Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное

Образовательное учреждение высшего образования

ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт инженерных наук

Кафедра информационно-коммуникационных технологий

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ

Вариант 7

Выполнили: студенты
Антонова П.С., Разгонова Е.В.

Группа: 0432-04

Проверил: Трофимов В.М.

Псков

2021

Постановка задачи

Целью лабораторной работы является определение собственного значения и собственного вектора матрицы А при точности вычислений 10^{-5}:

$$M = \begin{vmatrix} 5.8 & 4.8 & 4.7 & 5.3 \\ 4.7 & 4.9 & 6.6 & -2.2 \\ 7.2 & 6.4 & 3.5 & 5.4 \\ 9.2 & 8.2 & 8.8 & 1.9 \end{vmatrix}$$

Теоретическая справка

Собственными значениями матрицы называются корни λ_1, λ_2, …, λ_n характеристического уравнения n-го порядка

$det|A - \lambda E|$, где A – матрица $n \times n$, E – единичная матрица порядка n.

Собственные значения матрицы могут быть упорядоченными по величине $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, ставится задача поиска наибольшего собственного значения λ_{max}.

Собственным вектором матрицы A, соответствующим i – тому собственному значению λ_i называется решение $\overline{x_i}$ системы.

$$A\overline{x_i} = \lambda_i \overline{x_i}$$

В силу того, что система однородна, собственный вектор $\overline{x_i}$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя.

Поскольку любой произвольный n – мерный вектор $\bar{a}$ может быть разложен по собственным векторам $\overline{x_i}$:

$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{x_i}$, тогда, при подстановке вектора $\bar{a}$ в систему получим

$$A\bar{a} = A\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \overline{x_i} = \lambda_1 \left(c_1\overline{x_1} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \overline{x_i} \right)$$

$$A^2\bar{a} = A\left(c\lambda_1\overline{x_1} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \overline{x_i} \right) = {\lambda_1}^2 \left[c_1\overline{x_1} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^2 \overline{x_i} \right]$$

$$A^3\bar{a} = {\lambda_1}^3 \left[c_1\overline{x_1} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^3 \overline{x_\imath} \right]$$

В общем случае

$$A^k\bar{a} = {\lambda_1}^k \left[c_1\overline{x_1} + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \overline{x_\imath} \right]$$

Если $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, то величины $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. при достаточно больших k

$$A^k\bar{a} \approx \lambda_1^k c_1\overline{x_1} \quad \text{или} \quad A^{k+1}\bar{a} \approx \lambda_1 c_1 \lambda_1^k \overline{x_1} \approx A^k\bar{a}\lambda_1$$

Таким образом, выбрав произвольный вектор $\bar{a}$ и, умножая его последовательно на матрицу A k раз, получим, что λ_1 является коэффициентом пропорциональности в соотношении

$$A^{k+1}\bar{a} = \lambda_1 A^k\bar{a}$$

причем точность этого равенства повышается с ростом k.

Тогда $\lambda_1 \approx \frac{\|A^{k+1}\bar{a}\|}{\|A^k\bar{a}\|}$, где $\|\bar{x}\|$ – норма вектора $\bar{x}$.

Разработка программного решения

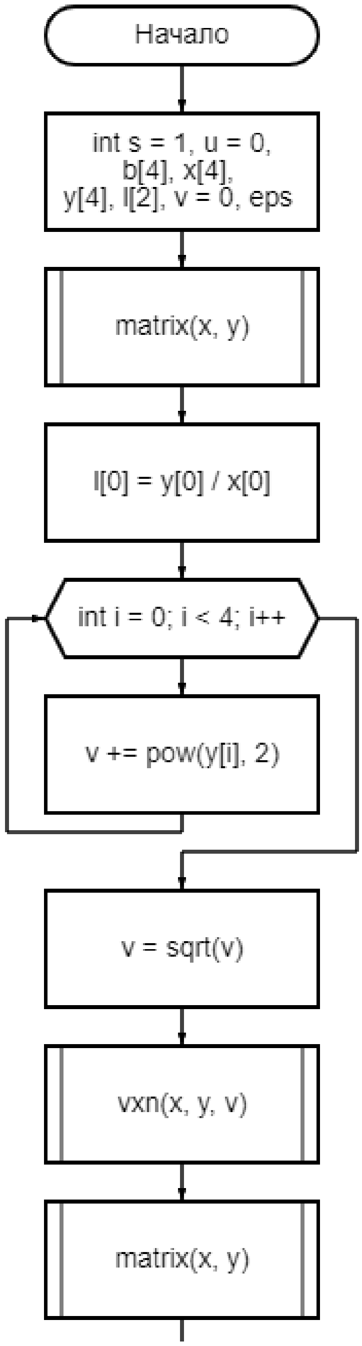

Рис. 1. Общая блок-схема программы (1)

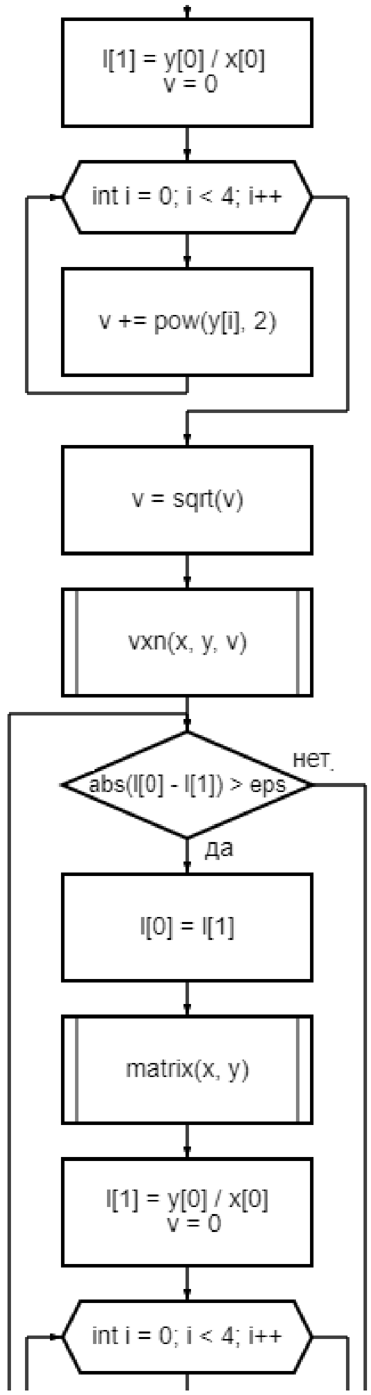

Рис. 1. Общая блок-схема программы (2)

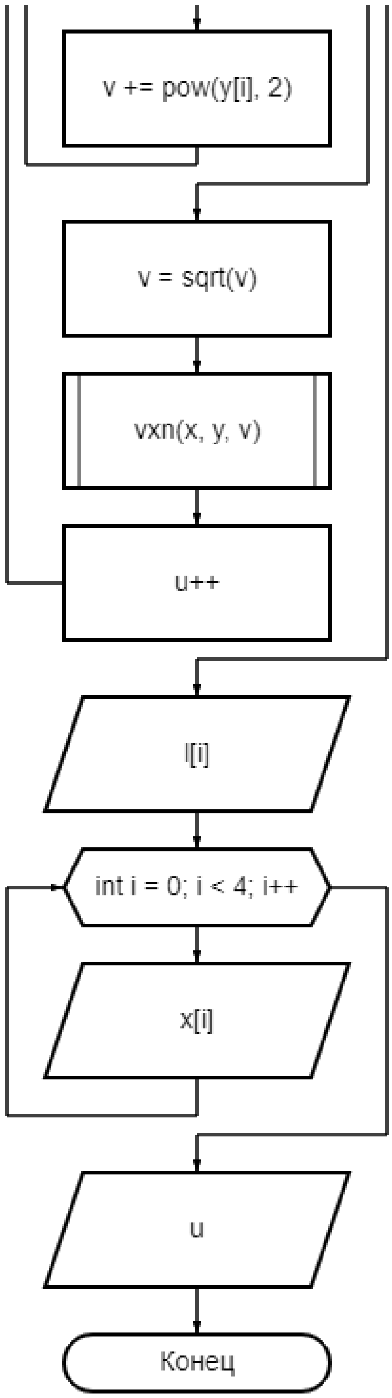

Рис. 1. Общая блок-схема программы (3)

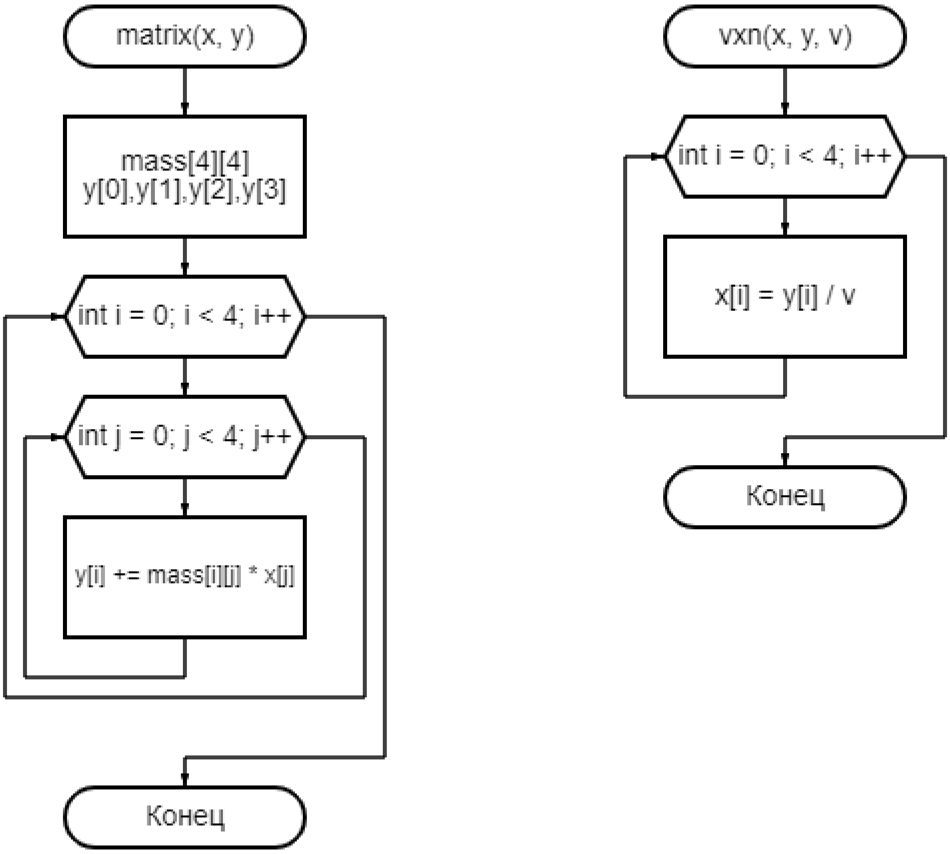

Рис. 2. Блок-схема подпрограмм

```
// Определение собственных векторов и собственных значений матрицы

#include<iostream>
#include<cmath>

using namespace std;

void matrix(double x[], double y[])
{
	double mass[4][4] = {
		{ 5.8, 4.8, 4.7, 5.3 },
		{ 4.7, 4.9, 6.6, -2.2},
		{ 7.2, 6.4, 3.5, 5.4 },
		{ 9.2, 8.2, 8.8, 1.9 }
	};

	y[0] = 0;
	y[1] = 0;
	y[2] = 0;
	y[3] = 0;

	for (int i = 0; i < 4; i++)
	{
		for (int j = 0; j < 4; j++)
```

```
			{
				y[i] += mass[i][j] * x[j];
			}
		}
}

void vxn(double x[], double y[], double v)
{
		for (int i = 0; i < 4; i++)
		{
			x[i] = y[i] / v;
		}
}

int main()
{
		setlocale(0, "");

		int s = 1, u = 0;
		double b[4] = { -9.1, -8.1, -3.4, -5.1 }, x[4] = { 1, 0, 0, 0 }, y[4] =
{ 0, 0, 0, 0 }, l[2], v = 0, eps = 1e-5;

		matrix(x, y);
		l[0] = y[0] / x[0];

		for (int i = 0; i < 4; i++)
		{
			v += pow(y[i], 2);
		}
		v = sqrt(v);

		vxn(x, y, v);

		matrix(x, y);
		l[1] = y[0] / x[0];
		v = 0;

		for (int i = 0; i < 4; i++)
		{
			v += pow(y[i], 2);
		}
		v = sqrt(v);
		vxn(x, y, v);

		while (abs(l[0] - l[1]) > eps)
		{
			l[0] = l[1];
			matrix(x, y);

			l[1] = y[0] / x[0];
			v = 0;

			for (int i = 0; i < 4; i++)
			{
				v += pow(y[i], 2);
			}
```

```
		v = sqrt(v);
		vxn(x, y, v);
		u++;
	}

	cout << "Собственное значение : " << l[1] << endl;
	cout << "Собственный вектор : " << endl;

	for (int i = 0; i < 4; i++)
	{
		cout << "X[" << i + 1 << "] = " << x[i] << endl;

	}
	cout << "Итерации : " << u << endl;

	return 0;
}
```

```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
Собственное значение : 20.2668
Собственный вектор :
X[1] = 0.496312
X[2] = 0.287415
X[3] = 0.525287
X[4] = 0.628603
Итерации : 8
```

Рис. 3. Результат работы программы

$$\mathrm{Matrix} := \begin{pmatrix} 5.8 & 4.8 & 4.7 & 5.3 \\ 4.7 & 4.9 & 6.6 & -2.2 \\ 7.2 & 6.4 & 3.5 & 5.4 \\ 9.2 & 8.2 & 8.8 & 1.9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{val} := \max(\mathrm{eigenvals}(\mathrm{Matrix})) \qquad \mathrm{val} = 20.2668$$

$$\mathrm{vec} := \mathrm{eigenvec}(\mathrm{Matrix}, \mathrm{val}) \qquad \mathrm{vec} = \begin{pmatrix} 0.49631 \\ 0.28741 \\ 0.52529 \\ 0.6286 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Проверка решения в Mathcad

Вывод: было найдено наибольшее собственное число заданной матрицы и соответствующий собственный вектор. Результаты, вычисленные данным методом, и результаты вычислений в MathCad совпадают в пределах заданной точности, равной 10^{-5}.