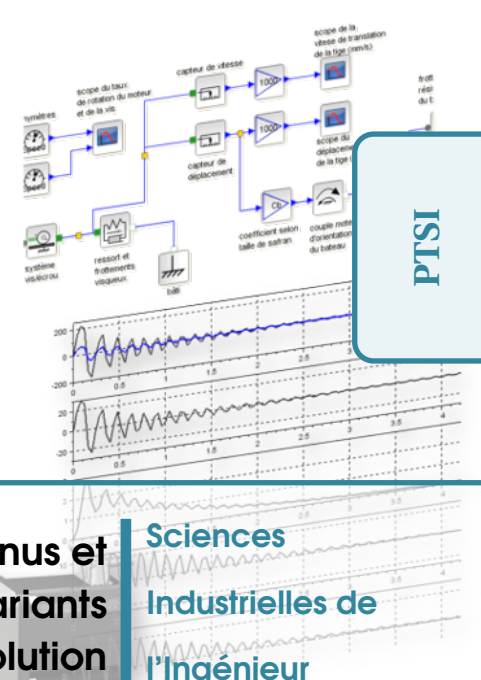


Découverte des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Analyse, Modélisation, Résolution

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

PTSI



Cours

Chapitre 2

Modélisation des Systèmes Linéaires Continus Invariants – Transformée de Laplace

Savoirs et compétences :

- Mod-C2.1 Modélisation par équations différentielles.
- Mod-C2.2 Représentation par fonction de transfert (formalisme de Laplace).



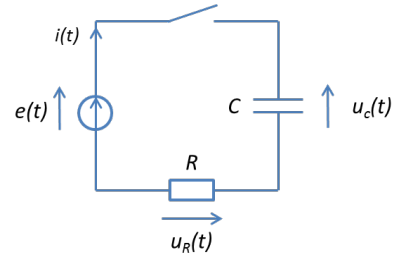
1	Modélisation d'un système par équations différentielles	2
1.1	Modélisation d'un filtre du premier ordre	2
1.2	Modélisation d'un système du second ordre	2
1.3	Équation différentielle généralisée	3
2	Propriétés des systèmes asservis	4
2.1	Systèmes linéaires	4
2.2	Systèmes continus	4
2.3	Systèmes invariants	4
2.4	Systèmes non linéaires	5
3	Transformée de Laplace	5
3.1	Définition	5
3.2	Propriétés des transformées de Laplace	6
3.3	Théorèmes usuels	7
4	Fonctions usuelles	8
4.1	Transformée de Laplace de signaux d'entrée	8
4.2	Transformée de Laplace de fonctions usuelles	9
5	Transformée de Laplace inverse	11
5.1	Propriétés mathématiques	11

Les notions mathématiques abordées dans ce chapitre n'ont pas pour but de se substituer à un cours de mathématiques mais de donner des propriétés et des définitions utiles pour l'étude des systèmes continus linéaires invariants.

1 Modélisation d'un système par équations différentielles

1.1 Modélisation d'un filtre du premier ordre

On considère le circuit électrique ci-contre. On cherche à connaître le comportement du système vis à vis de différents types de signaux.



D'après la loi des mailles, on a :

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

Connaissant la relation de comportement aux bornes d'un condensateur ($i(t) = C \frac{du_C}{dt}$) et d'une résistance ($u_R(t) = R \cdot i(t)$) on a donc :

$$e(t) = R \cdot i(t) + u_C(t) \iff e(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

On cherche donc à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{1}{RC} e(t)$$

On cherche la réponse du système lorsque $e(t)$ est une fonction échelon définie ainsi :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ e(t) = E_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question Recherche d'une solution particulière de l'équation complète $s_p(t) = E_0$ est une solution particulière de l'équation complète.

Question Recherche d'une solution générale de l'équation sans second membre $s_g(t)$ est de la forme $s_g(t) = \alpha e^{-\frac{1}{RC}t}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Question Résolution de l'équation différentielle On a donc

$$u_C(t) = s_p(t) + s_g(t) = E_0 + \alpha e^{-\frac{1}{RC}t}$$

A $t = 0$, le condensateur est déchargé. On a donc en $t = 0$:

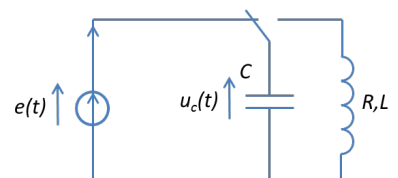
$$u_C(0) = 0 \iff E_0 + \alpha = 0 \iff \alpha = -E_0$$

On a donc :

$$u_C(t) = E_0 - E_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

1.2 Modélisation d'un système du second ordre

On considère le circuit électrique ci-contre. On cherche à connaître le comportement du système lors du déchargement du condensateur dans la bobine.



D'après la loi des mailles, la loi de comportement de la tension aux bornes d'un condensateur, la loi d'Ohm et la loi de Faraday, on a :

$$u_C(t) - u_L(t) - u_R(t) = 0 \iff u_C(t) - L \frac{di(t)}{dt} - Ri(t) = 0 \iff u_C(t) + LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} = 0$$

Afin de savoir le comportement du système, il faut donc étudier l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

Question Résolution de l'équation homogène et de l'équation différentielle L'équation homogène associée à cette équation est de la forme :

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - 4 \frac{1}{LC}$$

Suivant le signe de Δ , on peut alors déterminer la solution de l'équation différentielle...

Objectif Avec la complexité croissante des systèmes, il devient de plus en plus difficile de trouver directement des solutions aux équations différentielles qui traduisent le comportement des systèmes. En SII, la résolution directe des équations différentielles ne sera jamais demandée.

1.3 Équation différentielle généralisée

Lorsque le système se complexifie, on peut alors obtenir une équation différentielle qui régit la sortie du système $s(t)$ en fonction de l'entrée $e(t)$. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n est donnée par :

$$a_0 \cdot s(t) + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{d^i s(t)}{dt^i} = b_0 \cdot e(t) + \sum_{i=1}^m b_i \cdot \frac{d^i e(t)}{dt^i}$$

R Les systèmes étudiés impliqueront que $n \geq m$.

Deux problèmes peuvent alors se poser :

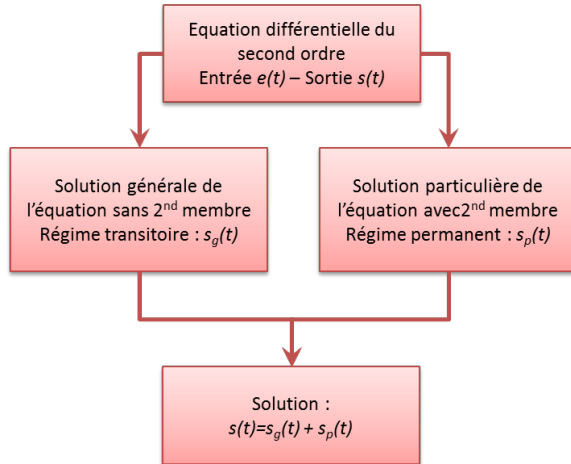
- il n'existe pas toujours de solution simple et analytique pour les équations différentielles, notamment lorsque l'ordre est supérieur à 2 ;
- il est difficile de résoudre ces équations en particulier lorsqu'on va chercher à modifier le type d'entrée.

L'outil mathématique qui va nous permettre d'analyser le comportement de systèmes complexes asservis est la transformation de Laplace. Cette transformation va nous permettre de passer d'une équation différentielle à une équation polynomiale, plus aisée à manipuler :

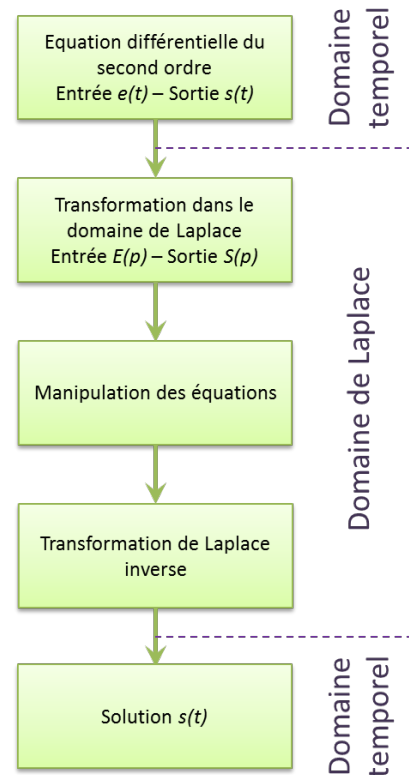
$$S(p) \cdot \sum_{i=0}^n c_i p^i = E(p) \cdot \sum_{i=0}^m d_i p^i$$

Dans le domaine temporel, la variable est le temps, noté t . Dans le domaine de Laplace, la variable est notée p (ou s dans les pays anglo-saxons).

Méthode de résolution d'une équation du second ordre dans le domaine temporel



Méthode de résolution d'une équation dans le domaine de Laplace



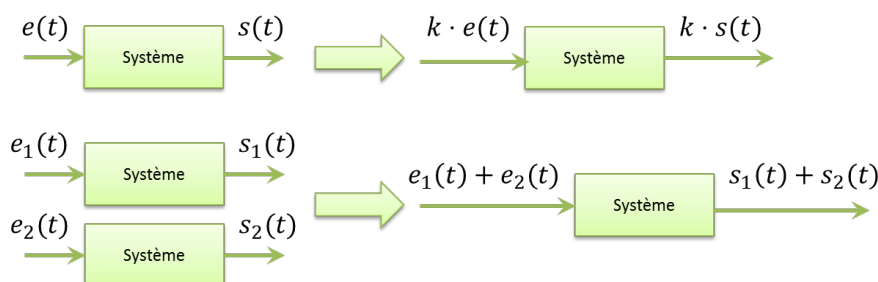
2 Propriétés des systèmes asservis

2.1 Systèmes linéaires

Définition Système linéaire

Soit un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ caractérisé par sa fonction F telle que $F(e(t)) = s(t)$. Le système est dit linéaire s'il satisfait les conditions suivantes :

- il est proportionnel : $\forall k \in \mathbb{R}, F(k \cdot e(t)) = k \cdot s(t)$;
- il obéit au principe de superposition : $F(e_1(t) + e_2(t)) = s_1(t) + s_2(t)$.



2.2 Systèmes continus

Un système est **continu**, par opposition à un système **discret** (ou échantillonné, ou numérique), si les grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions continues du temps. On parle aussi de systèmes **analogiques**.

La plupart des systèmes physiques, du point de vue macroscopique, sont continus. En revanche, un système informatique a besoin d'un temps non nul pour réaliser un traitement de l'information. On ne peut donc pas le qualifier de système continu. Il ne peut que traiter des valeurs prises sur des échantillons de signaux constants qui lui sont soumis. On parle alors de système échantillonné.

2.3 Systèmes invariants

Définition Système invariant

Un système est invariant lorsque les relations entre l'entrée et la sortie ne se modifient pas au cours du temps.

Le système ne vieillit pas.
Ainsi, $\forall T \in \mathbb{R}$:

$$F(e(t+T)) = s(t+T)$$



2.4 Systèmes non linéaires

On peut vérifier la linéarité des systèmes en traçant sur un graphe l'entrée en abscisse et la sortie en ordonnée. Le système est linéaire si la courbe tracée est une droite passant par l'origine du repère.

Certains comportements physiques des systèmes ne sont pas linéaires :

- les phénomènes d'hystérésis ;
- les phénomènes de saturation ;
- les phénomènes de seuil ;
- ...

Les outils que nous développerons par la suite ne sont pas capable de modéliser ces phénomènes. Dans le cas où il faudrait impérativement modéliser ces comportements, il faudrait les linéariser autour des points de comportements.

3 Transformée de Laplace

3.1 Définition

Définition Transformée de Laplace

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

On note $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ la transformée inverse.

La transformée de Laplace permet de passer du domaine temporel au domaine dit de Laplace.

La variable p (ou s) est un nombre complexe. On pose parfois $p = \sigma + j\omega$.

Notation

De manière générale, une fonction temporelle est nommée avec une lettre minuscule et sa transformée de Laplace avec une lettre majuscule. Dans le cas où la fonction temporelle est déjà une lettre majuscule, on conserve la même lettre. On a donc, par exemple :

- | | |
|------------------------------|--|
| • $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ | • $\mathcal{L}[C(t)] = C(p)$ |
| • $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ | • $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ |
| • $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ | • $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$ |

Unicité

- La transformée de Laplace de $f(t)$ est unique.
- La transformée de Laplace inverse de $F(p)$ est unique.

■ **Exemple** Calcul de $\mathcal{L}[f(t)]$ avec $f(t) = k \quad \forall t > 0$ et $k \in \mathbb{R}$.

3.2 Propriétés des transformées de Laplace

Linéarité

Soit $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ et $\mathcal{L}[g(t)] = G(p)$.

On démontre que :

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] = F(p) + G(p)$$

et que :

$$\mathcal{L}[K \cdot f(t)] = K \cdot \mathcal{L}[f(t)] = K \cdot F(p)$$

! Attention :

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] \neq \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

Cette remarque sera importante lors du calcul des transformées inverses.

Conditions de Heaviside

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Transformée de Laplace de la dérivation

La transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$$

La transformée de Laplace d'une dérivée seconde est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p) - pf(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt}$$

Dans les conditions de Heaviside,

■ **Exemple** Le schéma RLC présenté précédemment est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

On donne les conditions initiales suivantes : $u_C(0) = \alpha$ et $\frac{du_C(0)}{dt} = \beta$.

Dans le domaine de Laplace, cette équation est donc :

Dans la pratique, on aura souvent $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ (conditions de Heaviside) et donc :

Intégration dans les conditions de Heaviside :

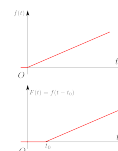
$$\mathcal{L} \left[\int_{0^+}^t f(t) dt \right] = \frac{1}{p} F(p)$$

3.3 Théorèmes usuels

Théorème Théorème de la valeur initiale

Théorème Théorème de la valeur finale

Théorème Théorème du retard



Tout retard temporel t_0 sur une fonction se traduit par un facteur multiplicatif $e^{-t_0 p}$ sur sa transformée de Laplace.

Théorème Théorème de l'amortissement

4 Fonctions usuelles

4.1 Transformée de Laplace de signaux d'entrée

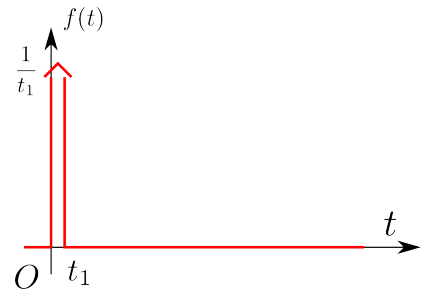
Réponse impulsionnelle

Lorsqu'un système est soumis à, son entrée à une impulsion, on parle de réponse impulsionnelle. Il s'agit de générer un signal d'amplitude infinie pendant un temps infinitésimal.

Définition On note l'impulsion de Dirac $\delta(t)$.

$$\forall t \neq 0 \quad \delta(t) = 0.$$

La transformée de Laplace d'un Dirac est :



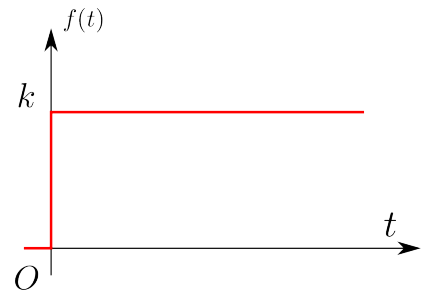
Cette fonction n'a pas de sens physique. Elle permet de modéliser un choc mécanique, un flash ...

Réponse indicielle

Définition La réponse indicielle d'un système est la réponse d'un système à une fonction échelon :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+ \quad f(t) = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

La transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude k est donnée par :



Réponse à une rampe et une fonction puissance

Définition Une rampe est une fonction linéaire définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+ \quad f(t) = t$$

La transformée de Laplace de f se définit par :

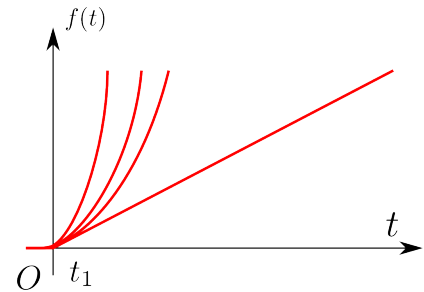
Définition Par extensions, on peut définir les fonctions puissances telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+ \quad f(t) = t^n$$

La transformée de Laplace est alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+ \quad F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Calcul de $\mathcal{L}[f(t)]$ avec $f(t) = t \quad \forall t > 0$.



4.2 Transformée de Laplace de fonctions usuelles

Le calcul de la transformation de Laplace à partir des définitions des fonctions usuelles n'est pas à savoir. En revanche, les transformées les plus courantes doivent être connues. Dans d'autres cas, le tableau des transformées vous sera donnée. Dans les conditions de Heaviside, on a donc les transformées de Laplace suivantes :

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
Puissances $f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	Créneau $\forall t \in]0, t_1[\quad f(t) = A$	$F(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-pt_1}}{p}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p + a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t)$ est T périodique	$F(p) = \frac{\mathcal{L}[f_0(t)]}{1 - e^{-Tp}} \cdot u(t)$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$

Calcul de $\mathcal{L}[f(t)]$ avec $f(t) = e^{-at} \quad \forall t > 0$.

Calcul de $\mathcal{L}[f(t)]$ avec $f(t) = \sin(\omega t) \quad \forall t > 0$.

Calculons :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) \cdot e^{-pt} dt$$

On rappelle que $\int u v' = [u v] - \int u' v$.

On pose :

- $u(t) = \sin(\omega t)$ et $u'(t) = \omega \cos(\omega t)$
- $v'(t) = e^{-pt}$ et $v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$

avec u et $v \in C^1$ sur \mathbb{R}_+ .

En conséquence,

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) \cdot e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \sin(\omega t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} \omega \cos(\omega t) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \sin(\omega t) \right]_0^{+\infty} + \frac{\omega}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) dt
 \end{aligned}$$

En réalisant une seconde intégration par partie, on pose $w(t) = \cos(\omega t)$ et $w'(t) = -\omega \sin(\omega t)$. On a donc $\int w v' = [w v] - \int w' v$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \cos(\omega t) \right]_0^{+\infty} - \underbrace{\frac{\omega}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin(\omega t) dt}_{F(p)}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} F(p) &= \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \sin(\omega t) \right]_0^{+\infty} + \frac{\omega}{p} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \cos(\omega t) \right]_0^{+\infty} - \frac{\omega}{p} \frac{\omega}{p} F(p) \\ \Leftrightarrow F(p) \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right) &= \underbrace{\left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \sin(\omega t) \right]_0^{+\infty}}_0 + \underbrace{\frac{\omega}{p} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot \cos(\omega t) \right]_0^{+\infty}}_{\frac{1}{p}} \\ \Leftrightarrow F(p) &= \frac{\omega}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\text{Au final } \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

5 Transformée de Laplace inverse

Après avoir trouvé la fonction de transfert du système auquel on ajoute la fonction de transfert du signal, on se retrouve avec une nouvelle fonction polynomiale qui est le produit des deux polynômes précédents.

Pour connaître la fonction globale du système dans le domaine temporel, on doit effectuer la transformée inverse de Laplace de ce nouveau polynôme.

La transformation inverse consiste à décomposer la fraction rationnelle (en p) en éléments simples (somme de plusieurs fractions simples en p) et à identifier chaque élément simple à une fonction élémentaire en t .

5.1 Propriétés mathématiques

Soit f une fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont deux fonctions polynômes.

Soit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

avec $\deg(p) < \deg(q)$ ($a_i \neq a_j$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$).

Alors $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_1}{(x-a_1)} + \frac{\alpha_2}{(x-a_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(x-a_n)}$$

Propriété 2

Soit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\dots(x-a_n)^{p_n}}$$

avec $\deg(p) < \deg(q)$ ($a_i \neq a_j$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$).

Alors $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{\alpha_{11}}{(x-a_1)} + \frac{\alpha_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1p_1}}{(x-a_1)^{p_1}} + \frac{\alpha_{21}}{(x-a_2)} + \frac{\alpha_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots \\ &+ \frac{\alpha_{np_2}}{(x-a_2)^{p_2}} + \frac{\alpha_{n1}}{(x-a_n)} + \frac{\alpha_{n2}}{(x-a_n)^2} + \dots + \frac{\alpha_{np_n}}{(x-a_n)^{p_n}} \end{aligned}$$

soit :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x-a_i)^j}$$

Propriété 3

Soit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{p_i} \prod_{k=1}^m (x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}}$$

avec $\deg(p) < \deg(q)$ ($a_i \neq a_j$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$) et $b_k^2 - 4c_k < 0 \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$

Alors $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{q_k} \frac{\beta_{kj} x}{(x^2 + b_k x + c_k)^j}$$