Домашнее задание по статистике 06.10.17

1.

(a)

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sigma(\hat{p})} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

При $\alpha = 0.05 : z_l \approx -1.96 = -z, z_r \approx 1.96 = z$

$$P[-z \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} \leq z] \approx 1-\alpha$$

$$P[\overline{X} - z\frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \overline{X} + z\frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}}] \approx 1-\alpha$$

При 7 успехах и 11 неудачах:
$\overline{X} = \frac{7}{18} \approx 0.39$
$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{7}{18} \cdot \frac{11}{18}} \approx 0.49$

Ассимптотический доверительный интервал уровня $\alpha = 0.05 :$
$(0.39 - \dfrac{1.96 \cdot 0.49}{4.24}; 0.39 + \dfrac{1.96 \cdot 0.49}{4.24}) \approx (0.16; 0.61)$

(b)

2.

(a)

$$P[Z < z] = P[X_{max}/\theta < z] = P[\forall i : X_i/\theta < z] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i/\theta < z] = z^n$$

(b)

$P[Z \leq q] = P[X_{max}/\theta \leq q] = P[\theta q \geq X_{max}] = P[\theta \geq X_{max}/q] = 1-\alpha$,
если q – квантиль распределения Z уровня $1-\alpha$
$q = (1-\alpha)^{1/n}$
$L_{low} = X_{max} \cdot (1-\alpha)^{-1/n}$

3.

$S^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

$\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$P[z_l \le \dfrac{nS^2}{\sigma^2} \le z_r] = 0.95$

$P[\dfrac{1}{z_r} \le \dfrac{\sigma^2}{nS^2} \le \dfrac{1}{z_l}] = 0.95$

$P[\dfrac{nS^2}{z_r} \le \sigma^2 \le \dfrac{nS^2}{z_l}] = 0.95$

$n = 10$
$\overline{X} = 0.483$
$S^2 = 0.0007783333$
$z_l = z_{0.025} = 2.700389$
$z_r = z_{0.975} = 19.02277$

Точный доверительный интервал уровня $\alpha = 0.05:$

$(\dfrac{10 \cdot 0.0007783333}{19.02277}; \dfrac{10 \cdot 0.0007783333}{2.700389})$
$(0.0004; 0.0028)$