МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Институт №8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

**Лабораторные работы**
**по курсу «Методы, средства и технологии мультимедиа»**

Выполнила: Алексюнина Ю.В.

Группа: М8О-407

Преподаватель: А.В. Крапивенко

Москва, 2020

## Множества Жюлиа и Мандельброта

### 1. Цели

Изучить процесс построения алгебраических фракталов и результаты их визуализации.

### 2. Задание

1. В среде программы FractInt рассмотреть классическую формулу z(n+1)=z(n)2+c (mandel). Увеличить масштаб, с помощью правой клавиши мыши изучить вид соответствующих множеств Жюлиа. В отчете привести пример связного множества Жюлиа, Канторовой пыли.

В качестве параметров формулы mandel задать:

· для группы 08-406: Real Perturbation of Z(0) = 0.05*n

· для группы 08-407: Imaginary Perturbation of Z(0) = 0.05*n

· для группы 08-408: Real Perturbation of Z(0) и Imaginary Perturbation of Z(0) = 0.05*n

где n – порядковый номер по списку.

**Индивидуальное задание:** Imaginary Perturbation of Z(0) = 0.05

2. Подобрать для формулы удобный вид с помощью клавиш позиционирования <PgUp> и <PgDown>, клавиш палитры <+> и <->; привести изображение в отчете.

3. Рассчитать неподвижную траекторию, привести пример точки, для которой последовательность будет ограничена.

### 3. ПО

FractInt, запускаемый из эмулятора DOS “DOSBox”.

### 4. Теория

Идея, использованная Мандельбротом, состояла в том, чтобы вместо действительных чисел рассмотреть комплексные и наблюдать процесс $z_0 \to z_1 \to z_2 \to \ldots$ не на прямой, а в плоскости. Процесс Мандельброта основан на простой формуле

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$$

**Множество Мандельброта M** для полинома $f_c(z) = z^2 + c$ определяется как множество всех c ϵ C, для которых орбита точки 0 ограничена:

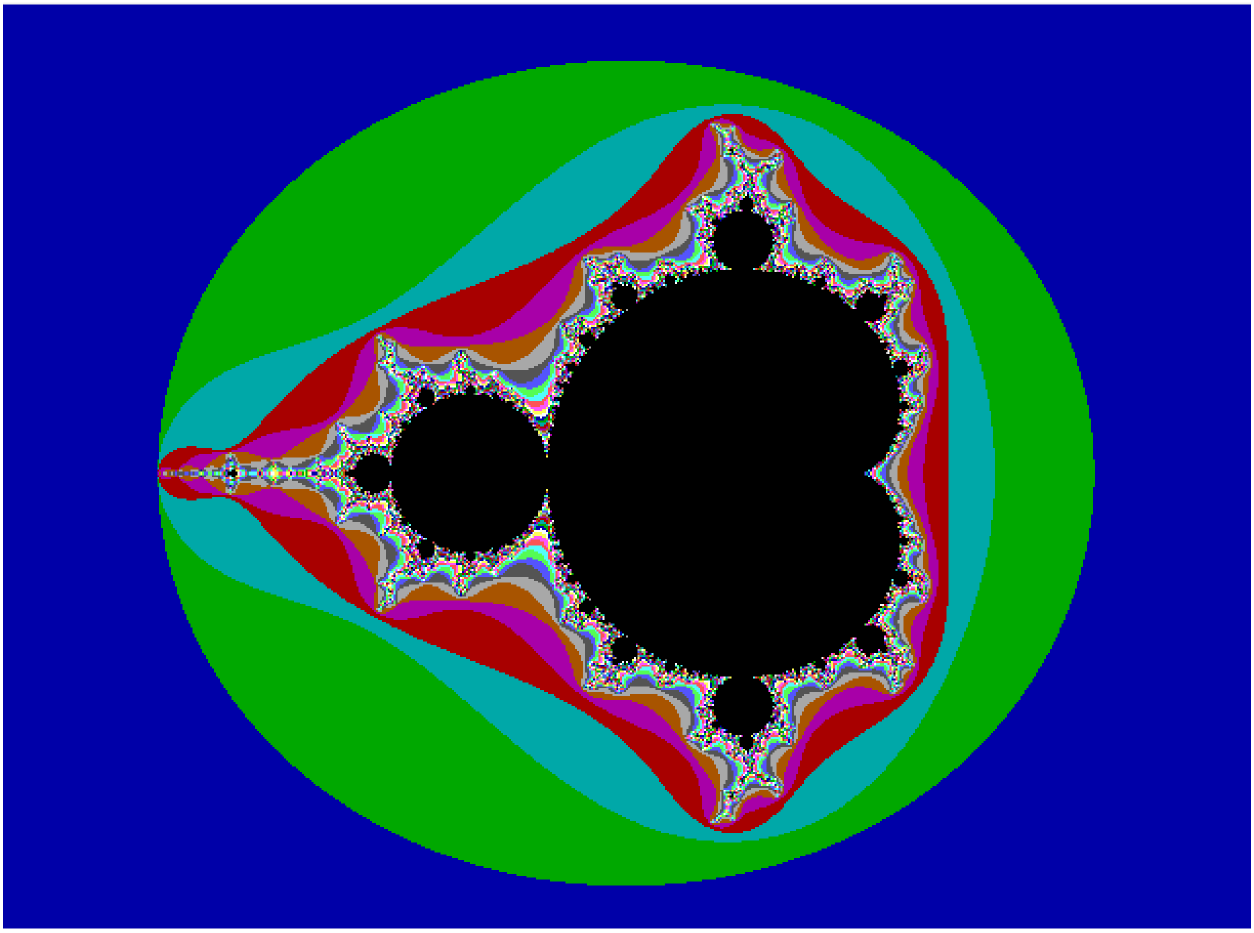
$$M = \{c\epsilon C: \{f_c^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ ограничена}\}$$

**Множество Жюлиа** функции f, обозначаемое как J(f), определяется как

$$J(f) = \partial\{z: f^{(n)} \to \infty \text{ при } n \to \infty\}$$

Таким образом, множество Жюлиа функции f есть граница множества точек f(z), стремящихся к бесконечности при итерировании f(z).

Строго математически, изображения множеств Мандельброта и Жюлиа должны быть чёрно-белыми — точка либо принадлежит множеству, либо нет. Но были предложены варианты сделать изображения цветными. Самым распространённым способом является окрашивание точек около внешней границы множества в зависимости от количества итераций, за которое становится очевидным, что точка не принадлежит множеству (за которое начинает выполняться критерий $|z_n| > 2$).



На картинке виден классический фрактал множества Мандельброта: черный цвет в середине показывает, что в этих точках функция стремится к нулю – это и есть множество Мандельброта. За пределами этого множества функция стремится к бесконечности. Границы множества являются фрактальными, функция ведет себя непредсказуемо – хаотично.

Точки, принадлежащие множеству Мандельброта, соответствуют связным множествам Жюлиа, а точки не принадлежащие — несвязным.

Когда произойдет выход за границу множества Мандельброта, сопуствующее ему множество Жюлиа как бы взорвется, превратившись в Канторову пыль. Эта пыль становится все мельче с удалением точки от множества Мандельброта.

## 5. Ход выполнения

Зададим параметр формулы mandel на ImaginaryPerturbation of Z(0) = 0.05 (по варианту).

Подбираем для формулы удобный вид с помощью клавиш позиционирования <PgUp> и <PgDown>, клавиш палитры <+> и <->; изображения приведены в пункте 6.

Неподвижная траектория — точка, при которой выполняется равенство f(z) = z.

$$f(z_{n+1}) = z_{n+1}^2 + \Re(c) + i\Im(c) = \left(\Re(z_n) + i\Im(z_n)\right)^2 + c = z_{n+1} = \Re(z_n) + i\Im(z_n)$$

$$\begin{cases} \Re(z_n) = \Re(z_n)^2 - \Im(z_n)^2 + \Re(c) \\ \Im(z_n) = 2\Re(z_n)\Im(z_n) + \Im(c) \end{cases}$$

Подставим $z_n = 0.05i$:

$$\begin{cases} -0.05^2 + \Re(c) = 0 \\ \Im(c) = 0.05 \end{cases}$$

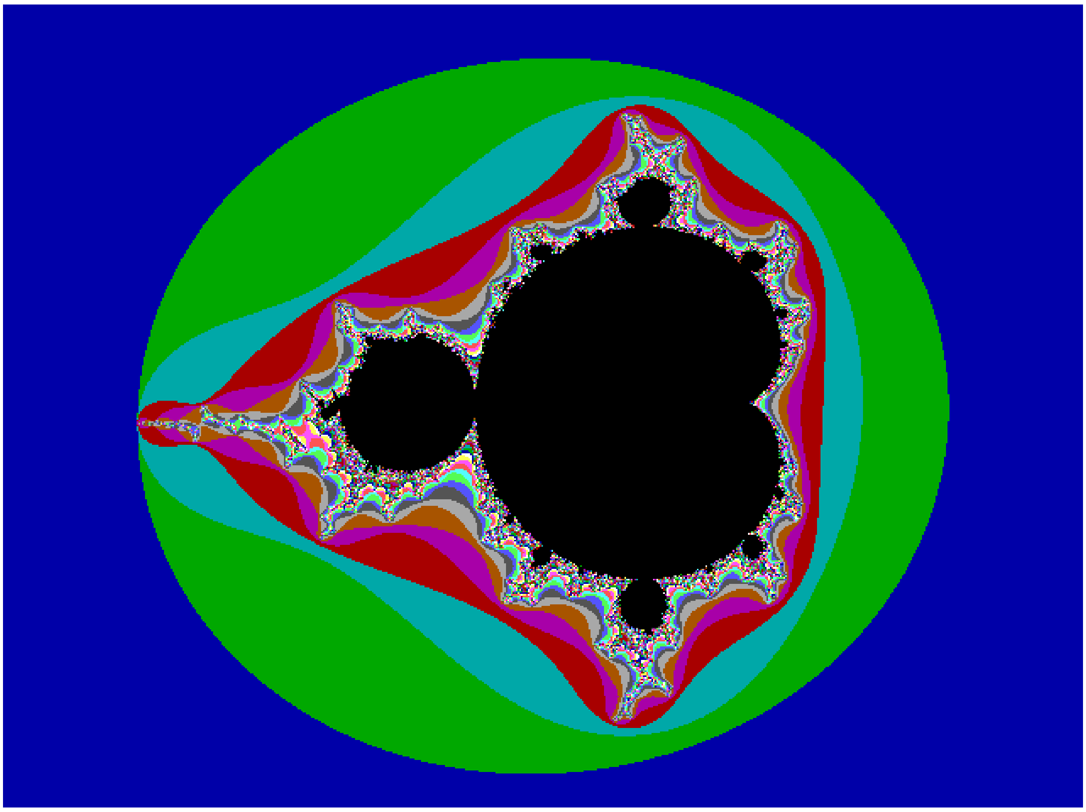
c = 0.0025 + 0.05i – неподвижная точка.

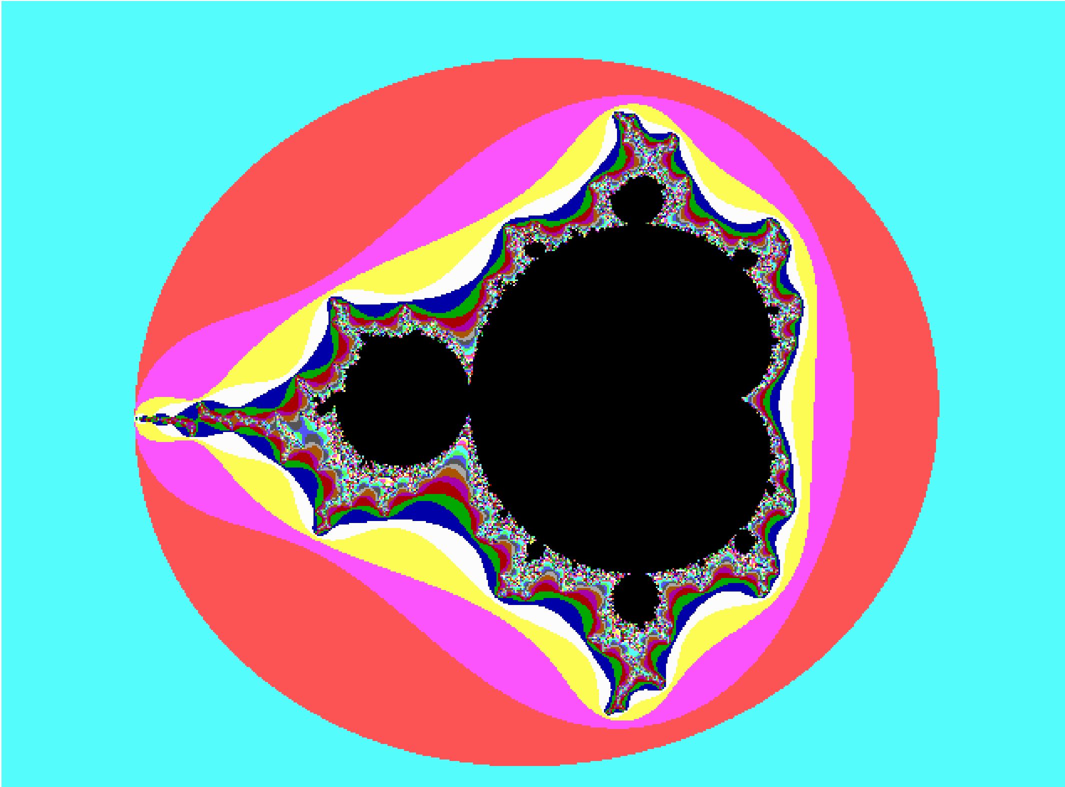
Рассмотрим точку, для которой последовательность ограничена — любая точка из множества Мандельброта. Например, точка c = 0.2-0.3i. Рассчитаем последовательность f для неё – запустим итерационный процесс до тех пор, пока полученные значения не будут лежать достаточно близко друг к другу:

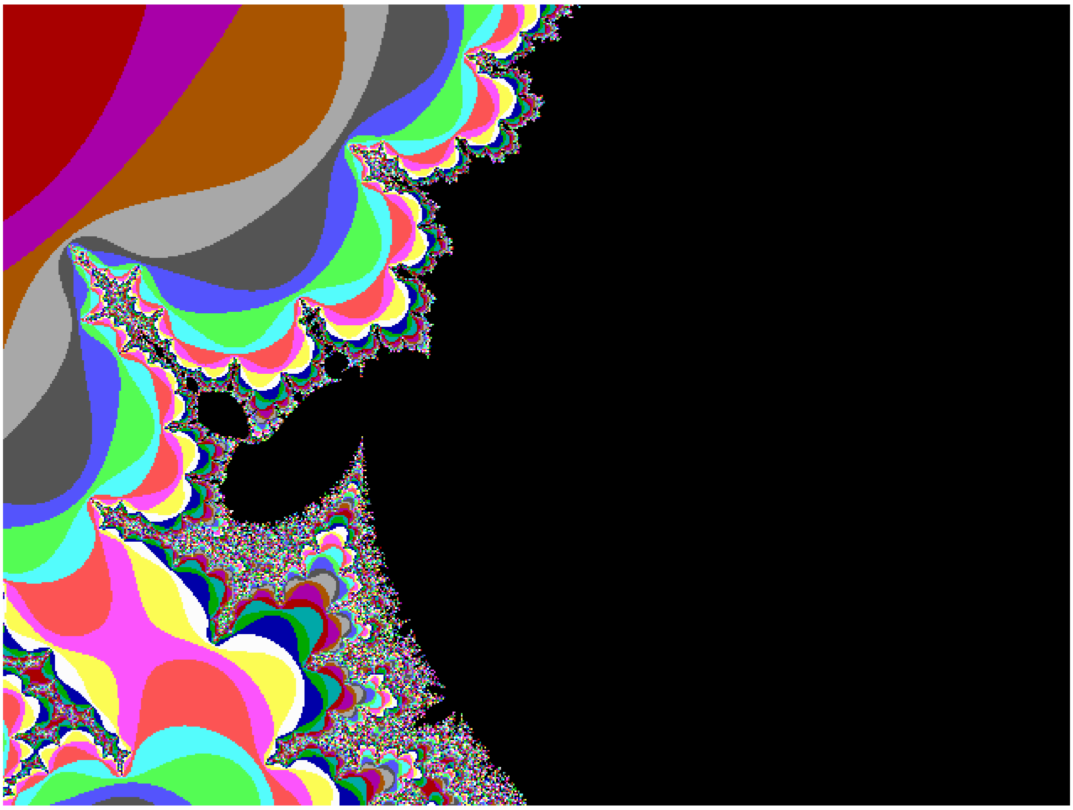
```
it: 1 z: (0.1975-0.3j)
it: 2 z: (0.14900625-0.4185j)
it: 3 z: (0.04706061253906252-0.42471823124999997j)
it: 4 z: (0.021829125296423335-0.3399750002382644j)
it: 5 z: (0.0848935099241991-0.3148427137557052j)
...
it: 22 z: (0.07903139857594357-0.35655871106749615j)
it: 23 z: (0.07911184752275546-0.3563586672202j)
it: 24 z: (0.07926718471550649-0.3563843850890736j)
it: 25 z: (0.07927345663740512-0.3564991737651556j)
it: 26 z: (0.07919262003200396-0.3565218435854856j)
it: 27 z: (0.0791636461139399-0.3564677977843498j)
it: 28 z: (0.07919759200882903-0.3564385811896315j)
it: 29 z: (0.07922379641951943-0.3564581546585246j)
```

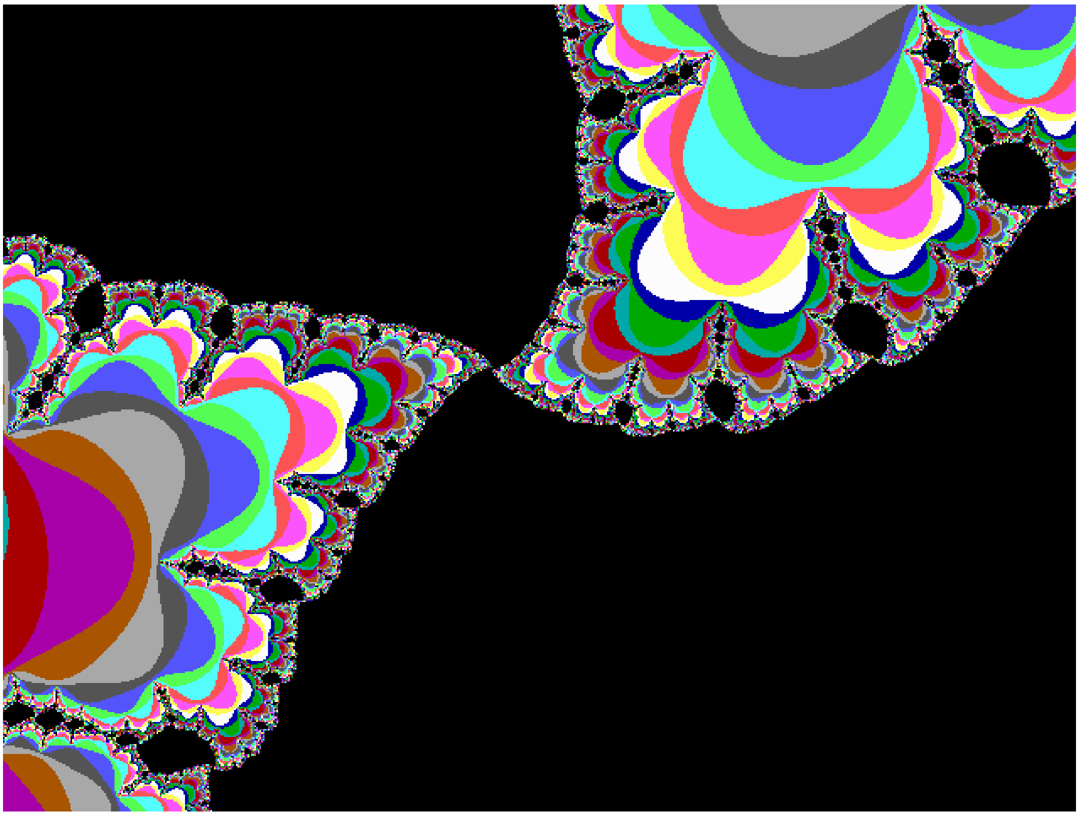
6. **Результат**

Множество Мандельброта — черные точки:









## 7. Вывод

В данной лабораторной работе были рассмотрены простейшие алгебраических фракталов и результаты их визуализации.