Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Алгоритмизация / Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Рассмотрим систему линейных уравнений с действительными постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = y_n \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$A \cdot X = Y$$

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений включает в себя 2 стадии:

- последовательное (прямое) исключение;
- обратная подстановка.

Последовательное исключение

Исключения Гаусса основаны на идее последовательного исключения переменных по одной до тех пор, пока не останется только одно уравнение с одной переменной в левой части. Затем это уравнение решается относительно единственной переменной. Таким образом, систему уравнений приводят к треугольной (ступенчатой) форме. Для этого среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой (а чаще максимальный) элемент и перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк. Затем нормируют все уравнения, разделив его на коэффициент $\mathbf{a_{i1}}$, где \mathbf{i} номер столбца.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot x_2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{21}} \cdot x_n = \frac{y_2}{a_{21}} \\ \dots \\ x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{n1}} \cdot x_2 + \dots + \frac{a_{nn}}{a_{n1}} \cdot x_n = \frac{y_n}{a_{n1}} \end{cases}$$

Затем вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = \frac{y_1}{a_{11}} \\ 0 + \left(\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + \dots + \left(\frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = \left(\frac{y_2}{a_{21}} - \frac{y_1}{a_{11}}\right) \\ \dots \\ 0 + \left(\frac{a_{n2}}{a_{n1}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + \dots + \left(\frac{a_{nn}}{a_{n1}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = \left(\frac{y_n}{a_{n1}} - \frac{y_1}{a_{11}}\right) \end{cases}$$

Получают новую систему уравнений, в которой заменены соответствующие коэффициенты.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + \dots + a'_{1n} \cdot x_n = y'_1 \\ 0 + a'_{22} \cdot x_2 + \dots + a'_{2n} \cdot x_n = y'_2 \\ \dots \\ 0 + a'_{n2} \cdot x_2 + \dots + a'_{nn} \cdot x_n = y'_n \end{cases}$$

После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают указанный процесс для всех последующих уравнений пока не останется уравнение с одной неизвестной:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + a'_{13} \cdot x_3 + \dots + a'_{1n} \cdot x_n = y'_1 \\ 0 + x_2 + a''_{23} \cdot x_3 + \dots + a''_{2n} \cdot x_n = y''_2 \\ 0 + 0 + x_3 + \dots + a'''_{3n} \cdot x_n = y'''_3 \\ \dots \\ 0 + 0 + 0 + \dots + x_n = y'''_n \end{cases}$$

Обратная подстановка

Обратная подстановка предполагает подстановку полученного на предыдущем шаге значения переменной $\boldsymbol{x_n}$ в предыдущие уравнения:

$$\begin{split} x_{n-1} &= y_{n-1}^{(n-1)'} - a_{(n-1)n}^{(n-1)'} \cdot x_n \\ x_{n-2} &+ a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)'} \cdot x_{n-1} = y_{n-2}^{(n-2)'} - a_{(n-2)n}^{(n-2)'} \cdot x_n \\ & \cdots \\ x_2 &+ a_{23}'' \cdot x_3 + \cdots + a_{2(n-1)}'' \cdot x_{n-1} = y_2'' - a_{2n}'' \cdot x_n \\ x_1 &+ a_{12}' \cdot x_2 + a_{13}' \cdot x_3 + \cdots + a_{1(n-1)}' \cdot x_{n-1} = y_1' - a_{1n}' \cdot x_n \end{split}$$

Эта процедура повторяется для всех оставшихся решений:

$$\begin{split} x_{n-2} &= \left(y_{n-2}^{(n-2)'} - a_{(n-2)n}^{(n-2)'} \cdot x_n\right) - a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)'} \cdot x_{n-1} \\ & \cdots \\ x_2 + a_{23}'' \cdot x_3 + \cdots = (y_2'' - a_{2n}'' \cdot x_n) - a_{2(n-1)}'' \cdot x_{n-1} \\ x_1 + a_{12}' \cdot x_2 + a_{13}' \cdot x_3 + \cdots = (y_1' - a_{1n}' \cdot x_n) - a_{1(n-1)}' \cdot x_{n-1} \end{split}$$

Иллюстрирующий пример

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 36 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 47 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 37 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix}$$

Выбираем строку с максимальным коэффициентом a_{i1} и меняем ее с первой.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 36 \\ 37 \end{bmatrix}$$

Нормируем уравнения относительно коэффициента при x_1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{4}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{47}{5} \\ \frac{36}{2} \\ \frac{37}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 1 & 2 & 0.5 \\ 1 & 1.5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 18 \\ 18.5 \end{bmatrix}$$

Вычитаем 1 уравнение из 2 и 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1.6 & 0.3 \\ 0 & 1.1 & 1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 8.6 \\ 9.1 \end{bmatrix}$$

Выбираем строку с наибольшим коэффициентом при a_{i2} (уравнение 1 не рассматривается) и перемещаем ее на место 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & \boxed{1.6} & 0.3 \\ 0 & 1.1 & 1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 8.6 \\ 9.1 \end{bmatrix}$$

Нормируем 2 и 3 уравнения относительно коэффициента при х2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.1875 \\ 0 & 1 & 1.636 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.375 \\ 8.272 \end{bmatrix}$$

Вычитаем уравнение 2 из 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.1875 \\ 0 & 0 & 1.4489 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.375 \\ 2.897 \end{bmatrix}$$

Нормируем уравнение 3 относительно коэффициента при х₃

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.166 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.333 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Откуда получаем x_3 =2. Подставляем полученное значение в уравнения 2 и 1 получаем

$$x_2 = 5.333 - 0.1666 \cdot 2 = 5.333 - 0.333 = 5$$

 $x_1 + 0.4 \cdot x_2 = 9.4 - 0.2 \cdot 2 = 9.4 - 0.4 = 9$

Подставляя полученное значение x_2 =5 в уравнение 1, найдем $x_1 = 9 - 0.4 \cdot 5 = 9 - 2 = 7$

Таким образом, решением системы уравнений будет вектор

$$X = [7 \ 5 \ 2]^T$$

Реализация на С++

```
#include <iostream>
2
    using namespace std;
3
     // Вывод системы уравнений
    void sysout(double **a, double *y, int n)
4
5
       for (int i = 0; i < n; i++)</pre>
6
7
         for (int j = 0; j < n; j++)
8
9
           cout << a[i][j] << "*x" << j;</pre>
10
11
           if (j < n - 1)
             cout << " + ";
12
13
         }
         cout << " = " << y[i] << endl;</pre>
14
15
16
       return;
17
     double * gauss(double **a, double *y, int n)
18
19
20
       double *x, max;
       int k, index;
21
22
       const double eps = 0.00001; // точность
23
       x = new double[n];
24
       k = 0;
25
       while (k < n)
26
27
         // Поиск строки с максимальным a[i][k]
28
         max = abs(a[k][k]);
29
         index = k;
         for (int i = k + 1; i < n; i++)
30
31
32
           if (abs(a[i][k]) > max)
33
34
             max = abs(a[i][k]);
             index = i;
35
36
           }
37
         // Перестановка строк
38
         if (max < eps)</pre>
39
40
         {
41
           // нет ненулевых диагональных элементов
42
           cout << "Решение получить невозможно из-за нулевого столбца ";
           cout << index << " матрицы A" << endl;
43
44
           return 0;
45
46
         for (int j = 0; j < n; j++)
47
48
           double temp = a[k][j];
           a[k][i] = a[index][i];
49
```

```
50
           a[index][j] = temp;
51
         }
52
         double temp = y[k];
         y[k] = y[index];
53
54
         y[index] = temp;
55
         // Нормализация уравнений
         for (int i = k; i < n; i++)</pre>
56
57
           double temp = a[i][k];
58
59
           if (abs(temp) < eps) continue; // для нулевого коэффициента пропустить
           for (int j = 0; j < n; j++)
60
61
             a[i][j] = a[i][j] / temp;
           y[i] = y[i] / temp;
62
           if (i == k) continue; // уравнение не вычитать само из себя
63
64
           for (int j = 0; j < n; j++)
             a[i][j] = a[i][j] - a[k][j];
65
66
           y[i] = y[i] - y[k];
67
         }
         k++;
68
69
       }
       // обратная подстановка
70
       for (k = n - 1; k >= 0; k--)
71
72
73
         x[k] = y[k];
74
         for (int i = 0; i < k; i++)
75
           y[i] = y[i] - a[i][k] * x[k];
76
77
       return x;
78
79
     int main()
80
     {
       double **a, *y, *x;
81
82
       int n;
       system("chcp 1251");
83
84
       system("cls");
85
       cout << "Введите количество уравнений: ";
86
       cin >> n;
87
       a = new double*[n];
88
       y = new double[n];
89
       for (int i = 0; i < n; i++)
90
91
         a[i] = new double[n];
92
         for (int j = 0; j < n; j++)
93
           cout << "a[" << i << "][" << j << "]= ";
94
95
           cin >> a[i][j];
96
         }
97
       }
98
       for (int i = 0; i < n; i++)
99
         cout << "y[" << i << "]= ";
100
101
         cin >> y[i];
102
103
       sysout(a, y, n);
104
       x = gauss(a, y, n);
105
       for (int i = 0; i < n; i++)
106
         cout << "x[" << i << "]=" << x[i] << endl;
107
       cin.get(); cin.get();
108
       return 0;
109
```

Результат выполнения

```
C:\MyProgram\Debug\MyProgram.exe
                                                                                Введите количество уравнений: 3
a[0][0]= 2
a[0][1]= 4
a[0][2]= 1
a[1][0]= 5
a[1][1]= 2
a[1][2]= 1
a[2][0]= 2
a[2][1]= 3
a[2][2]= 4
y[0] = 36
y[1] = 47
y[2] = 37
2*x0 + 4*x1 + 1*x2 = 36
5*x0 + 2*x1 + 1*x2 = 47
2*x0 + 3*x1 + 4*x2 = 37
x[0]=7
x[1]=5
x[2]=2
```

Назад: Алгоритмизация

Комментариев к записи: 46



Валерий

21.05.2019 в 12:56

В программе ошибка. В строке 77 должно быть return y; Не будьте пожирателями времени - исправьте! Ответить ↓



Елена Вставская

24.05.2019 в 10:07

Пока не увидела проблемы. Мы определяем вектор х, который и возвращает функция.

Ответить ↓



Матвей

14.05.2019 в 22:31

А как проверить систему на совместность и на случай бесконечного множества решений? Помогите, пожалуйста

Ответить ↓



Елена Вставская

24.05.2019 в 10:09

Ну, например, посчитать определитель. Ответить ↓



Дмитрий

09.03.2019 в 14:30

Можете подсказать, в цикле while значит переменная k? Как я понял, это номер столбца, это верно?) Ответить \downarrow



Елена Вставская

09.03.2019 в 14:41

Это номер рассматриваемого уравнения Ответить ↓



Кирилл

21.12.2018 в 22:22

А вы в курсе, что вы использовали метод Жордана-Гаусса? И что это две разные вещи?

Ответить ↓



Елена Вставская

22.12.2018 в 07:22

Теперь в курсе :) Ответить ↓



Satoru

27.06.2018 в 19:41

Здраствуйте не подскажите как решить уравнение с вырожденной матрицей (нету решения, либо множество) или какой алгоритм позволяет найти решения. Ответить \downarrow



Елена Вставская

28.06.2018 в 05:30

С вырожденный матрицей действительно будет множество решений Ответить ↓



Олег

16.05.2018 B 18:08

Все сделано замечательно, только небольшое замечание Елена. Ваша программа не будет выполнятся корректно, если система линейных уравнений, имеет бесконечное множество решений - тут Вам нужно подумать что возвращать при if (max < eps). С уважением, Олег

Ответить ↓



Денис

20.02.2017 в 16:16

```
for (int i = 0; i < n; i++)
delete[] a[i];
delete[] a;
delete[] x;
delete[] y;</pre>
```

Дабы не было утечек памяти.

Ответить ↓



Елена Вставская

20.02.2017 в 16:21

Согласна с замечанием Ответить ↓



Алексей

10.11.2016 в 21:18

Программа вылетает при несовместной системе Ответить ↓



Елена Вставская

11.11.2016 в 19:34

Да, есть такая недоработка. Проверка совместности системы в примере отсутствует.

Ответить ↓



Эдуард

12.10.2016 в 08:48

Вместо

1 | const double eps = 0.00001; // точность

можно прописать

- 1 const double eps = DBL_EPSILON; // точность
- 2 // DBL_EPSILON определено во float.h

Ответить ↓



Елена Вставская

12.10.2016 в 09:28

Да, но для одной константы придется вставлять в проект целую библиотеку float.h.

Ответить ↓



Эдуард

12.10.2016 в 10:59

Это не библиотека, нет идущих вместе никаких исполняемых модулей, это просто определения констант, точнее макросов препроцессора, т.е. вместо вашего 0.00001 просто подставится число, в итоге даже размер исполняемого файла не изменится.

Ответить ↓



Эдуард

12.10.2016 в 08:40

Забыли про delete, освобождайте память выделенную new. Ответить \downarrow



Алексей

14.05.2016 в 00:07

пишет [Error] 'abs' was not declared in this scope, объявляю и появляется куча ошибок, можете сказать как поправить? Ответить \downarrow



Елена Вставская

14.05.2016 в 06:44

Попробуйте подключить $\langle cmath \rangle$ или воспользоваться функцией fabs(). Ответить \downarrow



Дмитрий

07.11.2015 в 03:36

А есть ли какой-то способ решить систему из 2х уровнений, но с 3мя неизвестными ? К примеру, если нам дана сумма их a+b+c=const(s) и const(1)*a+const(2)*b+const(3)*c = const(s)*const(4) ? Ну или, что-то подобное, Спасибо.

Ответить ↓

admin

07.11.2015 в 07:09

Дмитрий, для того чтобы система имела единственное решение необходимым условием является одинаковое количество уравнений и неизвестных. В случае если количество неизвестных больше, чем количество уравнений, система будет иметь бесконечное множество решений.

Ответить ↓



Игорь

25.11.2015 в 12:59

Добрый день, а можно ли перепрограммировать текущий код, так чтобы программа могла также решать системы с неодинаковым количеством переменных и количеством строк, как например сделали на этом сайте: http://math.semestr.ru/gauss/gauss.php? С Уважением, Игорь.

Ответить ↓



Елена Вставская

25.11.2015 в 19:38

Если количество переменных больше количества уравнений, то часть переменных, превышающих количество уравнений, задается в качестве свободных. Если количество уравнений превышает количество переменных, то такая система вообще может не иметь решения в случае если она не является вырожденной. Пример вырожденной системы уравнений: x1 + 2*x2= 3 3*x1 + 6*x2 = 9

Ответить ↓



Олег

24.10.2015 в 10:30

Здравствуйте! Спасибо за код. У меня вылазят ошибки sysout: идентификатор не найден и gauss: идентификатор не найден хотя все сделал, как у вас. В чем может быть хитрость?

Ответить ↓



Олег

24.10.2015 B 11:11

sysout я разобрался, а вот ошибка с gauss осталась Ответить ↓



admin

24.10.2015 в 15:01

Ответить без Вашего кода довольно сложно. У меня приведенный пример компилируется и работает.

Ответить ↓



Анастасия

23.10.2015 в 21:04

Можно еще вопрос? в моей системе программа не выдает 0. т.е. у меня система: 10x1-7x2=7;
-3x1+2x2+6x3=4;
5x1-x2+5x3=6.
ответ, посчитанный вручную:
x1=0;
x2=-1;
x3=1.
программа выдает:
x1=1.11022e-016;
x2=-1;
x3=1.
почему так может быть?



Ответить ↓

admin

23.10.2015 в 21:10

Это связано с представлением вещественных чисел в разрядной сетке вычислительной машины. Посмотрите эту статью.

Ответить ↓



x[2]=1.38333

Игорь

06.10.2015 в 14:32

Добрый день, после x = gauss(a, y, n); в главной функции main, нужно добавить проверку исключения, а именно:

```
1  sysout(a, y, n);
2  x = gauss(a, y, n);
3  if (x != 0)
4  {
5  for (int i = 0; i < n; i++) {
6  cout << "x[" << i << "]=" << x[i] << endl;
7  }</pre>
```

еще меня вот что смутило, например есть такая система уравнений: (в скобочках я имею в виду нижний регистр)

```
имею в виду нижний регистр) x(2)+3x(3)-x(4)=2 2*x(1)-3*x(2)+2*x(3)=-2 2*x(1)-4*x(2)+x(4)=3 -2*x(1)+5*x(2)-3*x(3)+3*x(4)=1 результат вычисления на бумаге у меня получился такой: x1=23,3 x2=-10,2 x3=7 x4=8.8 в программе такой: x[0]=-2.25833 x[1]=-1.25
```

x[3]=2.8 где может быть ошибка, давайте вместе разберем? Ответить \downarrow



admin

06.10.2015 в 22:20

Спасибо за замечание, Игорь! Ошибку исправила, сейчас Ваша система решается верно.

Ответить ↓



Игорь

05.10.2015 в 18:09

Добрый день, а если бы, например, было 4 уравнения с 5-ю неизвестными (x1,x2,x3,x4,x5), то это можно запрограммировать? (так как вроде по формулировке - бесконечное множество решений) С Уважением, Игорь.

Ответить ↓



admin

05.10.2015 в 18:18

Да, так и есть. Количество уравнений должно соответствовать количеству неизвестных, причем система должна быть невырожденной, чтобы она имела единственное решение.

Ответить ↓



Игорь

28.09.2015 в 19:08

Добрый день, почему после нормирования 2 и 3 уравнения относительно коэффициента при x2 в первой строке вместо $[1\ 0,4\ 0,2]*[x1] = [9,4]$ стало $[1\ 0,5\ 0,25]*[x1] = [10]$? С Уважением, Игорь.

Ответить ↓



admin

28.09.2015 в 19:33

Игорь, спасибо! Исправила. Ответить ↓



Тимур

10.06.2015 в 20:28

только 0 и 1 Ответить ↓



Тимур

09.06.2015 в 23:16

здравствуйте, а над полем GF(2) как сделать? Ответить \downarrow



admin

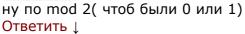
10.06.2015 в 17:47

не поняла вопроса Ответить ↓



Тимур

10.06.2015 в 20:28





Тимур

10.06.2015 в 20:29

а это только для квадратных матриц или любых? Ответить \downarrow



admin

10.06.2015 в 20:53

Для однозначного решения количество уравнений должно соответствовать количеству неизвестных. Поэтому для прямоугольных матриц однозначного решения не существует.

Ответить ↓



Тимур

10.06.2015 в 20:56

спасибо, а для 0 и 1?



admin

11.06.2015 в 01:11

Все равно не поняла вопроса. Какую задачу требуется решить?



Тимур

11.06.2015 в 02:35

Z2 Решение СЛАУ по модулю, по модулю 2 Z2 Z2



admin

11.06.2015 в 18:37

Тут метод Гаусса вряд ли поможет. Это - тема для отдельной статьи.