数学分析作业 3 月 7 日交

May 5, 2019

习题 6.1

1. 解

(2)$\forall$ 分割 π. $M_i = x_i$, $m_i = 0$. so $S(\pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) \xrightarrow{\|\|\pi\|\|} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. $s(\pi) = 0 \Rightarrow \bar{\int_0^1} f dx = \frac{1}{2}, \underline{\int_0^1} f dx = 0$. 所以不可积。

(4) 当 $\frac{1}{x} \in [n, n+1)$ 时, $[\frac{1}{x}] = n$. 故在 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 上, $f(x) = \frac{1}{x} - n$. 所有间断点为 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. 可知 $f \in R[0,1]$.

4.

证明. $h := g - f$. 则 h 在有限外个点外 $\equiv 0 \Rightarrow h$ 在有限个点外连续 $\Rightarrow h \in R[a,b]$. □

6.

证明. 如果 $\exists \epsilon_0 > 0,\ s.t.\ \forall [\alpha, \beta] \subset [0,1], \exists x \in [\alpha, \beta],\ for\ f(x) \geq \epsilon_0$ 则 $\bar{\int_a^1} f(x) dx \geq \epsilon_0 > 0$. 矛盾。 □

8.

证明. 对分割 π 的一段 $[x_{i-1}, x_i]$, 有 $w_i(\frac{1}{f}) = \sup\limits_{x,y \in [x_{i-1}, x_i]} |\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}|$. 而 $|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}| = \frac{|f(x) - f(y)|}{f(x)f(y)} \leq \frac{1}{C^2}|f(x) - f(y)| \Rightarrow w_i(\frac{1}{f}) \leq \frac{1}{C^2} w_i(f)$. $\forall \epsilon > 0$, 由 $f \in R[a,b]$, $\exists$ 分割 π, $s.t.$ $\sum_i w_i(f) \triangle x_i < C^2 \epsilon$. 于是 $\sum_i w_i(\frac{1}{f}) \triangle x_i \leq \sum_i w_i(f) \triangle x_i < \epsilon$. □

9.

证明. $\bar{f}$ 与 $\underline{f}$ 单调! □

10.

证明. 令 $D = \{x \in [a,b] | f(x) \neq g(x)\}$. 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ if \|\pi\| < \delta$ 就有 $|\sum_i f(\xi_i) \triangle x_i - I| < \epsilon,\ \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. $|\sum_i f(g(\eta_i) \triangle x_i - J| < \epsilon,\ \forall \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 如果 $\int_a^b g(x) dx = J \neq I$. 取 $\epsilon < \frac{|I-J|}{2}$. 不妨设 $J < I$. 注意 $D^0 \cap [x_{i-1}, x_i] \neq \varnothing, \forall i$ 取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]/D$ 则 $f(\xi_i) = g(\xi_i)$. 于是 $J - \epsilon < \sum_i g(\xi_i) \triangle x_i < J + \epsilon < I - \epsilon < \sum_i f(\xi_i) \triangle x_i = \sum_i g(\xi_i) \triangle x_i$. 矛盾。 □

11.

证明. 由 Lebesgue 定理,$\exists x_0 \in [a,b]\ s.t.\ f$ 在 x_0 连续。设 $f(x_0) = A > 0$. 于是 $\exists [\alpha, \beta] \subset [a,b]\ s.t. \forall x \in [\alpha, \beta], f(x) > \frac{A}{2}$. $\forall$ 分割 $\pi\ s.t.\ \alpha, \beta$ 是分点,有 $s(\pi) \geq \frac{A}{2}(\beta - \alpha) > 0$, $but \int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx \geq s(\pi) \geq \frac{A}{2}(\beta - \alpha) > 0$. □

习题 6.2

2.

证明. 利用 $\sqrt{x}$ 在 $[0, \infty)$ 的连续性可知 $D_{|f|} \subset D_{f^2}$. $f^2 \in R[a,b] \Rightarrow D_{f^2}$ 零测 $\Rightarrow D_{|f|}$ 零测 $\Rightarrow |f| \in R[a,b]$. 另证：用 Riemann 的判别法 + 例 6.1：3 之方法。 □

3. 例子:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & x = \frac{p}{q} \\ 1, & x = 0, 1 \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \tag{2}$$

则

$$sgn \circ R(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \tag{3}$$

不可积。