

## CI 2 – SLCI : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

### CHAPITRE 2 – MODÉLISATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS TRANSFORMÉE DE LAPLACE

#### EXERCICES D'APPLICATION

*D'après ressources de Jean-Pierre Pupier et Florestan Mathurin.*

#### Exercice 1

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{de(t)}{dt} + e(t) = \frac{d^3s(t)}{dt^3} + \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt}$$

$e(t)$  est l'entrée du système,  $s(t)$  la sortie.

On se place dans les conditions de Heaviside, c'est-à-dire qu'on considère que  $s(t)$ ,  $e(t)$  et leurs dérivées successives sont nulles en  $t = 0$ .

#### Question 1

En utilisant les résultats sur la transformée de Laplace, donner l'équation différentielle dans le domaine de Laplace.

Correction

En utilisant la propriété de la transformée de Laplace de la dérivée,  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ . Étant dans les conditions de Heaviside, on a donc :

$$pE(p) + E(p) = p^3S(p) + p^2S(p) + pS(p)$$

Pour la suite on considère que le système est soumis à une entrée  $e(t)$  indicielle.

#### Question 2

Donner l'allure graphique d'une entrée indicielle. Donner sa forme dans le domaine temporel puis dans le domaine de Laplace. En déduire  $S(p)$ .

Correction

Pour  $t \in \mathbb{R}_*^+$ , on a  $e(t) = 1$ , sinon  $e(t) = 0$ .

Dans le domaine de Laplace,  $E(p) = \frac{1}{p}$ .

En conséquence,

$$S(p) = \frac{1+p}{p^3+p^2+p}$$

### Question 3

Déterminer les valeurs finales et initiales de  $s(t)$ .

Correction

D'après le théorème de la valeur initiale,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot \frac{1+p}{p^3+p^2+p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1+p}{p^2+p+1} = 0$$

En effet,  $\frac{1+p}{p^2+p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{p^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 0$

D'après le théorème de la valeur finale,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1+p}{p^3+p^2+p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1+p}{p^2+p+1} = 1$$

### Question 4

Déterminer les valeurs initiales et finales de la fonction dérivée  $\frac{ds(t)}{dt}$ .

Correction

D'après les propriétés de la dérivée, on a  $\mathcal{L}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = pS(p)$ . En conséquence, d'après le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow +\infty} p(pS(p)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1+p}{p^2+p+1} = 1$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1+p}{p^2+p+1} = 1$$

### Question 5

Décomposer  $S(p)$  en éléments simples puis en somme algébrique de plusieurs transformées de Laplace élémentaires.

Correction

On a :

$$S(p) = \frac{1+p}{p^3+p^2+p} = \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\frac{1+p}{p^2+p+1}}_{S_1(p)} = \underbrace{\frac{\alpha}{p}}_{S_2(p)} + \underbrace{\frac{\beta+\gamma p}{p^2+p+1}}_{S_2(p)}$$

On multiplie  $S_1(p)$  et  $S_2(p)$  par  $p$  et on pose  $p = 0$  :

$$\frac{1+p}{p^2+p+1} = \alpha + \frac{\beta+\gamma p}{p^2+p+1} p \iff \alpha = 1$$

Et donc  $\alpha = 1$ .

Posons  $p = 1$  et  $p = -1$  :

Correction

$$\begin{cases} S_1(1) = S_2(1) \\ S_1(-1) = S_2(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = 1 + \frac{\beta + \gamma}{3} \\ 0 = -1 + \beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 + 2\beta - 1 \\ \gamma = \beta - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Au final :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + p + 1}$$

### Question 6

En déduire  $s(t)$  en utilisant la transformée de Laplace inverse.

Dans un premier temps, transformant  $S(p)$  afin d'identifier des formes connues :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + p + 1} = \frac{1}{p} - \frac{p}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

En utilisant le tableau des transformées inverses et le théorème de l'amortissement on a, pour tout  $t > 0$  :

$$s(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

Correction

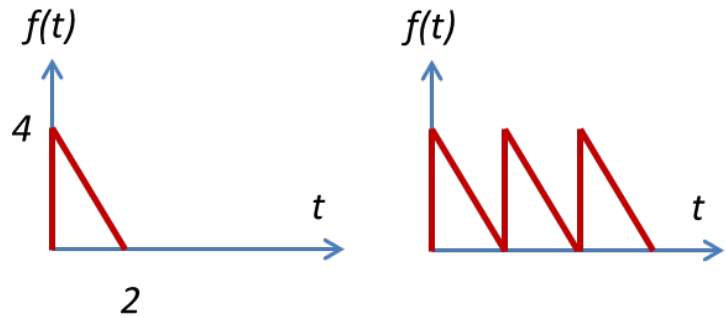
### Question 7

Donner l'allure de la  $s(t)$ .

Correction

## Exercice 2 – Application du théorème du retard – Application de la propriété de la périodicité – Modélisation des signaux

Modéliser les signaux ci-contre.



On pourrait définir le premier signal ainsi :  $\forall t \in [0, 2], f_1(t) = 4 - 2t$ , sinon  $f_1(t) = 0$ .

Une seconde façon serait d'utiliser la fonction de Heaviside définie par :  $\forall t > 0, u(t) = 1$ , sinon  $u(t) = 0$ .  
On aurait alors  $\forall t \in ]-\infty, 2], f_2(t) = (4 - 2t) \cdot u(t)$ , sinon  $f_2(t) = 0$ .

Enfin, dans un troisième temps on peut rechercher une fonction qui serait définie sur  $\mathbb{R}$ . Pour cela, définissons d'abord une fonction  $g$  telle que  $g(t) = (-4 + 2t) \cdot u(t - 2)$ .

On peut donc définir  $f$  ainsi :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (4 - 2t) \cdot u(t) + (-4 + 2t) \cdot u(t - 2)$ .

Dans le domaine de Laplace, on a donc :

$$F(p) = \frac{4}{p} - \frac{2}{p^2} + e^{-2p} \left( -\frac{4}{p} + \frac{2}{p^2} \right)$$

Enfin, si le signal est 2-périodique, on obtient :

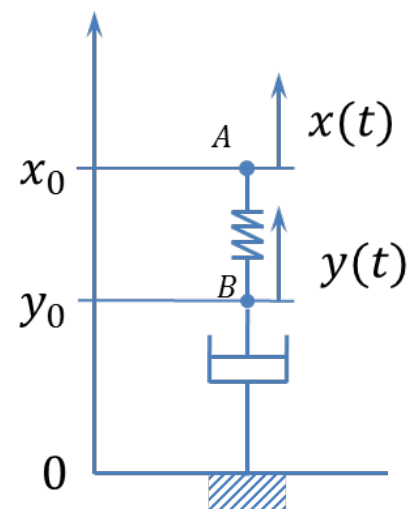
$$F(p) = \frac{\frac{4}{p} - \frac{2}{p^2} + e^{-2p} \left( -\frac{4}{p} + \frac{2}{p^2} \right)}{1 - e^{-2p}}$$

Correction

## Exercice 3 – Système mécanique

Soit le système mécanique ci-contre constitué d'un ressort de raideur  $k$  et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement  $f$ . On peut déplacer l'extrémité du ressort  $A$  d'une quantité  $x$ . À l'instant  $t = 0$  le système est en équilibre, le point  $A$  est positionné en  $x_0$  et le point  $B$  est positionné en  $y_0$ .

On notera  $x(t)$  et  $y(t)$  les variations des positions des points  $A$  et  $B$  autour de  $x_0$  et  $y_0$ .



### Question 1

Donner l'équation différentielle faisant intervenir  $x(t)$  et  $y(t)$ .  $K$  désigne la raideur du ressort,  $f$  désigne le coefficient visqueux de l'amortisseur. La pièce liant ressort et amortisseur au point B est considérée comme ayant une masse quasiment nulle.

Correction

En appliquant le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe  $\vec{x}$  au système ressort – amortisseur, on obtient :

$$k(x(t) - y(t)) - f \frac{dy(t)}{dt} = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

Dans notre cas, la masse du système isolée est nulle. On a donc :

$$k(x(t) - y(t)) = f \frac{dy(t)}{dt}$$

### Question 2

Réécrire cette équation en passant du domaine temporel au domaine de Laplace.

Correction

Dans le domaine de Laplace, on a donc directement :

$$k(X(p) - Y(p)) = f p Y(p)$$

### Question 3

Déterminer la fonction  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ .  $H$  sera appelée fonction de transfert du système.

Correction

Il vient directement :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{K + f p}$$

### Question 4

Donner la réponse du système à un échelon unitaire puis mettre  $S(p)$  sous la forme  $S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A + \tau p}$ . On précisera l'expression de  $\tau$ .

Correction

L'entrée du système correspond à la position de A et la sortie à la position de B.

Si on sollicite le système par un échelon de position, on a donc  $X(p) = \frac{1}{p}$  :

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) = \frac{k}{k + f p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{1 + \frac{f}{k} p} \cdot \frac{1}{p}$$

On pose alors  $\tau = \frac{f}{k}$

### Question 5

Mettre  $Y(p)$  sous la forme  $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + \tau p}$ .

Correction

Posons :

$$Y_1(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad Y_2(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad Y_1(p) = Y_2(p)$$

On multiplie  $Y_1$  et  $Y_2$  par  $p$  et on pose  $p = 0$ . On obtient alors  $\alpha = 1$ .

On multiplie ensuite  $Y_1$  et  $Y_2$  par  $1 + \tau p$  et on pose  $p = -\frac{1}{\tau}$ . On obtient alors  $\beta = -\tau$ .

On obtient donc :

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p}$$

### Question 6

En déduire la réponse  $y(t)$  à un échelon unitaire.

Correction

On modifie  $Y(p)$  pour la mettre sous une forme connue :

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p}$$

Dans le domaine temporel, on a donc :

$$y(t) = u(t) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

### Question 7

Tracer graphiquement l'allure générale de  $y(t)$ .

Correction

### Question 8

Recommencer le même travail en étudiant la réponse du système à une entrée sinusoïdale  $e(t) = \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$  avec  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  et  $T = \frac{f}{K} = 1$ . On fera donc l'hypothèse que le système est particulier, c'est-à-dire que  $T = 1$ .

Correction

En appliquant  $x(t) = \sin(t)$ , on a :

$$Y(p) = \frac{1}{1 + p} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{1 + p} - \frac{p - 1}{p^2 + 1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{1 + p} - \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} \right]$$

On a donc dans le domaine temporel :

$$y(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} - \cos t + \sin t]$$

Remarque :

$$\sin t - \cos t = \sin t - \cos t \cdot \frac{\tan \pi/4}{1} = \sin t - \cos t \frac{\sin \pi/4}{\cos \pi/4} = \sqrt{2} \left( \sin t \cos \frac{\pi}{4} - \cos t \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right)$$

Au final :

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[ e^{-t} + \sqrt{2} \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

## Exercice 4 – Transformée de Laplace

Connaissant les transformées de Laplace des fonctions  $\cos(\omega t) \cdot u(t)$ , donner la transformée de Laplace de  $e^{-at} \cdot \cos(\omega t) \cdot u(t)$ .

## Exercice 5 – Transformée de Laplace inverse

Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{K_1}{(p+a) \cdot (p+b)} & F_2(p) &= \frac{K_2}{p \cdot (1+\tau p)} & F_3(p) &= \frac{K_3 \cdot p}{(p+a)(p+b)} \\ F_4(p) &= \frac{K_4 p^2}{(p-1)^2 \cdot (p+1)} & F_5(p) &= \frac{3p+1}{(p-1) \cdot (p^2+1)} \end{aligned}$$

## Exercice 6 – Circuit RLC

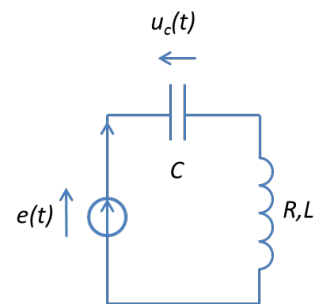
On donne le schéma électrique ci-contre. On suppose que les conditions initiales sont nulles.

### Question 1

Déterminer l'équation différentielle liant  $u_c(t)$  et  $e(t)$ .

### Question 2

$e(t)$  étant un échelon d'amplitude  $E_0$ , résoudre l'équation en utilisant la transformée de Laplace.



## Exercice 7 – Transformées de Laplace inverse

On donne les fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{3}{p \cdot (p+1) \cdot (p+2)} \quad F_2(p) = \frac{2p+1}{p^2+2p+10}$$

### Question 1

En utilisant la transformées de Laplace inverse, donner les fonctions causales du temps.

## Exercice 8

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p + 1)}$$

. On fait subir au système représenté par cette fonction de transfert une entrée échelon unitaire.

### Question 1

Calculer  $S(p)$  la réponse du système.

### Question 2

Décomposer là en éléments simples sous la forme :  $\frac{A}{p^3} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} + \frac{D}{p+1}$ .

### Question 3

Déterminer  $s(t)$ .

### Question 4

Réaliser un tracé représentatif de la fonction  $s(t)$ .

## Équation différentielle

Il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 2 \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2$$

Par ailleurs,  $e(t) = 6 \cdot u(t)$ .

### Question 1

Écrire cette équation à l'aide de la transformée de Laplace.

### Question 2

Décomposer  $Y(p)$  sous la forme  $\frac{A}{p} + \frac{B}{p+\alpha} + \frac{C}{p+\beta}$ .

### Question 3

Donner une représentation graphique de  $y(t)$ .