Schémas d'intégration

L'objectif de cet exercice est de prendre conscience des problématiques liées à l'intégration d'équations différentielles lors de simulations informatiques. Deux schémas intégrateurs classiques, Euler et Runge-Kutta, seront étudiés sur un problème de lancer balistique et sur un problème à n corps soumis à une interaction gravitationnelle.

Méthode d'Euler

Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \text{ avec } y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

La méthode d'Euler propose, à partir d'un pas d'intégration h, une méthode numérique d'approximation de la solution :

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t, y_n) \tag{2}$$

La figure 1 propose une représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2/2$ et de son approximation par la méthode d'Euler.

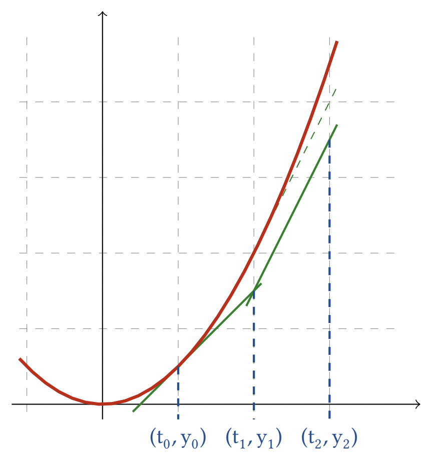

FIGURE 1 : Schéma d'intégration d'Euler

Lancer balistique

On se place dans un repère terrestre local $(O, \vec{x}, \vec{z})$, où z représente l'altitude d'un point à partir du niveau de la mer. On considère une boule de masse m et de rayon r lancée du point x_0, avec une vitesse initiale v_0. La boule est soumise à l'action de la gravité. On considère le champ gravitationnel uniforme, avec $g = 9,81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Le principe fondamental de la dynamique donne le système d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -g \cdot \vec{z} \\ \dot{x}(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

Ce système s'intègre simplement en un polynôme du second degré. On propose ici de résoudre ce système à l'aide de la méthode d'Euler.

1. Télécharger, compiler et exécuter le code fourni. Tracer la trajectoire produite dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{z})$ avec l'outil `gnuplot`.
2. Résoudre le problème de manière analytique. Superposer à la figure précédente la représentation graphique de la solution analytique.
3. Exécuter le logiciel avec l'option `--help`. Modifier ensuite le pas d'intégration et analyser son influence sur la précision de la trajectoire calculée par rapport à la solution analytique.

4. On souhaite rajouter l'influence des forces de frottement à l'air. Dans le fichier `ballistic.c`, modifier la fonction `ballistic_derivate` pour prendre en compte cette force.
   La force de frottement à l'air s'exerce en opposition au vecteur vitesse. Son module s'exprime de la manière suivante :

$$F = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho \cdot S \cdot V^2 \tag{4}$$

   Le coefficient de traînée C_x est égal à $0,5$ dans le cas d'une sphère. La surface de référence S correspond à la surface d'un disque de rayon r (on définit ici r tel que $S = 0,1\,\mathrm{m}^2$). $\rho = 1,184\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'air, que l'on considérera ici indépendante de l'altitude.
5. Tracer les deux trajectoires balistiques, avec et sans frottement à l'air.

Problème à deux corps

On considère le problème de deux corps soumis à leur interaction gravitationnelle. On rappelle la valeur de la constante universelle de gravitation $G = 6,67384 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, pour le calcul de la force d'attraction :

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{5}$$

En intégrant le principe fondamental de la dynamique, on souhaite tracer la trajectoire des deux corps.

1. Écrire la méthode `twobody_derivate` dans le fichier `nbody.c`, qui sera appelée lors de l'intégration des deux trajectoires.
2. Exécuter le logiciel avec l'option `--problem twobody` et tracer les deux trajectoires. Expliquer et mesurer la dérive des trajectoires.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutte d'ordre 4 [1] propose un schéma d'intégration basé sur une moyenne de pentes calculées au début, au milieu et à la fin de l'intervalle considéré :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{6}$$

$$\begin{cases} k_1 = f\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\ k_4 = f\left(t_n + h, y_n + h \cdot k_3\right) \end{cases} \tag{7}$$

1. La méthode étant d'ordre 4, l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h^5 et l'erreur cumulée est de l'ordre de h^4.

Le terme k_1 représente la pente au début de l'intervalle ; k_2 est la pente au milieu de l'intervalle, calculée en utilisant k_1 pour trouver la valeur de y au point $t_n + h/2$ par la méthode d'Euler. k_3 est aussi la pente au milieu de l'intervalle, calculée en utilisant cette fois k_2 pour calculer y. Enfin, k_4 est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de y calculée en utilisant k_3.

1. Écrire la méthode `rk4` dans le fichier `integration.c`.
2. Comparer les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta sur le problème des deux corps.

Problème à quatre corps

On considère un problème à quatre corps soumis aux interactions gravitationnelles des uns par rapport aux autres.

1. Écrire la méthode `fourbody_derivate` à l'aide des pointeurs `ps1`, `ps2` et `ps3` qui représentent les états des trois autres corps.
2. Exécuter le logiciel avec l'option `--problem fourbody` puis tracer les quatre trajectoires (cf. figure 2.) Expliquer le phénomène.

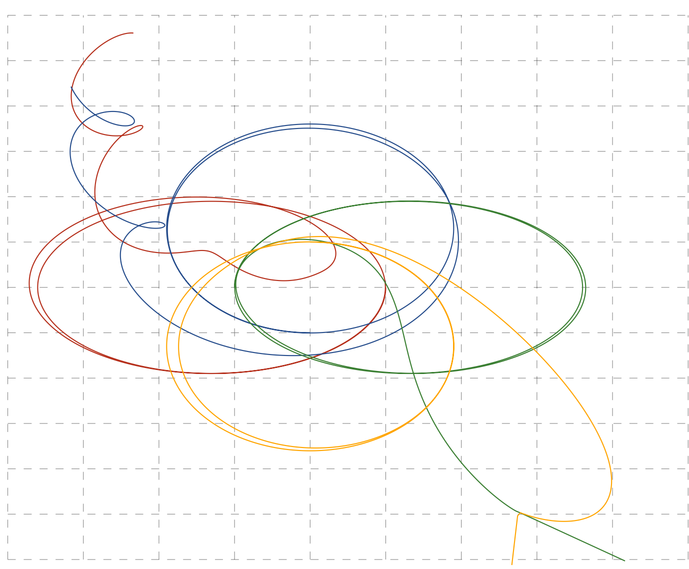

FIGURE 2 : Instabilités à la résolution d'un problème à quatre corps