Домашняя работа за 13.10.2016

Тонких Андрей

6.1:

Остовное дерево диаметра $2-$ это солнышко. Обозначим за v его центр.
$\forall a : (a \to v) \in G.$
Рассмотрим остовное дерево диаметром $l.$ В нем (а значит и в исходном графе) есть простров путь длины длины l. Значит есть и простой путь любой длины от 1 до l.

Для любого k от 2 до l построим остовное дерево диаметром k :
Возьмем простой путь ϕ длины k. Если он не проходит через v, исправим это. Для этого заменим в нем два любых последовательных ребра $(a \to b), (b \to c)$ на ребра $(a \to v), (v \to c)$.
Все вершины, не входящие в этот путь соединим с v(такие ребра в графе есть).
Построенное остовное дерево имеет диаметра k.

6.2:

Подвесим дерево, рассмотрим самую глубокую вершину, не являющуюся листом $- v$. $deg(v) \geq 3$ и все ее дети $-$ листья (т.к. $v -$ самая глубокая из не-листьев). Значит любые два ребенка $v -$ пара листьев с общим соседом (v)

6.3:

$\forall k$(в частности, для $k = 4$) подойдет дерево из двух вершин. Это единственное дерево, где все степени равны $1 \Rightarrow$ дерево из > 2 вершин должно содержать вершину степени k, а значит, $k-$солнышко в качестве своего подграфа.
Чтобы увеличить количество вершин, придется сделать из одной вершины степени 1 вершину степени k. То есть, количество вершин увеличится на $k - 1$.
И т.д.
Ответ: $2, \forall n \in \mathbb{N}_0 : k + 1 + n(k - 1)$.