

Découverte des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Analyse, Modélisation, Résolution

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

PTSI

Chapitre 6

Étude des performances des systèmes complexes – Précision – Stabilité

Cours

Savoirs et compétences :

- Mod-C11 : Modélisation géométrique et cinématique des mouvements entre solides indéformables
- Mod-C11.2 : Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide

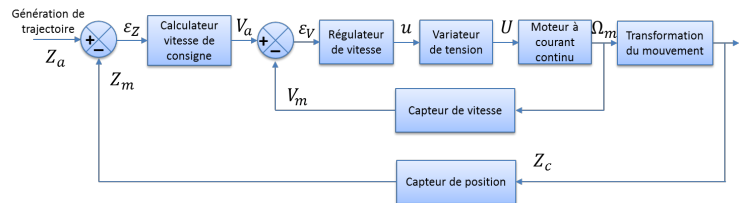


DMU 60 eVo Linear – Centre d'usinage 5 axes continus[1]

| | | |
|-----|--|---|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Étude du modèle sans perturbation | 3 |
| 2.1 | Entrée échelon | 4 |
| 2.2 | Entrée rampe | 4 |
| 2.3 | Entrée en accélération | 5 |
| 2.4 | Bilan | 6 |
| 3 | Étude du système soumis à une perturbation | 6 |
| 4 | Étude de la stabilité des systèmes | 7 |
| 4.1 | Système d'ordre 1 | 7 |
| 4.2 | Système d'ordre 2 | 7 |



DMU 60 eVo Linear
Centre d'usinage 5 axes continus[cite1]



Modélisation par schéma bloc
d'un axe numérique asservi [cite2]

Objectif PROBLÉMATIQUE :

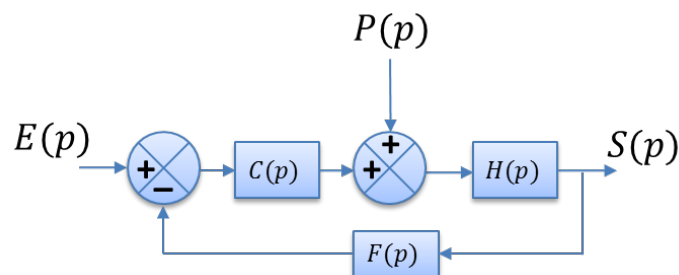
- La modélisation de systèmes multiphysiques donne lieu à des schémas bloc de plus en plus complexes. Comment améliorer la performance de ces systèmes en vue d'améliorer la rapidité, la stabilité ou la précision ?

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

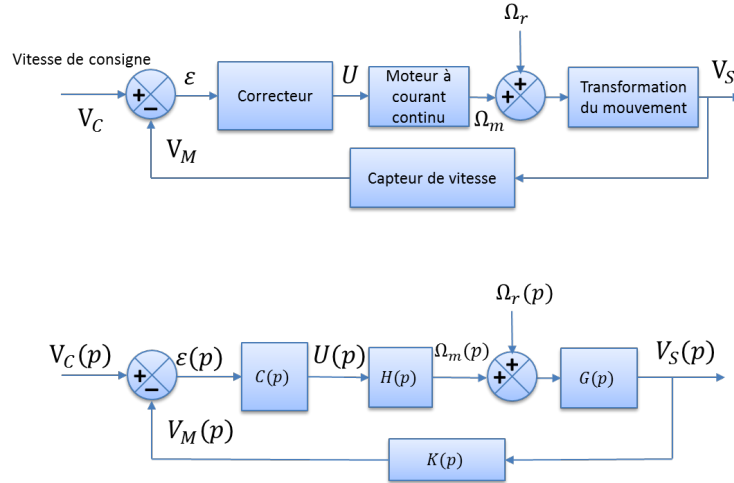
| | | |
|-----|--|---|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Étude du modèle sans perturbation | 3 |
| 2.1 | Entrée échelon | 4 |
| 2.2 | Entrée rampe | 4 |
| 2.3 | Entrée en accélération | 5 |
| 2.4 | Bilan | 6 |
| 3 | Étude du système soumis à une perturbation | 6 |
| 4 | Étude de la stabilité des systèmes | 7 |
| 4.1 | Système d'ordre 1 | 7 |
| 4.2 | Système d'ordre 2 | 7 |

1 Introduction

On s'intéresse à un système asservi classique. Les contraintes à respecter vis-à-vis du cahier des charges sont des contraintes de stabilité, rapidité et de précision.

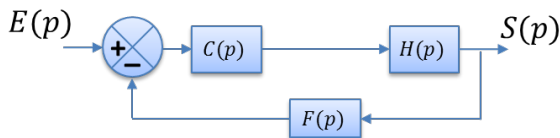


■ **Exemple** Pour modéliser l'axe asservi d'une machine outil la modélisation suivante :



On prendra $K(p) = 1$, $H(p)$ une fonction de transfert du premier ordre de gain K_M et de constante de temps τ , $G(p) = K_T$ permet de transformer la vitesse de rotation en une vitesse de translation. $C(p)$ est un correcteur de la forme $C(p) = K_C$.

2 Étude du modèle sans perturbation



Dans ces conditions, exprimons la fonction de transfert en boucle fermée, la fonction de transfert en boucle ouverte et la précision du système :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)F(p)}$$

$$FTBO(p) = C(p) \cdot H(p) \cdot F(p)$$

Dans tous les cas, $FTBO(p)$ est une fraction rationnelle et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$FTBO(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K(1 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha(1 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_n p^n)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p) = \frac{1}{1 + C(p) \cdot H(p) \cdot F(p)}$$

R La précision du système dépend des caractéristiques de la FTBO. On note K son gain et α sa classe.

Exprimons l'erreur du système :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}} \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot E(p)$$

Exemple On considère la perturbation nulle. La fonction de transfert du moteur est de la forme $H(p) = \frac{K_M}{1 + \tau p}$.

On a donc :

$$FTBF(p) = \frac{K_C \cdot \frac{K_M}{1 + \tau p} \cdot K_T}{1 + K_C \cdot \frac{K_M}{1 + \tau p} \cdot K_T} = \frac{K_C K_M K_T}{(1 + \tau p) + K_C K_M K_T}$$

$$FTBO(p) = K_C \cdot \frac{K_M}{1 + \tau p} \cdot K_T$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_C K_M K_T}{1 + \tau p}} \cdot E(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + \tau p + K_C K_M K_T} \cdot E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_C K_M K_T}{\tau p}} \cdot E(p)$$

2.1 Entrée échelon

Dans ce cas :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^\alpha}{p^\alpha + K}$$

Ainsi :

- si $\alpha = 0$: $\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K}$. Le système est donc plus précis lorsque le gain K de la FTBO augmente ;
- si $\alpha > 0$: $\varepsilon_S = 0$. L'écart statique est donc nul quel que soit K .

■ Exemple

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K_C K_M K_T}{\tau p}} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{1 + K_C K_M K_T}$$

Pour augmenter la précision statique, il faut augmenter le gain du correcteur proportionnel K_C .

2.2 Entrée rampe

Dans ce cas :

$$\varepsilon_V = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Ainsi :

- si $\alpha = 0$: $\varepsilon_S = \infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha = 1$: $\varepsilon_S = \frac{E_0}{K}$. L'écart de trainage diminue lorsque K augmente ;
- si $\alpha > 1$: $\varepsilon_S = 0$. L'écart de trainage est nul.

■ Exemple

$$\varepsilon_V = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K_C K_M K_T}{\tau p}} \cdot \frac{1}{p^2} = +\infty$$

Le système est donc instable lorsqu'il est soumis à une rampe. Utiliser un correcteur intégral de la forme $C(p) = \frac{K_C}{p}$ permettrait de stabiliser le système. En augmentant alors K_C , on réduirait l'erreur de traînage.

2.3 Entrée en accélération

Dans ce cas :

$$\varepsilon_A = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

Ainsi :

- si $\alpha = 0$: $\varepsilon_A = \infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha = 1$: $\varepsilon_A = \infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha = 2$: $\varepsilon_A = \frac{E_0}{K}$. L'écart diminue lorsque K augmente.

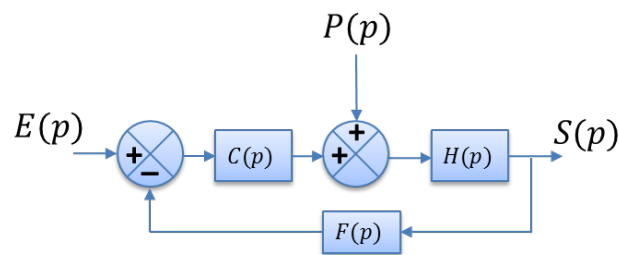
2.4 Bilan Résultat

La précision d'un système dépend du gain K et de la classe α de la FTBO.

| $e(t)$ | $E(p)$ | $\alpha = 0$ | $\alpha = 1$ | $\alpha = 2$ |
|--------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|
| Échelon | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1}{1+K}$ | 0 | 0 |
| Rampe | $\frac{1}{p^2}$ | ∞ | $\frac{1}{K}$ | 0 |
| Accélération | $\frac{1}{p^3}$ | ∞ | ∞ | $\frac{1}{K}$ |

R On montre en deuxième année que l'augmentation de K ou de la classe peut être cause d'instabilité.

3 Étude du système soumis à une perturbation



Exprimons l'erreur du système soumis à perturbation en fonction des deux entrées :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \cdot F(p) \\
 &= E(p) - (P(p) + \varepsilon(p)C(p)) \cdot F(p)H(p) \\
 &= E(p) - P(p)F(p)H(p) - \varepsilon(p)C(p)F(p)H(p)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + C(p)F(p)H(p)) = E(p) - P(p)F(p)H(p)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p) - P(p)F(p)H(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + C(p)F(p)H(p)} E(p) - \frac{F(p)H(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)} P(p)$$

■ **Exemple** Cas 1 : $C(p) = K_C$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + G(p)H(p)C(p)} V_c(p) - \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)C(p)} \Omega_r(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1 + \tau_p}{1 + K_T K_M K_C + \tau_p} V_c(p) - K_T \frac{1 + \tau_p}{1 + K_T K_M K_C + \tau_p} \Omega_r(p)$$

Le système est soumis à une consigne échelon d'amplitude E_c et à une perturbation échelon d'amplitude E_p . Dans ce cas,

$$\varepsilon(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} \frac{E_c}{p} - K_T \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} \frac{E_p}{p}$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} E_c - K_T \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} E_p$$

$$\varepsilon_S = \frac{E_c - K_T E_p}{1 + K_T K_M K_C}$$

L'augmentation du gain du correcteur permet de diminuer l'écart statique.

■ **Exemple** Cas 2 : $C(p) = \frac{K_C}{p}$

4 Étude de la stabilité des systèmes

Il ne s'agit pas ici de faire une étude exhaustive de la stabilité des systèmes asservis, mais d'avoir une idée sur un des critères de stabilité

4.1 Système d'ordre 1

Soit un système du premier ordre sous sa forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Sa réponse temporelle à une entrée échelon d'amplitude E_0 est donnée par :

$$s(t) = E_0 K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Le système est instable si τ est négatif.

4.2 Système d'ordre 2

Soit un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{K \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + p^2}$$

On le sollicite par un échelon d'amplitude E_0 . En conséquence, $E(p) = \frac{E_0}{p}$ et on a :

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + p^2}$$

4.2.1 Cas où $\xi > 1$

Dans ce cas, $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ peut se factoriser sous la forme $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$ avec $p_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ et $p_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$.

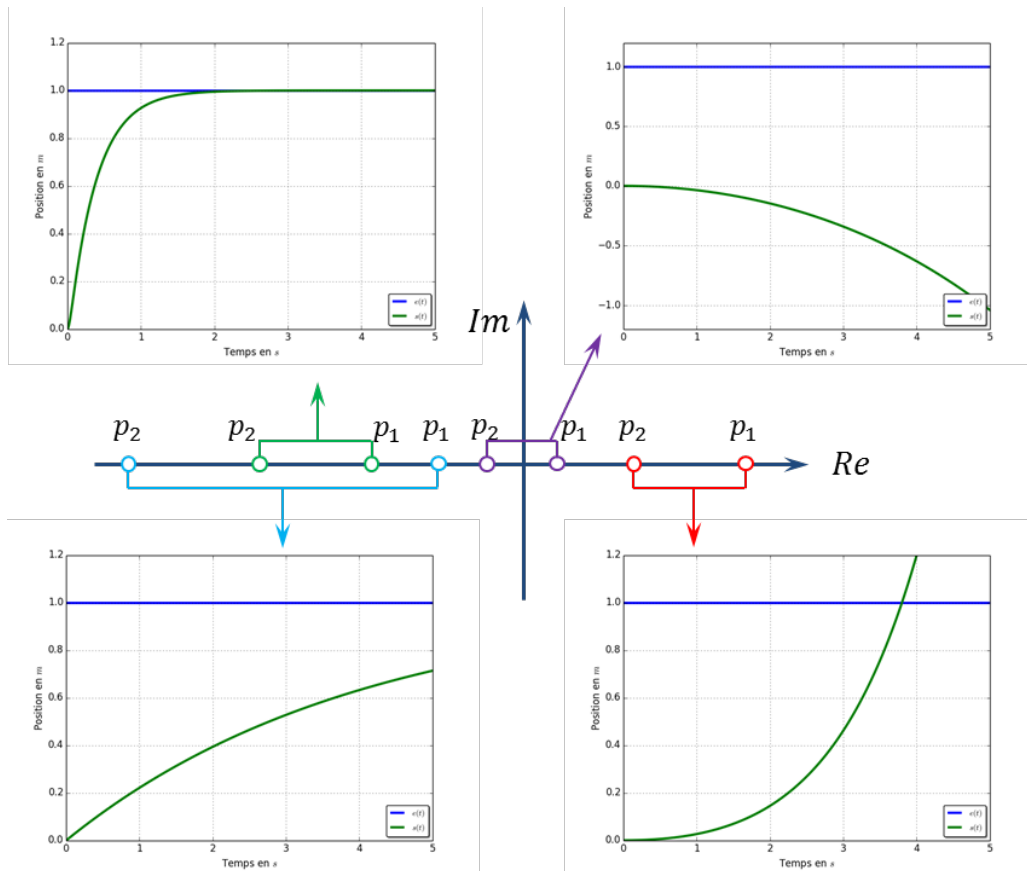
On montre donc que :

$$S(p) = \frac{KE_0}{p} + \frac{KE_0 p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{KE_0 p_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_2}$$

Et alors,

$$s(t) = KE_0 \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t} \right) \cdot u(t)$$

Dans ce cas,



4.2.2 Cas où $\xi = 1$

Dans ce cas, $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ se met sous la forme $(p - p_1)^2$ avec $p_1 = -\omega_0$.

On montre donc que :

$$S(p) = \frac{KE_0}{p} - \frac{KE_0}{p - p_1} - \frac{KE_0 \omega_0}{(p - p_1)^2}$$

Et alors,

$$s(t) = KE_0 (1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}) \cdot u(t)$$

4.2.3 Cas où $\xi < 1$

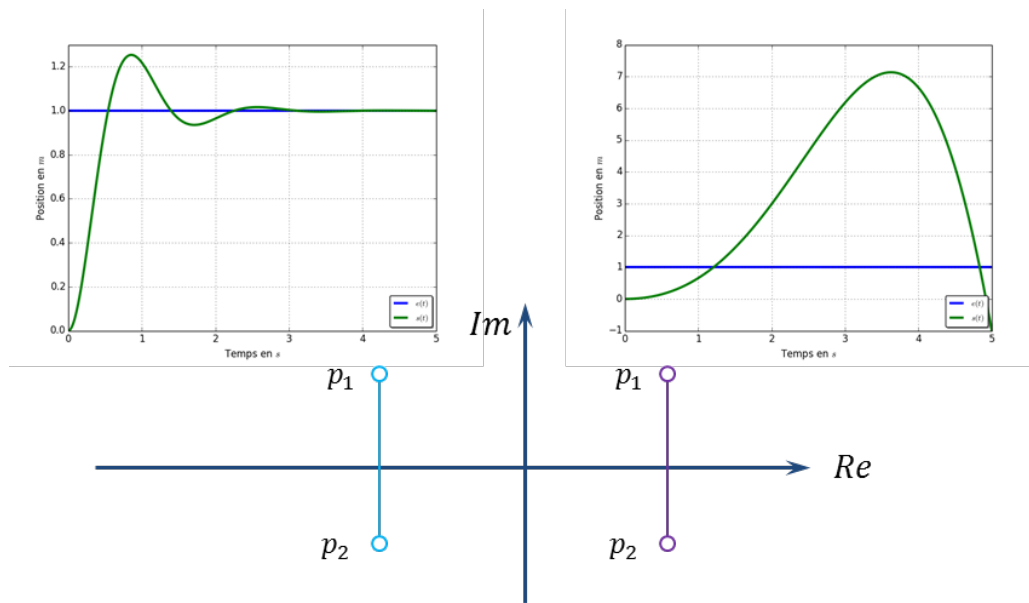
Dans ce cas, $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ peut se factoriser sous la forme $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$ avec $p_1 = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ et $p_2 = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$.

On montre donc que :

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + \xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} - \frac{\xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \right)$$

Et alors,

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \cos(t\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin(t\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}) \right) \cdot u(t)$$



Résultat — On montre qu'un système est stable si les pôles de la FTBF sont à partie réelle **strictement négative**.

Références

- [1] DMU 60 eVo linear, DMG – Deckel Maho – Gildemeiseter, <http://fr.dmg.com>.
- [2] Programmation des machines-outils à commande numérique (MOCN), Étienne Lefur et Christophe Sohler, École Normale Supérieure de Cachan, <http://etienne.lefur.free.fr/>.
- [3] SLCI : Systèmes asservis en boucle fermée : stabilité et précision, Joël Boiron, PTSI – Lycée Gustave Eiffel de Bordeaux.