武汉大学
Wuhan University

第四章 频率域滤波（1）

涂卫平 武汉大学计算机学院 2018年秋季学期

主要内容
Main Content

信号的表达域

域：对信号的分析可以从不同的角度、采用不同的方式。每一种特定的角度以及对应的处理方法，就形成一个“域”。可以把“域”视为一个坐标系。

- 时域：信号在**时间轴**上的变化，描述信号幅度和时间之间的关系，以时间作为变量。
- 空间域：信号在**空间坐标轴**上的变化，描述信号幅度与x、y坐标轴之间的关系，以空间坐标作为变量。
- 频域：信号在**频率轴**上的变化，描述信号幅度/相位与频率之间的关系，以频率作为变量。

什么是频率域增强

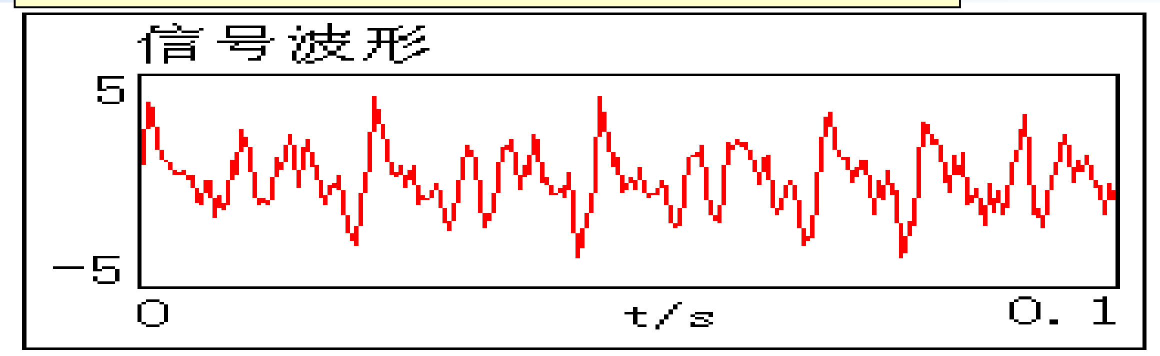
含义：

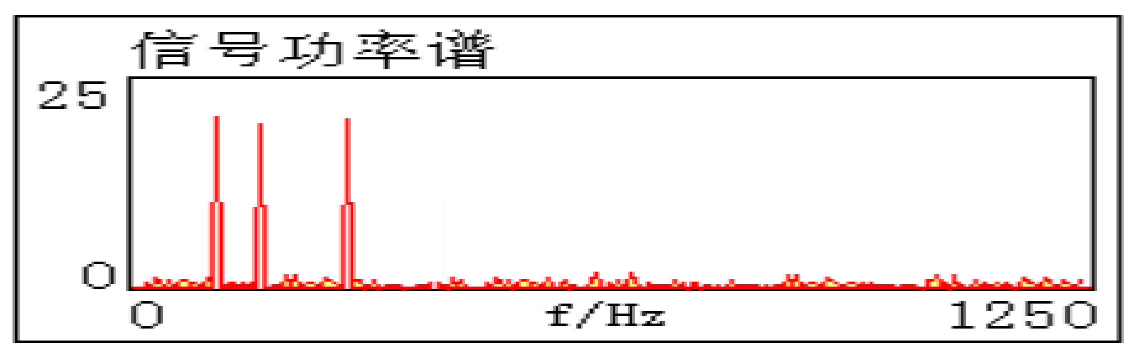
- 狭义：频域增强指通过**傅里叶变换**将图像转变到**频率域**内，对图像的**变换系数**（频率成分的强度与相位）直接进行运算，然后通过**傅里叶逆变换**获得处理后的图像。
- 广义：利用**变换域**进行处理均可称为频率域处理。

为什么要做频域分析

时域分析只能反映信号的幅值随时间的变化情况，除单频率分量的简谐波外，**很难明确揭示信号的频率组成和各频率分量大小。**

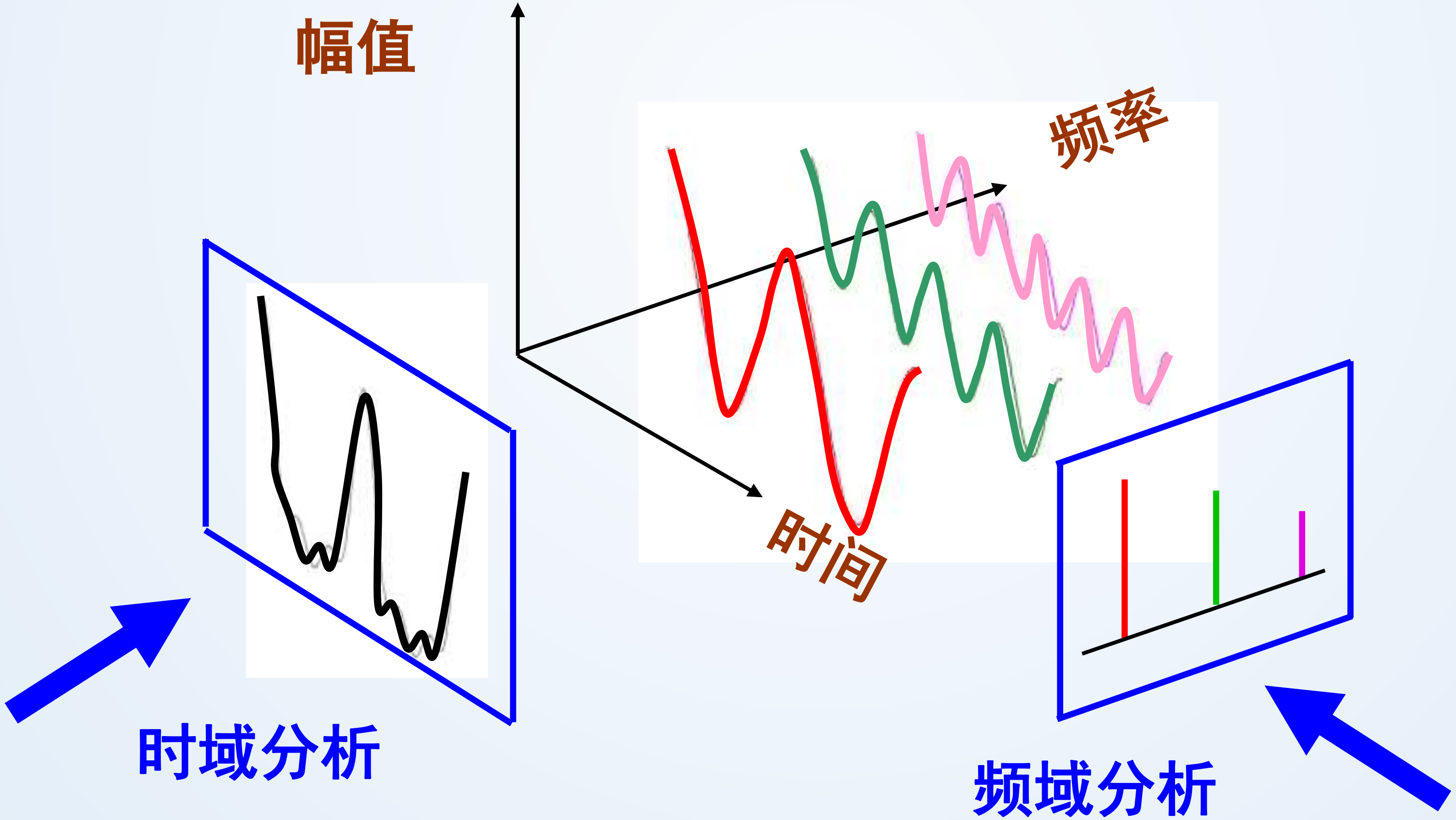
图例：受噪声干扰的多频率成分信号





为什么要做频域分析

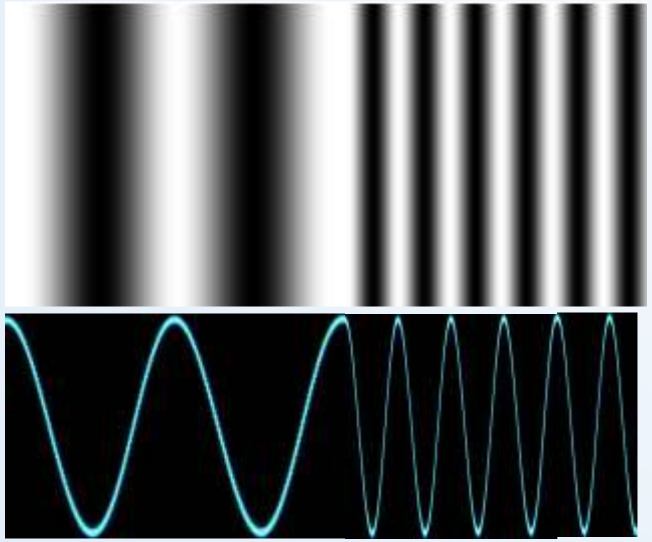
信号频谱X(f)代表了信号不同频率分量的大小，能够提供比时域信号波形更直观，丰富的信息。



为什么要做频域分析

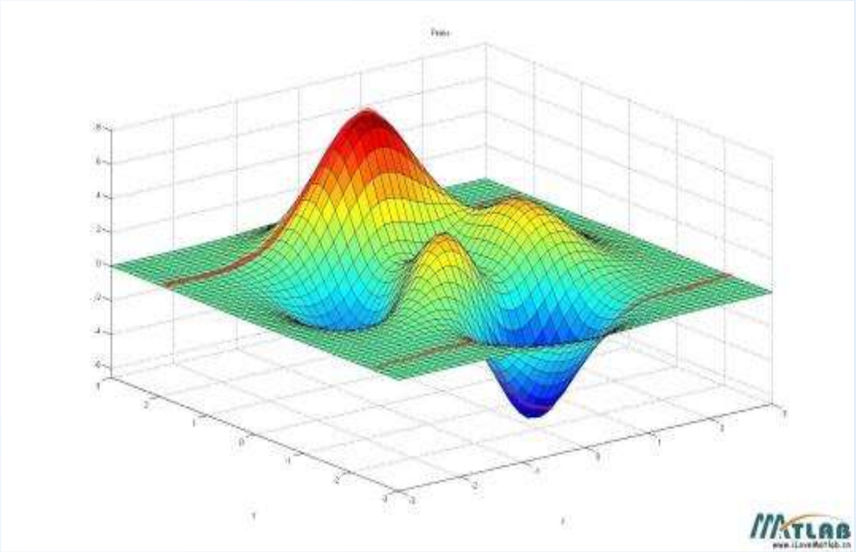
图像频率的意义

- 图像的**频率**表征图像像素灰度沿x轴和y轴变化的快慢
- 频率的**幅度值表示该频率成分对原来图像信息（能量）的贡献**，也可理解为**该频率成分的强度**。

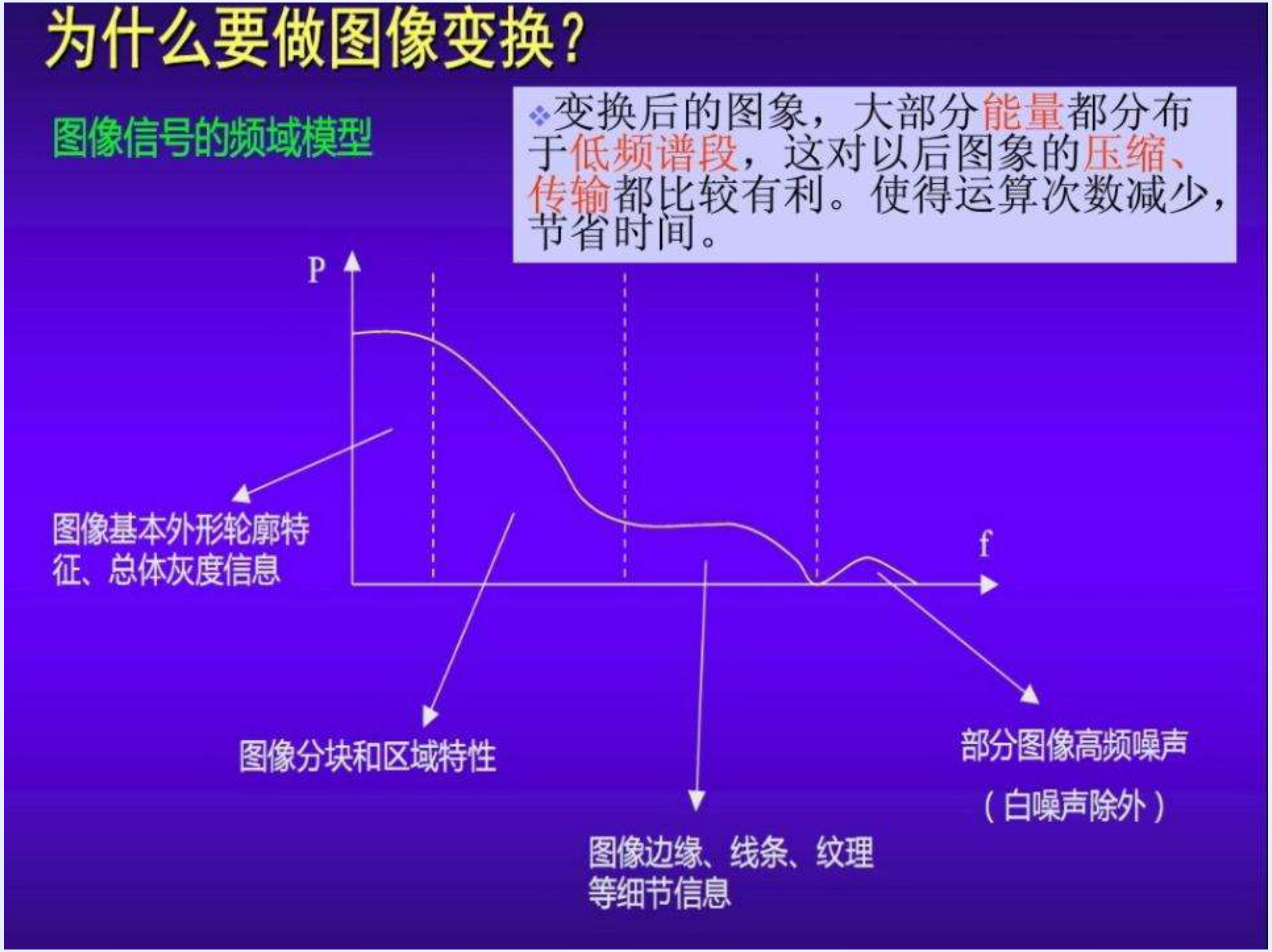


图像

图像灰度变化曲线



为什么要做频域分析


为什么要做图像变换?
图像信号的频域模型
变换后的图象，大部分能量都分布于低频谱段，这对以后图象的压缩、传输都比较有利。使得运算次数减少，节省时间。
P
f
图像基本外形轮廓特征、总体灰度信息
图像分块和区域特性
图像边缘、线条、纹理等细节信息
部分图像高频噪声
（白噪声除外）

主要内容

Main Content

傅里叶分析

傅里叶1768年生于法国,1807年提出“**任何周期信号都可用正弦函数级数表示**”，1822年在“热的分析理论”一书中再次提出。1829年狄里赫利给出傅里叶变换收敛条件。到了上世纪60年代之后，傅里叶变换得到大规模的应用。

傅里叶的两个最主要的贡献：

（1）“周期信号都可表示为**谐波关系**的正弦信号的**加权和**”（傅里叶级数）

（2）“非周期信号都可用正弦信号的**加权积分**表示”（傅里叶变换）

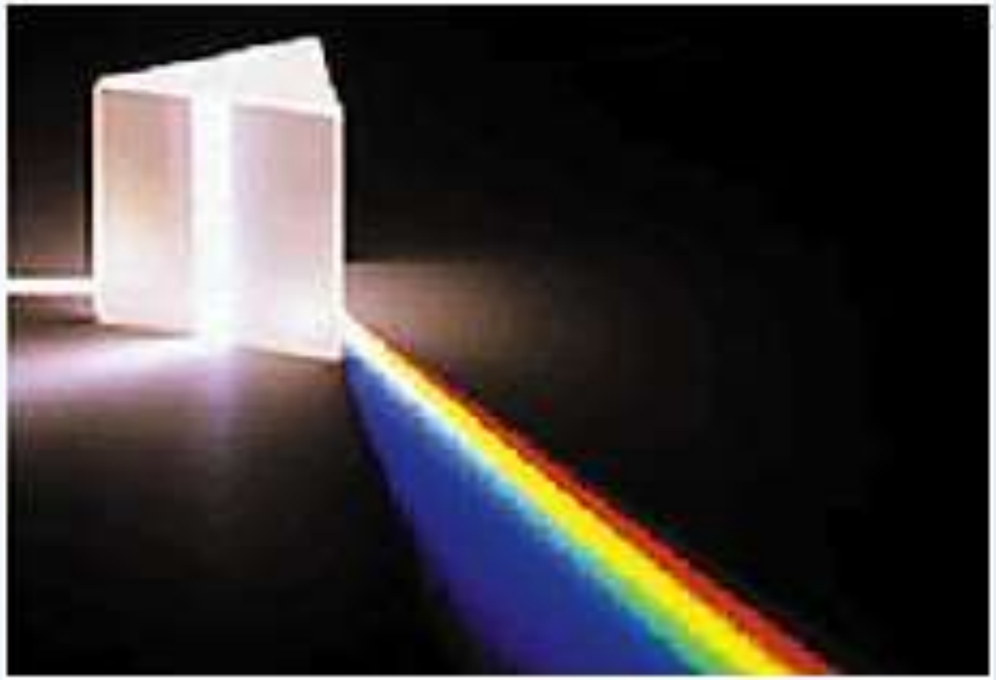
傅里叶分析

傅里叶变换的作用

傅里叶变换好比一个玻璃棱镜。

棱镜可以将白光分解成不同颜色，每个成分的颜色由波长决定。

傅里叶变换可看做是“**数学中的棱镜**”，将函数基于频率分成不同的成分。



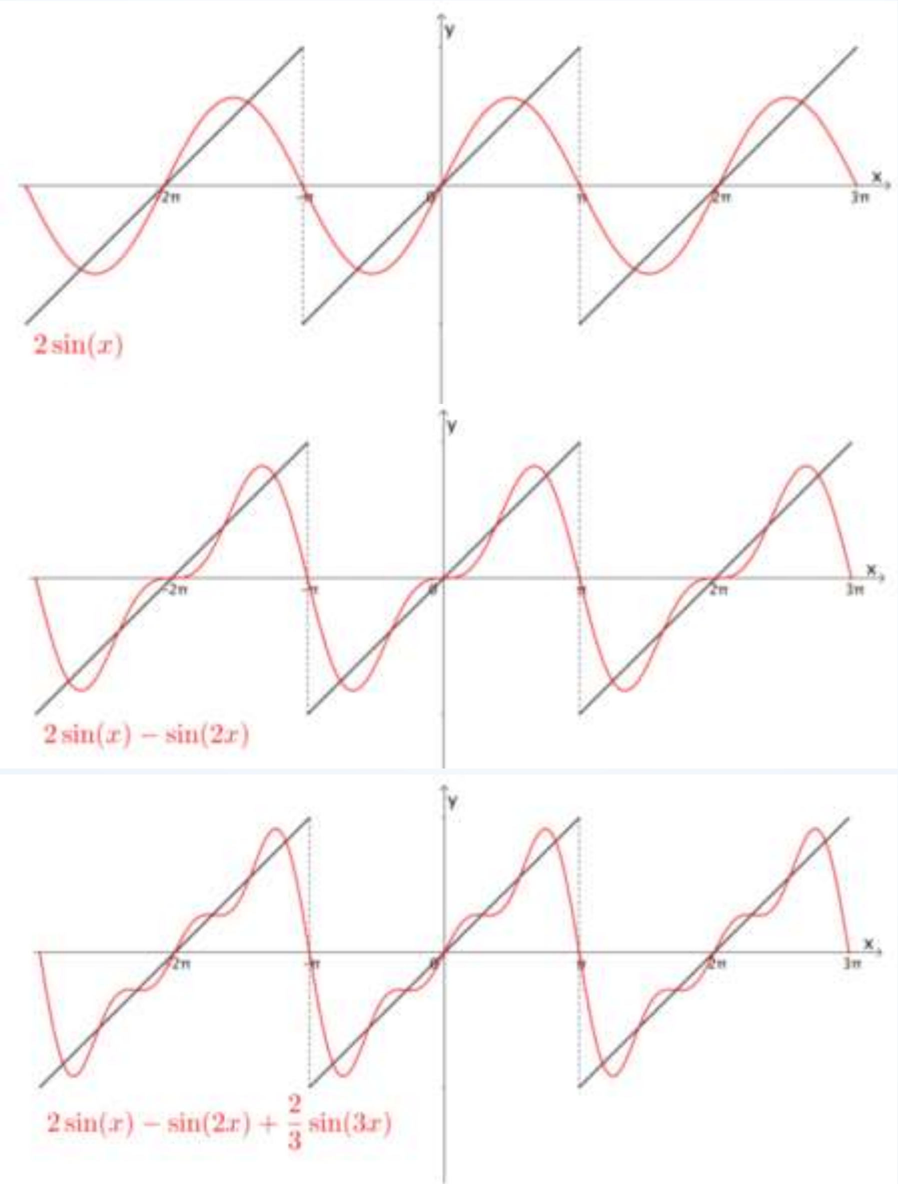
傅里叶级数

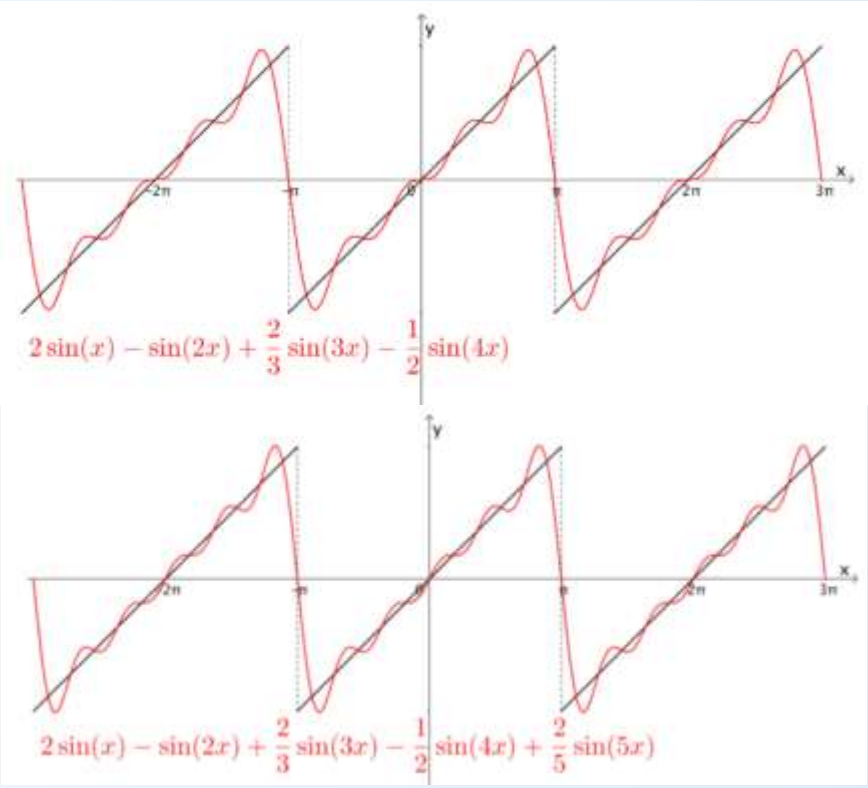
“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”：

任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和/或余弦函数的加权和。

？

实验：用正弦函数叠加出一个周期函数





傅里叶级数

傅里叶级数的三角函数形式

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$c_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}} \qquad \varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

傅里叶级数的复指数形式

$$\begin{cases} f_T(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \\ F_n=\displaystyle\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \end{cases}$$

物理意义：

周期信号可展开成直流和无穷多个频率为**基频整数倍**的、且具有不同**幅度**和**初相位**的正弦信号的叠加。

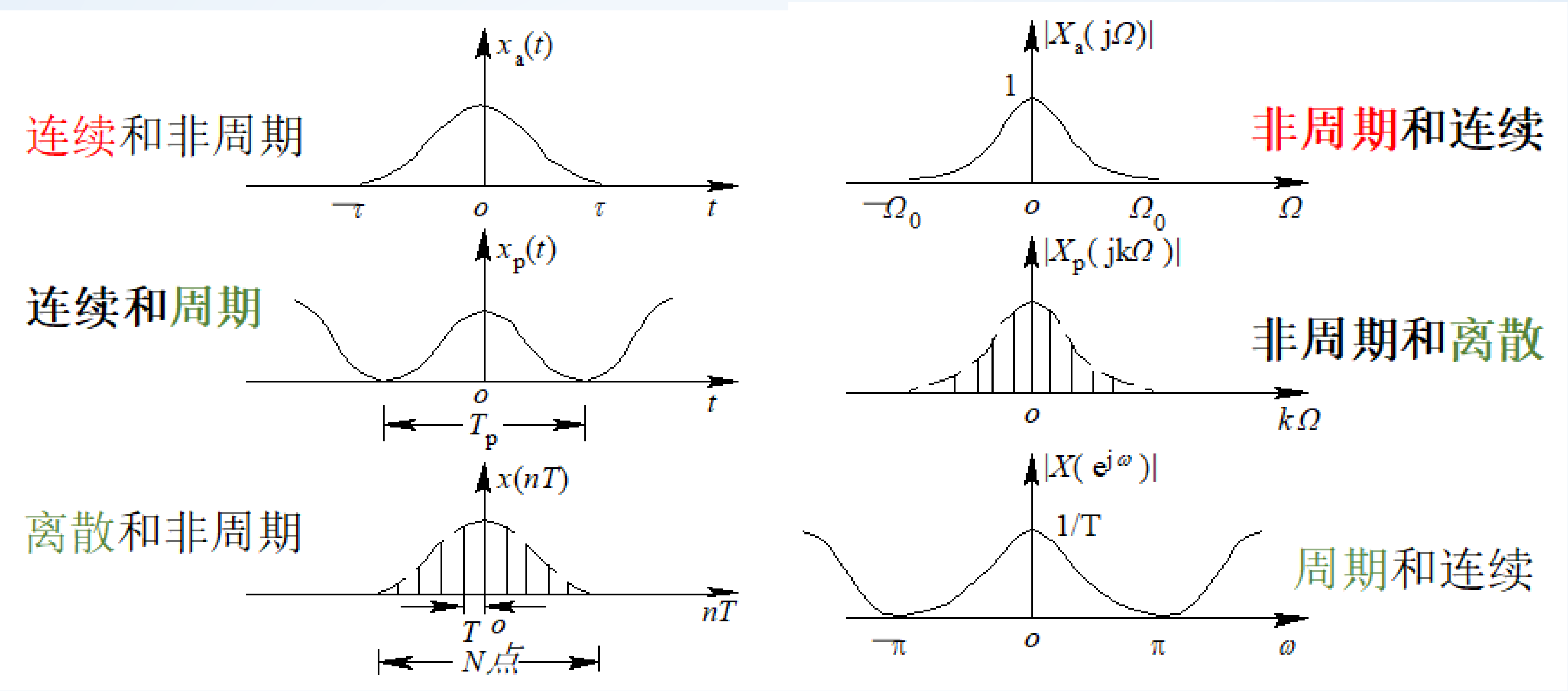
一个复杂的周期信号由不同频率的正弦（或余弦）信号叠加而成，其中每个正弦信号由其幅度、初相位和角频率这三个参数决定。知道了每个正弦信号的“三参数”，就能掌握原复杂信号的全部信息。

傅里叶变换

时域　　频域

连续信号的傅里叶变换

离散时间傅里叶变换（DTFT）



上述三种变换，信号至少在一个域内是连续的，不适合以计算机为代表的现代数字信号处理设备。

离散傅里叶级数

周期序列的离散傅里叶级数（DFS）

设 $\tilde{x}(n)$ 是一个**周期为*N*** 的周期序列， 即

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+rN) \quad r\text{为任意整数}$$

其离散傅里叶级数变换对可表示为：

$$\begin{cases} \tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk} \end{cases}$$

傅里叶级数的复指数形式

$$\begin{cases} f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \\ F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \end{cases}$$

$$\boxed{W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

离散傅里叶级数

周期序列的离散傅里叶级数（DFS）

$$
\begin{cases}
\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\
\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}
\end{cases}
$$

$$\boxed{W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

用傅里叶级数表示，其基波频率为： $\frac{2\pi}{N}$

用复指数表示基波： $e_1 = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$

第k次谐波为： $e_k = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

$$e_{k+N} = e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e_k$$

第k次谐波也是周期为N的序列。

所以，周期为N的序列的离散傅里叶级数也是周期为N的序列。

离散傅里叶变换

从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

有限长序列的离散频域表示(DFT) 可由**周期**序列的DFS导出

设$x(n)$为有限长序列，长度为N

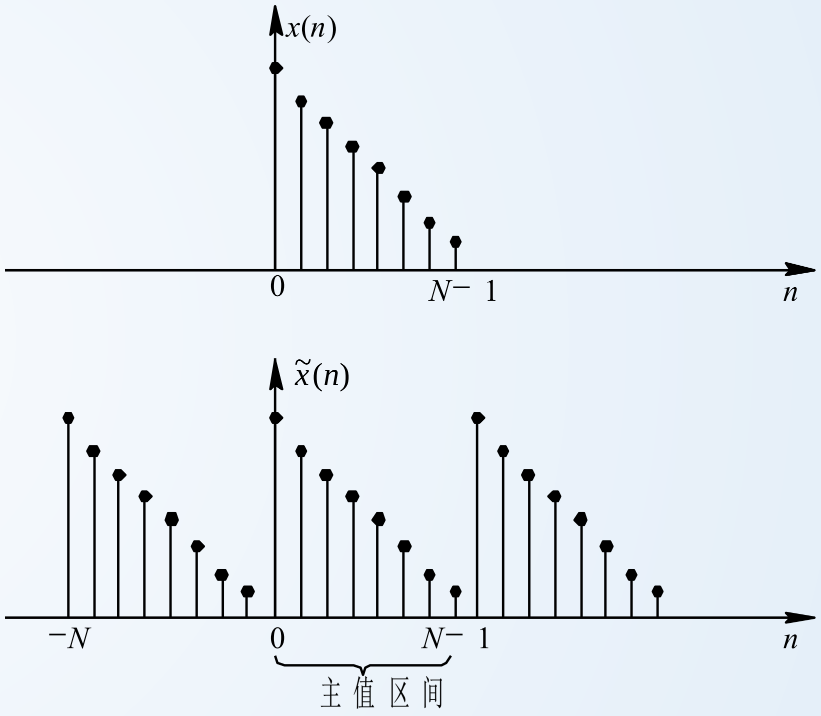
$$x(n)=\begin{cases} x(n) & 0\le n\le N-1 \\ 0 & 其它n \end{cases}$$

为了引用周期序列的概念，**把x(n)看成周期为N的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期**，而把 $\tilde{x}(n)$ 看成x(n)的以N为周期的**周期延拓**。

离散傅里叶变换

从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

$$\begin{cases} \tilde{x}(n)=x(n),0 \le n \le N-1 \\ \tilde{x}(n+rN)=\tilde{x}(n), r\text{为任意整数} \end{cases}$$



主值区间：$\tilde{x}(n)$ **的第一个周期** ***n=0*** **到** ***n=N-1*****；**

对应的序列称为主值序列

离散傅里叶变换

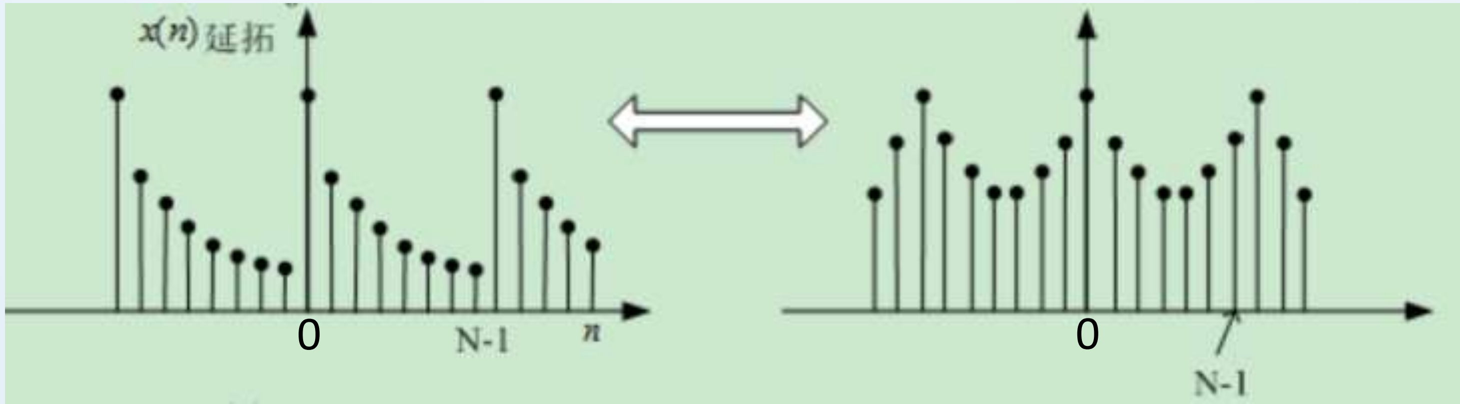
从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

$$x(n) \longrightarrow \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k) \longrightarrow X(k)$$

$$X(k) \longrightarrow \tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{IDFS}} \tilde{x}(n) \longrightarrow x(n)$$

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & 0 \le k \le N\text{-}1 \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} & 0 \le n \le N\text{-}1 \end{cases}$$



离散傅里叶变换

从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

- 离散傅里叶变换(DFT)实际上来自于离散傅里叶级数(DFS),只不过仅在时域与频域对周期序列各取一个周期而已
- 长度为N的有限长序列x(n)与周期序列 $\tilde{x}(n)$，都有N个独立值，因此其信息量相等
- 在进行DFT时，**有限长序列是作为周期序列的一个周期来考虑的**。因此，凡是涉及DFT关系，都隐含有周期性意义。

一维离散傅里叶变换

一维DFT的定义

◆ 设$x(n)$为有限长序列，长度为M

$$x(n)=\begin{cases} x(n) & 0\le n\le \mathrm{M}-1 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

◆ $x(n)$的N点DFT变换对定义如下：（N>=M）

$$\begin{cases} X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} & 0\le k\le N\text{-}1 \\ x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} & 0\le n\le N\text{-}1 \end{cases}$$

$$\boxed{W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

其基波频率为： $\frac{2\pi}{N}$

用复指数表示第k次谐波：

$$e_k=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

一维离散傅里叶变换

一维DFT的定义

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & 0 \le k \le N\text{-}1 \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} & 0 \le n \le N\text{-}1 \end{cases}$$

$$\boxed{W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

$X(k)$称为频谱系数，一般为复数。

$|X(k)|$表征各个谐波分量的幅度，称为信号的**幅度谱**。

$$X(k) = R(\mathrm{k}) + \mathrm{jI}(\mathrm{k})$$

$$|X(k)| = \sqrt{R^2(k) + I^2(k)}$$ **幅度谱**

$$\varphi(k) = arctg\frac{I(k)}{R(k)}$$ **相位谱**

一维离散傅里叶变换

一维DFT示例

$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的8点和16点DFT。

（1）设变换长度$N=8$ 时，则：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_8^{kn}=\frac{1-W_8^{k\cdot 4}}{1-W_8^{k}}$$

$$=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{8}4k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{8}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}\left(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)},\qquad k=0,1\ldots,7$$

一维离散傅里叶变换

一维DFT示例

（2）设变换区间$N=16$时，则：

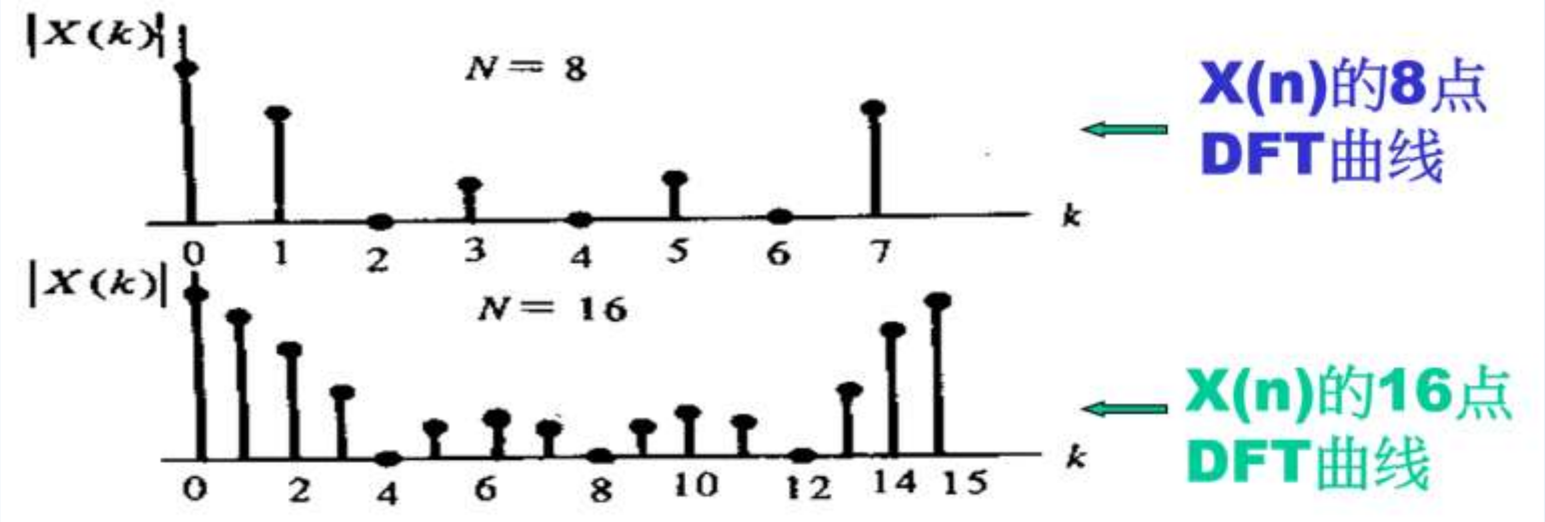
$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_{16}^{kn}=\frac{1-W_{16}^{k\cdot 4}}{1-W_{16}^{k}}$$

$$=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}4k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}k}\left(e^{j\frac{\pi}{4}k}-e^{-j\frac{\pi}{4}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{16}k}\left(e^{j\frac{\pi}{16}k}-e^{-j\frac{\pi}{16}k}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{16}k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)},\qquad k=0,1\ldots,15$$

一维离散傅里叶变换

一维DFT示例



- 非周期离散信号的DFT得到的频谱仍然是**离散**的
- 每一根谱线代表对应谐波成分的**强度**
- 变换长度不同，频谱**包络相同**
- 变换长度越大，则谱线间隔越小，即**谱线密度与变换长度成反比**

二维离散傅里叶变换

二维DFT的定义

设大小为M*N的图像 $f(x,y), x=0,\ldots,M-1; y=0,\ldots,N-1$

其傅里叶变换F(u, v)定义如下：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$u=0,1,\cdots M-1$$
$$v=0,1,\cdots N-1$$

逆傅里叶变换如下：

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$x=0,1,\cdots M-1$$
$$y=0,1,\cdots N-1$$

注：u和v是图像的频率变量，x和y是图像的空域变量

二维离散傅里叶变换

二维DFT的定义

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\,e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$u=0,\ldots,M-1;v=0,\ldots,N-1$$

- u, v均为频率分量。 F(u, v)——傅里叶系数，通常是复数。
- F(u, v)失去了空间关系，只记录了频率关系。
- u和v定义的矩形区域称为频率矩形，其大小与图像f的大小相同。

当u=0,v=0时，

$$F(0,0)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$ 直流分量

$$\overline{f}(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$ 灰度平均值

$$F(0,0)=MN\,\overline{f}(x,y)$$

$$|F(0,0)|=MN\left|\overline{f}(x,y)\right|$$

- 原点(u, v)=(0, 0)处的频谱成分称为直流分量
- 由于MN很大，直流分量通常是频谱中的最大成分，可能比其它项大几个数量级。

二维离散傅里叶变换

二维DFT的定义

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N})+j\sin(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N})$$

对于每一对（u, v），F(u, v)的计算用到了所有的f(x, y)。

每一个频率分量所占能量情况

$$F(u,v)=R(u,v)+\mathrm{j}I(u,v)=|F(u,v)|\,e^{\mathrm{j}\,\varphi(u,v)}$$

$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$$ ——幅度谱，频谱

$$\phi(u,v)=\arctan[I(u,v)/R(u,v)]$$ ——相位谱

F(u, v)表示的是图像所有点在u, v频率上的强度。

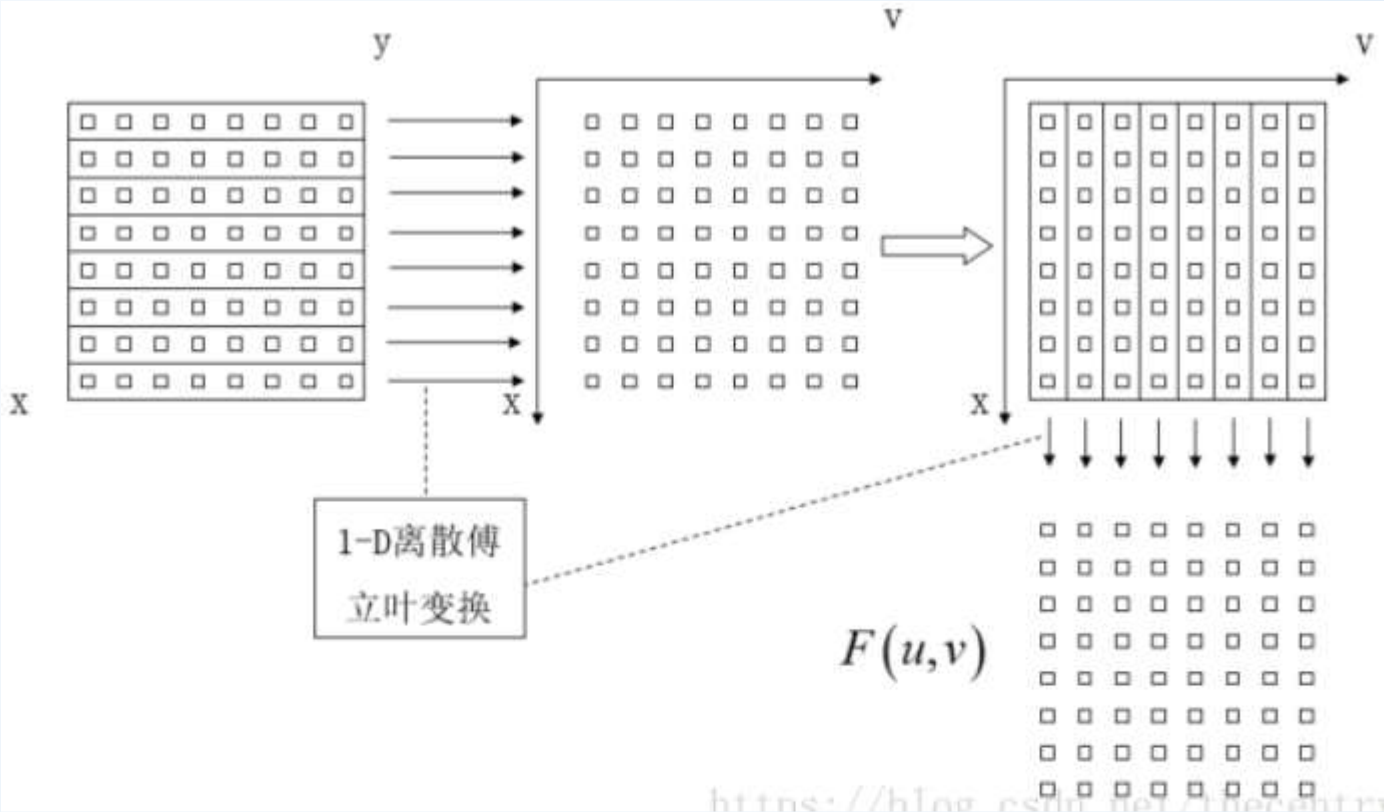
二维离散傅里叶变换

二维DFT的性质

可分离性

- 基本思想：二维DFT可分离为两次一维DFT
- 应用：通过计算两次一维FFT可实现二维快速傅立叶算法

- 计算过程示意图



二维离散傅里叶变换

二维DFT的性质

- □ 平移性

$$f(x,y)\leftrightarrow F(u,v)\Rightarrow\begin{cases} f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left[\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right]}\leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)\\ f(x-x_0,y-y_0)\leftrightarrow F(u,v)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}\end{cases}$$

a. 空间位移：

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)/N}$$

$$\left|F(u,v)e^{\left[-j2\pi(ux_0+vy_0)/N\right]}\right|=\left|F(u,v)\right|$$

当空域信号f(x, y)产生移动时，在频域中只发生相移，并不影其傅里叶变换的幅度

b. 频率位移：

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x+v_0y)/N}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

当频域信号F(u, v)产生移动时，在空域中只发生相移，并不影其反傅里叶变换的幅度

二维离散傅里叶变换

二维DFT的性质

□ 周期与共轭对称

周期性：离散傅里叶变换DFT和它的逆变换都以傅里叶变换的点数为周期的

$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$

$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$

共轭对称：傅立叶变换结果是以原点为中心的共轭对称函数

$$F(u,v)=F^{*}(-u,-v)$$

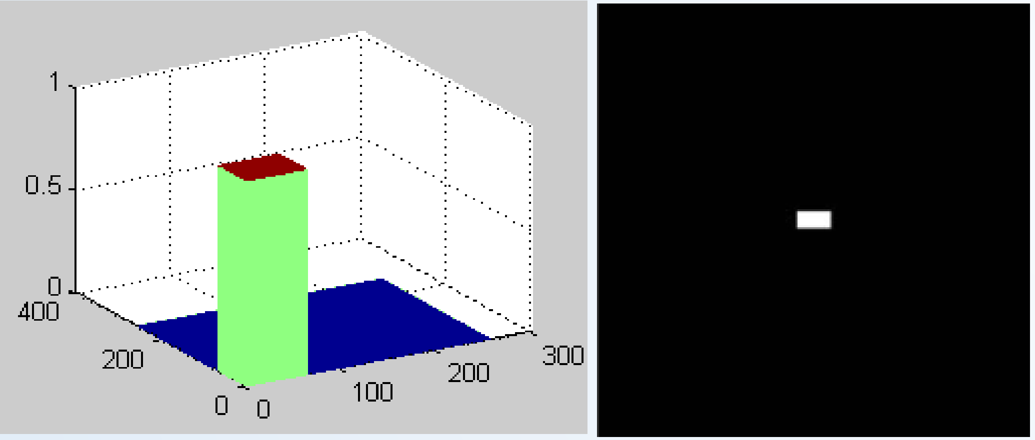
$$\left|F(u,v)\right|=\left|F^{*}(-u,-v)\right|$$

主要内容

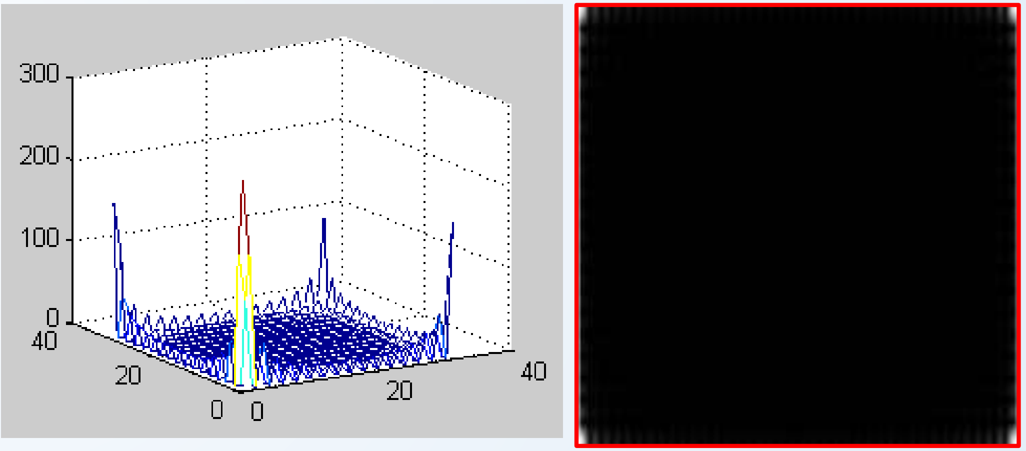
Main Content

图像频谱的解读

- **直观地分析一个变换的方法就是计算它的频谱，并将其显示为一幅图像。**
- **谱图像就是把|F(u,v)|作为亮度值显示出来。**



（a）　　原函数及其灰度图



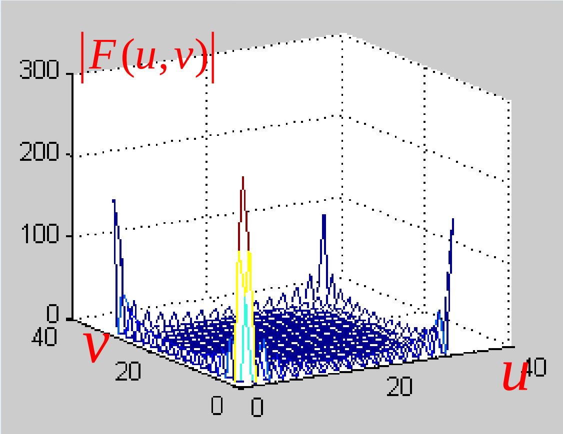
（b）二维DFT幅度图像及其灰度图

二维矩形窗的幅度谱

图像频谱的解读

二维离散傅里叶频谱图的解读

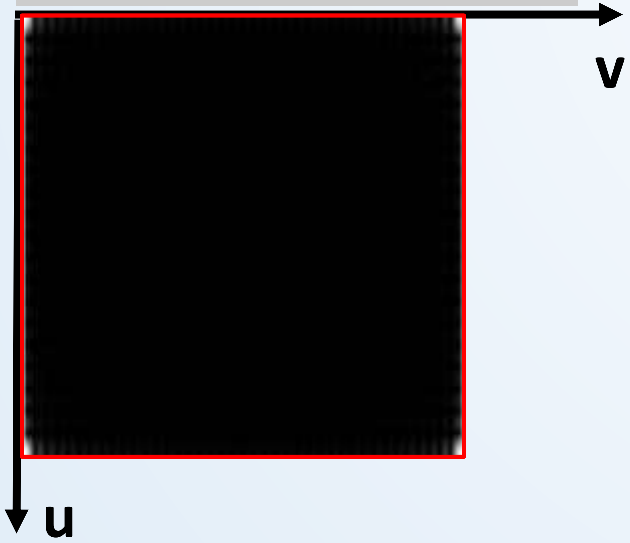
幅度频谱图



$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N}\right)+j\sin\left(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N}\right)$$

$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

幅度频谱灰度图

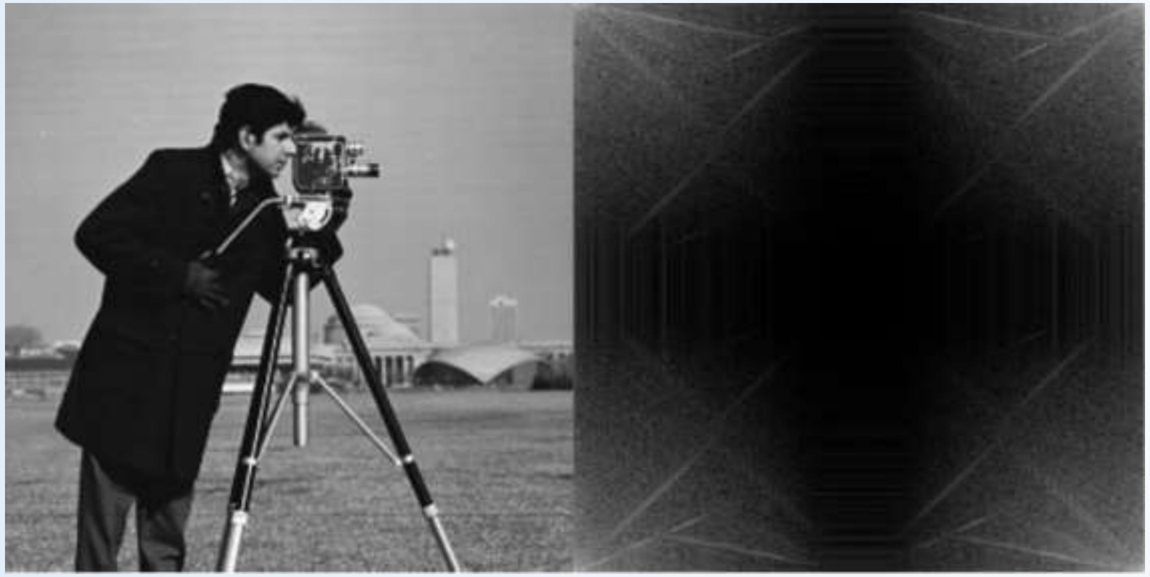


将频谱幅度映射到图像**灰度级范围**[0, 255]内，再以灰度图的方式表现出来。这是图像频谱图的常用方式。

注意：频谱图中4个角对应的幅度值最大

图像频谱的解读

为什么二维离散傅里叶频谱能量集中在四个角上？



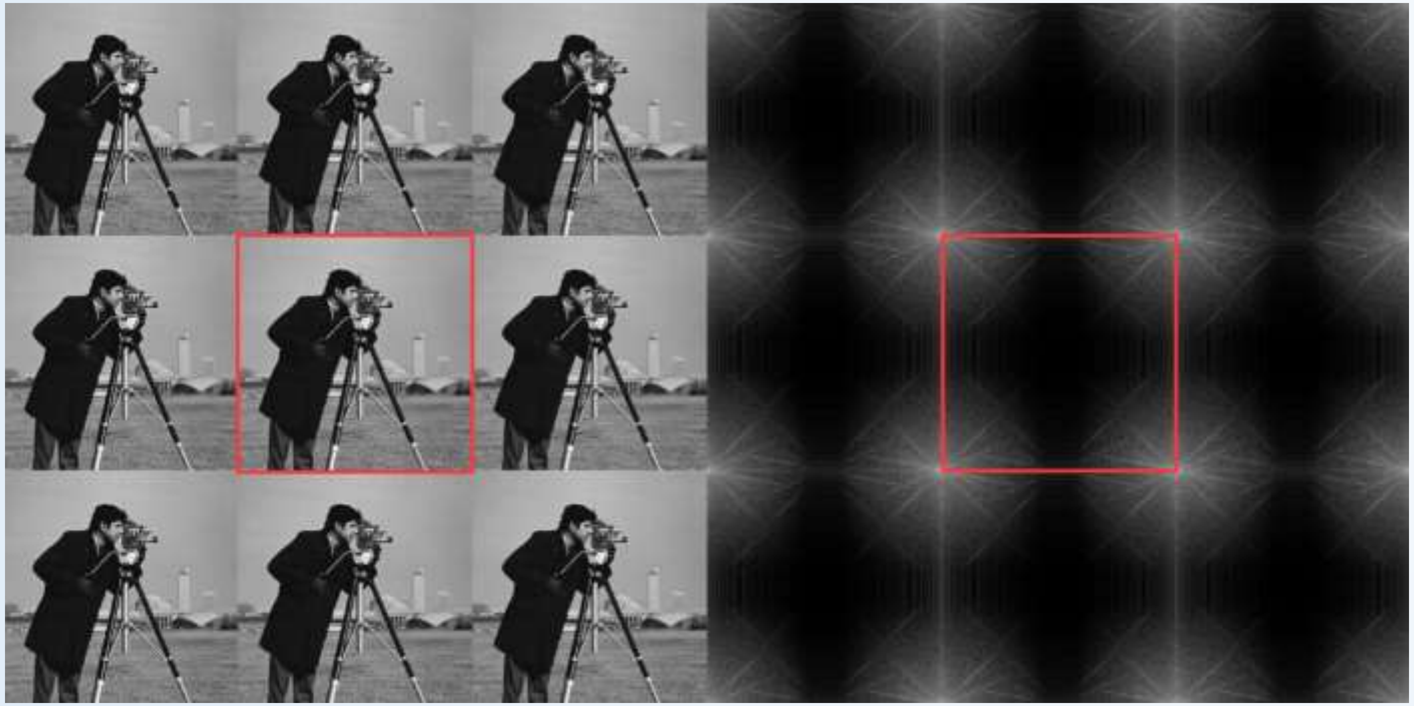
- 二维离散频谱图中各个点的亮度代表对应该点的频率成分的强度。
- 二维频谱图的四个角(0,0)，(M-1,0)，(0,N-1)，(M-1,N-1)是频率最低点，而**图像的主要能量集中在低频部分**，故这四个点的亮度最强。

◆事实上，离散傅里叶幅度谱沿u和v方向是分别关于M/2和N/2点对称的，频率先由低到高，再由高到低。这是由离散傅里叶变换的对称性决定的。

◆图像频谱图的**中心**处代表**频率最高**处。

图像频谱的解读

为什么二维离散傅里叶频谱图的四个角对应的频率最低？



- 二维DFT是将图像在x和y方向进行无限周期延拓，再对得到的周期信号计算离散傅里叶级数，最后从离散傅里叶级数中取一个周期。
- 离散傅里叶变换具有对称性。

图像频谱的解读

频谱的中心化

为了便于频域的滤波和频谱的分析，常常在变换之前进行频谱的中心化。所谓频谱中心化，是指将图像的频率最低点移到中心位置，从内至外，频率逐渐增大。

方法：

$$f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)} \leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

当 $u_0=\dfrac{M}{2}, v_0=\dfrac{N}{2}$

$$e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}=e^{j\pi(x+y)}=(-1)^{x+y}$$

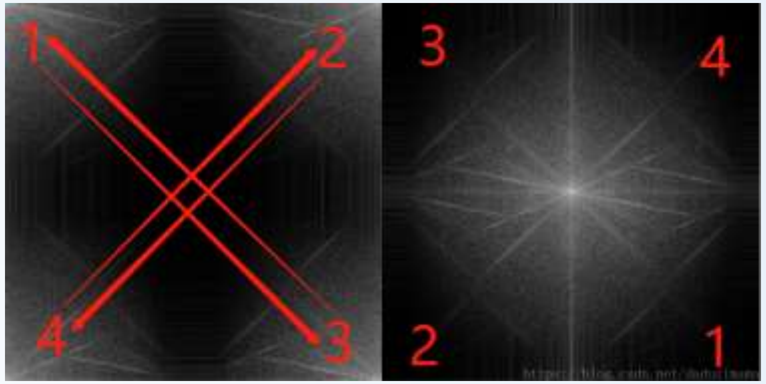
$$\Rightarrow f(x,y)\cdot(-1)^{x+y} \leftrightarrow F\left(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}\right)$$

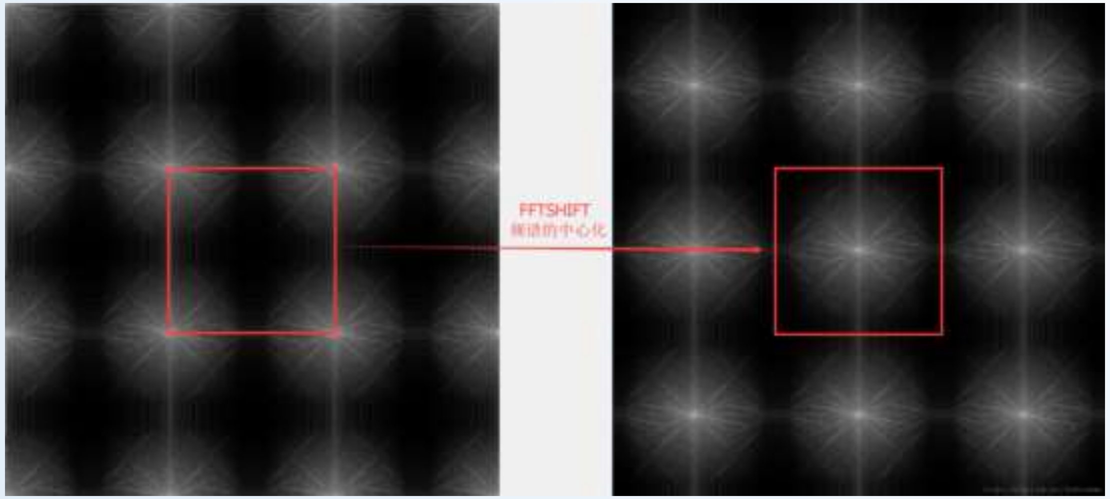
即如果需要将频域的坐标原点从显示屏起始点（0，0）移至中心点（M/2,N/2）处，只要将f(x,y)乘以(-1)$^{x+y}$因子再进行傅里叶变换即可实现。

图像频谱的解读

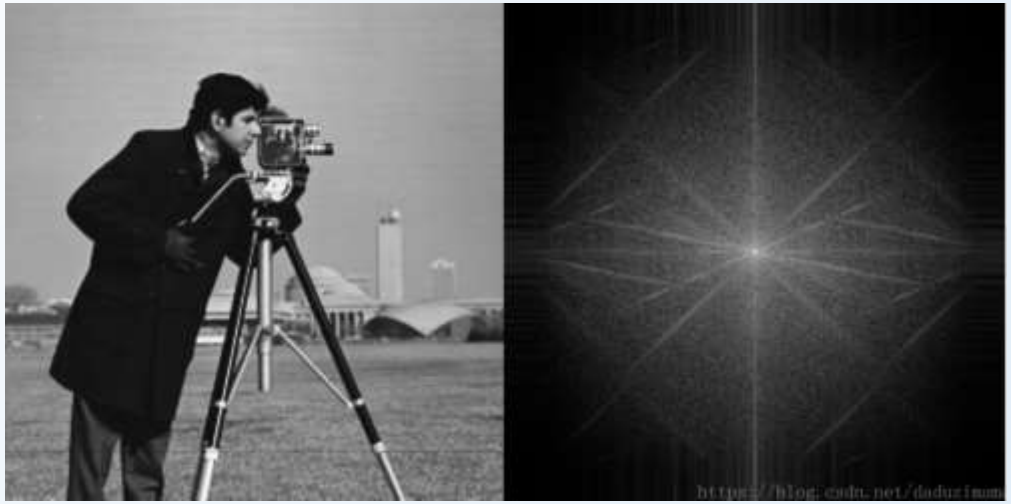
频谱的中心化

实现方法：把原始图像矩阵乘以 $(-1)^{x+y}$ ，就可实现频谱图4个象限的调换。





经过中心化后的频谱

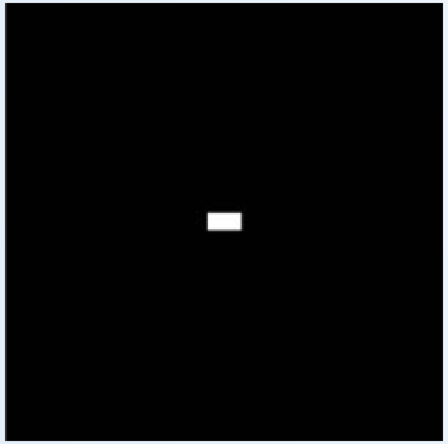


选择一个周期的频谱

图像频谱的解读

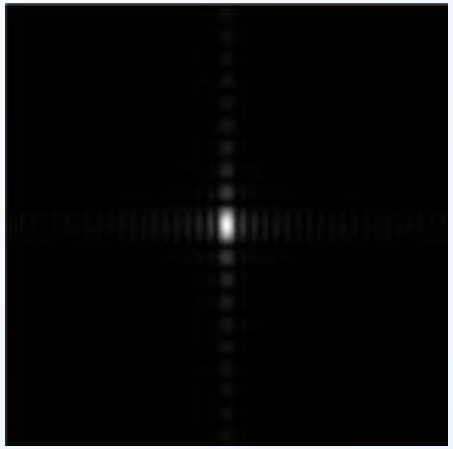
频谱的对数化

由于直流分量远大于其它频谱分量，在显示的频谱图像中，其它灰度的动态范围被压缩了。为了给出细节，对所有频谱幅度取**对数**。

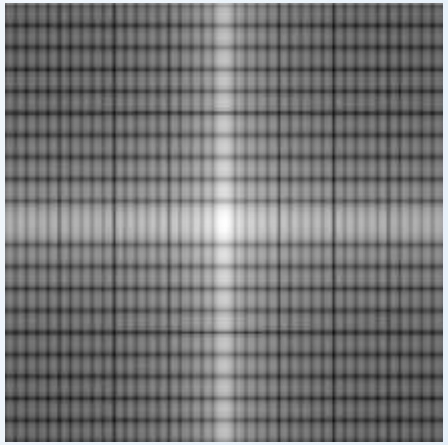


图像

原始频谱



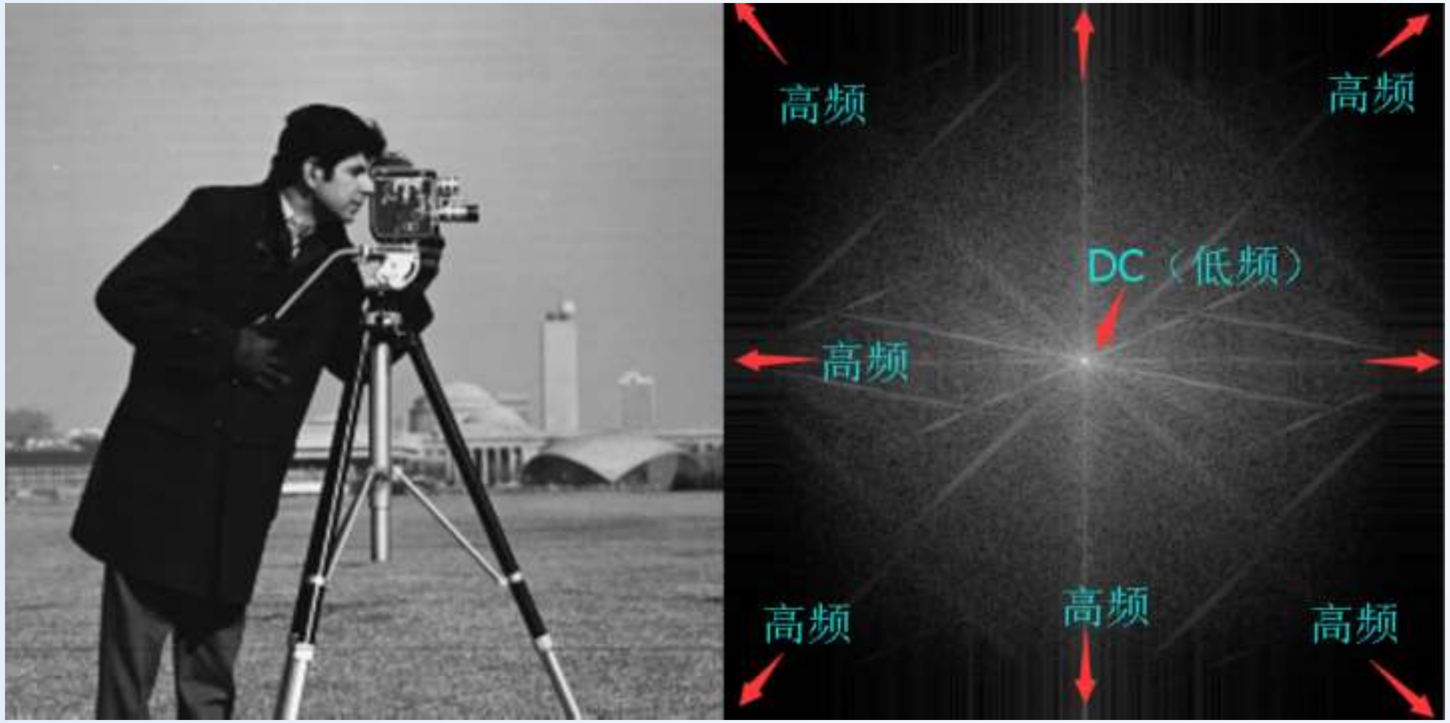
中心化后的频谱



对数化后的频谱

图像频谱的解读

高低频率的分布



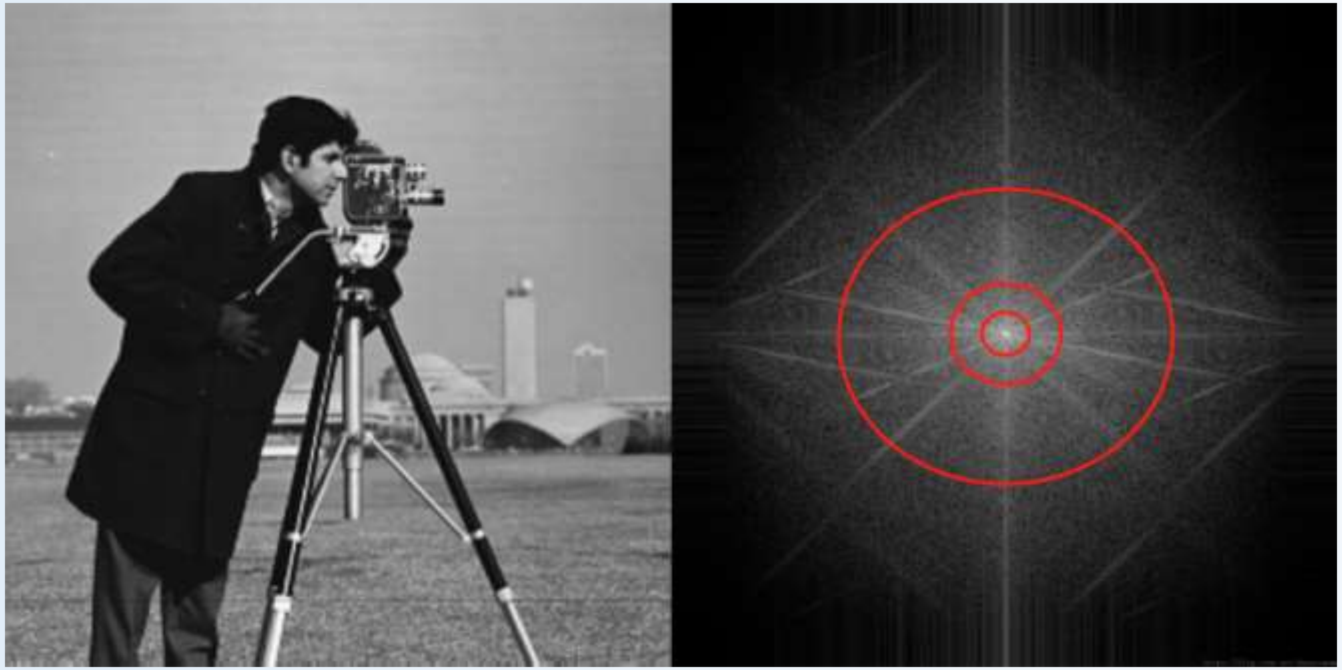
- 低频部分代表图像中灰度级变换平缓的部分，集中了大部分能量；
- 高频部分对应边缘和噪声等细节内容

图像频谱图的解读

高低频率的分布

图像频谱的解读

频谱能量分布



- 直流分量F(0, 0)所占能量最多。频率越高的部分，能量越少。
- 最小的圆圈内包含了大约85%的能量，中间圆圈包含了大约93%的能量，而最外面的圆圈则包含了约99%的能量。

图像频谱图的解读

纵横“交错”性

图像中的纵向线条或边界

体现在频谱的横轴方向

图像中的横向线条或边界

体现在频谱的纵轴方向

图像频谱的解读

纵横“交错”性

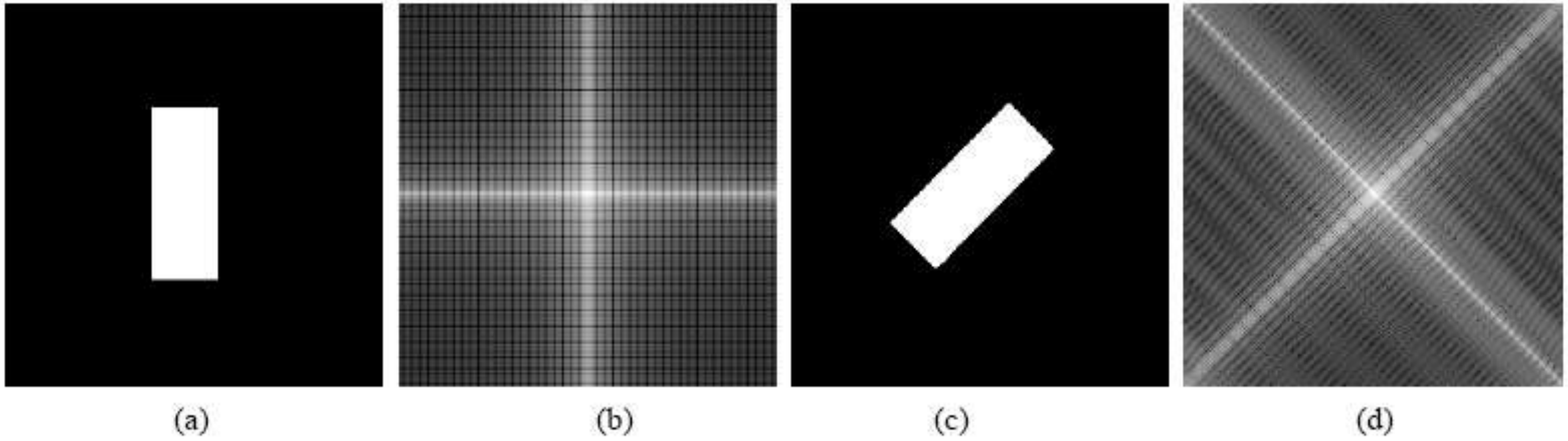
图像中的**纵向条纹**（水平正弦波），对应的频谱为**横轴方向**对称的一对频点

图像中的**水平条纹**（垂直正弦波），对应的频谱为**纵轴方向**对称的一对频点

图像频谱图的解读

频谱的旋转特性

旋转特性：对f (x, y) 旋转一定角度，相当于将其傅里叶变换F (u, v) 旋转一定角度



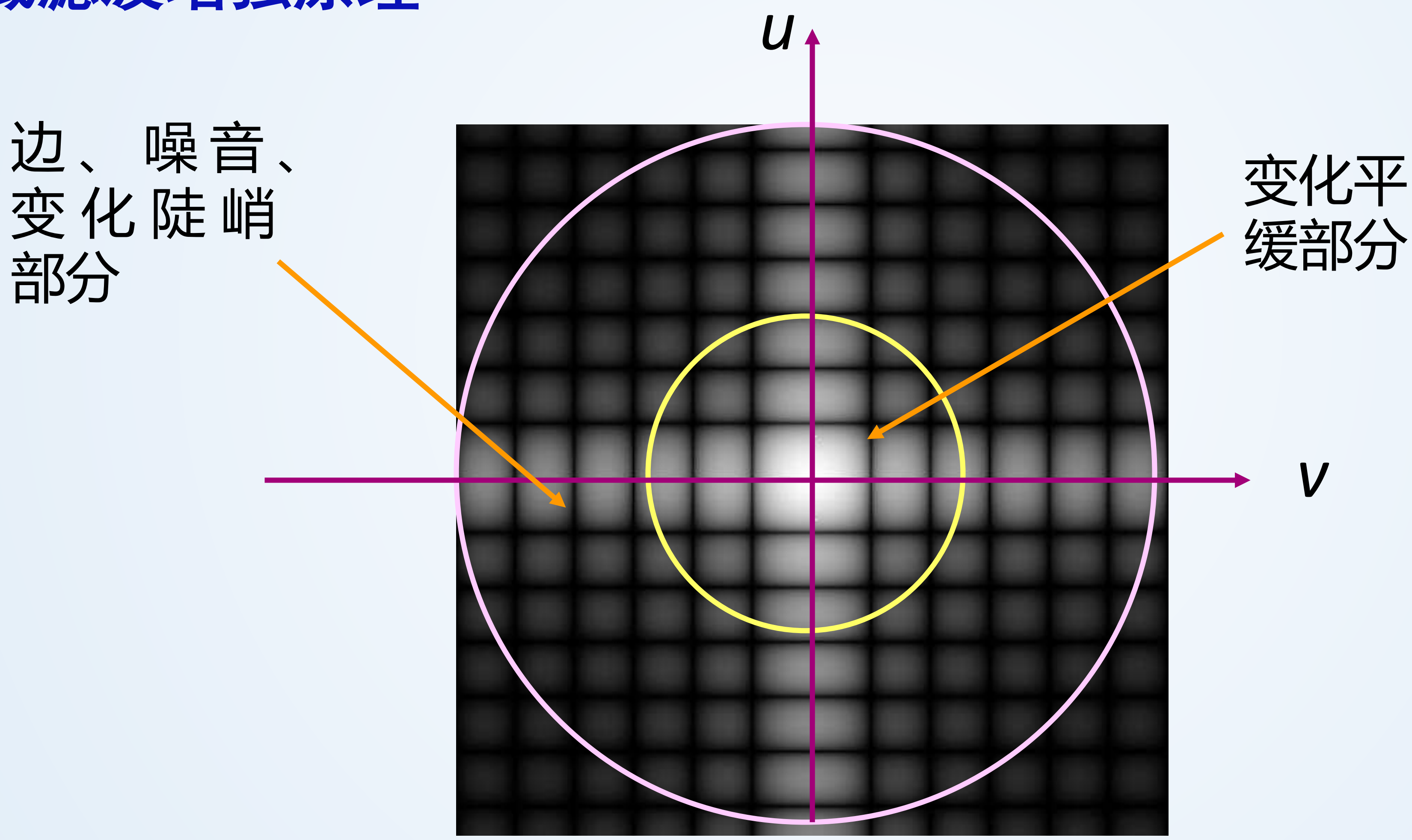
傅里叶变换旋转性质示例

主要内容

Main Content

频域滤波基础

频率域滤波增强原理



频域滤波基础

频域滤波增强的原理

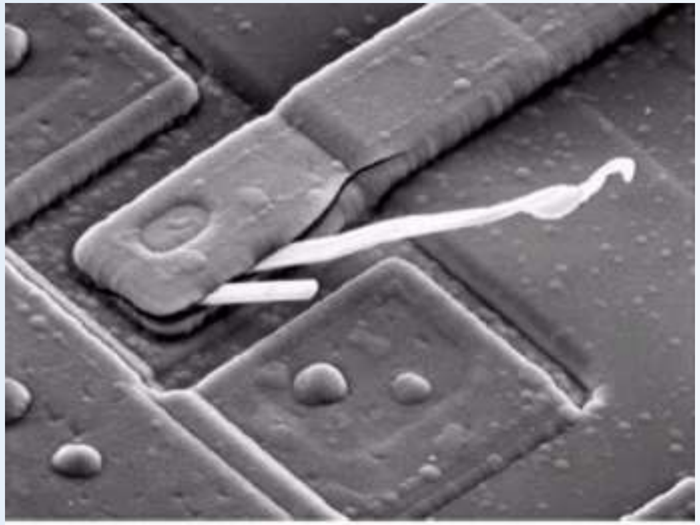
在频域空间，图像的信息表现为不同频率分量的组合。

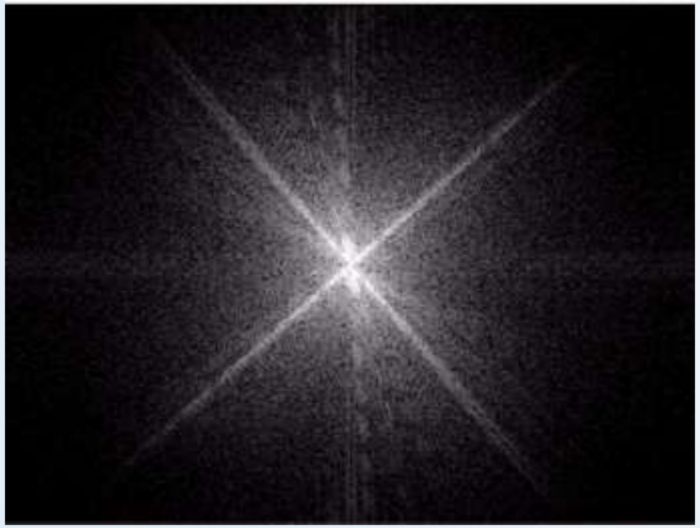
频谱图像|F(u,v)|特点：

- □ 低频部分集中了大部分能量
- □ 高频部分对应边缘和噪声等细节内容

- 频域增强是通过改变图像中不同频率分量来实现的。
- 频域增强的工具是频域滤波器，不同的滤波器滤除的频率和保留的频率不同，因而可获得不同的增强效果。

频域滤波基础





一般不可能建立图像特定分量和其变换之间的直接联系，但可以建立傅氏变换的频率与图像中的强度变化模式之间的联系。

- 频谱中45°方向的突出成分，对应于图像中-45°方向的“突起边缘”；
- 频谱中-45°方向的突出成分，对应于图像中45°方向的“突起边缘”；
- 频谱中稍微左偏垂直轴的突出成分，对应于图像中的白色凸起物

频域滤波基础

图像频域增强的一般步骤

- ◆ 将图像从图像空间转换到频域空间（如傅里叶变换）
  - ✓ 计算图像的傅立叶变换
- ◆ 通过频域滤波方法对图像进行增强
  - ✓ 将图像的傅里叶谱与频域滤波器相乘
- ◆ 将增强后的图像从频域空间转换到图像空间
  - ✓ 进行傅立叶反变换

图像的频率域增强

图像频域增强的一般步骤

$$f(x,y): N\times N$$
$$\downarrow$$
$$F(u,v): N\times N$$
$$\downarrow$$
$$H(u,v): N\times N$$
$$\downarrow$$
$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$
$$\downarrow$$
$$g(x,y): N\times N$$

- f (x,y)、h (x,y)均补零扩充为P×Q，
- P=2N-1;　Q=2N-1.

频域内的卷积等价于时域内的乘积，即：两个时域信号做卷积，其结果等于它们各自的频域信号相乘后再变换到时域。

- 图像进行傅立叶变换，需将其看作周期函数的一个周期；
- 周期函数进行卷积，为避免周期折叠误差，需对函数进行补零扩展。

频域滤波分类：

- □ 低通滤波，高通滤波，带通和带阻滤波，同态滤波

频域滤波基础

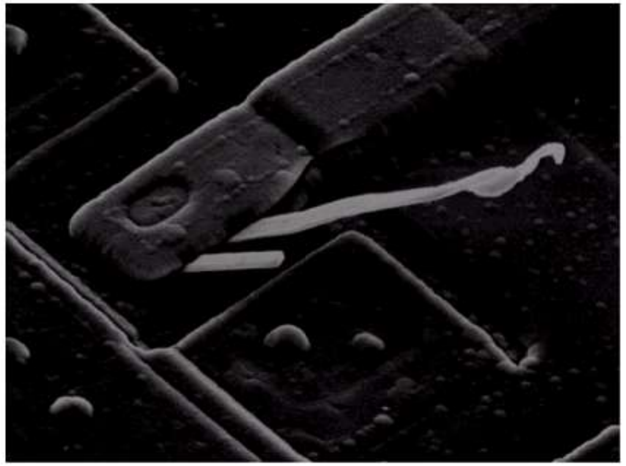
基本的滤波器

陷波滤波器：

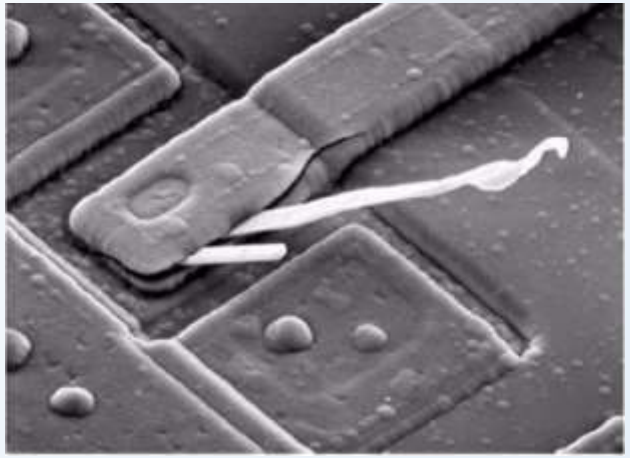
$F(0,0)$ →平均值

如果想使其平均灰度为0，则可： $H(u,v)=\begin{cases}0 & (u,v)=(\frac{M}{2},\frac{N}{2})\\ 1 & 其它\end{cases}$

FIGURE 4.6 Result of filtering the image in Fig. 4.4(a) with a notch filter that set to 0 the $F(0,0)$ term in the Fourier transform.



陷波滤波后的图像

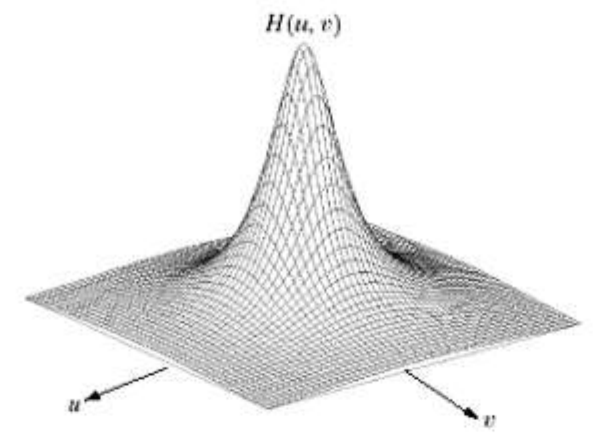


原始图像

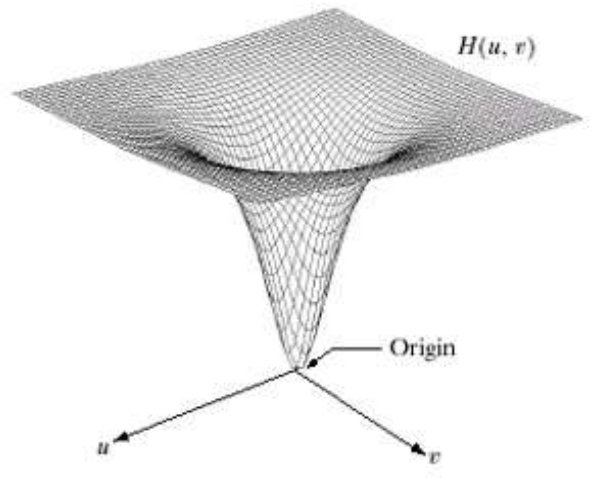
频域滤波基础

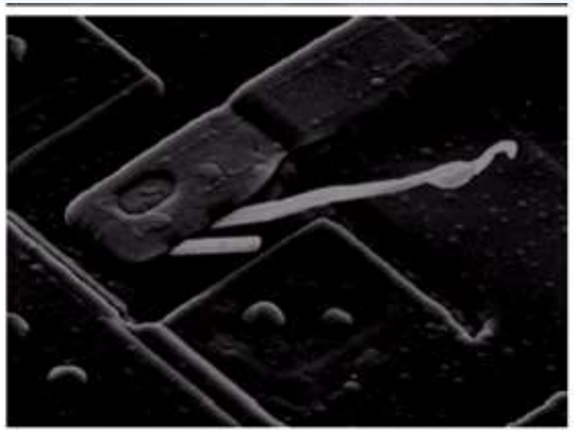
基本的滤波器

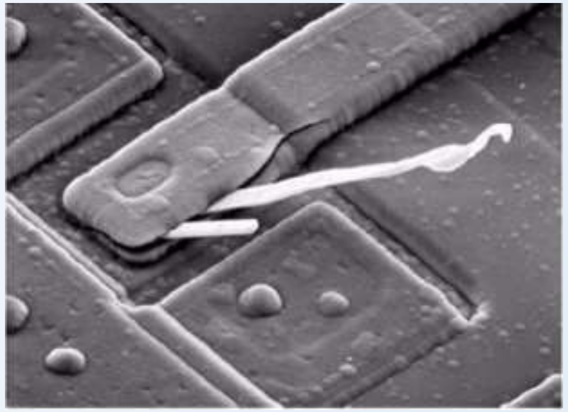
低通滤波器：



高通滤波器：







原始图像

武汉大学

Wuhan University

谢谢！

2018.10.10.