数学分析作业4月4日交

2019 年 5 月 3 日

习题8.2

1.解

(1)$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ 发散since $\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\frac{1}{n}\to 1$

(3)收敛since $(1-\cos 1/n)/\frac{1}{n}\to ...$

(5)收敛since $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$.

2.解

(3)发散。since $(lnn)^{lnlnn}=e^{(lnlnn)^2}$, $\sqrt{n}=e^{\frac{1}{2}lnn}$, $(lnlnn)^2<\frac{1}{2}lnn$ when $n>>1$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.解

(1)发散。$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{2n-1!!}\frac{2n+1!!}{n+1!}=\frac{2n+1}{n+1}\to 2>1$.

(3) $a_n=(\frac{lna}{n}+O(\frac{1}{n^2}))^p$. $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^p}=lim_{n\to\infty}(lna+O(1/n))^p=(lna)^p>0$ so $p>1$ 时收敛，$P\leq 1$ 时发散。

(5) $a_n=\frac{1}{n^{2p}}(1/6+O(\frac{1}{n^2}))^p$. $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^2p}=\frac{1}{6^p}$ so $p>1/2$时收敛，$p\leq 1/2$时发散。

4.

证明. 由$\sum_n a_n<+\infty\Rightarrow a_n\to 0\Rightarrow\exists K>0, s.t. a_n\leq K\Rightarrow a_n^2\leq Ka_n\Rightarrow\sum na_n^2$ 收敛. □

5.

证明. $\frac{n+1}{n}a_n\leq 2a_n$ □

8. (1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}\frac{n^{n+p}}{n!e^n}=\frac{e}{(1+1/n)^{n+p}}\to 1$, 不能用D'A. $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1/ee^{(n+p)ln(1+1/n)}=e^{-1+(n+p)(1/n-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^3}))}=e^{\frac{p-1/2}{n}+O(1/n^2)}=1+\frac{p-1/2}{n}+O(1/n^2)=1+\frac{p-1/2}{n}+O(\frac{1}{nlnn})$ 所以$P-\frac{1}{2}>1$时收敛，$P-\frac{1}{2}\leq 1$ 发散。(3) $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n-1!!}{2n!!}\frac{2n+2!!}{2n+1!!}=\frac{2n+2}{2n+1}=1+\frac{1}{2n+1}=1+\frac{1}{2n}\frac{1}{1+1/2n}=1+\frac{1}{2n}(1-1/2n...)=1+\frac{1/2}{n}+O(1/n^2)\Rightarrow$ 级数收敛。

10.

证明. 不妨设a_n严格递增，否则去掉一些0无影响。$b_n=1-\frac{a_n}{a_{n+1}}>0$, $c_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}-1>0$ 不管哪个收敛，都有$\frac{a_n}{a_{n+1}}\to 1$. 此时$\frac{b_n}{c_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\frac{a_n}{a_{n+1-a_n}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}\to 1$ 故收敛性相同。 □

习题8.3

1.解：(1)$(\frac{1}{x-lnx})'<0$ on $(1,+\infty)$ 于是$\frac{1}{n-lnn}\searrow 0$ as $n\to+\infty$ 故收敛.

(3) $|sin2+...sinn|=\frac{|...|}{2sin(1/2)}\leq\frac{1}{sin(1/2)}$. 而$\frac{1}{lnn}\searrow 0$ 故收敛.

(5)$a_n=sin(\pi\sqrt{n^2+1})=sin(\pi n+\pi(\sqrt{n^2-1}-n))=sin(n\pi+\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1+n}})=(-1)^n sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1+n}})$. 亦收敛。

5.解：(1)绝对收敛。

(3)$f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}f'(x)=x^{-3/2}-\frac{1}{2}lnxx^{-3/2}<0forxlarge.\ \frac{lnn}{\sqrt{n}}/\frac{1}{\sqrt{n}}\to+\infty$ 条件收敛。

(5) $\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{1}{n}lnn}-1=O(\frac{lnn}{n})\Rightarrow\sum_n(\sqrt[n]{n}-1)=+\infty.\ (\frac{lnx}{x})'=\frac{1}{x^2}-\frac{lnx}{x^2}<0whenxlarge.$ 故n 足够大时 $\sqrt[n]{n}-1$ 单调递减趋于0. 条件收敛。

6.

证明. 设$|b_n|\leq K$ 则$|a_nb_n|\leq K|a_n|$ 由$\sum_n|a_n|<+\infty$ 可知$\sum_n|a_nb_n|<+\infty$. □

8.

证明. $\sum_{k=n+1}^m a_kb_k=\sum_{k=n+1}^m a_k(B_k-B_{k_1})=a_mB_m-a_{n+1}B_n+\sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k-a_{k+1})B_k$. 设$|B_k|\leq K$, $\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall m,n>N$ 有$\sum_{k=n+1}^m|a_{k+1}-a_k|<\epsilon/3K,|a_n|<\epsilon/3K$. 于是$|\sum_{k=n+1}^m a_kb_k|\leq|a_mB_m|+|a_{n+1}B_n|+K|\sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k-a_{k+1})|<\epsilon$. □

9.

证明. $\sum_{n=1}^\infty|a_{n+1}-a_n|$ 收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty(a_{n+1}-a_n)$ 收敛$\Rightarrow a_n$ 有极限。设$\lim a_n=a$ 则$\sum_{n=1}^\infty a_nb_n=\sum_{n=1}^\infty ab_n+\sum_{n=1}^\infty(a_n-a)b_n$. 由上题结论知，$\sum_{n=1}^\infty(a_n-a)b_n$ 收敛，$\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty a_nb_n$ 收敛。 □

10.

证明. 前已知$a_n\to0$时，$\frac{a_1+...a_n}{n}$ 收敛。(Reprove use $\overline{\lim}$ and $\underline{\lim}:\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.n>N|a_n|<\epsilon$, $\frac{a_1+...+a_n}{n}=\frac{a_1+...a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+...+a_n}{n}\leq\frac{a_1+...+a_n}{n}+\frac{n-N}{n}\epsilon\Rightarrow\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_1+...+a_n}{n}\leq\epsilon$. 同理$\frac{a_1+...+a_n}{n}\geq\frac{a_1+...a_N}{n}+\frac{n-N}{n}\epsilon\Rightarrow\underline{\lim}_{n\to\infty}\geq-\epsilon$ 由ϵ的任意性$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_1+...+a_n}{n}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_1+...+a_n}{n}=0$.) 又由$a_n\searrow0$, $\frac{a_1+...+a_n}{n}-\frac{a_1+...+a_{n+1}}{n+1}=\frac{(n+1)(a_1+...+a_n)-n(a_1+...+a_{n+1})}{n(n+1)}=\frac{a_1+...+a_n-na_{n+1}}{n(n+1)}\geq0$, so $\frac{a_1+...+a_n}{n}\searrow0\Rightarrow\sum_n(-1)^n\frac{a_1+...+a_n}{n}$ 收敛。 □

11.

证明. $a_1+2a_2+...+na_n=S_1+2(S_2-S_1)+...+n(S_n-S_{n-1})=nS_n-(S_1+...+S_{n-1})=(n+1)S_n-(S_1+...+S_n)$. 设$S_n\to S$, 则$\frac{S_1+...S_n}{n}\to S$ 于是$\frac{a_1+2a_2+...+na_n}{n}=\frac{n+1}{n}S_n-\frac{S_1+...+S_n}{n}\to S-S=0$. □

13.

证明. 由Cauchy准则，$\forall\epsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall m>n>N.\ |\sum_{k=n+1}^m a_k|<\epsilon,|\sum_{k=n+1}^m c_k|<\epsilon$ $\Rightarrow-\epsilon<\sum_{k=n+1}^m a_k\leq\sum_{k=n+1}^m b_k\leq\sum_{k=n+1}^m c_k<\epsilon\Rightarrow\sum_n b_n$ 收敛。 □