

# CSC Exam 2016 Task 1

Хохлявин Александр (@xohai)

16 апреля 2020 г.

**Задача:** Вычислить

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

где  $x_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) – корни уравнения  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

**Решение:**

Вспомним трёхмерную теорему Виета. Если у нас дано кубическое уравнение в общем виде  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  и оно имеет корни  $x_1, x_2, x_3$ , то выполняются следующие соотношения между корнями и коэффициентами:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = +\frac{c}{a} \quad (2)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \quad (3)$$

К слову, слепой подбор корней кубического уравнения не увенчается успехом (обычно пробуют небольшие целые числа и дроби вида  $n/a$ ). Можно было бы посчитать корни по формулам Кардано, как это делает какой-нибудь WolframAlpha, но мы не будем. На досуге посмотрите точные решения этого уравнения – вы явно будете не в восторге.

Но оказывается решать это уравнение вовсе не требуется для решения задачи. Давайте раскроем определитель, разложив по первой строке:

$$D = x_1(x_2x_3 - x_1^2) - x_2(x_2^2 - x_1x_3) + x_3(x_1x_2 - x_3^2) = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \quad (4)$$

Все корни уравнения при подстановке их в него, очевидно, обращают его в верное равенство. Поступим так с каждым корнем и получим равенства вида:

$$x_i^3 = 3x_i^2 - 1 \quad (5)$$

Тогда преобразуем с учётом этого выражение (4):

$$D = 3x_1x_2x_3 - (3x_1^2 - 1 + 3x_2^2 - 1 + 3x_3^2 - 1) = 3x_1x_2x_3 - 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \quad (6)$$

Воспользовавшись формулой для квадрата трёхчлена, получим:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \quad (7)$$

Поставим теперь это в (6) и получим:

$$D = 3 \underbrace{x_1x_2x_3}_{-d} - 3 \left[ \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)^2}_{-b} - 2 \underbrace{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}_c - 1 \right] = -3(b^2 - 2c + d - 1) \quad (8)$$

Наконец, подставляя коэффициенты уравнения из условия задачи, получаем:

$$D = -3(9 - 0 + 1 - 1) = -27 \quad (9)$$

**Ответ:** -27