

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
Образовательное учреждение высшего образования  
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт инженерных наук  
Кафедра информационно-коммуникационных технологий

***ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6***

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Вариант 7

Выполнили: студенты  
Антонова П.С., Разгонова Е.В.

Группа: 0432-04

Проверил: Трофимов В.М.

Псков

2021

## Постановка задачи

Целью лабораторной работы является написание программы для решения системы уравнений методами Гаусса и простых итераций.

$$5.8x_1 + 4.8x_2 + 4.7x_3 + 5.3x_4 = -9.1$$

$$4.7x_1 + 4.9x_2 + 6.6x_3 - 2.2x_4 = -8.1$$

$$7.2x_1 + 6.4x_2 + 3.5x_3 + 5.4x_4 = -3.4$$

$$9.2x_1 + 8.2x_2 + 8.8x_3 + 1.9x_4 = -5.1$$

## Теоретическая справка

Системой линейных алгебраических уравнений  $n$ -го порядка называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Решением этой системы является значение неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Коэффициенты матрицы  $a_{ij}$  и правые части  $b_i$  предполагаются заданными. Условием существования и единственности системы является неравенство нулю определителя матрицы, т.е.  $\det a_{ij} \neq 0$

В дальнейшем предполагается, что это условие всегда выполнено.

- **Метод Гаусса (схема единственного деления)**

Идея метода Гаусса основана на последовательном исключении неизвестных и преобразовании системы к специфическому виду системы с треугольной матрицей (прямой ход метода):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot = \cdot \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad a_{n,n}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

После этого осуществляется последовательное определение неизвестных  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$  (обратный ход метода).

Метод Гаусса относится к группе так называемых «точных» методов, теоретически он позволяет с помощью конечного числа действий вычислить точный результат. Однако при практических расчетах возникают вычислительные погрешности, которые искажают результат тем сильнее, чем выше порядок системы. Условием сходимости метода является отличие от нуля определителя матрицы системы.

- **Метод простой итерации**

Идея метода состоит в том, чтобы, задавшись некоторыми значениями неизвестных  $x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}$  (начальным приближением), с помощью вычислительной процедуры получить «уточненные» значения неизвестных  $x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}$ . Это уточнение продолжается до тех пор, пока значения  $x_1 \dots x_n$  не будут вычислены с заданной точностью. Для применения метода система должна быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \dots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 - \dots - \alpha_{2n}x_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = \beta_n - \alpha_{n1}x_1 - \alpha_{n2}x_2 - \dots - \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

Рабочая формула метода:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^{(k+1)} = \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ \alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \\ \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \end{array} \right.$$

для  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ .

Условие сходимости метода  $\|\alpha\| < 1$ , где  $\|\alpha\|$  – норма матрицы  $a_{ij}$ . Критерий окончания вычислительного процесса

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon - \text{ заданная точность вычислений.}$$

Методы простой итерации относятся к группе «приближенных» методов. Это значит, что они дают за конечное число действий лишь приближенный результат, однако этот результат может удовлетворять пользователя своей точностью. Критерием сходимости методов так же является условие  $\|\alpha\| < 1$ . Под нормой матрицы можно понимать любое из следующих чисел:

$$\|\alpha\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \quad \|\alpha\|_2 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \quad \|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2}$$

Важно: при проверке исходной матрицы на было обнаружено, что определитель  $|A| = 59.703 > 1$ , следовательно, в данном виде матрица непригодна для использования метода и далее будет использоваться метод Гаусса.

## Разработка программного решения

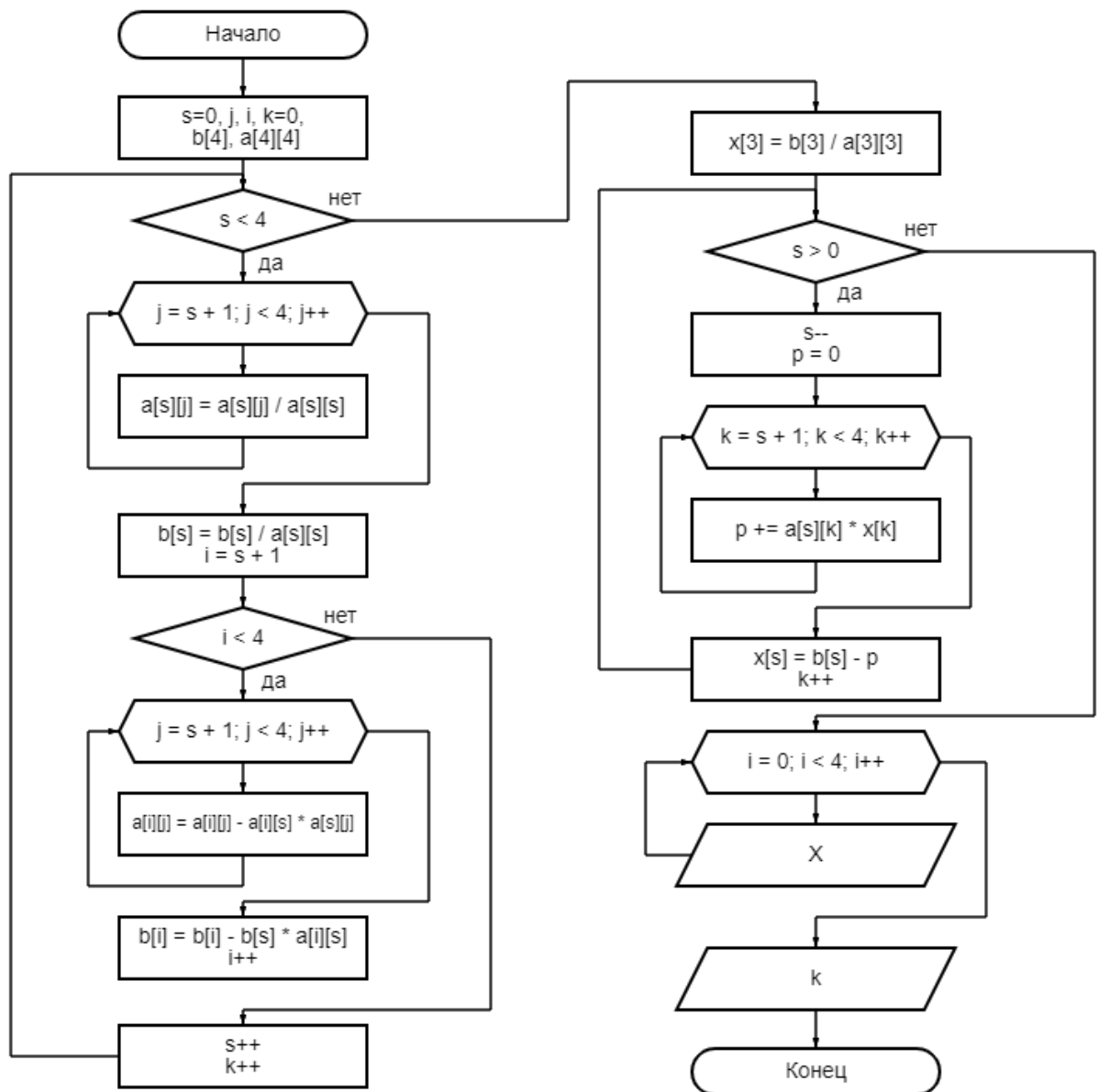


Рис. 1. Общая блок-схема программы

// Решение систем линейных алгебраических уравнений

```
#include <iostream>
```

```
#include<cmath>
```

```
using namespace std;
```

```
int main()
```

```
{
```

```
    int s = 0, j, i, k = 0;
```

```
    double b[4] = { -9.1, -8.1, -3.4, -5.1 }, x[4], p = 0; // столбец  
свободных членов
```

```
    double a[4][4] = {  
        {5.8, 4.8, 4.7, 5.3},           // основная матрица  
        {4.7, 4.9, 6.6, -2.2},  
        {7.2, 6.4, 3.5, 5.4},  
        {9.2, 8.2, 8.8, 1.9}  
    };
```

```
};
```

```
setlocale(0, "");
```

```
while (s < 4)
```

```
{
```

```
    for (j = s + 1; j < 4; j++)
```

```
    {
```

```
        a[s][j] = a[s][j] / a[s][s];
```

```
    }
```

```
    b[s] = b[s] / a[s][s];  
    i = s + 1;
```

```
    while (i < 4)
```

```
    {
```

```
        for (j = s + 1; j < 4; j++)
```

```
        {
```

```
            a[i][j] = a[i][j] - a[i][s] * a[s][j];
```

```
        }
```

```
        b[i] = b[i] - b[s] * a[i][s];  
        i++;
```

```
    }
```

```
    s++;
```

```
    k++;
```

```
}
```

```
x[3] = b[3] / a[3][3];
```

```
while (s > 0)
```

```
{
```

```
    s--;
```

```
    p = 0;
```

```
    for (int k = s + 1; k < 4; k++)
```

```
    {
```

```
        p += a[s][k] * x[k];
```

```
    }
```

```

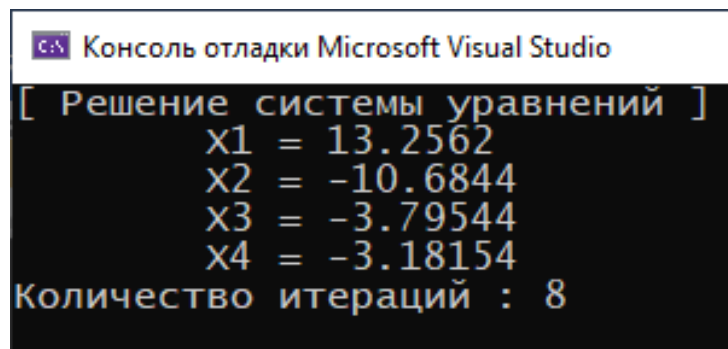
        x[s] = b[s] - p;
        k++;
    }
    cout << "[ Решение системы уравнений ]" << endl;

    for (i = 0; i < 4; i++)
    {
        cout << "\tX" << i + 1 << " = " << x[i] << endl;
    }

    cout << "Количество итераций : " << k << endl;

    return 0;
}

```



```

Консоль отладки Microsoft Visual Studio
[ Решение системы уравнений ]
      X1 = 13.2562
      X2 = -10.6844
      X3 = -3.79544
      X4 = -3.18154
Количество итераций : 8

```

Рис. 2. Результат работы программы

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 5.8 & 4.8 & 4.7 & 5.3 \\ 4.7 & 4.9 & 6.6 & -2.2 \\ 7.2 & 6.4 & 3.5 & 5.4 \\ 9.2 & 8.2 & 8.8 & 1.9 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} -9.1 \\ -8.1 \\ -3.4 \\ -5.1 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(\underline{A}, \underline{B}) = \begin{pmatrix} 13.256 \\ -10.684 \\ -3.795 \\ -3.182 \end{pmatrix}$$

$$|\underline{A}| = 59.703$$

Рис. 3. Проверка решения в Mathcad

Вывод: в процессе выполнения данной лабораторной работы было усвоено, что каждый из методов в той или иной степени хуже или лучше отличен от другого. Например, при применении метода Гаусса можно найти решение системы с довольно большой точностью, не проверяя систему на сходимость, простые итерации же напротив, для применения метода, необходимо, чтобы система обладала критерием сходимости  $|\underline{A}| < 1$ . В случае

его отсутствия требуется проводить дополнительные расчёты, чтобы система уравнений была приведена к сходящемуся виду.