概率论知识复习

三、主要数字特征及其性质

数学期望及性质

定义　设离散型随机变量 X 的概率函数为

$P(X=a_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots$，当级数 $\sum_i a_i p_i$ 绝对收敛时，

称 $E(X)\triangleq\sum_i a_i p_i$ 为随机变量 X 的**数学期望** **(**或均值) .

常见离散型分布的期望:

(1) 若 $X\sim B(1,p)$，则 $E(X)=p$；

(2) 若 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$；

(3) 若 $X\sim P(\lambda)$，则 $E(X)=\lambda$；

定义　设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$,

当积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时, 称 $E(X) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

为随机变量 X 的**数学期望**.

常见连续型分布的期望:

(1) 若 $X \sim R(a,b)$, 则 $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$;

(2) 若 $X \sim E(\lambda)$, 则 $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$;

(3) 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$.

设随机变量 $Y=g(X)$ 是随机变量 X 的函数，则

(1) X 为离散型随机变量且概率函数为 $P(X=a_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots$，则有 $E(Y)=\sum_i g(a_i)p_i$；

(2) X 为连续型随机变量且 $f(x), x\in R$ 为其相应的密度函数，则有 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$.

例 设连续型随机变量 $X \sim f(x)=\begin{cases}4x^2 e^{-2x}, & x>0, \\ 0, & x \le 0.\end{cases}$

试求 $Y=\dfrac{1}{X}$ 的数学期望 $E(\dfrac{1}{X})$.

解 $E(\dfrac{1}{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot 4x^2 e^{-2x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}4x e^{-2x}\mathrm{d}x=2\underline{\int_0^{+\infty}x\cdot 2e^{-2x}\mathrm{d}x}=2\times\frac{1}{2}=1$$

设 $T \sim E(2)$，则 $E(T)=\int_0^{+\infty}t\cdot 2e^{-2t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}$.

期望的性质　设 $k_i,(i=1,2,\cdots,n),c$ 都是常数，则

(1)设随机变量 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则有 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$；

(2)设随机变量 $Y=\sum_{i=1}^{n}k_iX_i+c$，则 $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}k_iE(X_i)+c$.

(3)设 $r.v.\ X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $E(\Pi_{i=1}^{n}X_i)=\Pi_{i=1}^{n}E(X_i)$.

方差及性质

定义　设 X 是一个随机变量，称 $D(X) \triangleq E\{[X-E(X)]^2\}$ 为随机变量 X 的方差，而称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的标准差.

计算时常用公式 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$.

常见分布的方差:

(1) 若 $X \sim B(1,p)$，则 $D(X)=p(1-p)$;

(2) 若 $X \sim B(n,p)$，则 $D(X)=np(1-p)$;

(3) 若 $X \sim P(\lambda)$，则 $D(X)=\lambda$;

(4) 若 $X \sim R(a,b)$，则 $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

(5) 若 $X \sim E(\lambda)$，则 $D(X)=\lambda^{-2}$;

(6) 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $D(X)=\sigma^2$.

例　设随机变量 X 服从区间 $(-a,a), a>0$ 上的均匀分布，且 $P(X>1)=\dfrac{1}{3}$，试计算方差 $D(X)$.

解　由题意知 $\dfrac{1}{3}=P(X>1)=\displaystyle\int_1^a \frac{1}{2a}\mathrm{d}x=\frac{a-1}{2a}=\frac{1}{3}$，

解得 $a=3$ 即 $X\sim R(-3,3)$，故 $D(X)=\dfrac{6^2}{12}=3.$

例　　设 $X \sim f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-3x}, & x>0, \\ 0, & \text{其余}. \end{cases}$，求 $E(X)$.

解　记 $Y \sim E(3)$，则 $E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=\dfrac{2}{9}$，所以

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} x^2\cdot 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\times E(Y^2)=\frac{2}{27}.$$

方差性质　设k,l及c都是常数，则有

(1) $D(c)=0$. 反之，若$D(X)=0$，则有$P(X=E(X))=1$；

(2) $D(kX+c)=k^2D(X)$；

(3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$；

(4) 当X与Y相互独立时，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

推广　若$r.v.X_1,\cdots,X_n$相互独立，则$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$.

例　设 X,Y 相互独立，且 $X \sim N(1,4), Y \sim N(0,1)$，试求

(1) $E(X-2Y), D(X-2Y)$；(2) $Z = X-2Y$ 的概率密度函数.

解　由题设条件即得 $E(X-2Y) = E(X) - 2E(Y) = 1$，

$$D(X-2Y) = D(X) + 4D(Y) = 4+4 = 8;$$

由正态分布可加性知 $Z = X-2Y \sim N(1,8)$，

其概率密度函数为 $f_Z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{8}} e^{-\frac{(z-1)^2}{2\times 8}}, -\infty < z < +\infty.$