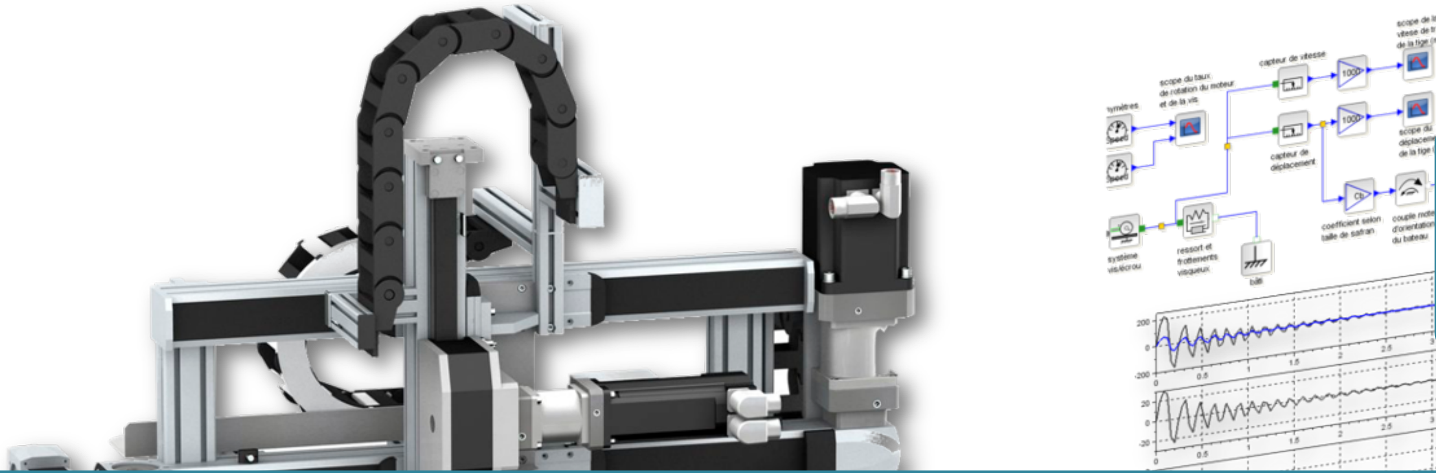

PTSI

Partie 2

http://www.schneider-electric.fr/ - Lexium Max

Découverte des Systèmes Linéaires Continus et Invariants
Analyse, Modélisation, Résolution

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

Chapitre 2
Comléments : Transformée de Laplace, Décomposition en éléments simples

Xavier Pessoles
PTSI

Préliminaire

Le but de ce document n'est pas de se substituer à un cours de mathématiques mais de fournir quelques techniques de calcul pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

R

1. Dans les fonctions que nous utiliserons, le degré du numérateur sera toujours inférieur ou égal au degré du numérateur : $N(p) \leq D(p)$.
2. On appelle **pôles** d'une fonction rationnelle les racines du dénominateur. On appelle **zéros** d'une fonction rationnelle les racines du numérateur.
3. Le numérateur sera un produit de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2.

1 Cas d'une fonction avec des pôles réels simples – $deg(N(p)) < deg(D(p))$

Résultat Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)\cdots(p-p_n)}$$

avec $deg(N(p)) < deg(D(p))$, $p_1 \neq p_2 \neq p_n$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{p-p_n}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Résultat
1. On multiplie les deux formes de $F(p)$ par $(p-p_i)$.
2. On pose $p = p_i$.
3. On détermine α_i.
4. On réalise l'opération n fois (avec $n = deg(D(p))$).

■ **Exemple** *Décomposer la fonction suivante en éléments simples :*

$$F(p) = \frac{p^3+4}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$$

■

2 Cas d'une fonction avec des pôles réels simples – $deg(N(p)) = deg(D(p))$

Résultat Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)\cdots(p-p_n)}$$

avec $deg(N(p)) = deg(D(p))$, $p_1 \neq p_2 \neq p_n$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p) = K + \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{p-p_n}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{R}$

Résultat
1. Calcul des α_i :
   (a) On multiplie les deux formes de $F(p)$ par $(p-p_i)$.
   (b) On pose $p = p_i$.
   (c) On détermine α_i.
   (d) On réalise l'opération n fois (avec $n = deg(D(p))$).
2. Calcul de K :

(a) Pour les deux formes de $F(p)$ on calcule $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)$.
(b) On détermine K.

■ **Exemple** *Décomposer la fonction suivante en éléments simples :*

$$F(p)=\frac{p^2+1}{(p+1)(p+4)}$$

■

3 Cas d'une fonction avec des pôles réels multiples – $deg(N(p))<deg(D(p))$

Résultat Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{N(p)}{(p-p_1)^n}$$

avec $deg(N(p))<deg(D(p))$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p)=\frac{\alpha_1}{p-p_1}+\frac{\alpha_2}{\left(p-p_1\right)^2}+\dots+\frac{\alpha_n}{\left(p-p_1\right)^n}$$

avec $\alpha_i\in\mathbb{R}$.

Résultat Les méthodes précédentes restent utilisables. Elles ne permettent pas de déterminer touts les α_i.
On peut alors mettre les deux formes de $F(p)$ au même dénominateur et identifier les monômes.
On peut aussi prendre des valeurs particulières de p et résoudre un système d'équations.
Le calcul de certaines limites en ∞ peut permettre de déterminer certains coefficients.

■ **Exemple** *Décomposer la fonction suivante en éléments simples :*

$$F(p)=\frac{p^2+1}{p^3(p+1)}$$

■

4 Cas d'une fonction avec des pôles complexes – $deg(N(p))<deg(D(p))$

Résultat Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{N(p)}{(p-p_1)(ap^2+bp+c)}$$

avec $deg(N(p))<deg(D(p))$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p)=\frac{\alpha_1}{p-p_1}+\frac{\alpha_2+\alpha_3 p}{ap^2+bp+c}$$

avec $\alpha_i\in\mathbb{R}$.

■ **Exemple** *Décomposer la fonction suivante en éléments simples :*

$$F(p)=\frac{p+3}{(p+1)(p^2+1)}$$

■