Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт инженерных наук

Кафедра информационно-коммуникационных технологий

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №14

БИОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ДИНАМИКА ПОПУЛЯЦИЙ

Вариант 13

по дисциплине «Моделирование»

Выполнила: Разгонова Е.В.

Группа: 0432-04

Проверил: Миронов Т.С.

Псков

2021

Задание 14.1. Динамика популяций. Уравнение Вольтерра – Лотка

Задание: Постройте графики решения и фазовые портреты динамической системы, моделирующей взаимодействие популяций

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 \end{cases}$$

при заданных значениях параметров a, b, c, d. Исследуйте поведение решения, изменяя параметры в указанном диапазоне ($a = 5,\ b = 4.5,\ c = 2,$ $d = 1$).

Пояснение:

Система Вольтерры-Лотки является первоначальной и простейшей системой для описания модели «хищник-жертва», т.е. популяции хищников и популяции жертв, взаимодействующих в какой-то среде: жертвы едят растительность, хищники — жертв:

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 \end{cases}$$

где $x1$ – численность жертв (травоядных), $x2$ – численность хищников, a – возможность размножения травоядных, b – вероятность того, что травоядное будет съедено хищником, $-c$ – вероятность, что хищник умрёт от голода и d – вероятность того, что хищнику хватит еды на дальнейшее размножение.

ORIGIN := 1 a := 5 b := 4.5 c := 2 d := 1

Модель взаимодействия популяций. Уравнение Вольтерра-Локка

$$F(t,x) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot x_2) \cdot x_1 \\ (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 \end{bmatrix}$$ x - соотношение хищников и жертв

Рисунок 1.1. Фрагмента рабочего документа в MathCAD (1)

Из системы сразу следует, что если жертв нет ($x1 = 0$), то хищники будут вымирать согласно экспоненциальному закону с неким начальным коэффициентом (d согласно уравнению). Похожую ситуацию можно получить, если рассмотрим систему со стороны отсутствия хищников ($x2 = 0$). Рост жертв получается экспоненциальным с некой заранее заданной константой (a).

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1.6 \end{pmatrix} \qquad X1 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X2 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$

$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X3 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$

$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X4 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$

Рисунок 1.2. Фрагмент рабочего документа в MathCAD (2)

Для того чтобы построить графики решений и фазовые кривые для различных, начальных значений, определяются значения параметров системы, определяется и вводится вектор – столбец начальных условий x для первого решения, затем определяется и вводится вектор – функция правых частей $F(t, x)$, решение, вычисленное методом Рунге – Кутты, сохраняется в матрице X_1. Первый столбец этой матрицы содержит значения аргумента t – координаты 400 узлов сетки, второй столбец – значения $x1$ (число жертв в узлах сетки, а третий – значения $x2$ (число хищников).

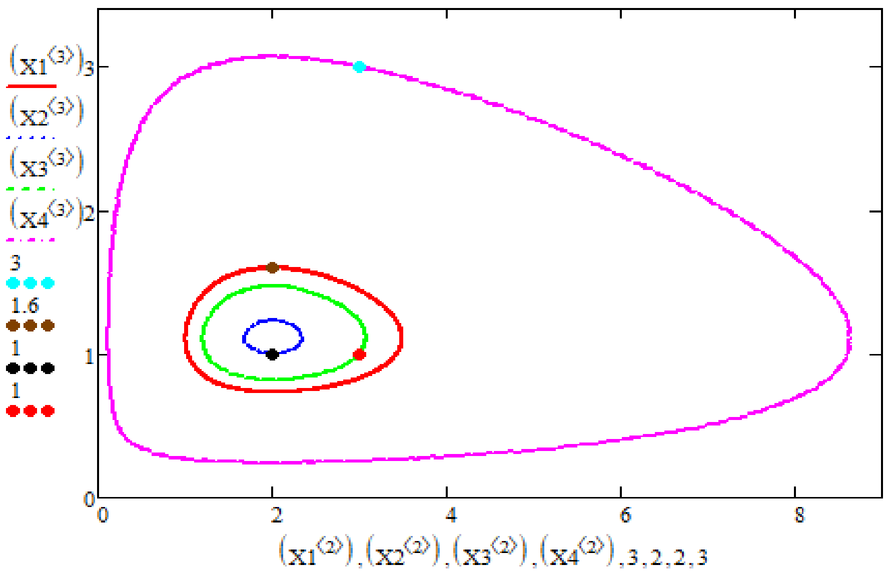

Рисунок 1.3. Фрагмент рабочего кода в MathCAD

Поскольку жертвы поедаются хищниками, число жертв начинает сокращаться, а число хищников – расти. Однако так не может продолжаться долго. Через некоторое время хищникам начинает не хватать пищи, и их популяция перестает расти и даже уменьшается. В итоге жертвы начинают размножаться более интенсивно и их число растет. Далее эти процессы повторяются, и в них обнаруживается периодичность, что видно по замкнутыми линиям, проходящих через свои начальные значения: 2 и 1.6 – первая модель, 2 и 1 – вторая модель, 3 и 1 – третья модель, 3 и 3 – четвёртая модель. При различных соотношениях в системе возможно выживание только жертвы, только хищника, либо сосуществование двух видов.

Модель 1. Соотношение хищников и жертв – ${}^{2}/{}_{1.6}$

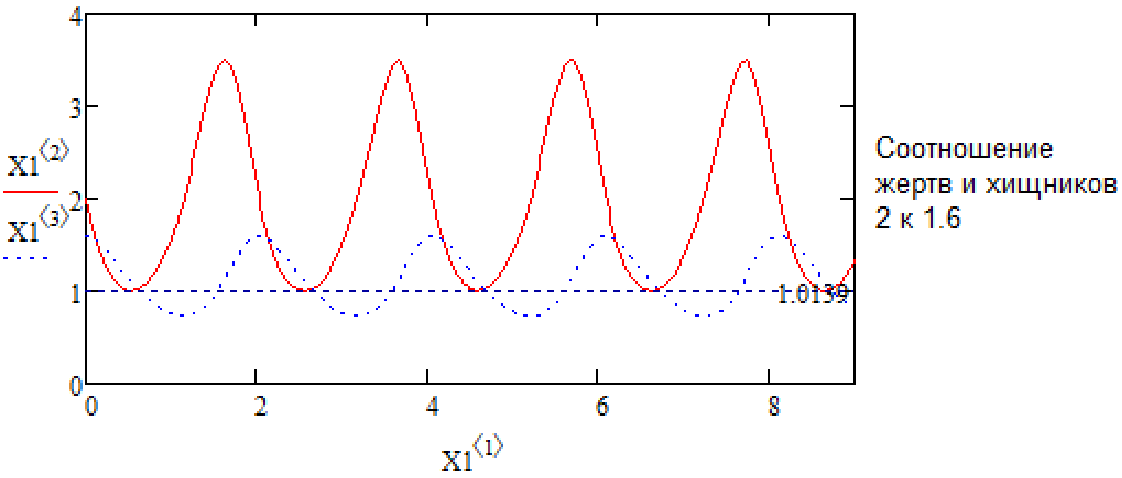

Рисунок 1.4. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение к модели : при заданном начальном соотношении $2/1.6$ можно увидеть, что количество жертв всегда больше, чем количество хищников (второй вектор матрицы $X1^{<2>}$ отвечает за жертв, а $X1^{<3>}$ за хищников). Из графика видно, что хищники достигают своего максимального значения популяции (1.5987) в момент поиска добычи. Сокращение жертв происходит до тех пор, пока хищные особи не достигнут величины равной 1.0139, через некоторое время наблюдается «вымирание» за счёт малого количества пищи. Затем, обе популяции начнут восстанавливаться и достигнув определённой численности (1.5987 и 3.4184), процесс повторится.

Модель 2. Соотношение хищников и жертв – ${}^{2}/{}_{1}$

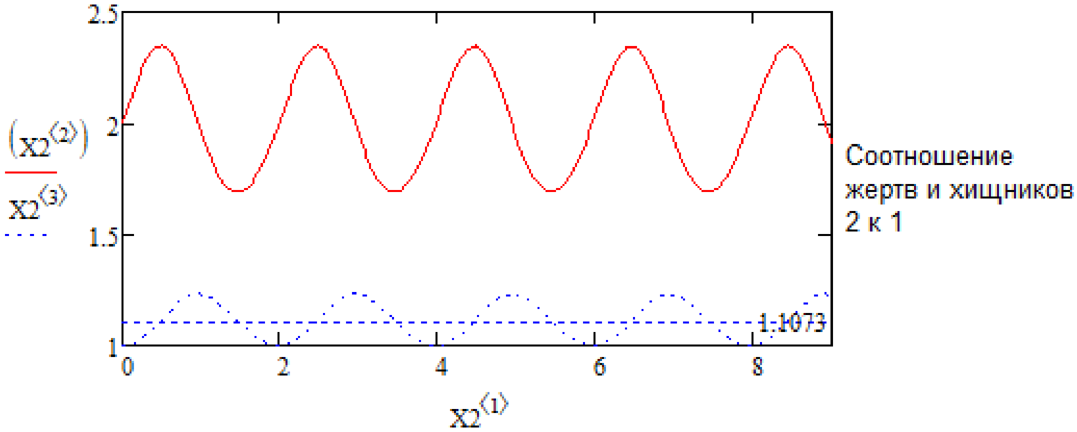

Рисунок 1.5. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение к модели: как и в предыдущем случае, можно заметить, что при соотношении $^2/_1$ число жертв так же больше, чем хищников. Популяция хищников достигает своего максимального значения (1.2301), тем временем снижение популяции жертв близится к минимальной отметке периода (1.6919). Сокращение популяции происходит до тех пор, пока число хищников не достигнет величины равной 1.1073.

Модель 3. Соотношение хищников и жертв – $^3/_1$

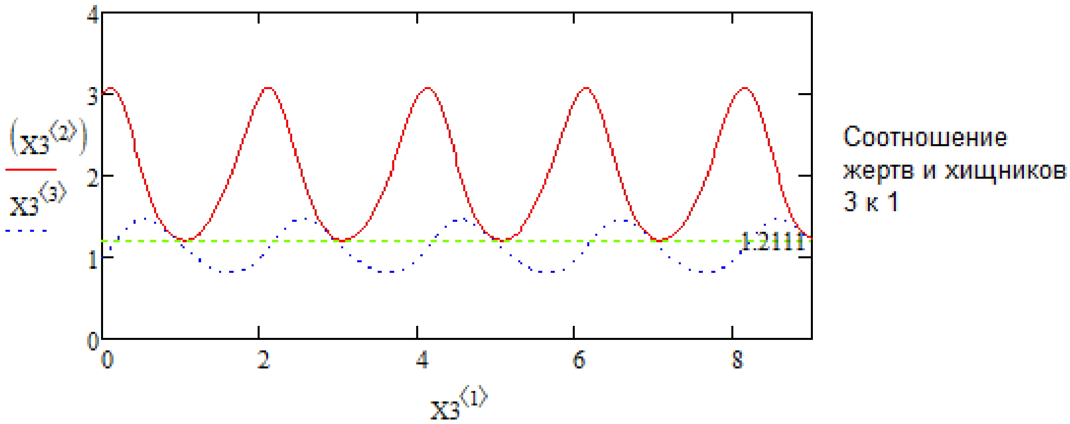

Рисунок 1.6. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение к модели: в данной модели, при соотношении $^3/_1$, сокращение популяции жертв происходит до тех пор, пока число хищников не достигнет величины равной 1.2111. Стоит заметить, что при восстановлении популяции жертв, практически в скором времени растут и хищники, т.е. интервал восстановления между обоими популяциями минимален. Так же, если сравнить данный график с фазовыми кривыми (рис. 1.3), то можно отметить, что третья модель имеет более плавную эллиптическую форму, чем, к примеру, 4 модель.

Модель 4. Соотношение хищников и жертв – $^3/_3$

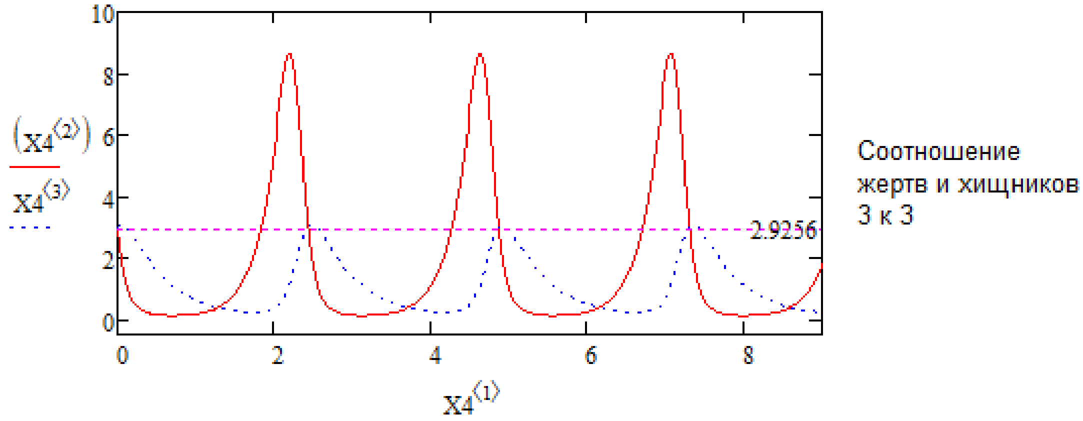

Рисунок 1.7. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение к модели: при соотношении числа особей обоих видов $^3/_3$ видно, что жертвы всё ещё превышают популяцию хищников. Видно, что <u>популяция жертв не успевает восстанавливаться</u>, из-за чего убывают и хищники. Затем, число жертв восстанавливается быстрее хищников (что логично, т.к. их минимальная популяция в какой-то степени обеспечивает благоприятные условия для размножения). Стоит заметить, что восстановление численности хищников, а именно их резкий рост взаимосвязано со спадом жертв. Процесс изменения количества хищников и жертв имеет колебательный характер.

Таблица 1. Общее соотношение max и min популяций

Номер модели	Популяция жертв		Популяция хищников	
	max	min	max	min
1	3.4591	1.0139	1.5934	0.73369
2	2.3384	1.695	1.2293	1
3	3.077	1.2111	1.4689	0.81622
4	8.6116	0.12422	2.9256	0.24675

Задание 14.2. Динамика популяций. Уравнение Вольтерра – Лотка с логистической поправкой

<u>Задание:</u> исследуйте поведение системы, моделирующей взаимодействие популяций

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 - \alpha x_1^2 \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 - \alpha x_2^2 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров a, b, c, d из задания 14.1 и при различных значениях параметра логистической поправки α. Постройте графики решения и фазовые портреты для нескольких различных начальных состояний системы. Найдите значения параметра α, при которых стационарное состояние является устойчивым, а при каких – неустойчивым.

Пояснение: колебания популяций хищников и жертв на самом деле наблюдаются не всегда. Нередко устанавливается стабильное количество тех и других, хотя процесс съедения жертв хищниками идет постоянно. Такой случай требует введения некоторой логистической поправки, которая учитывается в несколько иной модели системы «хищник-жертва».

Дополнительный параметр α в этой модели позволяет управлять затуханием осцилляций (колебаний) модели.

ORIGIN := 1   a := 5   b := 4.5   c := 2   d := 1   α := 0.3

Модель взаимодействия популяций. Уравнение Вольтерра-Локка

$$F(t,x) := \begin{bmatrix} (a - b\cdot x_2)\cdot x_1 - \alpha\cdot (x_1)^2 \\ (-c + d\cdot x_1)\cdot x_2 - \alpha\cdot (x_2)^2 \end{bmatrix}$$ x - соотношение хищников и жертв

$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ X1 := rkfixed(x, 0, 5, 4000, F)

$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ X2 := rkfixed(x, 0, 5, 4000, F)

$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ X3 := rkfixed(x, 0, 5, 4000, F)

Рисунок 2.1. Фрагмент рабочего документа MathCAD

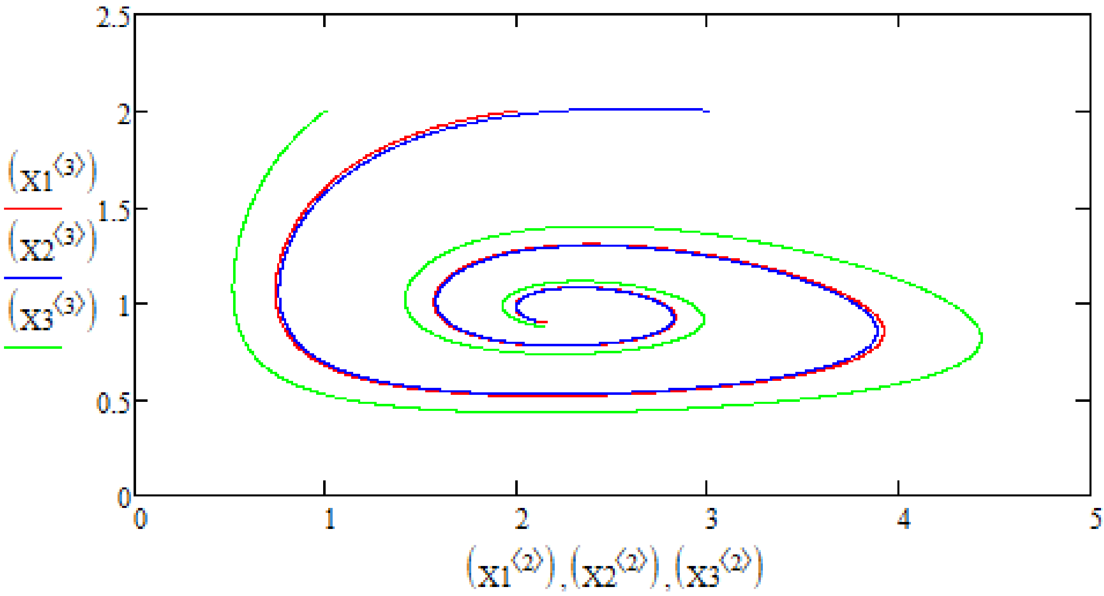

Рисунок 2.2. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Видно, что в этом случае стационарная точка превращается в устойчивый фокус, а решения – в затухающие колебания. При любом начальном состоянии через некоторое время состояние системы становится близким к стационарному и стремится к нему при $t \to \infty$.

Модель 1. Соотношение хищников и жертв – $^2/_2$

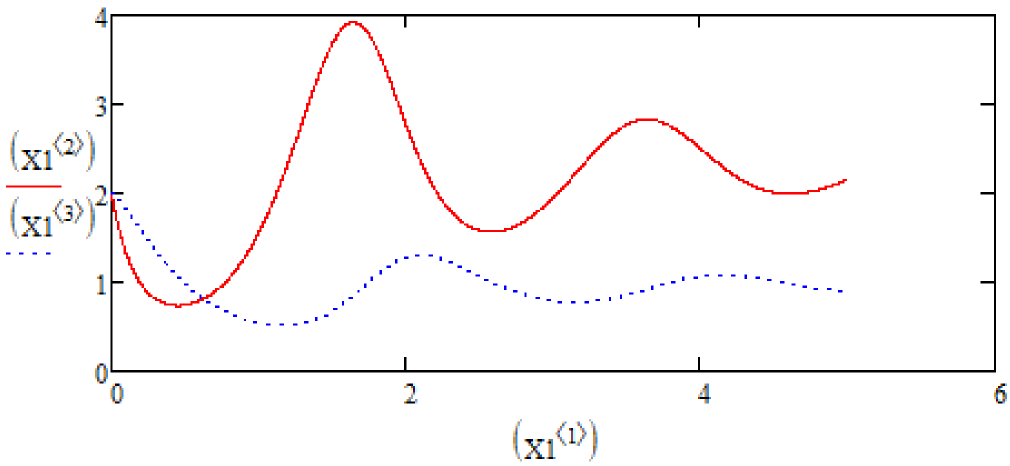

Рисунок 2.3. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Модель 2. Соотношение хищников и жертв – $^3/_2$

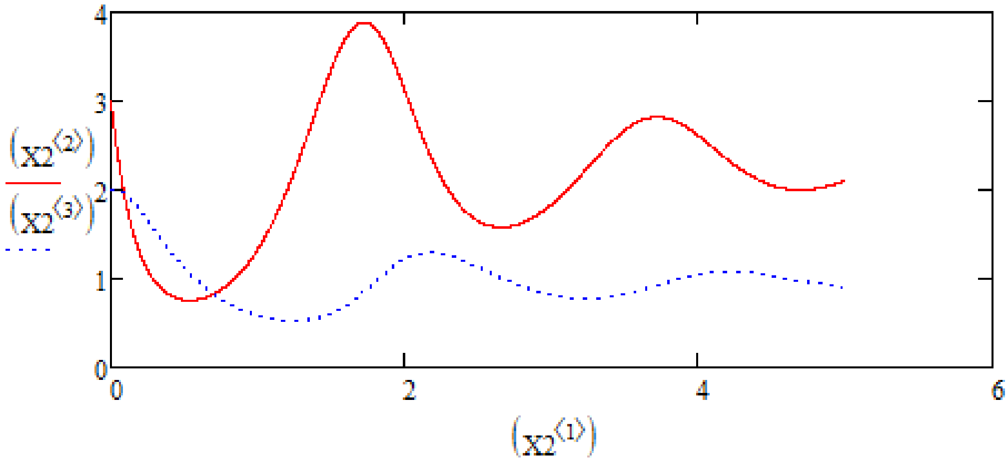

Рисунок 2.4. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Модель 3. Соотношение хищников и жертв – $^1/_2$

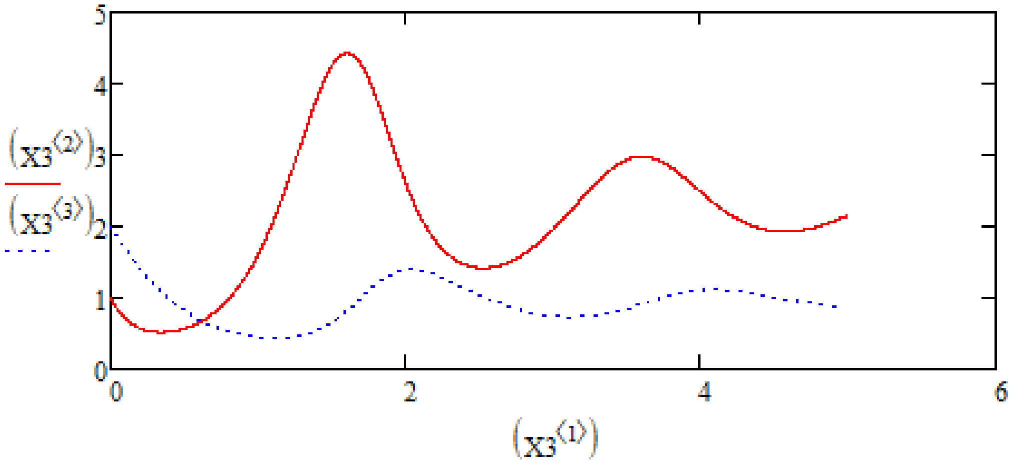

Рисунок 2.5. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение к моделям с положительным коэффициентом α: при указанных параметрах модели колебательный процесс в ней явно затухает и устанавливается длительное равновесие между числом хищников и жертв. Фазовый портрет приобретает устойчивый фокус. Форма фазового портрета свидетельствует о довольно малой нелинейности этой системы.

ORIGIN := 1 $\quad a := 5 \quad b := 4.5 \quad c := 2 \quad d := 1 \quad \alpha := -0.3$

Модель взаимодействия популяций. Уравнение Вольтерра-Локка

$$F(t,x) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot x_2) \cdot x_1 - \alpha \cdot (x_1)^2 \\ (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 - \alpha \cdot (x_2)^2 \end{bmatrix}$$ x - соотношение хищников и жертв

$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X1 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 5, 4000, F)$

$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X2 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 5, 4000, F)$

$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X3 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 5, 4000, F)$

Рисунок 2.6. Фрагмент рабочего документа MathCAD

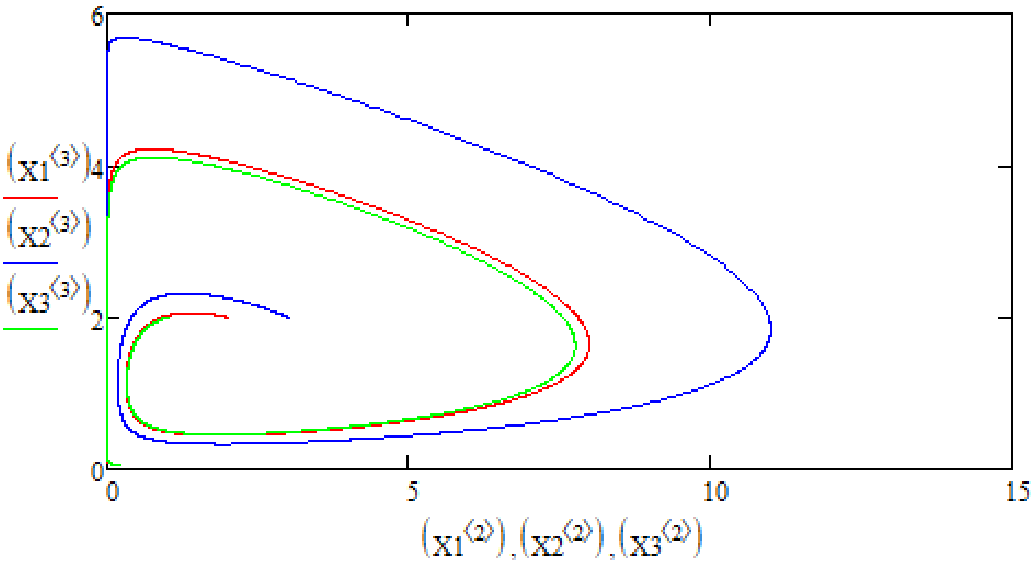

Рисунок 2.6. Фрагмент рабочего документа MathCAD (1)

Как видно, в этом случае стационарная точка является неустойчивым фокусом, и амплитуда колебаний численности видов растет. Как бы близко ни было начальное состояние к стационарному, с течением времени состояние системы будет сильно отличаться от стационарного.

Модель 1. Соотношение хищников и жертв – $^{2}/_{2}$ при $-\alpha$

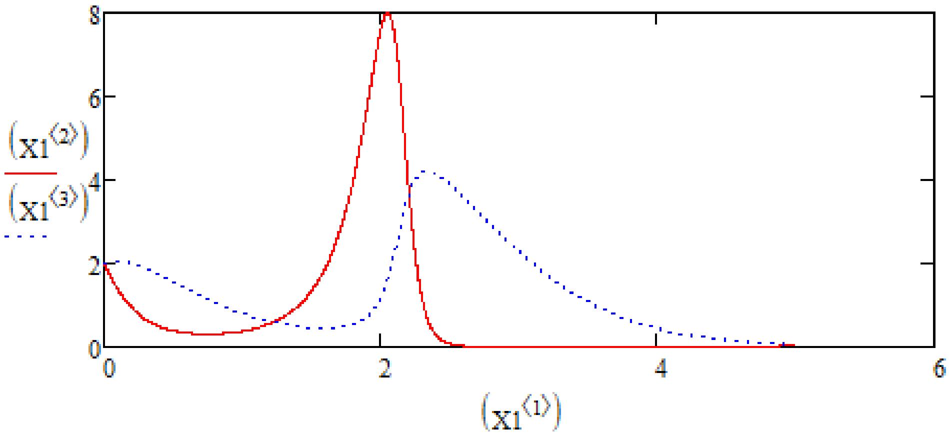

Рисунок 2.7. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Модель 2. Соотношение хищников и жертв – $^{3}/_{2}$ при $-\alpha$

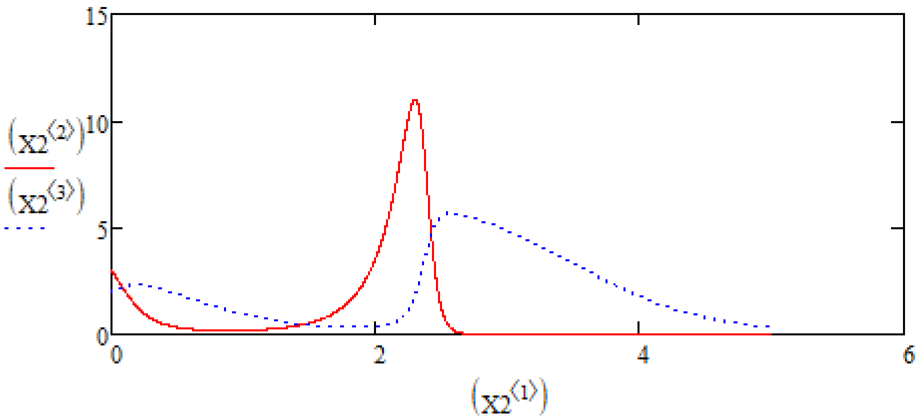

Рисунок 2.8. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Модель 3. Соотношение хищников и жертв – $^{1}/_{2}$ при $-\alpha$

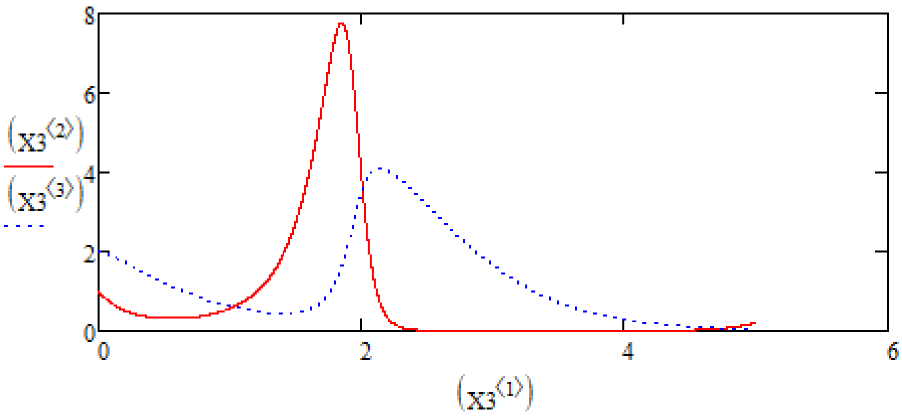

Рисунок 2.9. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение к моделям с <u>отрицательным</u> коэффициентом α: при $a < 0$ можно наблюдать, что модель ведёт себя нестабильно (линии моделей не сходятся), отсутствует стационарное состояние*. Вероятно, это может быть связано с заданными в задании параметрами или подобранными соотношениями, т.к. в процессе выполнения работы оказалось проблематично моделирование ситуаций при некоторых количествах видов.

* *Состояние системы, при котором ее параметры не изменяются в течение длительного времени*