

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт инженерных наук  
Кафедра информационно-коммуникационных технологий

***ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №11***

ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ПАССИВНЫЙ И  
АКТИВНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Вариант 13  
по дисциплине «Моделирование»

Выполнила: Разгонова Е.В.

Группа: 0432-04

Проверил: Миронов Т.С.

Псков  
2021

### Задание 11.1. Пассивный и активный эксперименты

Задание: на основе полученной в лабораторной работе №6 линии регрессии, провести пассивный и активный эксперименты, при условии, что на линейную статистическую модель действует нормально распределенная случайная помеха, невязка которой  $\varepsilon_i = (5\%..10\%)$ . Активный эксперимент представляет собой полный факторный эксперимент на двух уровнях.

|     |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | -0.9  | -0.8  | -0.7  | -0.6  | -0.5  | -0.4  | -0.3  | -0.2  |
| $y$ | 5.892 | 5.103 | 5.624 | 5.197 | 4.749 | 4.653 | 4.253 | 4.249 |
| $x$ | -0.1  | 0     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   |       |
| $y$ | 4.555 | 3.955 | 4.076 | 3.869 | 3.241 | 2.782 | 2.667 |       |

#### Пояснение:

Основная задача планирования машинных экспериментов – получение необходимой информации об исследуемой системе при ограничениях на ресурсы (затраты машинного времени, памяти и т.п.). К числу частных задач, решаемых при планировании машинных экспериментов, относятся задачи уменьшения затрат машинного времени на моделирование, увеличения точности и достоверности результатов моделирования, проверки адекватности модели и т.д.

Методы планирования эксперимента позволяют строить как статические, так и динамические модели. Те и другие могут быть определены аналитическими и экспериментально-статистическими методами. Экспериментально-статистические методы в основном базируются на использовании пассивного и активного эксперимента.

При пассивном эксперименте исследователь находится в роли пассивного наблюдателя, т.е. информация получается в условиях обычного функционирования объекта. Экспериментатору приходится только решать такие вопросы, как выбор количества и частоты измерений, выбор метода обработки результатов измерений, т.е. оптимизация сбора информации.

Ниже представлен фрагмент рабочего документа, в котором за основу эксперимента взята выборка значений случайных величин  $x$  и  $y$  из лабораторной работы №6.

1) Задана выборка из  $x$  и  $y$  измерений объёмом  $N$ . Для вычисления параметров в рабочем документе используются функции  $intercept(x, y)$  и  $slope(x, y)$ . С помощью найденных параметров определяется средняя (идеальная) линия прогона  $yx_i = a_0 + a_1x_i$  (само уравнение  $yx = a_0 + a_1x$  является однофакторной детерминированной моделью, она же теоретическая).

```

ORIGIN := 1    N := 15    i := 1..N

x := (-0.9 -0.8 -0.7 -0.6 -0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5)
y := (5.892 5.103 5.624 5.197 4.749 4.653 4.253 4.249 4.555 3.955 4.076 3.869 3.241 2.782 2.667)

x := x^T    y := y^T

Нахождение параметров модели объекта a0 и a1
a0 := intercept(x,y)    a0 = 3.918    a1 := slope(x,y)    a1 = -2.03

yx_i := a0 + a1·x_i

```

Рисунок 1.1. Фрагмент рабочего документа MathCAD

2) Далее, строится график линейной регрессии с заданными экспериментальными точками.

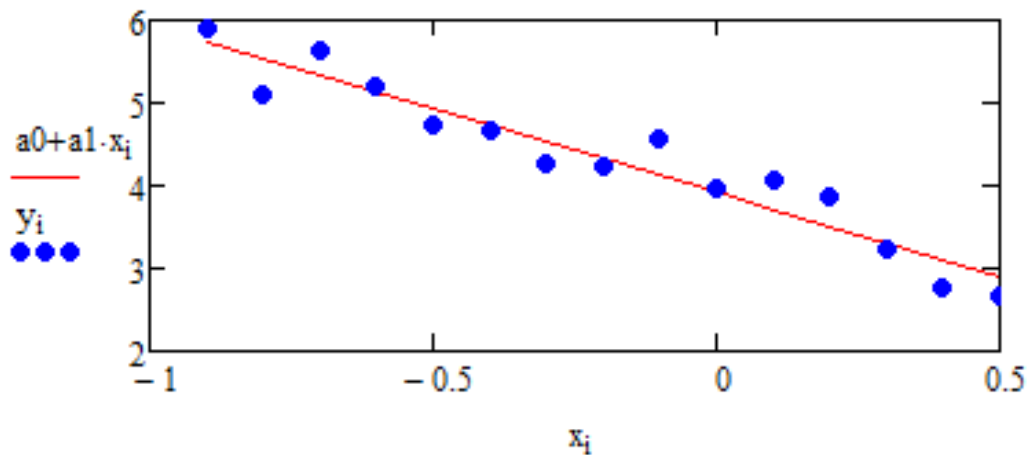


Рисунок 1.2. Фрагмент рабочего документа MathCAD

3) Находится дисперсия ошибки  $\sigma$  выходного сигнала функции  $y(x)$ , где  $N - 2$  – степень свободы. С помощью этого параметра в дальнейшем будут определяться, т.н. «трубы», по которым будут распределяться экспериментальные точки.

$$\sigma := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - y_{x_i})^2}{N - 2}} \quad \text{Дисперсия ошибки} \quad \sigma = 0.282$$

Рисунок 1.3. Фрагмент рабочего документа MathCAD

4) Генерируется нормально распределенная случайная помеха  $\varepsilon_i$ , которая будет действовать на линейную однофакторную статистическую модель, т.е. в эксперименте действует одна модель объекта, но с тремя различными случайными воздействиями (помехами). На основе погрешности формируются экспериментальные точки  $Y1 - Y3$ . Сгенерировано три выборки по 15 точек. Общее количество точек – 45.

Случайная помеха

$$\varepsilon 1 := \text{rnorm}(N, 0, 0.2822)$$

$$\varepsilon 2 := \text{rnorm}(N, 0, 0.280)$$

$$\varepsilon 3 := \text{rnorm}(N, 0, 0.2812)$$

$$Y1 := y_x + \varepsilon 1 \quad Y2 := y_x + \varepsilon 2 \quad Y3 := y_x + \varepsilon 3 \quad \text{Экспериментальные точки}$$

Рисунок 1.3. Фрагмент рабочего документа MathCAD

#### ❖ Пассивный эксперимент

5) Определяется процент точек реакции детерминированной модели, попавших в интервалы  $\pm\sigma$  и  $\pm 2\sigma$ . A1-A3 – B1-B3 – вероятности попадания точек для каждого прогона.

$$\begin{array}{lcl}
A1 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ a \leftarrow a + 1 \text{ if } (yx_1 - \sigma < Y1_1 < yx_1 + \sigma) \\ \frac{a}{N} \cdot 100 \end{array} \right. & = 66.667 & \\
A2 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ a \leftarrow a + 1 \text{ if } (yx_1 - \sigma < Y2_1 < yx_1 + \sigma) \\ \frac{a}{N} \cdot 100 \end{array} \right. & = 66.667 & \text{Процент точек, попавших в} \\
& & \text{интервал } \pm\sigma \\
A3 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ a \leftarrow a + 1 \text{ if } (yx_1 - \sigma < Y3_1 < yx_1 + \sigma) \\ \frac{a}{N} \cdot 100 \end{array} \right. & = 66.667 &
\end{array}$$

Рисунок 1.4. Фрагмент рабочего документа MathCAD (1)

$$\begin{array}{lcl}
B1 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ a \leftarrow a + 1 \text{ if } (yx_1 - 2 \cdot \sigma < Y1_1 < yx_1 + 2 \cdot \sigma) \\ \frac{a}{N} \cdot 100 \end{array} \right. & = 93.333 & \\
B2 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ a \leftarrow a + 1 \text{ if } (yx_1 - 2 \cdot \sigma < Y2_1 < yx_1 + 2 \cdot \sigma) \\ \frac{a}{N} \cdot 100 \end{array} \right. & = 93.333 & \text{Процент точек, попавших в} \\
& & \text{интервал } \pm 2\sigma \\
B3 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ a \leftarrow a + 1 \text{ if } (yx_1 - 2 \cdot \sigma < Y3_1 < yx_1 + 2 \cdot \sigma) \\ \frac{a}{N} \cdot 100 \end{array} \right. & = 93.333 &
\end{array}$$

Рисунок 1.4. Фрагмент рабочего документа MathCAD (2)

Это распределение обеспечивает выходным точкам нормальный закон распределения, а это означает, что объект работает в установившемся режиме.

Примечание: для нормального распределения процессов приблизительно 67% точек должно находиться в пределах одного отклонения  $\sigma$  от линии регрессии (труба А) и 95% точек – в пределах удвоенного отклонения  $2\sigma$  (труба В).

б) Построен график реакции детерминированной модели с трубами разброса реакции А ( $yx \pm \sigma$ ) и В ( $yx \pm 2\sigma$ ) с экспериментальными точками.

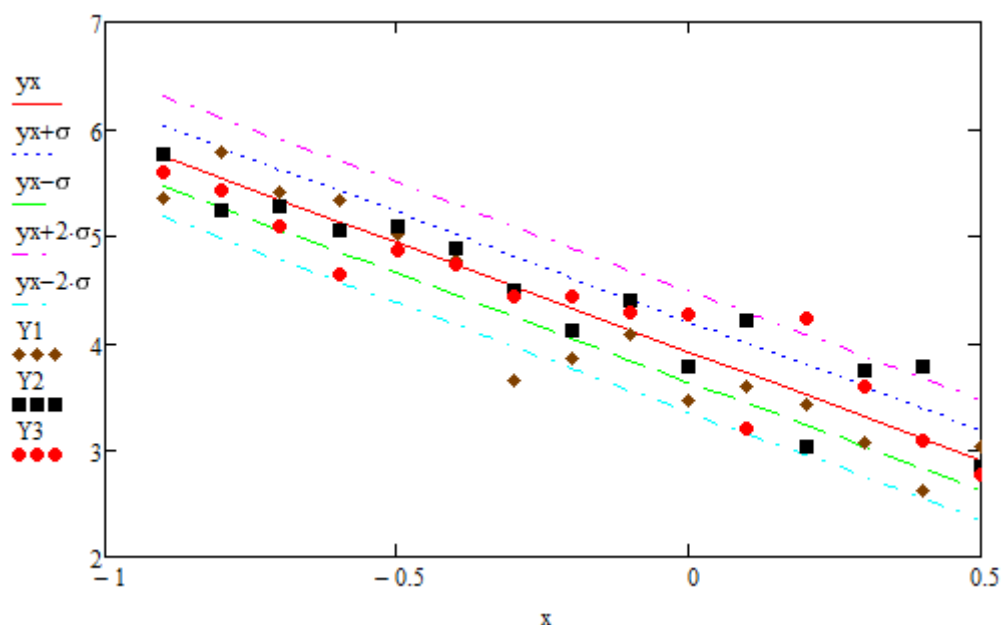


Рисунок 1.5. Фрагмент рабочего документа MathCAD

7) С помощью функций  $intercept(x, y)$  и  $slope(x, y)$  определяются экспериментальные модели  $Y_{t1}$  –  $Y_{t3}$  по имеющимся экспериментальным точкам (т.е. строятся экспериментальные линии регрессии)  $Y1$  –  $Y3$ .

Построение уравнений линий прогона

$$Y_{t1}_i := intercept(x, Y1) + slope(x, Y1) \cdot x_i$$

$$Y_{t2}_i := intercept(x, Y2) + slope(x, Y2) \cdot x_i$$

$$Y_{t3}_i := intercept(x, Y3) + slope(x, Y3) \cdot x_i$$

Рисунок 1.6. Фрагмент рабочего документа MathCAD

8) Построение графика экспериментальных моделей  $Y_{t1}$  –  $Y_{t3}$ , а также теоретической модели  $u_x$ .

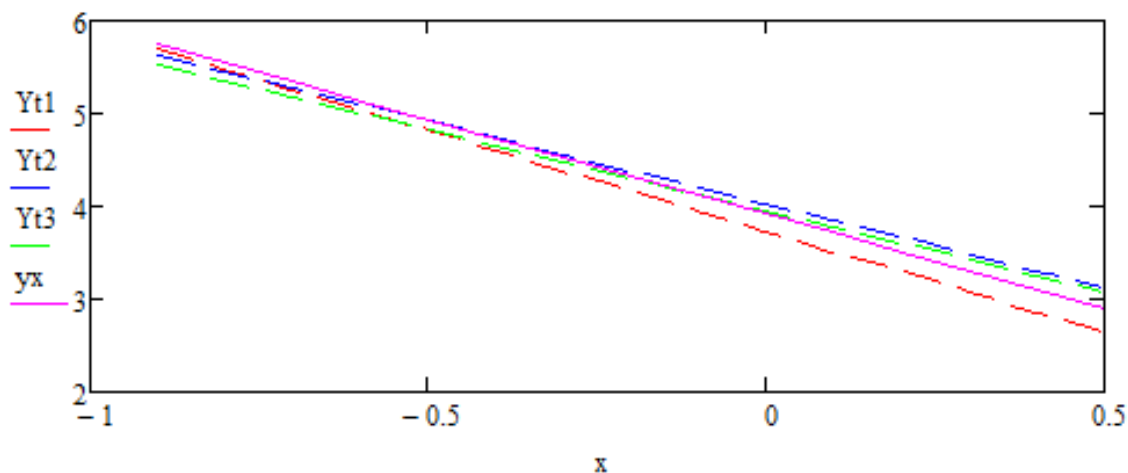


Рисунок 1.7. Фрагмент рабочего документа MathCAD

9) Проверка модели на адекватность. Под адекватностью математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи.

Для проверки адекватности необходимо определить дисперсии статистической и детерминированной моделей. Дисперсия детерминированной модели – это невязки между точками и идеальной линией (модели). Дисперсия статистической модели определяет невязки между найденными экспериментальными точками и линиями прогона (теоретические точки). Неточность модели к ошибке определяется через критерий Фишера.

$$\begin{aligned}
 k &:= 3 \quad NK := N \cdot k \quad j := 1..NK \quad \alpha := 0.05 \\
 yxS &:= \text{stack}(yx, yx, yx) \quad \text{Массив идеальной средней} \\
 yxT &:= \text{stack}(Yt1, Yt2, Yt3) \quad \text{Массив линий прогона} \\
 yxR &:= \text{stack}(Y1, Y2, Y3) \quad \text{Массив экспериментальных точек} \\
 S1 &:= \frac{1}{NK - 2} \cdot \sum_{j=1}^{NK} (yxT_j - yxS_j)^2 \quad S1 = 0.02 \quad \text{Дисперсия детерминированной модели} \\
 S2 &:= \frac{1}{NK - 1} \cdot \sum_{j=1}^{NK} (yxT_j - yxR_j)^2 \quad S2 = 0.05 \quad \text{Дисперсия статистической модели} \\
 F_{\text{факт}} &:= \frac{S1}{S2} \quad F = 0.487 \\
 \text{Квантиль Фишера} \quad f &:= qF(1 - \alpha, NK - 1, NK - 2) \quad f = 1.657
 \end{aligned}$$

Рисунок 1.8. Фрагмент рабочего документа MathCAD

Он должен быть меньше табличного значения  $f$  при вероятности  $p = 0.95$  и  $N$  – количество измерений входного воздействия. Определим табличное значение с помощью квантиля Фишера (степень свободы – это разность числа наблюдений и числа оцениваемых параметров, поэтому в параметрах квантиля заданы степени  $NK - 1$  и  $NK - 2$ ).

**Вывод по проверке адекватности:** полученное значение критерия Фишера меньше, чем его табличное значение ( $0.487 < 1.657$ ), а расхождение

между дисперсиями  $S_1$  и  $S_2$  несущественно, следовательно, проверка на адекватность пройдена.

### ❖ Активный эксперимент

При активном эксперименте исследователь вмешивается в процесс эксперимента путем варьирования уровней входных величин. Активный эксперимент позволяет быстрее и эффективнее решать задачи исследования, но более сложен, требует больших затрат.

При активном эксперименте факторы должны быть управляемыми и независимыми. При планировании активного эксперимента решается задача рационального выбора факторов, существенно влияющих на объект исследования, и определения соответствующего числа проводимых опытов. В рамках активного эксперимента построение модели проходит следующие этапы:

- выбирается форма модели процесса;
- строится план эксперимента;
- проводится экспериментирование;
- дается анализ результатов эксперимента.

1) Определён уровень входного сигнала  $n$ , количество факторов в модели  $fact$  (согласно условию, модель однофакторная). Найдено необходимое количество опытов в одном прогоне  $KO$ .

$$n := 2 \quad fact := 1 \quad KO := n^{fact}$$

Рисунок 2.1. Фрагмент рабочего документа MathCAD

2) Задано количество прогонов в эксперименте  $KP$  и вычислено суммарное количество опытов в эксперименте  $SO$ .

$$KP := 55 \quad SO := KO \cdot KP = 110$$

$$1 := 1..KO \quad z := 1..KP$$

Рисунок 2.2. Фрагмент рабочего документа MathCAD

3) Составлена матрица планирования эксперимента  $X$



$$X := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Матрица планирования эксперимента}$$

Рисунок 2.3. Фрагмент рабочего документа MathCAD

4) Формирование случайных воздействий на модель (принцип формирования схож с этапом генерации при пассивном эксперименте).  
Определено уравнение «идеальной» средней линии.

```
rb1 := morm(SO,0,0.2812)
```

```
rb2 := mnorm(SO,0,0.2817)
```

$$\text{rb3} := \text{morm}(\text{SO}, 0, 0.2852)$$

$$yb_1 := b_0 + b_1 \cdot X_{1,2}$$

Рисунок 2.4. Фрагмент рабочего документа MathCAD

5) Сформированы экспериментальные точки  $ry1-ry3$ . Определён процент точек реакции детерминированной модели, попавших в интервалы  $\pm\sigma$  и  $\pm2\sigma$ , где Ab1-Bb3 – вероятности попадания точек в интервал.

|   |  |
|---|--|
| $\text{rb} := \left  \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{rb}_{1,z} \leftarrow \text{rb}_{1,z} \\ \quad \text{rb}_{2,z} \leftarrow \text{rb}_{1,z+KP} \end{array} \right _{\text{rb}}$ | $\text{ry1} := \left  \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } 1 \in 1..KO \\ \quad \quad \text{yb}_{1,z} \leftarrow b_0 + b_1 \cdot X_{1,2} + \text{rb}_{1,z} \end{array} \right _{\text{yb}}$ |
| $\text{rb} := \left  \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{rb}_{1,z} \leftarrow \text{rb}_{2,z} \\ \quad \text{rb}_{2,z} \leftarrow \text{rb}_{2,z+KP} \end{array} \right _{\text{rb}}$ | $\text{ry2} := \left  \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } 1 \in 1..KO \\ \quad \quad \text{yb}_{1,z} \leftarrow b_0 + b_1 \cdot X_{1,2} + \text{rb}_{1,z} \end{array} \right _{\text{yb}}$ |
| $\text{rb} := \left  \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{rb}_{1,z} \leftarrow \text{rb}_{3,z} \\ \quad \text{rb}_{2,z} \leftarrow \text{rb}_{3,z+KP} \end{array} \right _{\text{rb}}$ | $\text{ry3} := \left  \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } 1 \in 1..KO \\ \quad \quad \text{yb}_{1,z} \leftarrow b_0 + b_1 \cdot X_{1,2} + \text{rb}_{1,z} \end{array} \right _{\text{yb}}$ |

Рисунок 2.5. Фрагмент рабочего документа MathCAD

$$\begin{array}{l}
 \text{Ab1} := \left| \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } l \in 1..KO \\ \quad \quad a \leftarrow a + 1 \text{ if } yb_1 - \sigma < ry1_{1,z} < yb_1 + \sigma \\ \quad \frac{a}{SO} \cdot 100 \end{array} \right. = 66.36 \\
 \\
 \text{Ab2} := \left| \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } l \in 1..KO \\ \quad \quad a \leftarrow a + 1 \text{ if } yb_1 - \sigma < ry2_{1,z} < yb_1 + \sigma \\ \quad \frac{a}{SO} \cdot 100 \end{array} \right. = 65.45 \\
 \\
 \text{Ab3} := \left| \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } l \in 1..KO \\ \quad \quad a \leftarrow a + 1 \text{ if } yb_1 - \sigma < ry3_{1,z} < yb_1 + \sigma \\ \quad \frac{a}{SO} \cdot 100 \end{array} \right. = 66.36
 \end{array}$$

Рисунок 2.6. Фрагмент рабочего документа MathCAD (1)

$$\begin{array}{l}
 \text{Bb1} := \left| \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } l \in 1..KO \\ \quad \quad a \leftarrow a + 1 \text{ if } yb_1 - 2 \cdot \sigma < ry1_{1,z} < yb_1 + 2 \cdot \sigma \\ \quad \frac{a}{SO} \cdot 100 \end{array} \right. = 94.55 \\
 \\
 \text{Bb2} := \left| \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } l \in 1..KO \\ \quad \quad a \leftarrow a + 1 \text{ if } yb_1 - 2 \cdot \sigma < ry2_{1,z} < yb_1 + 2 \cdot \sigma \\ \quad \frac{a}{SO} \cdot 100 \end{array} \right. = 94.55 \\
 \\
 \text{Bb3} := \left| \begin{array}{l} \text{for } z \in 1..KP \\ \quad \text{for } l \in 1..KO \\ \quad \quad a \leftarrow a + 1 \text{ if } yb_1 - 2 \cdot \sigma < ry3_{1,z} < yb_1 + 2 \cdot \sigma \\ \quad \frac{a}{SO} \cdot 100 \end{array} \right. = 94.55
 \end{array}$$

Рисунок 2.6. Фрагмент рабочего документа MathCAD (2)

- 6) Построен график функции реакции детерминированной модели.

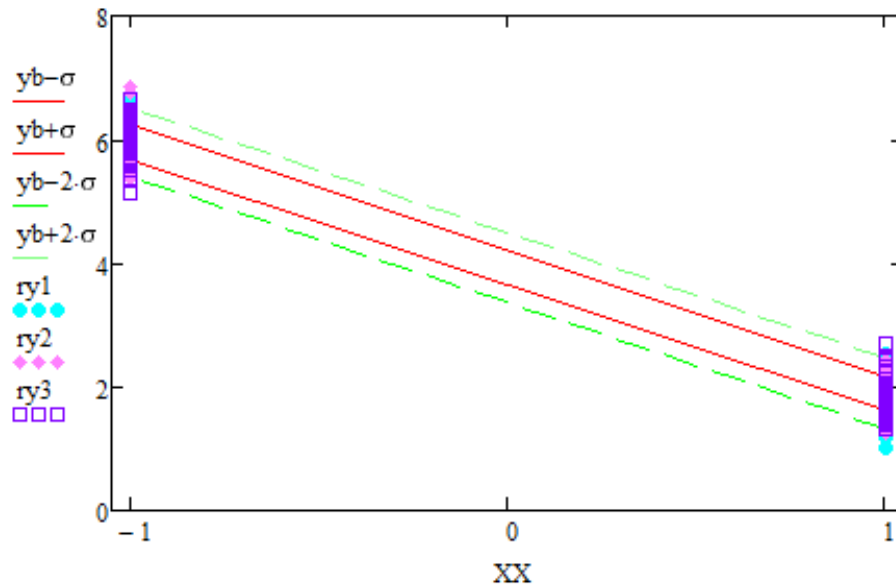


Рисунок 2.7. Фрагмент рабочего документа MathCAD

- 7) Вычислены параметры модели  $B11mean-B32mean$ , на основе которых строятся экспериментальные модели  $yb1-yb3$ .

$$B11_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} ry1_{l,z}}{KO} \quad B12_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} (X_{1,2} \cdot ry1_{l,z})}{KO}$$

$$B11mean := mean(B11) = 3.929$$

$$B12mean := mean(B12) = -2.049 \quad \text{Уравнение первого прогона}$$

$$yb1_l := B11mean + B12mean \cdot X_{1,2}$$

$$B21_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} ry2_{l,z}}{KO} \quad B22_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} (X_{1,2} \cdot ry2_{l,z})}{KO}$$

$$B21mean := mean(B21) = 3.9331$$

$$B22mean := mean(B22) = -2.059 \quad \text{Уравнение второго прогона}$$

$$yb2_l := B21mean + B22mean \cdot X_{1,2}$$

$$B31_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} ry3_{l,z}}{KO} \quad B32_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} (X_{1,2} \cdot ry3_{l,z})}{KO}$$

$$B31mean := mean(B31) = 3.925$$

$$B32mean := mean(B32) = -2.075 \quad \text{Уравнение первого прогона}$$

$$yb3_l := B31mean + B32mean \cdot X_{1,2}$$

$$B31_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} ry^3_{1,z}}{KO} \quad B32_z := \frac{\sum_{l=1}^{KO} (X_{1,2} \cdot ry^3_{1,z})}{KO}$$

$$B31mean := mean(B31) = 3.925$$

$$B32mean := mean(B32) = -2.075 \quad \text{Уравнение первого прогона}$$

$$yb3_1 := B31mean + B32mean \cdot X_{1,2}$$

Рисунок 2.8. Фрагмент рабочего документа MathCAD

8) Построены графики теоретической (идеальной)  $y_b$  и экспериментальных моделей  $y_{b1}$ - $y_{b3}$ .

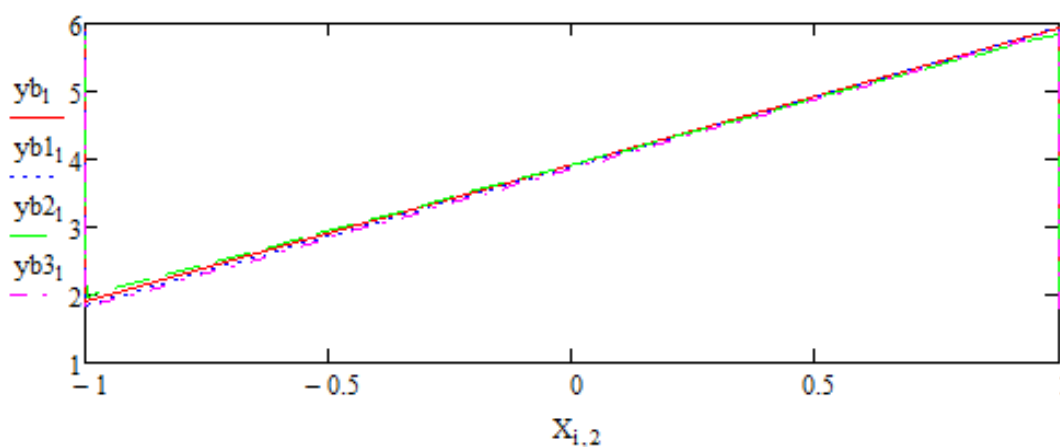


Рисунок 2.9. Фрагмент рабочего документа MathCAD

9) Задано количество прогонов и найдено суммарное количество точек. Найдены оценки дисперсии детерминированной модели и статистической. Проведена оценка адекватности модели на основе квантиля Фишера.

$$ybS := stack(yb, yb, yb) \quad \text{Массив идеальной средней}$$

$$ybT := stack(yb1, yb2, yb3) \quad \text{Массив линий прогона}$$

$$ybR := stack(ry1, ry2, ry3) \quad \text{Массив экспериментальных точек}$$

$$Sy1 := \sum_{z=1}^{KP} \sum_{l=1}^{KO} \frac{(ybT_l - yb_l)^2}{SO - 2} = 0.02$$

$$Sy2 := \sum_{z=1}^{KP} \sum_{l=1}^{KO} \frac{(ybT_l - ybR_{l,z})^2}{SO - 1} = 0.08$$

$$Fb := \frac{Sy1}{Sy2} = 0.25 \quad fb := qF(1 - \alpha, SO - 1, SO - 2) = 1.3735$$

Рисунок 2.10. Фрагмент рабочего документа MathCAD

**Вывод по проверке адекватности:** расхождение дисперсий  $Sy_1$  и  $Sy_2$  незначительно, а табличное значение больше рассчитанного критерия Фишера ( $0.25 < 1.3735$ ), а значит проверка на адекватность пройдена.

**Вывод:**

Таким образом, на основе полученной в лабораторной работе №6 линии регрессии, были проведены активный и пассивный эксперименты. Оба эксперимента прошли проверку адекватности в соответствии с критерием Фишера с доверительной вероятностью  $p = 95\%$ . Для пассивного  $F = (0.487 < 1.657)$ , для активного  $F = (0.25 < 1.3735)$ . Более качественным по данной проверке является *активный эксперимент*, т.е. модель более соответствует объекту.