概率论知识复习

四、随机变量函数的分布计算

问题　已知随机变量 X 的密度函数 $f(x)$，求 $Y=g(X)$ 的密度函数或分布函数.

主要步骤:

(1)在自变量取值范围内求分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)$;

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\in S_y)$$

$$=\int_{S_y} f(x)\mathrm{d}x=h(y),$$

(2)对自变量求导即得 Y 的密度函数 $f_Y(y)=F_Y'(y)=h'(y)$.

(3)由密度函数或分布函数特点写出完整表达.

卷积公式　设连续型随机变量 X 与Y 相互独立，且已知 $X \sim f_X(x), Y \sim f_Y(y)$. 则 $Z = X + Y$ 的概率密度函数为 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$. ——称为卷积公式.

概率论知识复习

五、二维随机变量分布概念

如果一个二维随机向量只可能取有限个或可列个值，则称其为二维离散型随机向量.

设(X,Y)的值域为 $\Omega_{(X,Y)}=\{(a_i,b_j),i,j=1,2,\cdots\}$，称

$$P(X=a_i,Y=b_j)\triangleq P(\{X=a_i\}\cap\{Y=b_j\})\triangleq p_{ij}$$

$$i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots$$

为二维随机向量(X,Y)的联合概率函数或联合分布律.

其中 p_{ij} 需满足下列条件：(1) $p_{ij}\geq 0$; (2) $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$.

也可用表格形式表示

$X \backslash Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	
a_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

其中 $P(X=a_i)\hat{=}\, p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij},\ P(Y=b_i)\hat{=}\, p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$

相互独立性　设随机变量 X 与 Y 的联合概率函数为

$$P(X=a_i, Y=b_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$$

如果等式 $p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}$ 对所有的 $i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$ 都成立，则称随机变量 X 与 Y 是相互独立的.

上述等式即 $P(X=a_i, Y=b_j)=P(X=a_i)\times P(Y=b_j)$

独立性意味着在下表中，交叉点的元素 p_{ij} 是下标所对应的行和与列和 (分别是两个边缘概率函数值) 的乘积.

$X \backslash Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	$\underline{p_{ij}}$	$\cdots$	$\underline{p_{i\cdot}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\underline{p_{\cdot j}}$	$\cdots$