Математический анализ

Ситников Михаил

8 февраля 2023 г.

Содержание

Неопределенный интеграл

Определение $f(x), F(x)$ – определена на <a, b>; $F(x)$ – дифференцируема на <a, b>; $F(x)$ – называется первообразной функции $f(x)$, если $F^{'}(x) = f(x)$

Примеры $f(x) = \cos(x)$
$F_1(x) = \sin(x)$
$F_2(x) = \sin(x) + 5$

Определение Неопределенный интеграл от f(x) называется семейством первообразных $F(x) + C$
$\int f(x)dx$

Утверждение $\exists f(x)$ имеет первообразную $F_1(x)F_2(x) \implies F_1(x) - F_2(x) = C$

Доказательство $F_1(x)$ – первообразная $F_1^{'} = f(x)$
$F_2(x)$ – первообразная $F_2^{'} = f(x)$
$(F_1(x) - F_2(x))^{'}$
$F_1^{'} - F_2^{'} = f(x) - f(x) = 0$
ч. т. д.

Свойства неопределенных интегралов

1. $(\int f(x)dx)^{'} = f(x)$
2. $\int f^{'}(x)dx = f(x) + C$
3. $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$
   $A \in R$
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Доказательства свойств

1. $((x)dx)^{'} = (F(x) + C)^{'} = f(x) + C = f(x)$
2. $\int f^{'}(x)dx)^{'} = f^{'}(x)$
   $(f(x) + C)^{'} = f^{'}(x)$
3. $(\int Af(x)dx)^{'}) = Af(x)$
   $(A(x)dx)' = A(\int f(x)dx)' = Af(x)$
4. $(\int (f(x) \pm g(x))dx)' = f(x) \pm g(x)$
   $(\int (fx)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x)$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, m \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
4. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
5. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
6. $\int \frac{1}{\cos(x)^2} dx = \tan(x) + C$
7. $\int \frac{1}{\sin(x)^2} dx = -\cot(x) + C$
8. $\int e^x dx = e^x + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin(x) + C \\ \text{-arcsin}(x) + C \end{cases}$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \text{arctg(x) + C} \\ \text{-arctg(x) + C} \end{cases}$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} dx = \begin{cases} \text{arcsin } \frac{x}{k} + C \\ \text{-arccos } \frac{x}{k} + C \end{cases}$
13. $\int \frac{1}{k^2+x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{k}\ arctg(\frac{x}{k}) + C \\ \frac{1}{k}\ arctg(\frac{x}{k}) + C \end{cases}$

Теорема (Замена переменной) Пусть f – интегрируема $\varphi(t)$ – дифференцируема по t; $F(x)$ – первообразная для f(x) $\implies \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство $(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$
$(F((t)) + C)' = F'(\varphi(t)) * \varphi(t) = f(\varphi(t)) * \varphi'(t)$

Пример

1. $\int \sin(2t+5)dt =$ $$\begin{gathered} \text{2t+5 = x} \\ \text{t = } \frac{x-5}{2} \\ \text{dt = } \left(\frac{x-5}{2}\right) dx = \\ = \frac{1}{2}dx = \int \sin(x) * \frac{1}{2}dx = \\ = \frac{1}{2}\int \sin(x)dx = \end{gathered}$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos(x)) + C = -\frac{1}{2}\cos(2t+5) + C$$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \begin{matrix} \sqrt{1+x} = y \\ 1 + \mathrm{x} = \mathrm{y}^2 \\ \mathrm{x} = \mathrm{y}^2 - 1 \\ \mathrm{dx}{=}(\mathrm{y}^2 - 1)'dy = 2ydy \end{matrix} = \int \frac{y^2-1}{y} 2ydy = 2\int (y^2 - 1)dy =$
$2(\frac{y^3}{3} - y) + C = 2(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \sqrt{1+x}) + C$

Таблица внесения под знак дифференциала

1. $x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1}, n \neq -1$
2. $\frac{1}{x} dx = d\ln(x)$
3. $\sin(x)dx = -d\cos(x)$
4. $\cos(x)dx = d\sin(x)$
5. $e^x dx = de^x$
6. $a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} da^x$
7. $\frac{1}{\cos(x)^2} dx = dtg(x)$
8. $\frac{1}{\sin(x)^2} dx = -dctg(x)$
9. $dx = \frac{1}{a} * d(ax + b)$