1} = p_k + 2\,\Delta y - 2\,\Delta x\,(y_{k+1} - y_k)$

선 그리기: 브레즌햄 알고리즘

– p_k의 부호에 따라

$p_k \geqq 0 \rightarrow d_1 - d_2 \geqq 0 \rightarrow d_1 \geqq d_2 \rightarrow y_{k+1} = y_k + 1$

$p_k < 0 \rightarrow d_1 - d_2 < 0 \rightarrow d_1 < d_2 \rightarrow y_{k+1} = y_k$

$p_k \geqq 0 \rightarrow p_{k+1} = p_k + 2(\Delta y - \Delta x)$ $(y_{k+1} - y_k == 1)$

$p_k < 0 \rightarrow p_{k+1} = p_k + 2\Delta y$ $(y_{k+1} - y_k == 0)$

따라서 $p_k < 0$ 이면 → 다음 점은 (x_k+1, y_k)

$0 \leq p_k$ 이면 → 다음 점은 (x_k+1, y_k+1)

– 시작점: (x_a, y_a)일 때 첫 번째 매개변수 값은,

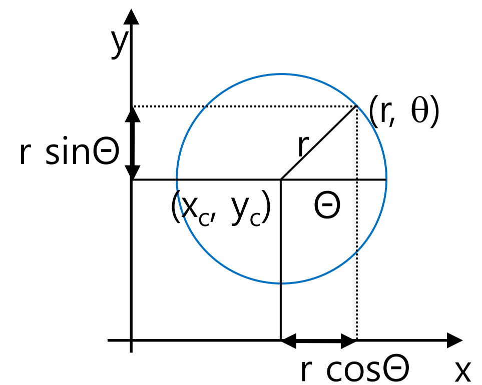
$$
\begin{aligned}
p1 &= 2\Delta y x_k - 2\Delta x y_k + 2\Delta y + \Delta x(2c - 1) \\
&= 2\Delta y x_a - 2\Delta x y_a + 2\Delta y + \Delta x(2c - 1) \\
&= 2\Delta y x_a - 2\Delta x(m x_a + c) + 2\Delta y + \Delta x(2c - 1) \\
&= 2\Delta y x_a - 2(\Delta y x_a + \Delta x c) + \Delta y + \Delta x(2c - 1) \\
&= 2\Delta y - \Delta x
\end{aligned}
$$

선 그리기: 브레즌햄 알고리즘

- **브레즌햄 선 그리기 알고리즘 정리:**
  - 기울기가 0과 1 사이인 경우에 적용
  - 초기값을 구한다.
    - 시작점의 좌표: (x1, y1)
    - $C1 = 2\Delta y$ $C2 = 2(\Delta y - \Delta x)$
    - $p1 = 2\Delta y - \Delta x$
  - 판별식 pk값에 따라 다음 점의 위치를 구한다.
    - $pk < 0 \rightarrow$ 다음 점: $(x_k + 1, y_k)$ $p_k+1 = p_k + C1$
    - $pk \geq 0 \rightarrow$ 다음 점: $(x_k + 1, y_k + 1)$, $p_k+1 = p_k + C2$

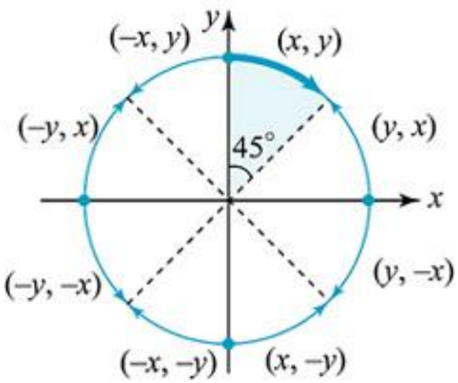
원 그리기

- **원이나 타원 등 곡선은 매개변수 형태의 함수로 표현된다.**
  - $y = f(x)$ 또는 $x = g(\theta)$, $y = h(\theta)$
  - 점들을 선분으로 연결하여 곡선의 모양을 근사적으로 그린다.
  - 원의 공식: $x^2 + y^2 = r^2$
  - 직교 좌표계에서 (x, y) 를 함수 형태로 표현하면
    $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$
  - 극 좌표계 (Polar Coordinate)에서 매개변수 함수로 표현하면
    - $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
  - 원의 중심이 (xc, yc) 일 때는,
    - 원의 공식은 $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$
    - 극좌표식은 $x = x_c + r\cos\theta$,
      $y = y_c + r\sin\theta$



원 그리기: 브레즌햄 알고리즘

- Bresenham 알고리즘
  - 제곱근이나 삼각함수 등의 계산이 없이 정수 연산만으로 처리
  - 각도가 $45 \leq \theta \leq 90$'인 부분에 대하여 계산
  - x방향으로 1만큼 증가 → y축에서는 같은 점 또는 1감소된 점: k번째 점(x_k, y_k) → k+1번째 점 (x_k+1, y_k) 또는 (x_k+1, y_k-1)

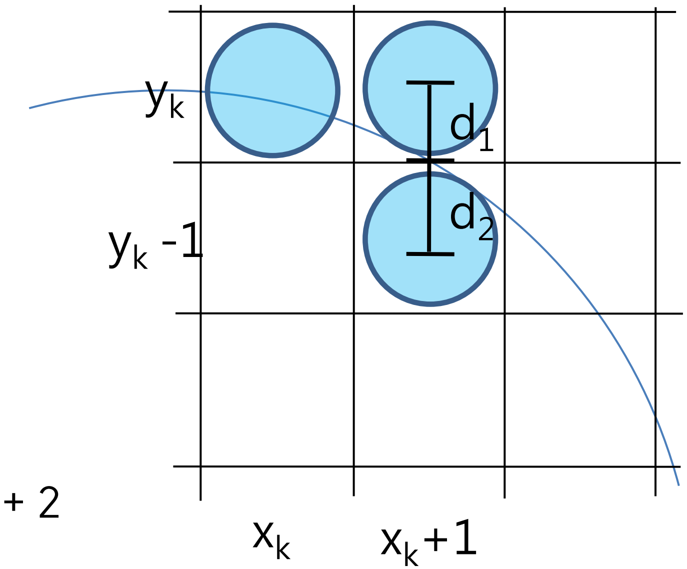


원 그리기: 브레즌햄 알고리즘

– $x_k < y_k$인 동안 반복

$x^2 + y^2 = r^2$

$y^2 = r^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad y_{k+1}^2 = r^2 - (x_k + 1)^2$



$d_1 = y_k^2 - y^2$

$d_2 = y^2 - (y_k - 1)^2$

$p_k = d_1 - d_2 = (y_k^2 - y^2) - \{y^2 - (y_k - 1)^2\}$

$p_{k+1} = (y_{k+1}^2 - y^2) - \{y^2 - (y_{k+1} - 1)^2\}$

$p_{k+1} - p_k = 2\, y_{k+1}^2 - 2\, y_k^2 - 2\, y_{k+1} + 2\, y_k + 4(x_k + 1) + 2$

$p_k < 0 \rightarrow d_1 - d_2 < 0$

다음 점은 $y(x_k + 1, y_k)$ $\quad p_{k+1} = p_k + 4x_k + 6$

$p_k >= 0 \rightarrow d_1 - d_2 >= 0$

다음 점은 $(x_k + 1, y_k - 1)$ $\quad p_{k+1} = p_k + 4(x_k - y_k) + 10$

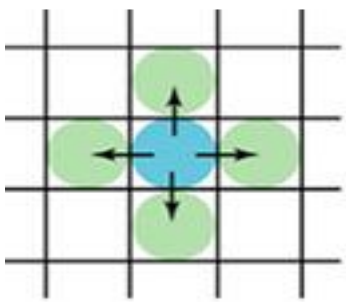
$p1 = (y_1^2 - y^2) - \{y^2 - (y_1 - 1)^2\} = 3 - 2r$

초기화: $x_1 = x_c, \quad y_1 = y_c + r, \quad p_1 = 3-2r$

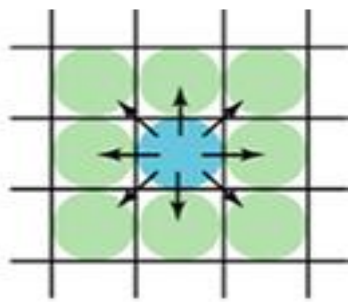
영역 및 다각형 채우기

- 2차원 그래픽스에서 영역
  - 모든 그림들은 픽셀들로 구성되고,
  - 선이나 도형이 서로 만나서 영역이 생성된다.

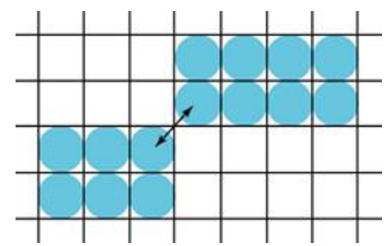
- 영역의 특성
  - 영역: 같은 색상 값을 갖는 이웃한 픽셀들의 집합
  - 이웃한 픽셀간의 연결 방식 (픽셀의 연결 방식)



4방향 연결



8방향 연결

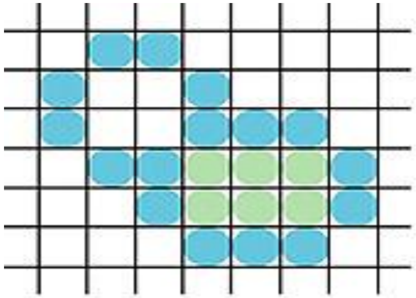


영역 연결방식의 예:
4방향 연결 – 2개의 영역
8방향 연결 – 1개의 영역

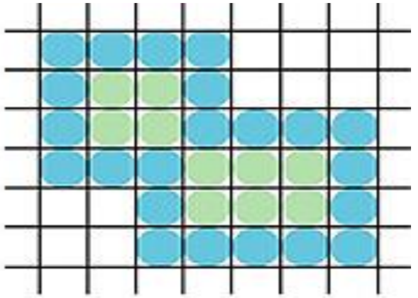
영역 및 다각형 채우기

- **래스터 출력에서 영역의 경계 픽셀과 내부 픽셀은 연결방식을 다르게,**
  - 경계 8방향 연결 ⇒ 내부는 반드시 4방향 연결 채우기
  - 경계 4방향 연결 ⇒ 일반적으로 내부는 8방향 연결 채우기

- **일반적인 래스터 방식의 출력장치**
  - Bresenham 선 그리기 알고리즘은 8방향연결 방식
  - 영역 채우기 알고리즘은 내부 영역을 4방향연결 방식으로 채우기



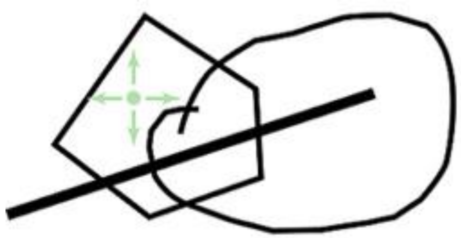
8방향 연결 방식의 경계
4방향 연결 방식의 내부



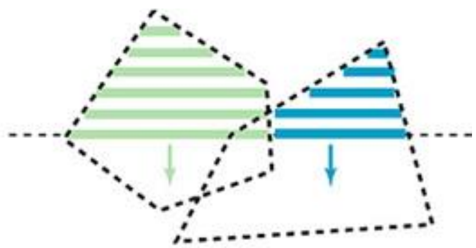
4방향 연결 방식의 경계
8방향 연결 방식의 내부

영역 및 다각형 채우기

- 영역 채우기 알고리즘
  - 시드 채우기 방식
    - 그림이 래스터 버퍼에 그려진 후 이미지에서 영역의 채우기를 실행
    - 영역 내부의 한 픽셀이 시드로 주어지고 이 픽셀에서부터 채워나간다
    - 주로 페인팅 소프트웨어나 대화식 이미지 처리 프로그램 (사용자가 원하는 영역을 클릭하면 그 점을 시드로 하여 채우기를 실행)에서 사용
  - 다각형 주사변환 방식
    - 매 주사선 별로 다각형의 내부 구간을 판단하여 해당 픽셀을 칠한다.
    - 주사선채우기(Scan-line Fill)라고도 한다.
    - 주로 벡터방식의 그리기 소프트웨어에서 사용 (채우기를 하는 도형의 벡터 데이터를 가지고 있다)



시드 채우기 방식

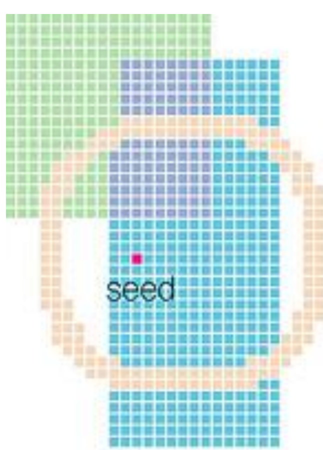


다각형 주사변환 방식

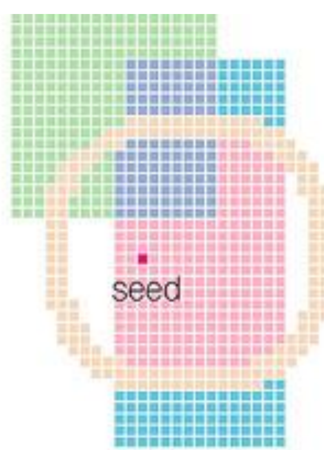
영역 및 다각형 채우기

- **시드 채우기 (Seed fill) 방식**
  - 다각형 내부의 한 점 (x, y)가 seed로 주어진다.
  - 이 점을 중심으로 이웃 픽셀이 영역의 내부에 있는지를 판단하여 영역 채우기를 한다.

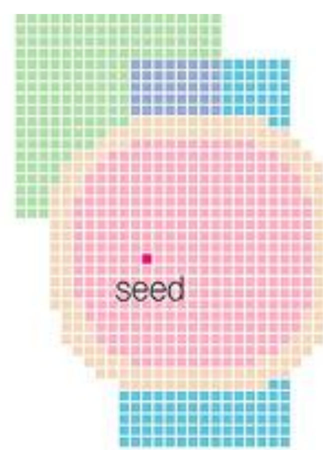
  - 내부 영역에 대한 판단
    - Interior-defined: 같은 값을 가지고, 연결된 픽셀들을 내부 영역으로 판단 → 범람 채우기 (Flood Fill)
    - Boundary-defined: 경계의 안쪽에 위치하는 픽셀들을 내부 영역으로 판단 → 경계 채우기 (Boundary Fill)



주어진 시드



범람 채우기
(Flood-fill)



경계 채우기
(Boundary-fill)

영역 및 다각형 채우기

- 알고리즘 진행 방법
  - 내부의 한 점 시드(seed)를 스택에 저장한다
  - Seed pixel을 중심으로 4방향 또는 8방향의 이웃 픽셀에 대해 내부의 점인지를 확인
  - 재귀적 함수 (Recursive) 사용하여 이웃한 픽셀들을 검사해나간다.

영역 및 다각형 채우기

- **범람 채우기 알고리즘**

```
void flood_fill (int x, int y)                    // 시드 (x, y) 에서 시작
{
    if (read_pixel (x, y) == bgColor)             // 현재 픽셀이 배경색 'bgColor'이면,
    {
        write_pixel (x, y, fillColor);            // 채우기 색 'fillColor'로 칠한다.
        flood_fill (x+1, y);                      // 오른쪽으로 반복
        flood_fill (x-1, y);                      // 왼쪽으로 반복
        flood_fill (x, y+1);                      // 아래로 반복
        flood_fill (x, y-1);                      // 위로 반복
    }
}
```

- **경계 채우기 알고리즘**

```
void boundary_fill(int x, int y)                  // 시드 (x, y) 에서 시작
{
    current = read_pixel(x, y);
    if ((current != bdColor) && (current != fillColor)) // 경계 및 채울 색인지 확인
    {
        write_pixel (x, y, fillColor);            // 내부를 채우기 색 'fillColor'로 칠한다.
        boundary_fill (x+1, y);                   // 오른쪽으로 반복
        boundary_fill (x-1, y);                   // 왼쪽으로 반복
        boundary_fill (x, y+1);                   // 아래로 반복
        boundary_fill (x, y-1);                   // 위로 반복
    }
}
```

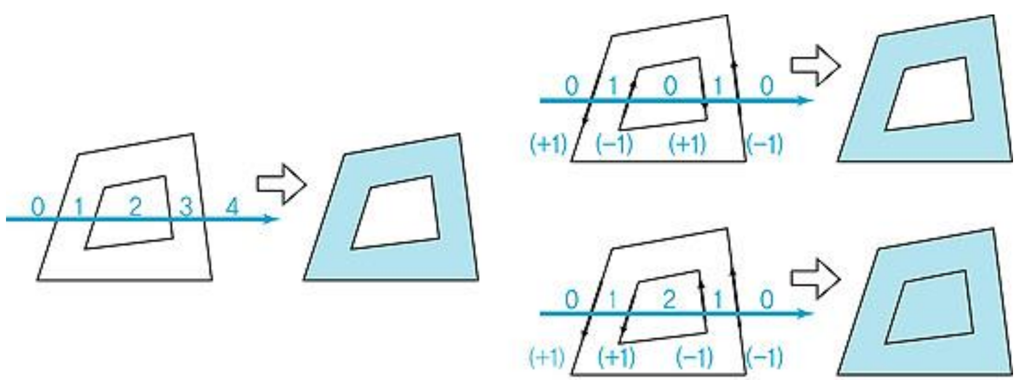
다각형 내부 판단 규칙

- **여러 개의 다각형으로 구성된 복잡한 도형이 주어지면 내부 영역을 다르게 판단할 수 있다.**

- **판단 규칙**
  - 홀짝 규칙 (Even-Odd rule)
    - 매 주사선별로 x값을 증가하면서
      - 다각형의 에지가 홀수 번째 교차하면 내부 구간이 시작
      - 짝수 번째 교차하면 외부 구간이 시작된다.
    - 알고리즘이 간단하다.
    - 서로 다른 두 개의 다각형이 겹쳐있을 때 그 겹친 부분은 항상 외부 영역으로 판단

다각형 내부 판단 규칙

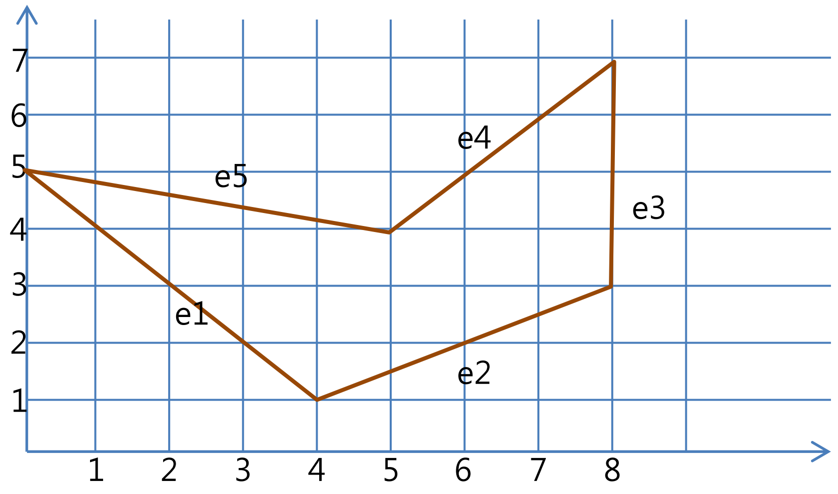
- 접기회수 규칙 (Non-Zero Winding Rule): 에지의 방향을 고려
  - 다각형에서 각 에지의 벡터 방향은 꼭짓점이 주어진 순서에 따라 정해진다
  - 각 주사선에서 아래쪽 방향의 모서리와 교차: 1 증가
  - 각 주사선에서 위쪽 방향의 모서리와 교차: 1 감소
  - 합이 0이면 → 외부
  - 합이 0이 아니면 → 내부
  - 다각형 모서리의 방향에 따라 내부와 외부영역을 지정해줄 수가 있다.
  - 홀짝 규칙보다 약간 복잡, 도형 설계에서 자유롭게 내부와 외부 영역 지정 가능, 정교한 드로잉 소프트웨어에서 많이 사용



영역 및 다각형 채우기

- **다각형 주사 변환 방식 (Polygon scan-conversion)**
  - 매 주사선마다 교차되는 edge(에지, 모서리)들의 목록을 유지, 갱신하여 영역을 설정한다.
  - 가장 대표적인 방법: **Y-X 다각형 주사선 알고리즘**
  - Edge list
    - **에지 목록** - EL (Edge List): 다각형의 전체 edge의 목록
      - 시작점의 y 좌표값 (더 작은 y 값) 순서로 다각형의 전체 에지를 정렬하여 전체 에지의 EL 구성
      - 매 주사선에서 교차하는 에지를 EL에서 꺼내어 AEL로 옮겨 관리
    - **활성화된 에지 목록** - AEL (Active Edge List): 각 주사선과 교차하여 활성화 된 edge 목록
      - 해당 주사선과 각 에지와의 교차점의 x값을 구한 후 2개 씩 짝을 만들어 이들 사이를 채운다.
    - 그리기가 완료된 AEL내의 에지를 찾아서 제거 (AEL의 에지 중 아래쪽 점의 y 좌표가 주사선의 y좌표보다 작게 되면 EL에서 제거

영역 및 다각형 채우기



e1 (0, 5) (4, **1**)
e2 (4, **1**) (8, 3)
e3 (8, **3**) (8, 7)
e4 (8, 7) (5, **4**)
e5 (0, 5) (5, **4**)

EL = {e1, e2, e3, e4, e5} -> 시작점의 y값 (작은 값)에 따라 정렬: {e2, e1, e3,e5, e4}

Y=1: AEL = {e2, e1}
Y=2: AEL = {e2, e1}
Y=3: AEL = {e2, e2, e3}
Y=4: AEL = {e1, e3, e5, e4 }
Y=5: AEL = {e1, e3, e5, e4 }
Y=6: AEL = {e3, e4}
Y=7: AEL = {e3, e4}
Y=8: AEL = { }

영역 및 다각형 채우기

- Y-X 다각형 주사선 알고리즘의 특징
  - Y-X 알고리즘 : Y값 순서로 전체 에지 정렬, 교차점은 X좌표값 순서로 정렬
  - 효율성 : 에지의 목록에 대한 부분적인 일관성(Coherence)으로 발생

- Y-X 다각형 주사선 알고리즘

1) 초기화를 한다.

각 에지들을 Y좌표의 최소값 순서로 정렬하여 Edge List(EL)를 구성한다.

2) 매 주사선 y_k에서 다음을 수행한다.

a) AEL을 갱신한다.

AEL에서 $y_b < y_k$ 인 에지를 삭제하고, // 완료된 에지 삭제

EL에서 $y_a = y_k$ 인 에지를 AEL로 이동한다. // 새로운 에지 삽입

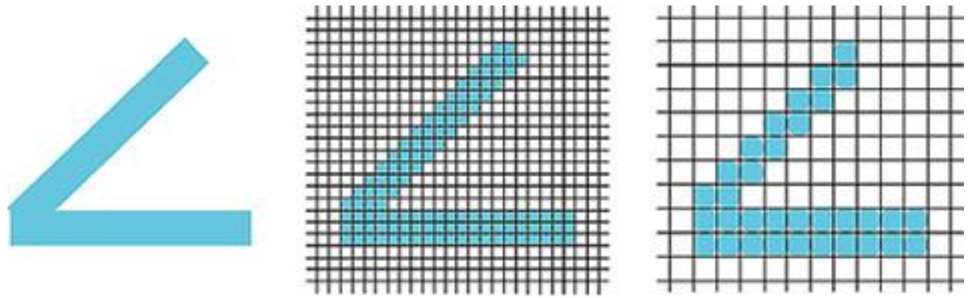
단, AEL 과 EL에 더 이상의 에지가 없으면 종료한다.

b) AEL에서 각 에지의 교차점을 계산한다.

c) 교차점 x값을 정렬한 후 각 쌍을 결정하여 그 사이를 채운다

Antialiasing

- **래스터 출력의 문제점**
  - 앨리어싱 효과
    - 계단 현상 (jaggies, aliasing)
    - 모양이 들쑥 날쑥하고 선이 움직일 때 위치가 바뀐다.
    - 작은 물체가 깜빡 깜빡 한다. (blinking)
  - 앨리어싱이 생기는 이유
    - 저해상도의 출력장치에서 두드러진다.
    - 아날로그 방식의 그림을 디지털 화 하는데 샘플링 오차가 발생



(a) 원래 그림 (b) 고해상도 출력 (c) 저해상도 출력

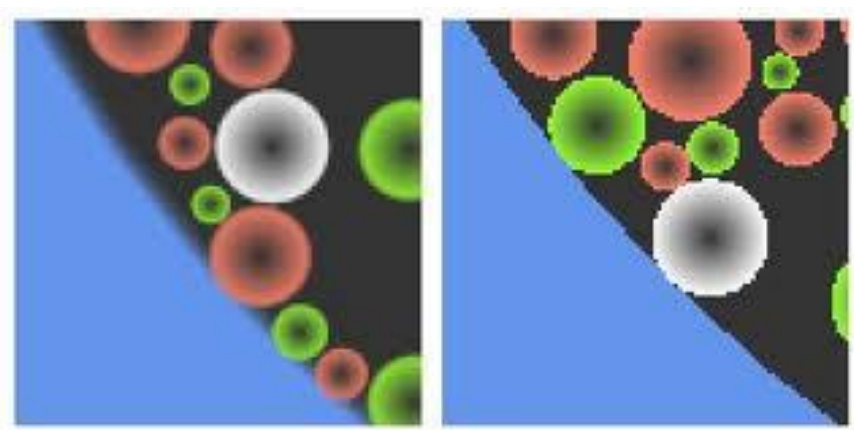
Antialiasing

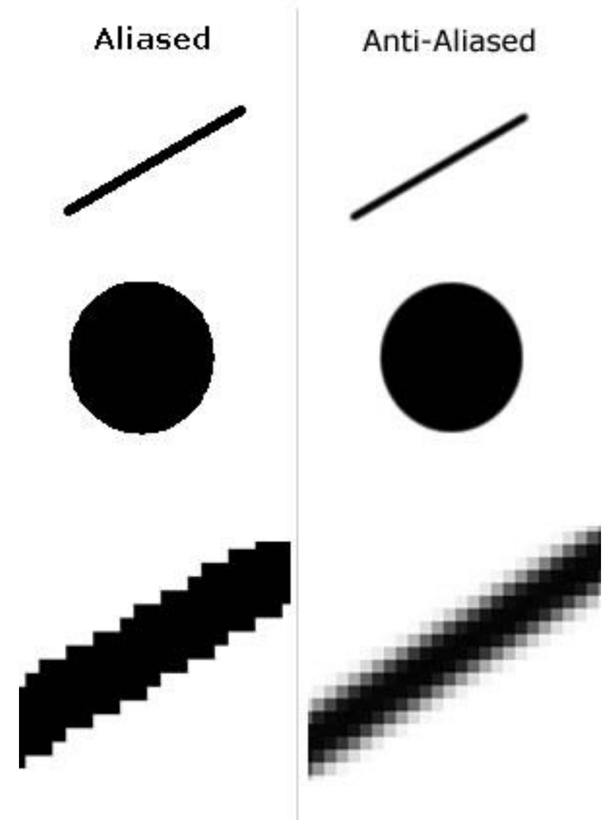
- **안티 앨리어싱(Antialiasing)**
  - 컬러 또는 회색조(Gray) 출력 장치에서 경계가 부드럽게 보이도록 하는 기법
  - 물체의 경계 픽셀에서 물체와 배경의 색상을 혼합해서 그린다.
  - 선 그리기, 다각형 채우기, 문자 생성 등에 적용이 가능
  - 해상도를 높인다. → 물리적 해상도의 한계
  - 안티 앨리어싱 기법
    - 수퍼 샘플링 (Super sampling) 기법
    - 영역 샘플링 (Area sampling) 기법

앨리어싱 효과

안티앨리어싱 효과

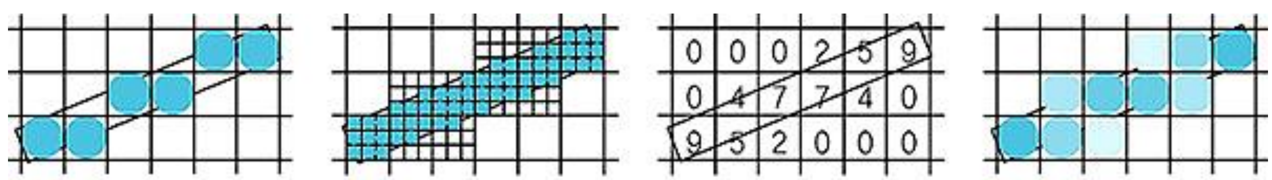
Antialiasing





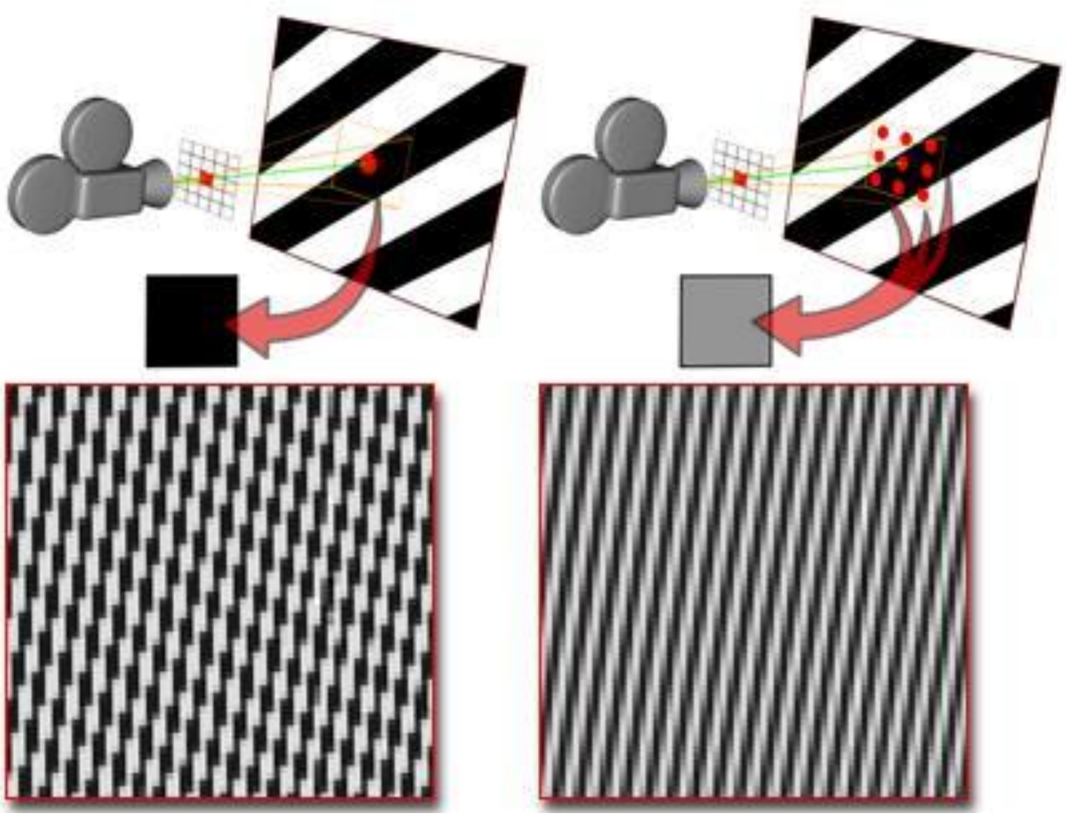
Antialiasing: 슈퍼 샘플링 기법

- Super sampling 기법
  - 출력 장치의 해상도보다 고해상도에서 그림을 자세히 표현할 수 있도록 하나의 픽셀 영역을 여러 개로 분할하는 기법.
  - 원래의 해상도로 환원할 때 픽셀의 명암값을 계산하여 보여준다.
    - 픽셀의 영역에 포함되는 고해상도 픽셀의 개수에 비례하여 명암값을 계산



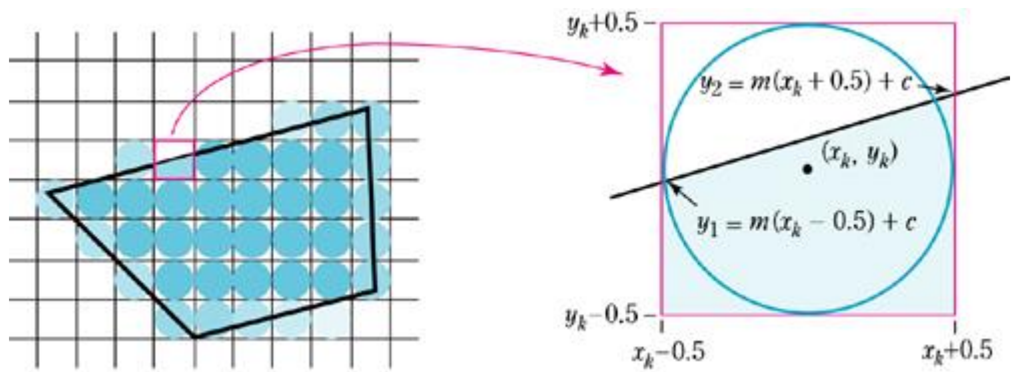
(a) 원래 해상도 (b) 수퍼샘플링 (c) 각 픽셀의 명암 값 (d) 출력 결과

Antialiasing: 수퍼 샘플링 기법



Antialiasing: 영역 샘플링 기법

- Area sampling 기법
  - 다각형 영역의 경계를 부드럽게 한다.
  - 선이나 다각형의 테두리에 걸치는 픽셀이 내부영역에 얼마나 포함되는지 면적을 계산하여 비율 값을 사용하여 명암을 결정한다.
  - 각 점을 등분하여 경계 안쪽에 있는 영역의 퍼센트 만큼 명암을 결정



- $y_1 = m(x_k - 0.5) + c$
- $y_2 = m(x_k + 0.5) + c$

- 면적 = $\{ (y_1 - (y_k - 0.5)) + (y2 - (y_k - 0.5))\} / 2$
  $= (y_1 + y_2) / 2 - y_k + 0.5$
  $= mx_k + c - y_k + 0.5$

Antialiasing: 영역 샘플링 기법