Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт инженерных наук
Кафедра информационно-коммуникационных технологий

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Вариант 13

по дисциплине «Моделирование»

Выполнила: Разгонова Е.В.

Группа: 0432-04

Проверил: Миронов Т.С.

Псков
2021

Задание 2.1. Точечные оценки математического ожидания. Точечные оценки дисперсии

Задание: необходимо найти состоятельные несмещенные оценки математического ожидания M[ξ] и дисперсии D[ξ] случайной величины ξ по приведенным выборочным значениям, заданным следующей таблицей, где *x* – выборочные значения, а *n* – их количество, встречающихся в выборке.

x	128	74	11	2	79	80	15	100	7	66	201	49	54	13
n	8	4	1	7	4	2	3	1	1	2	1	5	5	2

$$\begin{pmatrix} 128 & 74 & 11 & 2 & 79 & 80 & 15 & 100 & 7 & 66 & 201 & 49 & 54 & 13 \\ 8 & 4 & 1 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ Выборка случайной величины

$ORIGIN := 1 \qquad i := 1..14$

$$D := stack(D1, D2) \qquad D1 := \begin{pmatrix} 8 & 128 \\ 4 & 74 \\ 1 & 11 \\ 7 & 2 \\ 4 & 79 \\ 2 & 80 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \qquad D2 := \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 7 \\ 2 & 66 \\ 1 & 201 \\ 5 & 49 \\ 5 & 54 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$n := \sum_{i=1}^{14} D_{i,1} \qquad n = 46$$ Общий объём выборки

$$Mx := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{14} \left(D_{i,1} D_{i,2}\right) \qquad Mx = 61.891$$ Несмещённая оценка мат. ожидания

$$Dx := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{14} \left[D_{i,1} \cdot \left(D_{i,2} - Mx\right)^2\right] \qquad Dx = 2.254 \times 10^3$$ Состоятельная несмещённая оценка дисперсии

$$Dx1 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{14} \left[D_{i,1}\left(D_{i,2} - Mx\right)^2\right] \qquad Dx1 = 2.205 \times 10^3$$ Состоятельная смещённая оценка дисперсии

Рисунок 1. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Пояснение:

Оценка параметра – это любая функция от значений выборки $\theta = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Стоит заметить, что оценки параметров обладают рядом свойств, которые обеспечивают в некотором смысле оптимальное извлечение информации из выборок, следовательно, чем больше выборка, тем точнее будет оценка.

Математическое ожидание — это среднее ожидаемое значение случайной величины ξ, которое является центром варьирования для всех значений выборки. Для каждого элемента мат. ожидание является одинаковым, и оно равно генеральному среднему, т.е. ожиданию всей выборки.

Точечная оценка математического ожидания – выборочное среднее наблюдаемых значений – это состоятельная и несмещённая оценка. Она не является истинным значением параметра, а оценённым по выборке значением.

Несмещённой оценкой называется оценка параметров выборки, мат. ожидание которой равно оцениваемому параметру, т.е. $M[\theta_n] = \theta$, в противном случае она считается смещённой, следовательно имеется систематическая ошибка.

Состоятельной называется такая оценка, которая при увеличении числа измерений приближается к точному значению параметра θ.

Дисперсия – число, характеризующее насколько значения отклоняются от средней величины (математического ожидания) в данной выборке. Следовательно, чем больше дисперсия, тем больше разброс значений.

Точечной оценкой дисперсии является выборочная дисперсия. Она рассчитывается как сумма отклонения каждого значения от среднего, возводимое в квадрат (чтобы избежать взаимоуничтожение отклонений) и делённая на объём выборки.

Вывод: вычисления, произведённые в Mathcad, показали, что состоятельная смещённая оценка дисперсии дает заниженное значение.

Примечание к рабочему документу: встроенная переменная *ORIGIN* – начало нумерации элементов в векторах и матрицах; матричная функция *stack* – итог: матрица, сформированная слиянием матриц-аргументов сверху вниз, т.е. в данной работе, с помощью этой функции, для удобства, объединяется две части матрицы в одну цельную выборку.

Задание 2.2. Точечная оценка вероятности события

Задание: смоделировать несколько выборок значений случайной величины, имеющей распределение Бернулли с заданным значением параметра $p = 0.33$.

$ORIGIN := 1 \quad k := 1..100$

$$P_k := \frac{rbinom(1, 10k, 0.33)_1}{10k}$$

P =

	1
1	0.3
2	0.35
3	0.367
4	0.25
5	0.34
6	0.417
7	0.4
8	0.35
9	0.322
10	0.39
11	0.4
12	0.4
13	0.415
14	0.236
15	0.313
16	...

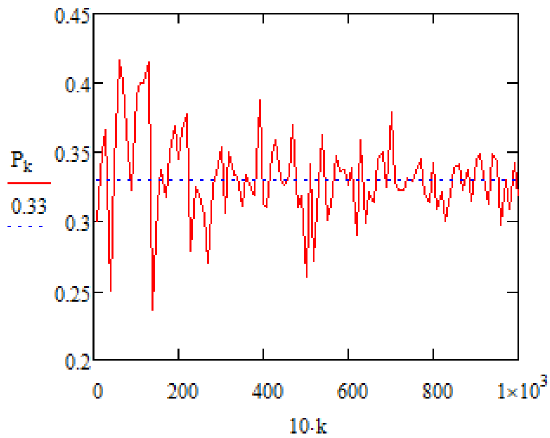

Рисунок 2. Рабочий документ MathCAD с вычислениями

Пояснение: Биномиальное распределение — распределение количества «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна p.

Задача состоит в получении оценки неизвестного параметра распределения p по результатам серии n случайных экспериментов. При заданном числе испытаний n количество благоприятных исходов m в серии испытаний – случайная величина, имеющая распределение Бернулли.

Для расчёта этой вероятности в Mathcad используется функция $rbinom(k, n, p)$, которая формирует вектор из k случайных чисел, каждое из которых равно числу успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом.

Вывод: график оценки вероятности $\bar{p}$ показывает, что с увеличением объёма выборки, оценка случайной величины $\bar{p}$ приближается к заданному параметру $p = 0.33$.

Примечание: т.к. значение функции является вектором, число успехов в серии испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании содержится в первой компоненте вектора $rbinom(k, n, p)$, т.е. число успехов равно $rbinom(k, n, p)_1$.

Задание 2.3. Точечная оценка параметров равномерного распределения

Задание: смоделировать несколько выборок разного объема значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$ для значения $\theta = N/2$ (N – номер варианта), и найдите оценки $\hat{\theta}^{(1)}$ и $\hat{\theta}^{(3)}$ параметра θ. Постройте график зависимости $\hat{\theta}^{(1)}$ и $\hat{\theta}^{(3)}$ от объема выборки.

$$ORIGIN := 1 \qquad k := 1..20 \qquad N := 13 \qquad \theta := \frac{N}{2} \qquad \theta = 6.5$$

$$T1_k := \frac{2}{10 \cdot k} \cdot \sum runif(10 \cdot k, 0, 6.5) \qquad T1_{17} = 6.755$$

$$T3_k := \frac{10 \cdot k + 1}{10 \cdot k} \cdot \max(runif(10 \cdot k, 0, 6.5)) \qquad T3_{17} = 6.493$$

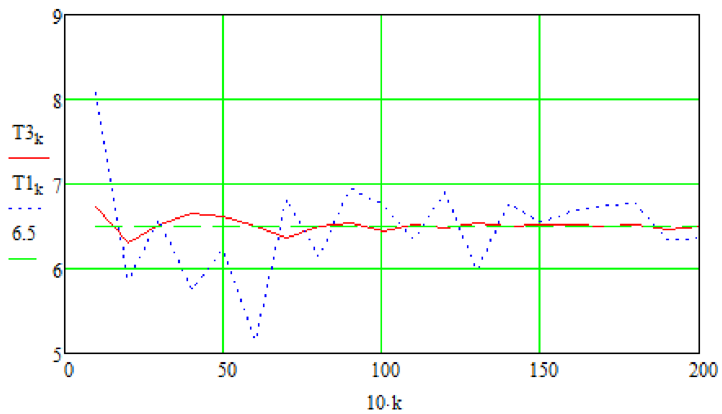

Рисунок 3. Рабочий документ MathCAD с вычислениями

Пояснение:

Равномерное распределение – распределение, в котором значения случайной величины с двух сторон ограничены и в границах интервала имеют одинаковую вероятность. Это означает, что в данном интервале плотность вероятности постоянна.

Для моделирования выборки значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке, предназначена функция $runif(k, a, b)$, которая формирует вектор из k случайных чисел, каждое из которых – значение равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$ случайной величины.

Вывод: в процессе выполнения вычислений можно заметить, что выборке соответствует оценка $\theta_1 = 6.755$ (при проценте отклонения в $\approx 4\%$), в то время как $\theta_3 = 6.493$ (процент отклонения $\approx 1\%$). Следовательно, второй метод имеет более точную оценку при минимальном отклонении, чем оценка первого, так как истинное значение параметра $\theta = 6.5$.