数学分析作业3月28日交

2019 年 5 月 3 日

1.陈述并证明瑕积分的Dirichlet、Abel定理.

(Dirichlet)：设$f(x),g(x)$在$[a,b)$上有定义,且b是瑕点. 且$F(x)=\int_a^x$关于任意$x\in[a,b)$有界，$g(x)$ 在$[a,b)$上单调，且$\lim_{x\to b^-}g(x)=0$, 则$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明. 设$|F(x)|\le M$,$M>0$.$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$x\in(b-\delta,b)$,$|g(x)|\le\frac{\varepsilon}{4M}$.

当$b-\delta<A<B<b$时，$\exists\xi\in[A,B]$,$|\int_A^B f(x)g(x)dx|\le|g(A)||\int_A^\xi f(x)dx|+|g(B)||\int_\xi^B f(x)dx|\le 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\le\varepsilon$. □

(Abel): 设f,g在$[a,b)$上定义，且$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$g(x)$在$[a,b)$上单调有界，则$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

证明. 设$|g(x)|\le M,M>0$.$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0,b-\delta<A<B<b$ 时，$|\int_A^B f(x)dx|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 则$|\int_A^B f(x)g(x)dx|\le||g(A)|\int_A^\xi f(x)dx|+|g(B)||\int_\xi^B f(x)dx|\le\varepsilon$. □

习题7.3

1.解

(1)由于$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x^4+1}}=1$, 则$\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}$与$\int_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ 敛散性相同，则$\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}$收敛.

(2)由于$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1$, 而$\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}}=\infty$,则原积分发散.

(3)由于$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^7+1}}\cdot\sqrt{x}=1$, 则$\int_1^\infty\frac{x^3}{\sqrt{x^7+1}}$与$\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}$敛散性相同，则$\int_1^\infty\frac{x^3}{\sqrt{x^7+1}}$ 发散.

(4)$\int_0^1\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$ 积分收敛.但$\int_1^A\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^A\frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}}dx=(\sqrt{A}-1)-\frac{1}{2}\int_1^A\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx\to\infty$. 因此原积分发散.

(5)由于$|\frac{x\arctan x}{1+x^3}|\le\frac{\pi}{2}|\frac{x}{1+x^3}|\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}$, 则原积分收敛.

(6)$\lim_{x\to\infty}x\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=1$, 则原积分发散.

(7)由于$|\frac{\cos x}{1+x^2}|\le\frac{1}{1+x^2}$, 则原积分收敛.

(8)$n\le 1,\frac{\ln(1+x)}{x^n}>\frac{1}{x}$ if $x\gg 1$, 积分发散;$n>1,\lim_{x\to\infty}x^{1+\varepsilon}\frac{\ln(1+x)}{x^n}=0$, 积分收敛.

(9)由于$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=1$, 则原积分收敛.

2.解

(1)由于$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, 则原积分收敛.

(2)$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{\sqrt{x}\ln x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{\ln x}=\frac{1}{x^{-1}}=1$, 则原积分发散.

(3)由于$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)}}=\frac{1}{2}$, 则原积分收敛.

(4)$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}=1,\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{\pi-x}}{\sqrt{\sin x}}=1$, 则原积分收敛.

(5)由于$\frac{1-\cos x}{x^m}=O(x^{m-2})$, 则当$m<3$时，原积分可积，当$m\ge 3$, 发散.

(6)$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1-x)^2}\sqrt{x}=0,\lim_{x\to 1^-}(1-x)\frac{\ln x}{(1-x)^2}=-1$, 则原积分发散.

(7)$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}dt$, 若$\alpha < 2$,由Dirichlet判别法，$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}dt$ 收敛; 若$\alpha \geq 2$, $\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}dt \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin tdt = 2$, 由Cauchy准则知，原积分发散.

(8)$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{\ln x}{1-x^2} = 0$, 则原积分收敛.

(9)由于$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x} = 1$, 则原积分发散.

3.解

(1)$\int_1^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}2tdt = 2\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$,条件收敛.

(2)条件收敛，利用Dirichlet判别法；$\frac{|\cos x|}{x} \geq \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1+\cos 2x}{2x}$, 则积分不是绝对收敛.

(3)令$f(t) = \frac{\ln t}{t}, f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$, 当$t > e$时，$f(t)$单调递减，且$\lim_{x\to\infty} f(t)dt = 0$, 由Dirichlet判别法，积分收敛. 但$\int_e^\infty |\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x|dx \geq \int_e^\infty |\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}|\sin^2 xdx = \int_e^\infty |\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}|\frac{1-\cos 2x}{2}dx$, $\int_e^\infty \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}dx > \int_e^\infty \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx = \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t}dt = \infty$, 而同样由Dirichlet判别法，$\int_e^\infty |\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}|\cos 2xdx$ 收敛，故原积分条件收敛，不是绝对收敛的.

(4)条件收敛，利用Dirichlet判别法；$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ 发散, 则积分不是绝对收敛.

(5)$\int_1^\infty |\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}|dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, 绝对收敛.

4.解

(1)$\forall\varepsilon > 0, \lim_{x\to\infty}\frac{x^\varepsilon \ln x}{x^p} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(p-\varepsilon)x^{p-\varepsilon}}$,则$p > 1$ 时，积分收敛；当$0 < p \leq 1$ 时，积分发散.

(2)当且仅当$q - p > 1$ 时收敛.

(3)$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x^4} = 1, p > 0$, 则积分收敛.

(4)发散.

(5)$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^p}{\sin^p x\cos^q x} = 1$,当$0 < p < 1$时，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛，$p \geq 1$时，发散. $\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{\pi}{2}-x)^q}{\sin^p x\cos^q x} = 1$, 当$0 < q < 1$ 时，积分收敛，$q \geq 1$,发散.综上，当$0 < p < 1, 0 < q < 1$, 原积分收敛，否则发散.

(6)当且仅当$1 < p < 2$ 时收敛.

5.

证明. $\forall A > 1, \int_1^A \frac{|f(x)|}{x}dx \leq (\int_1^A |f|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_1^A \frac{1}{x^2}dx)^{\frac{1}{2}}$ 有上界，则$\int_1^A \frac{|f|}{x}dx \leq \infty$, 绝对收敛. □

6.

证明. 只需证明$L = 0$即可，此时，当x 充分大时，$f^2 \leq |f|$, 从而$\int_a^\infty f^2dx$ 收敛. 假设$L \neq 0$, 不妨设$L > 0$, 则存在N, 当$x > N$ 时，$f(x) > L/2$, $\int_a^A |f(x)|dx \geq \int_N^A f(x)dx - \int_a^N |f(x)|dx \geq \frac{L}{2}(A-N) - \int_a^N |f(x)|dx \to \infty$. 矛盾. □

7.

证明. $f(A)\frac{A}{2} \leq \int_{\frac{A}{2}}^A f(x)dx \leq f(\frac{A}{2})\frac{A}{2}$，则$Af(A) \leq 2\int_{\frac{A}{2}}^A f(x)dx$, $Af(A) \geq \int_A^{2A} f(x)dx$.由Cauchy准则，$\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall A, B > N$, 有$|\int_A^B fdx| < \varepsilon$. 则当$A > N$ 时，$-\varepsilon \leq Af(A) \leq 2\varepsilon$, 则$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$. □

8.

证明. $\sqrt{\frac{f(x)}{x}}$单调递减，且由上题知，$\lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{xf(x)} = 0$, 则$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{\frac{f(x)}{x}}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{xf(x)} = 0$,则由比较原理知，$\int_a^\infty f(x)dx$收敛. □

9.

证明. $\int_A^{A^2} x\frac{f(x)}{x}dx \leq Af(A)\ln A$,$\int_A^{A^2} f(x)dx \geq A^2 f(A^2)\frac{\ln A^2}{2}$, 则$\int_A^{A^2} f(x)dx \leq Af(A)\ln A \leq 2\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)dx$,当$A \to \infty$, 由Cauchy 准则,$\lim_{x\to\infty} xf(x)\ln x = 0$. □

习题8.1

1.解：(1)$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$, 则级数发散.

(2)收敛. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 2, n \to \infty$.

(3)$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1 \neq 0$, 则级数发散.

(4)收敛. $\frac{\sin^2 n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

(5)$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n+1) \to \infty (n \to \infty)$, 则级数发散.

(6)发散. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+2)}$, 前者发散，后者收敛.

6.

证明. $\frac{a_n}{n} \leq \frac{a^2+n^2}{2}$, 由于$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$均收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛. □

10.

证明. 由Cauchy准则，当$m > n \to \infty$,$|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k| \leq (\sum_{k=n+1}^{m} a_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=n+1}^{m} b_k^2)^{\frac{1}{2}} \to 0$. 另外$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2)^{\frac{1}{2}}$, 令左侧$n \to \infty$, 则$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2)^{\frac{1}{2}}$. □

11.

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当$m > n > N$,$\sum_{k=+1}^{m} b_k| \leq \varepsilon$.则$|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k \leq \varepsilon$, 则由Cauchy收敛准则知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛. □