第一章习题练习

1.29 设随机变量 $X \sim \chi^2(n)$，当 n 较大时，近似地有

$\sqrt{2X} \sim N(\sqrt{2n-1},1)$，用该结论证明近似计算公式（1.9）：

$$\chi_p^2(n) \approx \frac{1}{2}(u_p + \sqrt{2n-1})^2.$$

证明：记$Y=\sqrt{2X}$，则$Y-\sqrt{2n-1}\dot{\sim} N(0,1)$

$$P(X\le \chi_p^2(n))=p \Leftrightarrow P(\frac{1}{2}Y^2\le \chi_p^2(n))=p \Leftrightarrow P(0<Y\le \sqrt{2\chi_p^2(n)})=p$$

$$\Leftrightarrow P(Y-\sqrt{2n-1}\le \sqrt{2\chi_p^2(n)}-\sqrt{2n-1})=p,$$

所以$\sqrt{2\chi_p^2(n)}-\sqrt{2n-1}\approx u_p$，即$\chi_p^2(n)\approx \frac{1}{2}(u_p+\sqrt{2n-1})^2$.

1.30 试求下列分布的中位数：（1）指数分布 $E(\lambda)$;

（2）正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$;（3）柯西分布，它的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-\theta)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<\theta<+\infty.$$

解：即要求满足 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ 的值 a.

（1）$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{a} = 1 - e^{-\lambda a} \Rightarrow a = \frac{\ln 2}{\lambda}$;

（2）$\frac{1}{2} = P(X \le a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}) \Rightarrow \frac{a-\mu}{\sigma} = 0 \Rightarrow a = \mu$;

（3）$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\theta)^2}\mathrm{d}x \overset{x-\theta=t}{=} \int_{-\infty}^{a-\theta} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}$

$= \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(a-\theta) + \frac{1}{2} \Rightarrow \arctan(a-\theta) = 0 \Rightarrow a = \theta$.

1.24 设随机变量 X 服从 Γ 分布 $G(a,b)$，它的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-ax}, & x>0,\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$ 其中 $a,b>0$.

试证（1）指数分布 $E(\lambda)$ 恰是 Γ 分布 $G(\lambda,1)$；（2）χ^2 分布 $\chi^2(n)$ 恰是 Γ 分布 $G(\frac{1}{2},\frac{n}{2})$；（3）对任意一个 $r>-b$，$E(X^r)=\dfrac{\Gamma(b+r)}{a^r\Gamma(b)}$；（4）$\Gamma$ 分布具有可加性，即当 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim G(a,b_1)$，$Y\sim G(a,b_2)$ 时，$X+Y\sim G(a,b_1+b_2)$.

证明：（1） $x>0$ 时， $G(\lambda,1)$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{\lambda^{1}}{\Gamma(1)}x^{1-1}e^{-\lambda x}=\lambda e^{-\lambda x},\Gamma(1)=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1$$ ，即得.

（2） $x>0$ 时， $G(\frac{1}{2},\frac{n}{2})$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$ ，即得.

（3） $E(X^r)=\int_0^{\infty} x^r\cdot\frac{a^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{a^b}{\Gamma(b)}\int_0^{\infty}x^{b+r-1}e^{-ax}\mathrm{d}x$

$$\overset{ax=t}{=}\frac{a^b}{\Gamma(b)}\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{a}\right)^{b+r-1}e^{-t}\frac{1}{a}\mathrm{dt}$$

$$=\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{b+r}\int_0^{\infty}t^{b+r-1}e^{-t}\mathrm{dt}=\frac{1}{a^r\Gamma(b)}\Gamma(b+r)$$，即证.

（4）由卷积公式， $Z=X+Y$ 在 $z>0$ 处的密度函数为

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z\frac{a^{b_1}}{\Gamma(b_1)}x^{b_1-1}e^{-ax}\cdot\frac{a^{b_2}}{\Gamma(b_2)}(z-x)^{b_2-1}e^{-a(z-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^{b_1}}{\Gamma(b_1)}\cdot\frac{a^{b_2}}{\Gamma(b_2)}\cdot e^{-az}\int_0^z x^{b_1-1}(z-x)^{b_2-1}\mathrm{d}x\overset{x=zt}{=}\frac{a^{b_1}}{\Gamma(b_1)}\cdot\frac{a^{b_2}}{\Gamma(b_2)}\cdot e^{-az}\int_0^1(zt)^{b_1-1}(z-zt)^{b_2-1}z\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^{b_1}}{\Gamma(b_1)}\cdot\frac{a^{b_2}}{\Gamma(b_2)}\cdot e^{-az}\cdot z^{b_1+b_2-1}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{b_2-1}\mathrm{d}t=\frac{a^{b_1}}{\Gamma(b_1)}\cdot\frac{a^{b_2}}{\Gamma(b_2)}\cdot e^{-az}\cdot z^{b_1+b_2-1}\cdot B(b_1,b_2)$$

$$=\frac{a^{b_1+b_2}}{\Gamma(b_1+b_2)}\cdot z^{b_1+b_2-1}\cdot e^{-az}$$，即证.

1.25 利用习题 1.24 证明：（1）当 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 时，$E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n$；（2）$\chi^2$ 分布具有可加性；（3）当 $F \sim F(m,n)$ 时，$E(F)=\dfrac{n}{n-2}(n>2)$，$D(F)=\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\ (n>4)$；（4）当 $T \sim t(n)$ 时，$D(T)=\dfrac{n}{n-2}(n>2)$.

解：（1）已知结论： $\chi^2 \sim \chi^2(n) = G(a,b), a = \frac{1}{2}, b = \frac{n}{2}, E(X^r) = \frac{\Gamma(b+r)}{a^r\Gamma(b)}(r > -b)$

故 $E(\chi^2) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = n, E[(\chi^2)^2] = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+2)}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{(\frac{n}{2}+1)\cdot(\frac{n}{2})\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{n}{2})} = n^2 + 2n$

$\Rightarrow D(\chi^2) = E[(\chi^2)^2] - E^2(\chi^2) = 2n$.

（2）设 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，则有 $X \sim G(\frac{1}{2}, \frac{m}{2}), Y \sim G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$.

由伽马分布可加性即知 $X + Y \sim G(\frac{1}{2}, \frac{m+n}{2})$，即 $X + Y \sim \chi^2(m+n)$.

（3）设 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，则 $F \triangleq \dfrac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \sim F(m,n)$，故

$$E(F)=\frac{n}{m}E(\frac{X}{Y})=\frac{n}{m}E(X\cdot\frac{1}{Y})=\frac{n}{m}E(X)\cdot E(Y^{-1})=\frac{n}{m}\cdot m\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{(\frac{1}{2})^{-1}\Gamma(\frac{n}{2})}=\frac{n}{2(\frac{n}{2}-1)}=\frac{n}{n-2}$$

$$E(F^2)=(\frac{n}{m})^2E(\frac{X^2}{Y^2})=\frac{n^2}{m^2}E(X^2)\cdot E(Y^{-2})=\frac{n^2}{m^2}\cdot(2m+m^2)\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-2)}{(\frac{1}{2})^{-2}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$=\frac{n^2(2+m)}{m}\cdot\frac{1}{4(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)}=\frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)}$$

故 $D(F)=\dfrac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)}-(\dfrac{n}{n-2})^2=\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$.

（4）已知 $T\sim t(n),T^2\sim F(1,n)$ ，且 t-分布对称，故

$$E(T)=0,D(T)=E(T^2)=E(F(1,n))=\frac{n}{(n-2)}.$$

1.16 设$(X_1,\cdots,X_n)$是取自某总体的一个样本，总体分布为威布尔(Weibull)分布$W(\alpha,\beta)$，它的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp\{-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}\}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

. 其中$\alpha,\beta>0$.（通常称α为尺度参数，称β为形状参数）试证：最小次序统计量$X_{(1)}$服从尺度参数为$\alpha n^{-\frac{1}{\beta}}$、形状参数仍为$\beta$的威布尔分布$W(\alpha n^{-\frac{1}{\beta}},\beta)$.

解：当 $x \geq 0$ 时，最小次序统计量的分布函数为

$$X_{(1)} \sim F_1^*(x) = 1 - [\exp\{-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}\}]^n = 1 - \exp\{-n(\frac{x}{\alpha})^{\beta}\},$$

$$= 1 - \exp\{-(\frac{x}{\alpha n^{-\frac{1}{\beta}}})^{\beta}\}$$，比较威布尔分布即得结论.