Домашняя работа за 13.10.2016

Тонких Андрей

6.1:

Остовное дерево диаметра $2-$ это солнышко. Обозначим за v его центр.
$\forall a : (a \to v) \in G.$
Рассмотрим остовное дерево диаметром $l.$ В нем (а значит и в исходном графе) есть простpой путь длины длины $l.$ Значит есть и простой путь любой длины от 1 до $l.$

Для любого k от 2 до l построим остовное дерево диаметром $k:$
Возьмем простой путь ϕ длины $k.$ Если он не проходит через $v,$ исправим это. Для этого заменим в нем два любых последовательных ребра $(a \to b), (b \to c)$ на ребра $(a \to v), (v \to c).$
Все вершины, не входящие в этот путь соединим с v (такие ребра в графе есть).
Построенное остовное дерево имеет диаметра $k.$

6.2:

Подвесим дерево, рассмотрим самую глубокую вершину, не являющуюся листом $- v.$ $deg(v) \geq 3$ и все ее дети $-$ листья (т.к. $v-$ самая глубокая из не-листьев). Значит любые два ребенка $v-$ пара листьев с общим соседом (v)

6.3:

$\forall k$ (в частности, для $k = 4$) подойдет дерево из двух вершин. Это единственное дерево, где все степени равны $1 \Rightarrow$ дерево из > 2 вершин должно содержать вершину степени $k,$ а значит, $k-$солнышко в качестве своего подграфа.
Чтобы увеличить количество вершин, придется сделать из одной вершины степени 1 вершину степени $k.$ То есть, количество вершин увеличится на $k-1.$
И т.д.
Ответ: $2, \forall n \in \mathbb{N}_0 : k + 1 + n(k-1).$