**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**"Уфимский государственный авиационный технический университет"**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**Дисциплина:** Методы оптимизации

**Отчет по лабораторной работе № 1**

**Тема:** «Методы многомерной минимизации»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа МКН-415 | Фамилия И.О. | Подпись | Дата | Оценка |
| Студент | Сиротин А.Е. |  |  |  |
| Принял | Казакова Т.Г. |  |  |  |

**Уфа 2022**

**Цель работы:** приобретение навыков численного решения задач поиска безусловного экстремума действительной функции от n переменных.

**Задачи:**

1. Ознакомиться с постановкой задач, определяемых вариантом задания к лабораторной работе.
2. Найти решение поставленной задачи условной оптимизации, используя теоремы о необходимых и достаточных условиях.
3. Найти решение задачи безусловной оптимизации для заданной целевой функции в пакете Maple (Optimization).
4. Найти приближенное решение задачи согласно варианту, с заданной точностью ε= 0.01.
5. Провести анализ найденного приближенного решения (является ли стационарная точка точкой экстремума).
6. Ответьте на вопросы, указанные в задании.
7. По результатам выполненной лабораторной работы составьте отчет.

**Практическая часть**

Работа выполнена согласно варианту №11.

**Постановка задач**

**Метод сопряженных градиентов**

1. Задать значения – допустимое число итераций.
2. Вычислить . Найти , что
3. Вычислить то поиск решения завершен. . В противном случае увеличить номер шага и перейти к пункту 4.
4. Новое направление поиска Вычислить
5. Если , то поиск решения завершен. В противном случае увеличить номер шага и перейти к пункту 2.

**Метод Марквардта**

1. Зададим следующие значения: – требуемая точность решения; – допустимое число итераций
2. Если , то поиск решения завершен, . В противном случае переходим к пункту 3.
3. Вычислим
4. Вычислим
5. Проверим выполнение неравенства . Если выполняется, то следующий шаг 6, если нет – шаг 7.
6. . Перейти к шагу 2.
7. . Вернуться к шагу 3.

**Аналитическое решение задачи**

Целевая функция

1. Система алгебраических уравнений

Решив систему, нашли стационарную точку .

1. Матрица Гессе

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

По критерию Сильвестра матрица Гессе является положительно определенной:

поэтому точка является точкой локального минимума.

1. Так как , то функция является строго выпуклой

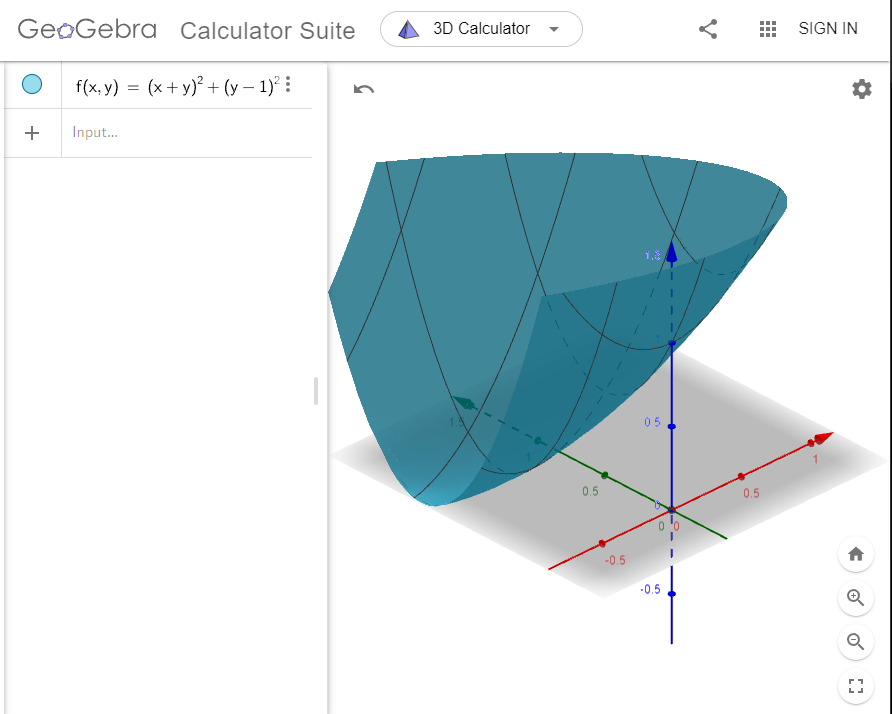


Рисунок 1. График целевой функции

По рисунку 1, можно убедиться, точка локального минимума является и точкой глобального минимума.

Решение задачи безусловной оптимизации для заданной целевой функции в пакете Maple(Optimization)

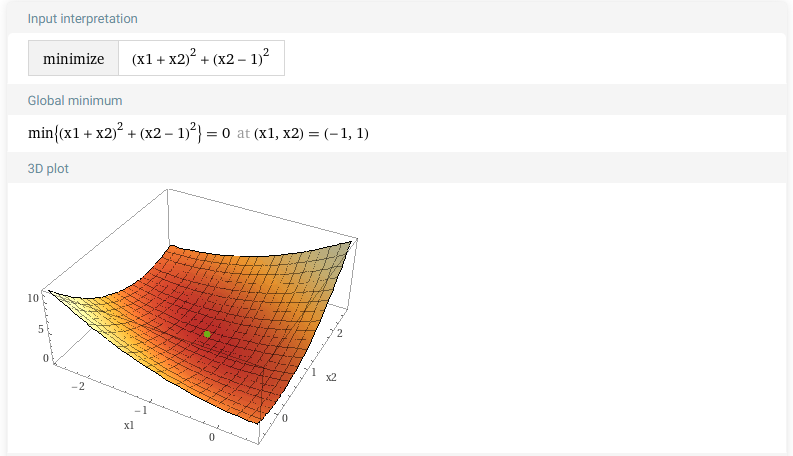


Рисунок 2. Решение задачи в maple

**Реализация численных методов**

Пример выполнения представлен на рисунке 3−4:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 3. Метод сопряжённых градиентов

Вектор начального приближения (0; 0), точность решения . За 25 итераций результатом вычислений становится вектор (-1; 1)

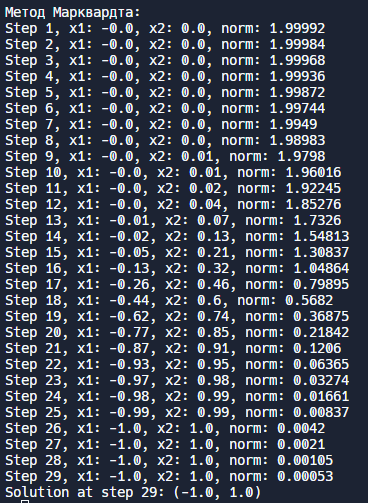


Рисунок 4. Метод Ньютона−Рафсона

Вектор начального приближения (0; 0), точность решения . За 29 итераций результатом вычислений становится вектор (-1; 1)

**Вывод**

В ходе выполнения лабораторной работы приобрели навыки численного решения задач поиска безусловного экстремума действительной функции от n переменных, соответствующие методы были программно реализованы. Метод сопряженных градиентов нашел решение на 4 шага быстрее, что несущественно.

**Контрольные вопросы**

1. **Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции** .

Необходимое условие минимума(максимума) первого порядка:

Пусть есть точка локального экстремума функции и дифференцируема в точке Тогда градиент функции в точке равен нулю, т.е.

Необходимое условие минимума(максимума) второго порядка:

Пусть есть точка локального экстремума функции и дважды дифференцируема в этой точкеТогда матрица Гессе неотрицательно (неположительно) определена, т.е.

Достаточное условие:

Пусть в точке дважды дифференцируема, её градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно (отрицательно) определенной, т.е.

тогда точка является точкой локального минимума (максимума) функции

1. **Как определяется порядок численного метода решения задачи оптимизации? Приведите примеры численных методов нулевого, первого и второго порядка.**

Определяется исходя из порядка производной, применяемой в конкретном случае.

Методы прямого поиска или методы нулевого порядка: основаны на использовании информации только о целевой функции.

Методы первого порядка: используется вычисление целевой функции и ее производных до первого порядка включительно. Это различные градиентные методы.

Методы второго порядка: используется вычисление целевой функции и ее производных до второго порядка включительно.

Методы нулевого порядка: прямого поиска, вращающихся координат, параллельных касательных.

Методы первого порядка: градиентного спуска с дробным шагом, наискорейшего градиентного спуская, сопряженных градиентов.

Методы второго порядка: Ньютона, Ньютона-Рафсона, Марквардта.

1. **Какие методы одномерной минимизации Вы знаете? В каких численных методах первого и второго порядка они используются?**

К основным численным методам одномерной минимизации относят:

- метод равномерного поиска;

- метод деления отрезка пополам;

- метод дихотомии;

- метод золотого сечения;

- метод Фибоначчи;

- метод квадратичной интерполяции и др.

Метод Ньютона 2-го порядка.

В методе сопряженных градиентов может быть использован метод золотого сечения или метод бисекции.

1. **Комбинацией каких методов оптимизации является метод Марквардта?**

Является альтернативой методу Ньютона. Может рассматриваться как комбинация последнего с методом градиентного спуска.

1. **Для каких функций эффективно применение рассмотренных методов первого и второго порядка?**

Для непрерывно дифференцируемых функций.

**Приложение**

Листинг программы:

<https://github.com/xoma-star/MO_LAB1>