数学分析作业(4月28日交)

2019 年 5 月 3 日

习题9.3

3.

证明. (1) $R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}}=1$, 收敛半径为1，且在左右端点均收敛. □

(3) 设$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=4$, 收敛半径为4，且在左右端点处均发散. □

(5) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}=1$, 收敛半径为1. 当$x=1$时，若$\alpha>1$, 级数收敛，否则发散. 当$x=-1$时，若$\alpha>0$, 级数收敛，否则发散. □

6.

证明. 收敛半径$R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4n+1}}}=1$,且在$x=\pm1$ 时，均收敛. 逐项积分可得，$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}=\sum_{n=0}^\infty\int_0^1(-x^4)^n dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\sqrt2}{4}\ln(1+\sqrt2)+\frac{\sqrt2\pi}{8}$. □

7.

证明. (1)$\sum_{n=1}^\infty\frac{n^2+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^\infty nx^n+\sum_{n=1}^\infty\frac1n x^n=x(\sum_{n=1}^\infty x^n)'+\int_0^x\sum_{n=0}^\infty x^n dx=\frac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$.

(3)$\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=(\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{3!}x^{n+3})'''=(\frac{x^3}{3!(1-x)})'''=\frac{1}{(1-x)^4}$. □

9.

证明. $(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},x\in(-1,1)$. 逐项积分可得，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, 当$x\pm1$,级数也收敛，从而得证. □

11.

证明. (1) 由Abel定理得，$\sum_{n=0}^\infty\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$在$[0,R]$ 上一致收敛，且$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^\infty\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^\infty\frac{a_nR^{n+1}}{n+1}$. 又由于$S(x)$收敛半径为$R$, 则$\int_0^R S(x)dx=\lim_{x\to R^-}\int_0^x\sum_{n=0}^\infty a_nx^n dx=\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^\infty\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^\infty\frac{a_nR^{n+1}}{n+1}$.

(2) 由Abel定理得，$\sum_{n=1}^\infty na_nx^{n-1}$在$[0,R]$ 上一致收敛，且$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^\infty na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^\infty na_nR^{n-1}$. 又由于$S'(R)=\lim_{x\to R^-}S'(x)=\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^\infty na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^\infty na_nR^{n-1}$. □

12.

证明. 由于幂级数$\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$在开区间$(-R,R)$内一致收敛，则$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,|\sum_{k=n+1}^m a_kx^k|\le\varepsilon,\forall x\in(-R,R)$. 由连续性，令$x\to\pm R$ 得，$|\sum_{k=n+1}^m a_kR^k|\le\varepsilon$, 则由Cauchy准则，$\sum_n a_nR^n$和$\sum_n a_n(-R)^n$收敛，且$|\sum_{k=n+1}^m a_kx^k|\le\varepsilon,\forall x\in[-R,R]$. 则幂级数在闭区间上也是一致收敛的. □

13.

证明. 若$\sum_{n=1}^\infty a_nR^n$收敛，则根据Abel定理，$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^\infty a_nx^n=\sum_{n=1}^\infty a_nR^n$. 若$\sum_{n=1}^\infty a_nR^n$发散，则$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^\infty a_nx^n=\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^\infty a_n(R-\delta)^n=\sum_{n=1}^\infty\lim_{\delta\to0^+}a_n(R-\delta)^n$. 又$a_n(R-\delta)^n>0,\delta>0$, 且$\lim_{\delta\to0}\frac{(R-\delta)^n}{R^n}=1$, 则$\sum_{n=1}^\infty\lim_{\delta\to0^+}a_n(R-\delta)^n$ 也发散, 即$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^\infty a_nx^n=\sum_{n=1}^\infty a_nR^n=+\infty$. □