**3.2** 设是取自正态总体的一个样本，其中未知，已知. 要检验. 试证: 以为拒绝域的检验满足显著性水平为的要求.

证： 在原假设成立时， ——4分

故检验的一类风险为

，即证.——6分

**3.16** 设总体,其中未知，. 是取自这个总体的一个大小为5的样本. 要检验 . 试求拒绝域为的一个检验的两类风险.

解：Ⅰ类风险

； ——5分

Ⅱ类风险

. ——5分

**3.17** 设是取自正态总体的一个样本，其中未知，；要检验. 在显著性水平下，我们采用拒绝域为的检验.（1）试求这个检验的功效函数；（2）试证是的单调减少函数且；（3）当时，如果要求时这个检验的类风险不超过0.05，那么样本大小n至少该多大？

解：由抽样分布知，——2分

故（1）检验的功效函数

；

——4分

（2）易知该功效函数关于递减，且；

——2分

（3）时，——2分

故检验的Ⅱ类风险即，由



故取. ——4分

**3.18** 设是取自正态总体的一个样本，其中未知，. 要检验. 在显著性水平下，我们采用拒绝域为的检验. （1）试求这个检验的功效函数；（2）试证是偶函数且在处取最小值.

解：由抽样分布知，故

（1）检验的功效函数







 ——4分

（2）显然，且

又

即，又



，

因此是偶函数且在处取得最小值. ——6分

**3.20** 试证，在显著性水平下，习题3.17中给出的检验是一致最大功效检验.

证明：（1）首先考虑简单假设检验问题

似然比为

，

令，在原假设成立时，因此，即

，故以为拒绝域的检验是该简单假设检验问题的最大功效检验；

（2）考虑下列假设检验问题

因为上述拒绝域的取值范围和无关，所以对任意的，以此作为拒绝域的检验是假设问题（2）的显著性水平下的一致最大功效检验；

（3）回到原假设检验问题

首先证明拒绝域也是这个假设检验问题的一个显著性水平为的检验，即要证明该检验满足显著性水平的要求： ——①

在原假设成立时，因此

，即证；

（4）记上述检验为，现在假设是假设检验问题（3）的任意一个显著性水平为的检验，则因为原假设包含了，故也是假设检验问题（2）下的一个检验，由（2）中证明即知，对任意，是一致最大功效检验，即 ——②

综合①②即知以为拒绝域的检验是原始假设检验问题在显著性水平下的一致最大功效检验.

**3.21** 设是取自正态总体的一个样本，其中未知， 试证，对于假设检验问题，拒绝域为

的检验在显著性水平下是一致最大功效检验.

证明：（1）首先考虑简单假设检验问题

似然比为，

，

令，在原假设成立时，因此，

故以为拒绝域的检验是这个简单假设检验问题的最大功效检验.

（2）考虑下列假设检验问题

因为上述拒绝域的取值范围和无关，所以对任意的，以此作为拒绝域的检验是假设问题（2）的显著性水平下的一致最大功效检验；

（3）回到原假设检验问题

首先证明拒绝域也是这个假设检验问题的一个显著性水平为的检验，即要证明该检验满足显著性水平的要求：.①

在原假设成立时，，又因为，

故

即证；

（4）假设是假设检验问题（3）的任意一个显著性水平为的检验，则因为原假设包含了，故也是假设检验问题（2）下的一个检验，由（2）中证明即知，对任意，是一致最大功效检验，即②

综合①②即知以为拒绝域的检验是原始假设检验问题在显著性水平下的一致最大功效检验.