概率论知识复习

六、协方差与相关系数

1.协方差定义　称 $\mathrm{cov}(X,Y) \triangleq E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

为随机变量 X 与 Y 的协方差. 且有下列结论:

(1) $\mathrm{cov}(X,X) = D(X)$;

(2) $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$;

(3) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$;

$D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \pm 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$.

(4)当 X 与 Y 相互独立时, 有 $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

协方差性质　(1) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$;

(2) $\mathrm{cov}(X,c) = 0$; (3) $\mathrm{cov}(kX,lY) = kl\,\mathrm{cov}(X,Y)$;

(4) $\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, Y_j)$.

2.相关系数定义 称 $\rho(X,Y) \triangleq \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}$ 为随机变量 X 与 Y 的相关系数，当 $D(X)>0, D(Y)>0$ 时.

相关系数性质 当 $D(X)>0, D(Y)>0$ 时，

(1) $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$； (2) $|\rho(X,Y)|\le 1$；

(3) $|\rho(X,Y)|=1$ 的充要条件是：存在常数 $k\neq 0, c$，使得 $P(Y=kX+c)=1$. 即 X 与 Y 以概率1存在线性关系.

例　设随机变量 X 和 Y 满足 $2X+3Y=5$，印证性质(3).

解 $Y=-\frac{2}{3}X+\frac{5}{3}\Rightarrow D(Y)=\frac{4}{9}D(X), E(Y)=-\frac{2}{3}E(X)+\frac{5}{3};$

故 $E(X)E(Y)=-\frac{2}{3}E^2(X)+\frac{5}{3}E(X).$

又 $E(XY)=E(-\frac{2}{3}X^2+\frac{5}{3}X)=-\frac{2}{3}E(X^2)+\frac{5}{3}E(X),$

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=-\frac{2}{3}E(X^2)+\frac{2}{3}E^2(X)$

$$=-\frac{2}{3}\{E(X^2)-E^2(X)\}=-\frac{2}{3}D(X)$$

所以 $\rho(X,Y)=\dfrac{-\frac{2}{3}D(X)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}D(X)}}=-1.$

若随机变量 X 和 Y 满足 $Y=aX+b(a\neq 0)$，则有 $\rho=\frac{a}{|a|}$.

当 $\rho(X,Y)=0$ 时，称 X 与 Y 不相关.

定理　如果 X 与 Y 相互独立，那么 X 与 Y 必定不相关；反之则不一定成立，但其逆否命题一定成立，即

如果 X 与 Y 相关，则它们一定不独立.

定理　如果 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 与 Y 相互独立等价于 X 与 Y 不相关.