Лабораторная работа №2
Численные методы поиска условного экстремума
Метод штрафов

Цель работы

Приобретение навыков численного решения задач поиска условного экстремума действительной функции.

Теоретическая часть

Рассмотрим задачу поиска минимума функции $f : D \to \mathbb{R}$

$$f(x) \to \min, \qquad x \in D. \tag{1}$$

Множество допустимых решений $D \subset \mathbb{R}^n$ задается следующими условиями

$$\begin{array}{ll} h_i(x) = 0\,, & i = 1, \ldots, m\,, \\ g_j(x) \leqslant 0\,, & j = m+1, \ldots, \ell\,. \end{array} \tag{2}$$

Будем считать, что функции $h_i(x), g_j(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы в D.

Будем называть множество $I = \{j | g_j(x^*) = 0\}$ множеством активных в точке x^* ограничений-неравенств.

Построим функцию Лагранжа по правилу

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=m+1}^{\ell} \lambda_j g_j(x).$$

Сформулируем необходимые условия экстремума первого порядка для приведенной задачи оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств [1].

Теорема 1. Пусть точка x^* является локальным минимумом задачи условной оптимизации (1)–(2). Тогда существуют такие числа $\lambda_i^* \quad i = \overline{1, \ell}$, одновременно не равные нулю, что выполняются условия:

- стационарности функции Лагранжа по x

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

- допустимости решения

$$\begin{array}{ll} h_i(x^*) = 0\,, & i = 1, \ldots, m\,, \\ g_j(x^*) \leqslant 0\,, & j = m+1, \ldots, \ell\,; \end{array}$$

- неотрицательности
$$\lambda_j^* \geqslant 0\,, \quad j = m+1, \ldots, \ell\,;$$
- дополняющей нежесткости
$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0\,, \quad j = m+1, \ldots, \ell\,.$$

При $\lambda_0^* \neq 0$ справедливо следующее утверждение. Если функции $f(x)$, $g_j(x)$ $j = \overline{m+1, \ell}$ — выпуклые, а функции $h_i(x)$ $i = \overline{1, m}$, — линейные, то условия теоремы 1 являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума.

Для решения большинства практических задач условной оптимизации используются численные методы. Один из подходов к численному решению задачи (1)–(2) состоит в преобразовании ее в последовательность задач оптимизации без ограничений. Исходная целевая функция заменяется вспомогательными функциями, называемыми штрафными, а исходная задача переходит в последовательность задач безусловной минимизации этих штрафных функций. По способу выбора ограничений для штрафных функций различают метод внутренних штрафов и метод внешних штрафов.

Метод внешних штрафов

1. Зададим следующие значения:

   n — размерность вектора x;

   m — число ограничений-равенств;

   ℓ — число всех ограничений;

   ε_1 — точность решения задачи;

   ε_2 — точность решения задачи безусловной минимизации;

   $k = 0$ — номер итерации;

   x^0 — начальное приближение для x^*, задается вне множества допустимых решений D;

   $r^0 > 0$ — начальное значение параметра штрафа, обычно выбирают $r^0 = 0.01; 0.1; 1$;

   $C > 0$ — число для увеличения параметра штрафа, обычно выбирают $C \in [4, 10]$.

2. Задаем вспомогательную функцию
$$P(x^k, r^k) = f(x^k) + \Phi\big(r^k, h(h^k), g(x^k)\big)\,,$$
   где штрафная функция
$$\Phi\big(r^k, h(h^k), g(x^k)\big) = \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{i=1}^{m}\big(h_i(x^k)\big)^2 + \sum_{j=m+1}^{\ell}\big(g_j^+(x^k)\big)^2\right\},$$

$g_j^+(x)$ — срезка функции

$$g_j^+(x) = \begin{cases} g_j(x)\,, & g_j(x) > 0\,, \\ 0\,, & g_j(x) \leqslant 0\,. \end{cases}$$

3. Найдем значение $\tilde{x}$, доставляющее минимум функции $P(\tilde{x}, r^k)$ по x при фиксированном r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации (лабораторные работы 1, 2). В качестве начальной точки используется x^k, в качестве параметра окончания — константа ε_2.

4. Вычислить $\Phi(\tilde{x}, r^k)$. Если $|\Phi(\tilde{x}, r^k)| \leqslant \varepsilon_1$, то решение задачи найдено $x^* = \tilde{x}$, в противном случае переходим к шагу 5.

5. Изменяем значения $r^{k+1} = Cr^k$; $x^{k+1} = \tilde{x}$; $k = k + 1$. Возвращаемся к шагу 2.

Метод внутренних штрафов (барьерных функций)

Данный метод используется в задачах с ограничениями-неравенствами, $m = 0$.

1. Зададим следующие значения:

   n — размерность вектора x;

   ℓ — число всех ограничений;

   ε_1 — точность решения задачи;

   ε_2 — точность решения задачи безусловной минимизации;

   $k = 0$ — номер итерации;

   x^0 — начальное приближение для x^*, задается вне множества допустимых решений D;

   $r^0 > 0$ — начальное значение параметра штрафа, обычно выбирают $r^0 = 1; 10; 100$;

   $C > 0$ — число для уменьшения параметра штрафа, обычно выбирают $C = 4; 10; 12; 16$.

2. Задаем вспомогательную функцию

   $$P(x^k, r^k) = f(x^k) - \Phi\big(r^k, g(x^k)\big)\,,$$

   где штрафная функция

   $$\Phi\big(r^k, g(x^k)\big) = r^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{g_j(x^k)}$$

   или

   $$\Phi\big(r^k, g(x^k)\big) = r^k \sum_{j=1}^{\ell} \ln\big(-g_j(x^k)\big)\,.$$

3. Найдем значение $\tilde{x}$, доставляющее минимум функции $P(\tilde{x}, r^k)$ по x при фиксированном r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации (лабораторные работы 1, 2). В качестве начальной точки используется x^k, в качестве параметра окончания — константа ε_2. Проверить принадлежность .

4. Вычислить $\Phi(\tilde{x}, r^k)$. Если $|\Phi(\tilde{x}, r^k)| \leqslant \varepsilon_1$, то решение задачи найдено $x^* = \tilde{x}$, в противном случае переходим к шагу 5.

5. Изменяем значения $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$; $x^{k+1} = \tilde{x}$; $k = k + 1$. Возвращаемся к шагу 2.

Комбинированный метод штрафных функций

В данном методе для ограничений типа равенств используется метод внешних штрафов, а для ограничений типа неравенств — метод внутренних штрафов.

1. Зададим следующие значения:

   n — размерность вектора x;

   m — число ограничений-равенств;

   ℓ — число всех ограничений;

   ε_1 — точность решения задачи;

   ε_2 — точность решения задачи безусловной минимизации;

   $k = 0$ — номер итерации;

   x^0 — начальное приближение для x^*, задается так, чтобы строго выполнялись ограничения типа неравенств $g_j(x) < 0$ $j = \overline{m+1, \ell}$;

   $r^0 > 0$ — начальное значение параметра штрафа, обычно выбирают $r^0 = 1; 10; 100$;

   $C > 1$ — число для увеличения параметра штрафа.

2. Задаем вспомогательную функцию

$$P(x^k, r^k) = f(x^k) + \Phi\big(r^k, h(h^k), g(x^k)\big)\,,$$

   где штрафная функция

$$\Phi\big(r^k, h(h^k), g(x^k)\big) = \frac{1}{2r^k} \sum_{i=1}^{m} \big(h_i(x^k)\big)^2 - r^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{g_j(x^k)}$$

   или

$$\Phi\big(r^k, h(h^k), g(x^k)\big) = \frac{1}{2r^k} \sum_{i=1}^{m} \big(h_i(x^k)\big)^2 - r^k \sum_{j=1}^{\ell} \ln\big(-g_j(x^k)\big)\,.$$

   Можно использовать разные значения r^k для внутренних и для внешних штрафов.

3. Найдем значение $\tilde{x}$, доставляющее минимум функции $P(\tilde{x}, r^k)$ по x при фиксированном r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации (лабораторные работы 1, 2). В качестве начальной точки используется x^k, в качестве параметра окончания — константа ε_2.

4. Вычислить $\Phi(\tilde{x}, r^k)$. Если $|\Phi(\tilde{x}, r^k)| \leqslant \varepsilon_1$, то решение задачи найдено $x^* = \tilde{x}$, в противном случае переходим к шагу 5.

5. Изменяем значения $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$; $x^{k+1} = \tilde{x}$; $k = k + 1$. Возвращаемся к шагу 2.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с постановкой задачи, определяемой вариантом задания к лабораторной работе.

2. Найти решение поставленной задачи условной оптимизации используя теоремы о необходимых и достаточных условиях.

3. Найти решение задачи безусловной оптимизации для заданной целевой функции в пакете Maple (Optimization).

4. Найти приближенное решение задачи согласно варианту методом штрафов, с заданной точностью $\varepsilon = 0.01$.

5. Провести анализ найденного приближенного решения (является ли стационарная точка точкой экстремума).

6. Ответьте на вопросы, указанные в задании.

7. По результатам выполненной лабораторной работы составьте отчет, содержащий:

   - цель работы,
   - постановку задачи,
   - аналитическое решение поставленной задачи,
   - блок-схемы использованных численных методов поиска безусловного экстремума для решаемой задачи,
   - выводы об эффективности использованного метода,
   - ответы на контрольные вопросы, приведенные в задании,

Контрольные вопросы

1. Задача условной оптимизации. Приведите примеры практического применения.
2. Какая функция называется функцией Лагранжа задачи условной оптимизации?
3. Необходимые и достаточные условия решения задачи условной оптимизации первого и второго порядка.
4. Какие численные методы решения задач условной оптимизации вы знаете?
5. Какие численные методы решения задач безусловной оптимизации вы знаете?
6. Какие штрафные функции используются для ограничений-равенств? Какие штрафные функции используются для ограничений-неравенств?
7. Как задается начальная точка для штрафных методов решения задачи условной оптимизации?

Варианты заданий к лабораторной работе

Вариант	Целевая функция	Область допустимых решений
1	$3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3$	$x_1 - 7x_2 + 3x_3 \leqslant -1$ $x_3 + 2 \geqslant 5x_1 + 2x_2$
2	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10$ $x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 15$
3	$2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$	$8x_1 - 5x_2 + 4x_3 \leqslant 40$ $-2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
4	$2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - 4x_2$	$x_1 + 2x_1 \leqslant 12$ $x_1 \geqslant 0$
5	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 10$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4$ $x_3 \geqslant 0$
6	$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4$	$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 8$ $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$
7	$x_1x_2x_3$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 0$
8	$x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2$	$x_1 + x_2^2 + x_3 = 5$ $x_1 + 5x_2 + x_3 = 7$
9	$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$	$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 10$ $x_2 - 2x_1 = 5$
10	$-x_1^2 - x_2^2 - 10x_3^2 - 5x_1x_2$	$x_1 + x_2 + 3x_2x_3 = 5$ $x_1^2 + 5x_1x_2 + x_3^2 = 7$
11	$x_1^2 - x_2^2$	$x_1 - x_2 = 4$ $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16$
12	$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2$	$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$
13	$x_1^2 - x_1 - x_2$	$x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 \leqslant 3$ $x_1 \geqslant 0$ $x_2 \geqslant 0$
14	$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$	$x_1 + x_2 \leqslant 9$ $x_1 + 2x_2 \leqslant 12$
15	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ $5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
16	$2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2$	$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 10$ $x_1 + x_2 = 6$

Литература

1. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Высш. шк. 2008. – 544 с.