МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Институт №8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторные работы
по курсу «Методы, средства и технологии мультимедиа»

Выполнила: Алексюнина Ю.В.

Группа: М8О-407

Преподаватель: А.В. Крапивенко

Москва, 2020

Итеративные системы функций. Фрактальная компрессия изображений

1. **Цели**

Ознакомиться с основными принципами работы фрактальной компрессии и декомпрессии.

2. **Задание**

В программе WinFact изучить формулу fern (папоротник) и аффинные преобразования для получения изображения папоротника. Вычислить текущий угол поворота левой ветви. Аффинным преобразованием повернуть левую ветвь папоротника на угол 10 градусов + номер по списку(по варианту: 11 градусов). В отчете привести изображение модифицированного папоротника и математические выкладки по расчету коэффициентов матрицы итеративной системы функций.

3. **ПО**

Fractint, запускаемый из эмулятора DOS “DOSBox”.

4. **Теория**

Папоротник Барнсли - фрактал, названный в честь Майкла Барнсли, британского математика, который первым описал его в своей книге "Фракталы Повсюду". Является одним из основных примеров "самоподобных" множеств, т.е. представляет собой математически генерируемый "шаблон", воспроизводимый при любом увеличении или уменьшении количества итераций.

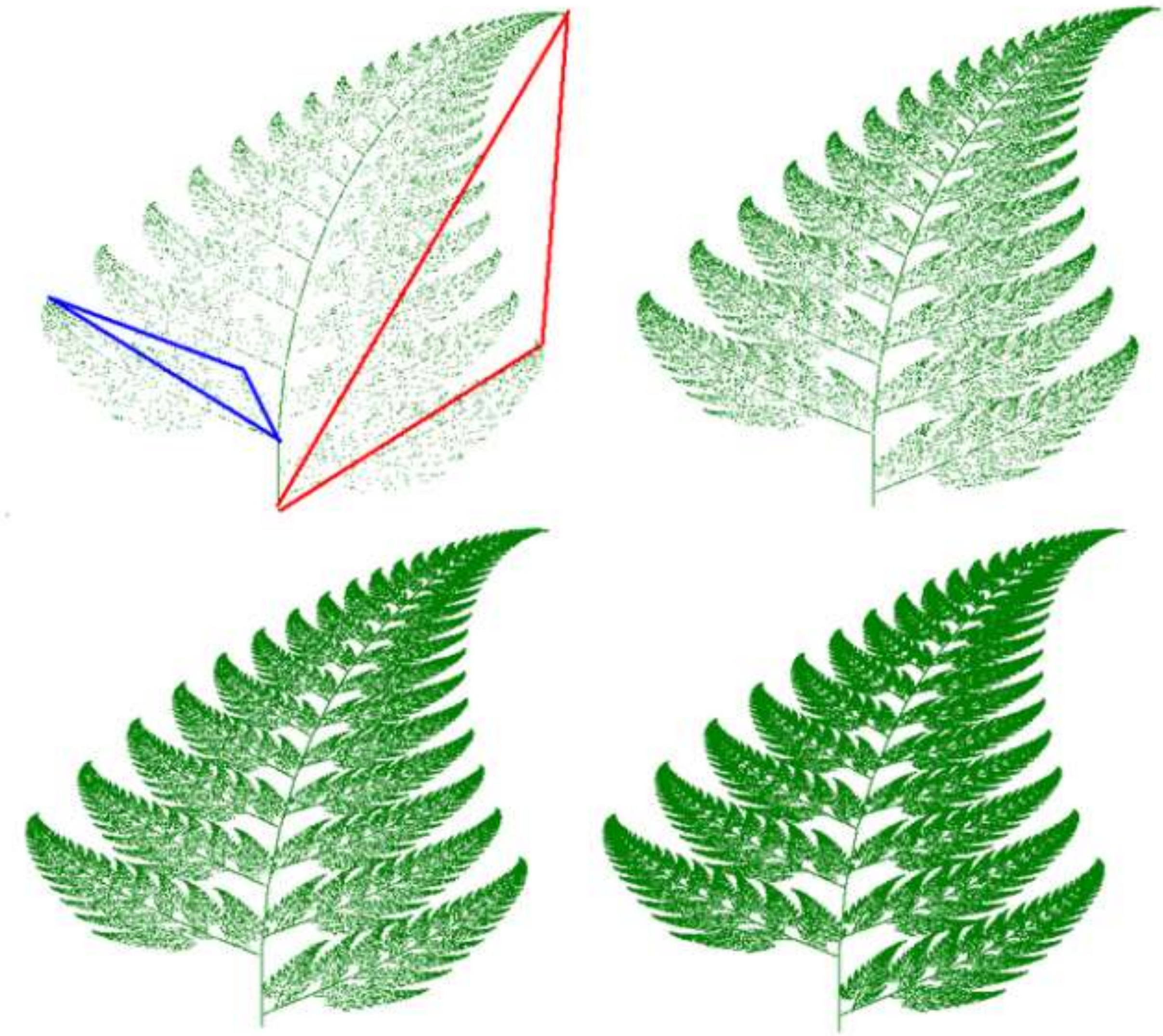
Папоротник Барнсли строится при помощи 4-х аффинных преобразований вида:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

w	a	b	c	d	e	f	p

$f1$	0	0	0	0.16	0	0	0.01
$f2$	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
$f3$	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
$f4$	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

где столбцы a-f - коэффициенты уравнения, а p - коэффициент вероятности.



Первая точка находится в начале координат (x0 = 0, y0 = 0), а затем новые точки итеративно вычисляются путем случайного применения одного из следующих четырех преобразований координат:

- (1) **$x_{n+1} = 0$; $y_n + 1 = 0.16\, y_n$.**

Данное преобразование выбирается в 1% случаев и указывает на точку у основания "стебля". Эта часть рисунка в результате итерационных преобразований завершается первой.

- (2) **$x_{n+1} = 0.85\ x_n + 0.04\ y_n$; $y_{n+1} = -0.04\ x_n + 0.85\ y_n + 1.6$.**

Преобразование (2) используется в 85% случаев и указывает на любую точку листовки попадающую в красный треугольник

- (3) **$x_{n+1} = 0.2\ x_n - 0.26\ y_n$; $y_{n+1} = 0.23\ x_n + 0.22\ y_n + 1.6$.**

Выбирается в 7% случаев - попадания точки в синий треугольник и симметричного ему относительно главного стебля треугольника.

- (4) **$x_{n+1} = -0.15\ x_n + 0.28\ y_n$; $y_{n+1} = 0.26\ x_n + 0.24\ y_n + 0.44$.**

В оставшихся 7% случаев используется преобразование (4) - для симметричных преобразованию (3) относительно стеблей 2-го порядка позиций.

5. Ход выполнения

Исходное изображение фрактала fern описывается следующим набором коэффициентов:

```
fern {
    0   0    0  .16 0      0 .01
   .85 .04 -.04 .85 0 1.6 .85
   .2  -.26  .23 .22 0 1.6 .07
  -.15 .28  .26 .24 0 .44 .07
  }
```

Нас интересует только левая ветвь папоротника, преобразования которой описаны в 3 строке. Аффинные преобразования поворота и масштабирования описаны в первых 4 коэффициентах *a, b, c, d*:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}22 \end{pmatrix}$$

Эта матрица является произведением матрицы поворота на матрицу масштабирования, т.е.

$$\Lambda = R \cdot S = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\, s_x & -\sin(\alpha) s_y \\ \sin(\alpha)\, s_x & \cos(\alpha) s_y \end{pmatrix}$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\, s_x = 0{,}2 \\ -\sin(\alpha) s_y = -0{,}26 \\ \sin(\alpha)\, s_x = 0{,}23 \\ \cos(\alpha) s_y = 0{,}22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = tg(\alpha) = \dfrac{0{,}23}{0{,}2} \Longrightarrow \alpha \approx 48{,}99^\circ \\ \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = tg(\alpha) = \dfrac{0{,}26}{0{,}22} \Longrightarrow \alpha \approx 49{,}76^\circ \end{cases}$$

Значения слегка различны, поэтому возьмем среднее: $\alpha = 49{,}375^\circ$
Вычислим значения матрицы масштабирования:

$$s_x = \frac{0{,}2}{\cos(\alpha)} = 0{,}307$$

$$s_y = \frac{0{,}26}{\sin(\alpha)} = 0{,}343$$

Для изменения папоротника необходимо пересчитать матрицу аффинных преобразований с углом $\tilde{\alpha} = 11^\circ$ (10° + номер по списку):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\alpha})\, s_x & -\sin(\tilde{\alpha}) s_y \\ \sin(\tilde{\alpha})\, s_x & \cos(\tilde{\alpha}) s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}981 \cdot 0{,}307 & -0{,}19 \cdot 0{,}343 \\ 0{,}19 \cdot 0{,}307 & 0{,}981 \cdot 0{,}343 \end{pmatrix}$$

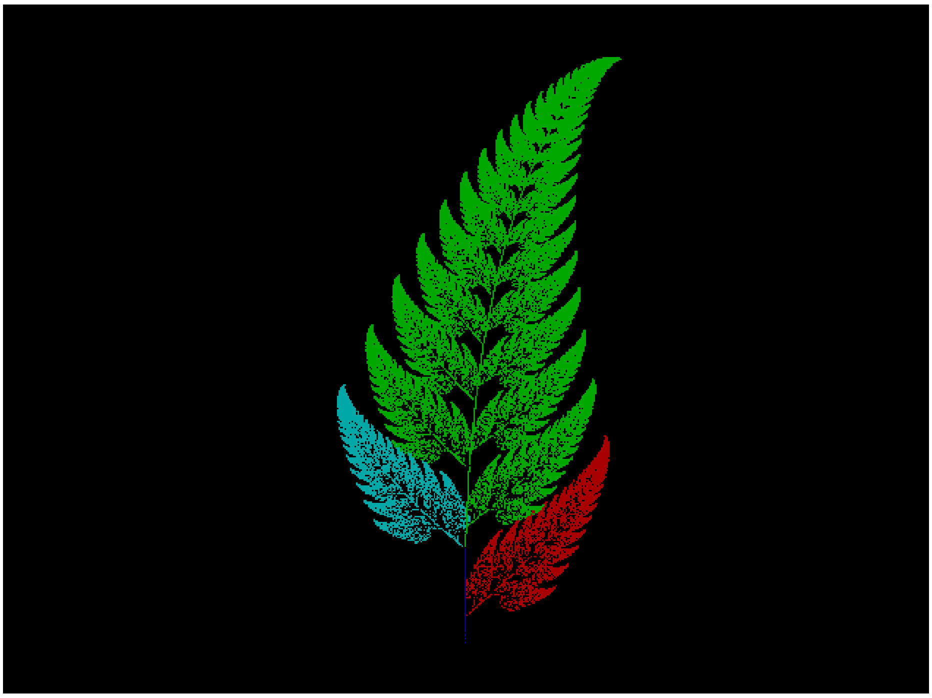
$$= \begin{pmatrix} 0{,}301 & -0{,}065 \\ 0{,}058 & 0{,}336 \end{pmatrix}$$

Теперь папоротник будет описываться следующим набором коэффициентов:

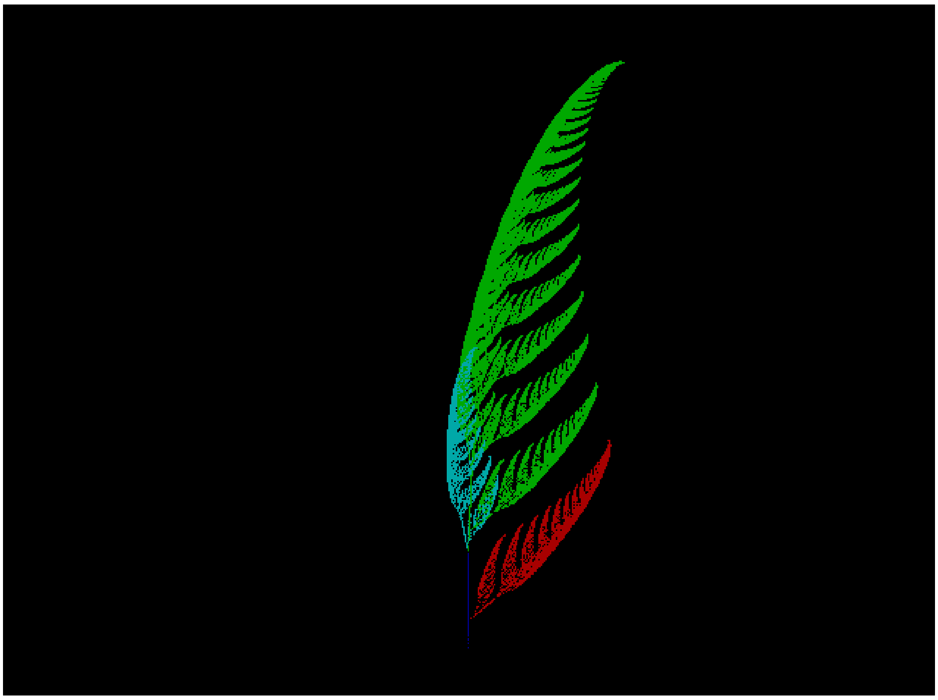
```
fern {
    0   0    0  .16 0      0 .01
   .85 .04 -.04 .85 0 1.6 .85
   .301  -.065  .058 .336 0 1.6 .07
  -.15 .28  .26 .24 0 .44 .07
  }
```

6. Результат

Исходный лист папоротника:



Левая ветвь под углом 11 градусов:



7. Вывод

С помощью фрактального сжатия можно добиться очень малого коэффициента сжатия (например, для изображений в статье Барнсли он достигал 1:10000), однако время на архивацию требуется примерно в 1000 раз больше, чем на алгоритм JPEG, но при этом разархивирование выполняется в 5-10 раз быстрее. Поэтому, если изображение будет сжато только один раз, а передано по сети и распаковано множество раз, то выгодней использовать фрактальный алгоритм. Вытеснение JPEG фрактальным алгоритмом в повсеместном использовании произойдет еще не скоро, однако в области приложений мультимедиа, в компьютерных играх его использование вполне оправдано.