Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт инженерных наук
Кафедра информационно-коммуникационных технологий

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ И ПРОЦЕССОВ. ФОРМИРОВАНИЕ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вариант 13
по дисциплине «Моделирование»

Выполнила: Разгонова Е.В.
Группа: 0432-04
Проверил: Миронов Т.С.

Псков
2021

Задание 8.1. Формирование возможных значений случайных величин с нормальным законом распределения

Задание: на основе лучшей сгенерированной последовательности псевдослучайных чисел (лабораторная работа №7) сформируйте ряд значений случайных величин с нормальным законом распределения ($m = 45, D[\xi], \% = 25$). Проверьте гипотезу о параметрах нормально распределенной случайной величины.

Пояснение:

Имитация случайных сигналов и процессов будет вестись на случайных величинах. Случайные величины, в отличие от случайных чисел подчиняются определённому закону распределения. Самым базовым методом формирования случайных сигналов и процессов является прямой метод. Он заключается в преобразовании случайных величин. Пусть переменная y является функцией от x:

$$y = \varphi(x).$$

Следовательно, для каждого значения x однозначно определяется y.

Допустим, нужно сгенерировать некие случайные процессы, которые формируются на базе случайных величин с заданным законом распределения. Самым популярным законом является нормальный закон, т.е. модель находится в стабильном состоянии и работает без перебоев, ошибок и т.д.

Пусть x является случайной величиной, следовательно, y также будет случайной величиной. И если x имеет функцию распределения $f1(x)$, то y, соответственно, будет иметь так же функцию распределения $f2(y)$, но уже зависящую от значений $f1(x)$ и $\varphi(x)$.

Т.е. формульно данное отношение можно обозначить так:

$$f1(x)dx = f2(y)dy$$

Взаимозначное соответствие означает, что вероятность того, что случайная величина x находится в интервале между $x1$ и $x1 + dx$, равна вероятности того, что преобразованная случайная величина y будет находиться в интервале $y1$ и $y1 + dy$.

Когда речь идёт о прямом методе, то в практике применяется разделение на подинтервалы. Необходимо распределить все полученные числа по интервалу функции плотности с неким условием. Для того, чтобы разместить эти значения, в первую очередь нужно определиться с количеством подинтервалов. Второй момент – каким образом он будет разбиваться. Для этого используется интеграл.

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(y)dy = \frac{1}{m},$$

где a_k и a_{k+1} – левые и правые границы интервала.

Посредством этой формулы, основной интервал разбивается на подинтервалы. Нужно подобрать такую правую границу, чтобы интеграл (площадь $f(y)dy$) был приблизительно равен $1/_m$. Получается, что разбивая интервал на «столбики», находится правая граница a_{k+1} с условием, что площади каждого столбика, должны быть одинаковыми, т.е. $\approx 1/_m$.

Резюмируем порядок действий алгоритма:

1) генерируется случайное число x_i, которые затем равномерно распределяется в интервале (0, 1);

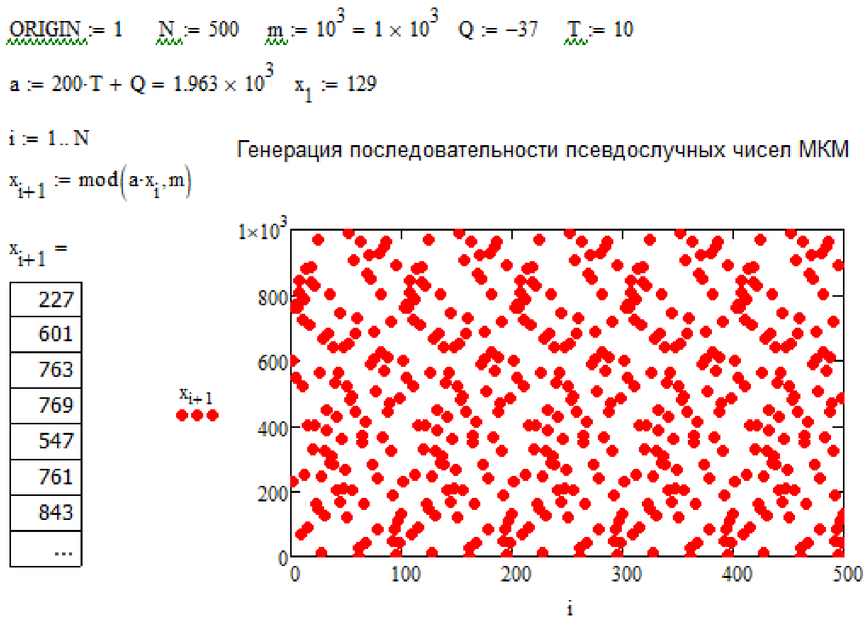

Рисунок 1. Фрагмент рабочего документа MathCAD (1)

Приведение к интервалу равномерного распределения (0,1)

$pX_i := \frac{x_i}{m}$

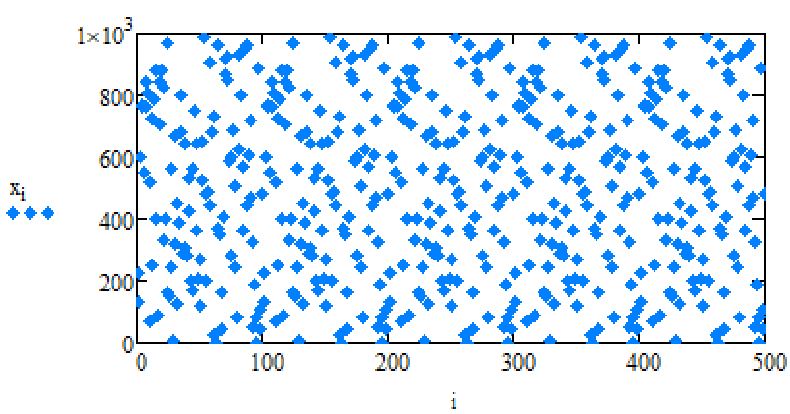

Рисунок 2. Фрагмент рабочего документа MathCAD (2)

2) на основе данного числа случайным образом выбирается интервал $(a_{k+1} - a_k)$;

$\alpha := 0.05 \quad m := 45 \quad Dx := m \cdot 0.25 = 11.25 \quad \sigma := Dx \quad k := 20$

Определение границ интервала нормального распределения (ak, ak+1)

$f(x) := dnorm(x, m, \sigma)$ Плотность распределения

$a_1 := qnorm\left(\frac{\alpha}{2}, m, \sigma\right) \quad a_{k+1} := qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, m, \sigma\right)$

$a_1 = 22.95 \quad a_{k+1} = 67.05$ Квантили общего нормального закона

$P := \int_{a_1}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = 0.95$ Площадь области под графиком функции распределения (купол)

$j := 1..k$

Разбиение интервала на подинтервалы и нахождение их границ

$a_{j+1} := root\left(\int_{a_j}^{m} f(x)\,dx - \frac{P}{k}, m\right)$

root(x,y) определяет неизвестную правую границу m, затем aj+1 становится левой границей и вычисления повторяются

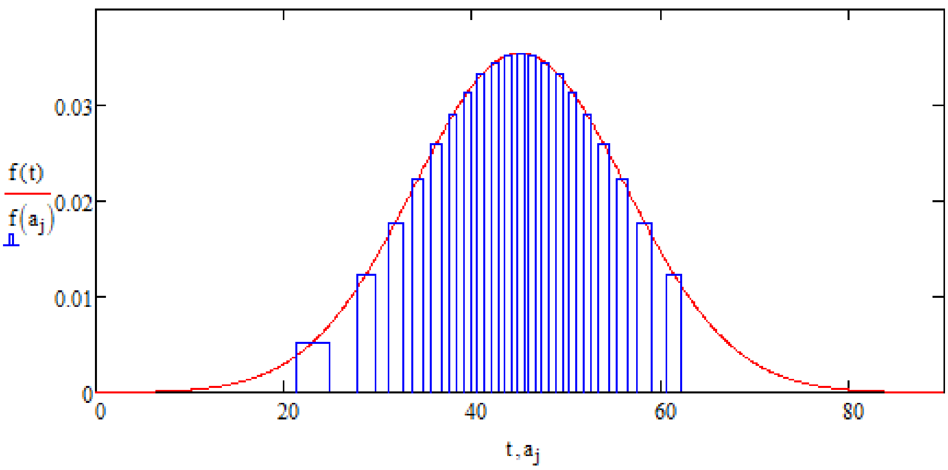

Рисунок 3. Фрагмент рабочего документа MathCAD

3) генерируется число x_{i+1}, которое затем масштабируется с целью приведения к интервалу (a_{k+1}, a_k) с помощью масштабирующего коэффициента $(a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$;

4) вычисляется итоговая случайная величина $y_i = a_k + (a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$ с требуемым законом распределения.

График функции плотности вероятности с заданным мат. ожиданием и среднеквадратичным отклонением

Генерация случайных величин $\quad y_{i,j} := a_j + (a_{j+1} - a_j) \cdot pX_i$

$Ymin := min(y) = 22.956 \quad Ymax := max(y) = 66.976 \quad R := Ymax - Ymin = 44.02$

$K := 44 \quad \Delta := \frac{R}{K} = 1 \quad j := 1..K + 1 \quad pp_j := Ymin + \frac{\Delta}{2} \cdot (2 \cdot j - 1) \quad PS := sort(pp)$

$h := hist(PS, y)$

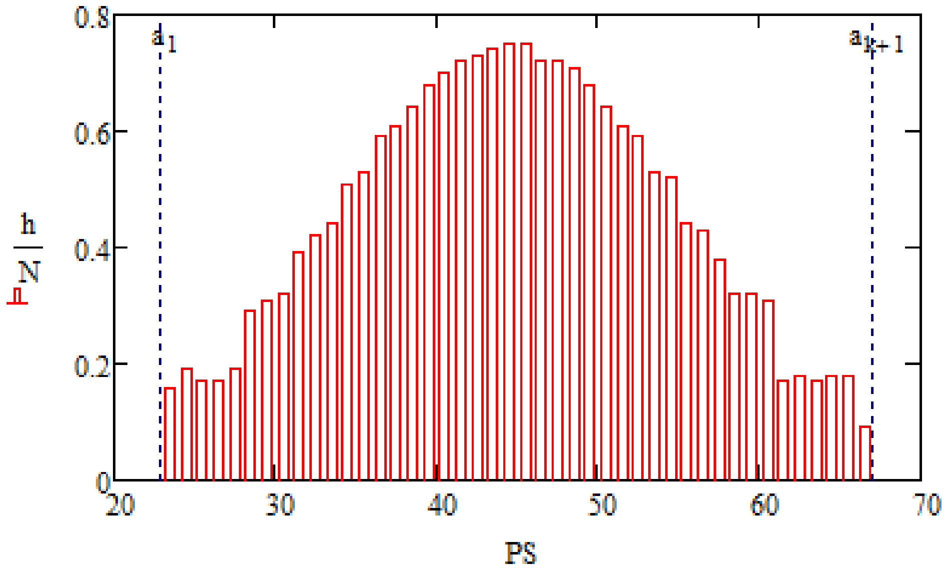

Рисунок 4. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Гипотеза H0: среднее значение $Ymean = 44.978$ является оценкой идеального значения $m = 45$ с доверительной вероятностью $p = 95\%$.

$Ymean := mean(y) = 44.978$

$$\phi := \frac{Ymean - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} = -0.044 \qquad yright := qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) = 1.96$$

$$yleft := -yright = -1.96$$

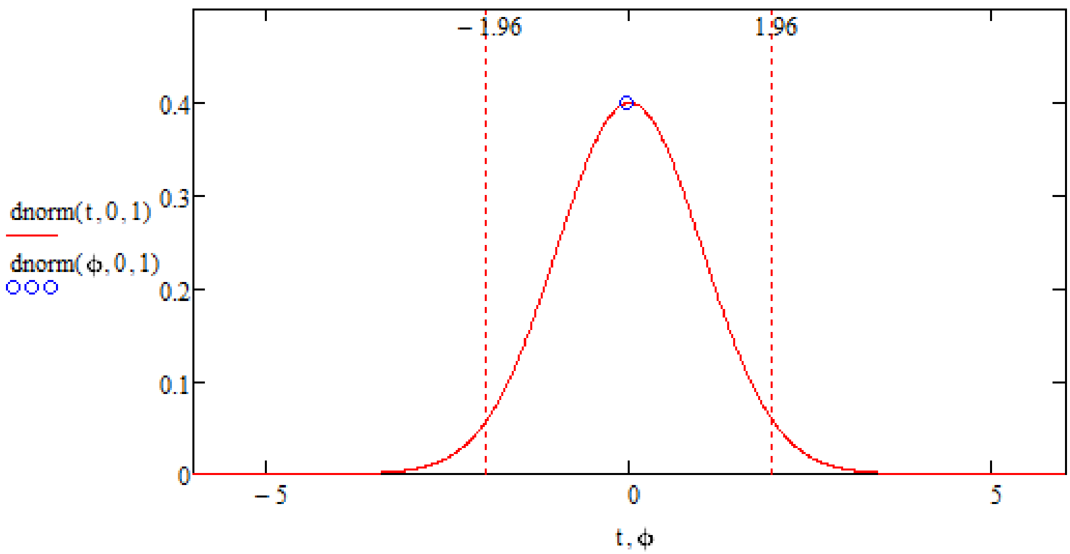

Рисунок 5. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Вывод по гипотезе: т.к. критерий согласия Стьюдента $\varphi = -0.044$, находится в пределах доверительного интервала $-1.96 \le \varphi \le 1.96$, среднее значение $Ymean = 44.978$ является оценкой идеального значения $m = 45$ с доверительной вероятностью $p = 95\%$, следовательно, гипотеза принимается.

Однако, нельзя с уверенностью утверждать, что преобразованное распределение подчиняется нормальному закону, основываясь только на оценке мат.ожидания. Поэтому выдвигается ещё одна гипотеза, но уже относительно дисперсии распределения: дисперсия $var(y)$ выборочной случайной величины y является оценкой генеральной дисперсии σ^2 с доверительной вероятностью $p = 95\%$:

$\sigma x := var(y)$ $\quad \sigma x = 98.056$ $\quad$ var(y) - возвращает дисперсию элементов массива

$yright1 := qchisq\left(1 - \frac{\alpha}{2}, K - 1\right)$ $\quad yleft1 := qchisq\left(\frac{\alpha}{2}, K - 1\right)$ $\quad$ Довертельные интервалы для параметров норм. рапсределения

$\phi := \frac{(K - 1)\cdot \sigma x}{\sigma^2}$ $\quad yleft1 = 26.785$ $\quad yright1 = 62.99$

$\phi = 33.315$

Рисунок 6. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Вывод по гипотезе: дисперсия $\sigma x = 98.056$ выборочной случайной величины y является оценкой генеральной дисперсии σ^2 с доверительной вероятностью $p = 95\%$, т.к. $26.785 < \varphi < 62.99$, следовательно, гипотеза верна.

Вывод: в данной лабораторной работе, применяется метод кусочной аппроксимации функции нормального закона, сформированные случайные величины проходят проверку гипотез, поэтому на уровне значимости в 5% можно утверждать, что они имеют нормальный закон распределения.