Домашняя работа за 13.10.2016

Тонких Андрей

6.1:

Остовное дерево диаметра 2- это солнышко. Обозначим за v его центр. $\forall a:(a\to v)\in G.$

Рассмотрим остовное дерево диаметром l. В нем (а значит и в исходном графе) есть прострой путь длины длины l. Значит есть и простой путь любой длины от 1 до l.

Для любого k от 2 до l построим остовное дерево диаметром k :

Возьмем простой путь ϕ длины k. Если он не проходит через v, исправим это. Для этого заменим в нем два любых последовательных ребра $(a \to b), (b \to c)$ на ребра $(a \to v), (v \to c)$.

Все вершины, не входящие в этот путь соединим с v(такие ребра в графе есть). Построенное остовное дерево имеет диаметра k.

6.2:

Подвесим дерево, рассмотрим самую глубокую вершину, не являющуюся листом $-v.\ deg(v) \geq 3$ и все ее дети - листья (т.к. v- самая глубокая из не-листьев). Значит любые два ребенка v- пара листьев с общим соседом (v)

6.3:

 $\forall k$ (в частности, для k=4) подойдет дерево из двух вершин. Это единственное дерево, где все степени равны $1 \Rightarrow$ дерево из >2 вершин должно содержать вершину степени k, а значит, k — солнышко в качестве своего подграфа.

Чтобы увеличить количество вершин, придется сделать из одной вершины степени 1 вершину степени k. То есть, количество вершин увеличится на k-1.

И т.д.

Otbet: $2, \forall n \in \mathbb{N}_0 : k + 1 + n(k - 1)$.