Достаточные статистики (29.09 – 06.10)

Задача

Пусть $X_1, ..., X_n$ – выборка из равномерного распределения на конечном множестве $\{1, ..., \theta\}$, где θ – натуральный параметр. Докажите, что статистика

$\frac{X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}}{X_{(n)}^n - (X_{(n)} - 1)^n}$

является эффективной оценкой параметра θ в классе несмещенных оценок.

Решение

Несмещенность

Сначала докажем, что данная оценка является несмещенной.

$P[X_{(n)} = k] = P[X_{(n)} \leq k] - P[X_{(n)} \leq k-1] = (\frac{k}{\theta})^n - (\frac{k-1}{\theta})^n$

$E\frac{X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}}{X_{(n)}^n - (X_{(n)} - 1)^n} = \sum\limits_{k=1}^{\theta} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot P[X_{(n)} = k] = \sum\limits_{k=1}^{\theta} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{\theta^n}$

$= \frac{1}{\theta^n} \cdot (\sum\limits_{k=1}^{\theta} k^{n+1} - \sum\limits_{k=0}^{\theta-1} k^{n+1}) = \theta$

Осталось доказать, что $X_{(n)}$ – полная достаточная статистика. Тогда данная оценка будет эффективной в своём классе как функция от полной достаточной статистики.

Достаточность

$P[X_1, ..., X_n \in B | X_{(n)} = k] = (\frac{1}{k})^n$ не зависит от θ

Полнота

$Eg(X_{(n)}) = \sum\limits_{k=1}^{\theta} P[X_{(n)} = k] \cdot g(k)$

$\forall k \in \{1, ..., \theta\} : P[X_{(n)} = k] \geq (\frac{1}{\theta})^n > 0$

Таким образом если $Eg(X_{(n)}) = 0$, то $\forall k \in \{1, ..., \theta\} : g(k) = 0$. Тогда $g(X_{(n)}) = 0$.