Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт инженерных наук

Кафедра информационно-коммуникационных технологий

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Вариант 13

по дисциплине «Моделирование»

Выполнила: Разгонова Е.В.

Группа: 0432-04

Проверил: Миронов Т.С.

Псков
2021

Задание 5.1. Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания при известной дисперсии

<u>Задание</u>: смоделируйте выборку 100 значений нормально распределенной случайной величины с указанными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу о величине математического ожидания и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы ($a = 1.2, \delta = 3$).

$ORIGIN := 1 \quad n := 100 \quad a := 1.2 \quad \delta := 3 \quad \alpha := 0.1$

Генерируем выборку из значений случайной величины, имеющей нормальное распределение

$x := rnorm(n, a, \delta)$

Находим точечную оценку мат.ожидания

$$Mx := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_{i,1} \qquad Mx = 0.74864$$

Формулируем нулевую гипотезу (H0): a = a0

$Xmean := mean(x) \qquad Xmean = 0.74864$

$$\phi := \frac{Mx - a}{\sqrt{\frac{\delta^2}{n}}} \qquad \phi = -1.505$$

(H1): a ≠ a0 $\quad Xright := qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \quad Xleft := -Xright$

$Xright = 1.645 \qquad Xleft = -1.645$

Гипотеза принимается т.к. -1.645 < ϕ < 1.645

x =

	1
1	-0.117
2	-0.838
3	-0.22
4	-1.654
5	-3.857
6	1.331
7	0.838
8	2.869
9	7.775
10	3.626
11	4.155
12	3.787
13	3.947
14	3.219
15	-1.933
16	...

(H1): a < a0

$Xleft := -qnorm(1 - \alpha, 0, 1) \qquad Xleft = -1.282$ Гипотеза отклоняется, т.к. ϕ < -1.282

(H1): a > a0

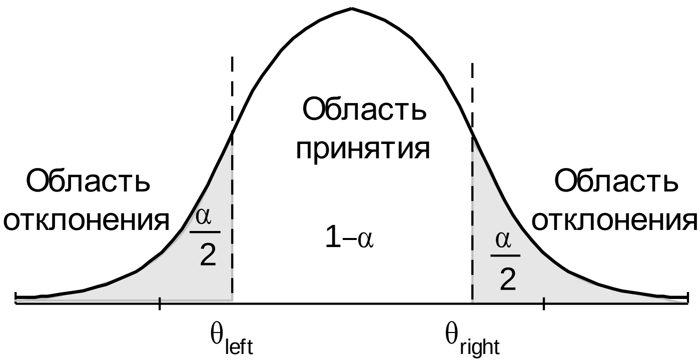
$Xright := qnorm(1 - \alpha, 0, 1) \qquad Xright = 1.282$ Гипотеза принята, т.к. ϕ < 1.282

Рисунок 1. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение:

Предположим, что у нас имеется выборка из 100 значений, имеющих нормальное распределение. Пусть $M[x] = a$ – неизвестная величина, а $D[x] = \delta^2$ – дисперсия, величина δ известна. Сформулируем так называемую нулевую гипотезу (H_0) о том, что неизвестный искомый параметр a равен числу a_0, заданному в условии, т.е. математическая запись гипотезы выглядит как $H_0: a = a_0$, в нашем случае $a = 1.2$. Т.е. нулевая гипотеза звучит следующим образом: «Среднее значение, полученное при эксперименте является оценкой идеального значения $a_0 = 1.2$ с доверительной вероятностью 0.9». Чтобы проверить истинность утверждения, необходимо проверить альтернативные гипотезы:

1) $H_1: a \neq a_0$;
2) $H_1: a < a_0$;
3) $H_1: a > a_0$.

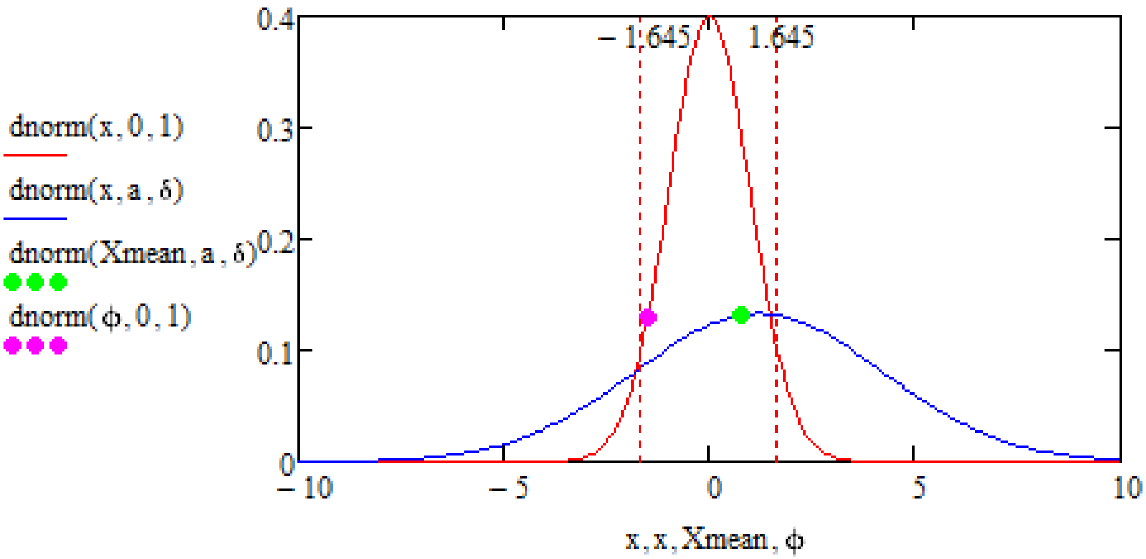


В качестве критерия оценивания вероятности, используется уже известный нам критерий согласия, который по своему принципу является квантилем Стьюдента:

$$\varphi = \frac{\bar{x} - a_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}, t = \frac{a - \bar{x}}{S}\sqrt{n}$$

где $\bar{x}$ (в формуле квантиля – a) – это среднее значение, полученное в результате эксперимента, a_0 (или $\bar{x}$) – идеальное значение, а знаменатили – дисперсия, но в случае критерия используется идеальная дисперсия, потому что он проверяет изначально известное значение дисперсии, в формуле квантиля же она является выборочной. В итоге, гипотеза принимается тогда, когда критерий входит в область принятия.

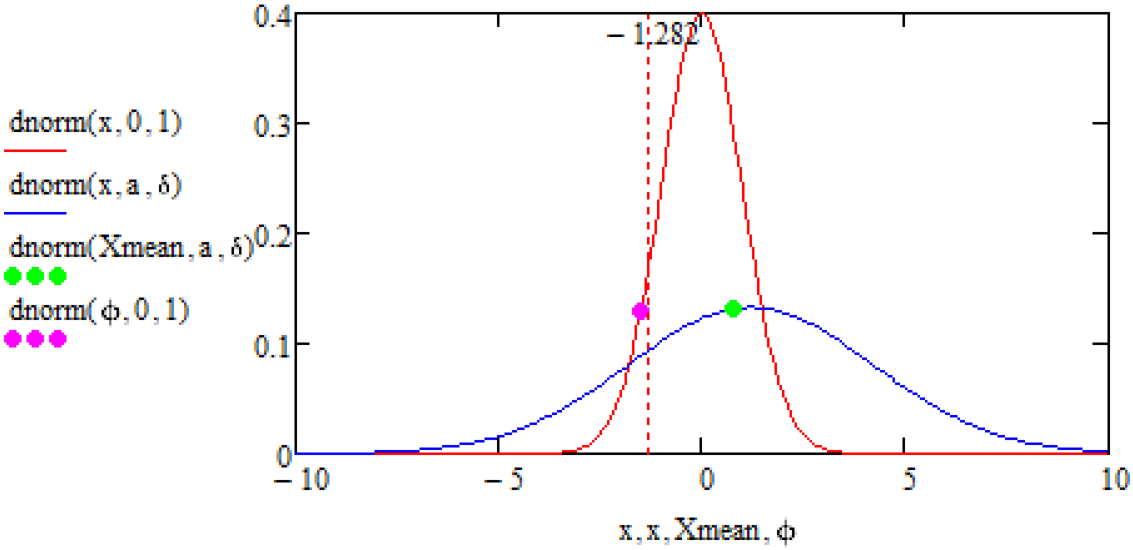
- **Гипотеза $H_1: a \neq a_0$**



Если гипотеза верна, то случайная величина φ имеет стандартное нормальное распределение. Первая альтернативная гипотеза является симметричной, что становится ясно, исходя из рисунка, который именуется критической областью. Этот график плотности отображает область значений, при которых данную гипотезу можно будет опровергнуть.

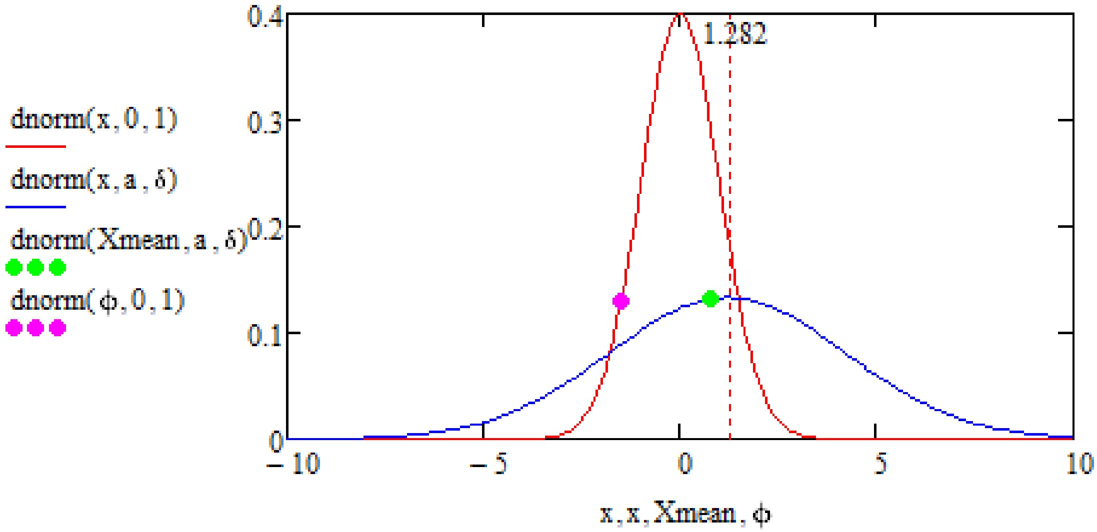
Границы этой области определяются по определённым формулам. Правая граница является корнем уравнения: $\phi(x, r_a) = 1 - 0.5\alpha$ и т.к. это симметричная гипотеза, то левая граница будет идентичной, но с противоположным знаком. Если значение критерия входит в эту область (т.е. $x_{l,a} < \varphi < x_{r,a}$), то гипотеза H_0 отвергается и основной становится гипотеза H_1, в противном случае – отвергается.

- **Гипотеза $H_1: a < a_0$**



В данном случае, рассматриваемая критическая область значений критерия φ, при которых гипотеза *H*0 отвергается, левосторонняя. Критическая точка удовлетворяет условию $P(\varphi < x_{l,a}) = a$ и находится по формуле $x_{l,a} = -x_{r,a}$, где (x, r_a) – решение уравнения $\phi(x, r_a) = 1 - \alpha$. Если неравенство $\varphi < x_{l,a}$ истинно, то гипотеза *H0* отвергается и принимается гипотеза *H1*, в противном случае она не отвергается.

- **Гипотеза $H_1: a > a_0$**



Здесь критическая область значений критерия φ, при которых гипотеза H_0 отвергается, правосторонняя. Критическая точка удовлетворяет условию $P(\varphi > x_{r,a}) = a$ и находится как решение уравнения $\phi(x, r_a) = 1 - \alpha$. Если $\varphi < x_{r,a}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Вывод: при проведённом исследовании, можно утверждать, что для текущего среднего значения выборки справедливы следующие гипотезы:

$$H_1: a \neq a_0 \text{ и } H_1: a > a_0$$