CSC Test 2016 Task 7

Хохлявин Александр (@xoxai)

15 апреля 2020 г.

Задача: при каких натуральных n значения многочлена $P(n)$ будут простыми. Почему?

$$P(n) = n^4 + n^2 + 1$$

Решение:

Рассмотрим многочлен. Вынесем за скобку n^2, а к оставшейся единице добавим и сразу же отнимем n^2:

$$n^2(n^2+1) + n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)(n^2+1) - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2$$

Такая операция называется ещё выделением полного квадрата.

Заметим теперь получившуюся разность квадратов и не откажем себе в удовольствии свернуть её в произведение двух скобок, согласно известной формуле:

$$(n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n)$$

Мы хотим, чтобы полученное число было простым. Простое число можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только тогда, когда одно из них – единица, а второе – само число.

Очевидно, для натуральных n выполняется $n^2+1-n < n^2+1+n$. Тогда, коль скоро простое число представимо в виде произведения единицы и самого себя, где единица – меньшее число и мы рассматриваем решения в поле **натуральных** чисел, имеем:

$$n^2 + 1 - n = 1 \Leftrightarrow n = 1$$

Таким образом, значение многочлена $P(n)$ принимает простые значения при единственном натуральном $n = 1$.

Ответ: $n = 1$.