CI 2 – SLCI : Étude du comportement des Systèmes Linéaires Continus Invariants

Chapitre 2 – Modélisation des Systèmes Linéaires Continus Invariants
Transformée de Laplace

Exercices d'application

D'après ressources de Jean-Pierre Pupier et Florestan Mathurin.

Exercice 1

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{de(t)}{dt}+e(t)=\frac{d^3s(t)}{dt^3}+\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{ds(t)}{dt}$$

$e(t)$ est l'entrée du système, $s(t)$ la sortie.

On se place dans les conditions de Heaviside, c'est-à-dire qu'on considère que $s(t)$, $e(t)$ et leurs dérivées successives sont nulles en $t=0$.

Question 1

En utilisant les résultats sur la transformée de Laplace, donner l'équation différentielle dans le domaine de Laplace.

Correction

En utilisant la propriété de la transformée de Laplace de la dérivée, $\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=pF(p)-f(0^+)$. Étant dans les conditions de Heaviside, on a donc :

$$pE(p)+E(p)=p^3S(p)+p^2S(p)+pS(p)$$

Pour la suite on considère que le système est soumis à une entrée $e(t)$ indicielle.

Question 2

Donner l'allure graphique d'une entrée indicielle. Donner sa forme dans le domaine temporel puis dans le domaine de Laplace. En déduire $S(p)$.

Correction

Pour $t\in\mathbb{R}_*^+$, on a $e(t)=1$, sinon $e(t)=0$.
Dans le domaine de Laplace, $E(p)=\frac{1}{p}$.
En conséquence,

$$S(p)=\frac{1+p}{p^3+p^2+p}$$

Question 3

Déterminer les valeurs finales et initiales de $s(t)$.

Correction

D'après le théorème de la valeur initiale,

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \lim_{p\to+\infty} p\cdot\frac{1+p}{p^3+p^2+p} = \lim_{p\to+\infty}\frac{1+p}{p^2+p+1} = 0$$

En effet, $\dfrac{1+p}{p^2+p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p}{p^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 0$

D'après le théorème de la valeur finale,

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} p\cdot\frac{1+p}{p^3+p^2+p} = \lim_{p\to 0}\frac{1+p}{p^2+p+1} = 1$$

Question 4

Déterminer les valeurs initiales et finales de la fonction dérivée $\dfrac{ds(t)}{dt}$.

Correction

D'après les propriétés de la dérivée, on a $\mathscr{L}\left[\dfrac{ds(t)}{dt}\right] = pS(p)$. En conséquence, d'après le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0}\frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to+\infty} p\left(pS(p)\right) = \lim_{p\to+\infty} p\frac{1+p}{p^2+p+1} = 1$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to 0} p\frac{1+p}{p^2+p+1} = 1$$

Question 5

Décomposer $S(p)$ en éléments simples puis en somme algébrique de plusieurs transformées de Laplace élémentaires.

Correction

On a :

$$S(p) = \frac{1+p}{p^3+p^2+p} = \underbrace{\frac{1}{p}\cdot\frac{1+p}{p^2+p+1}}_{S_1(p)} = \underbrace{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta+\gamma p}{p^2+p+1}}_{S_2(p)}$$

On multiplie $S_1(p)$ et $S_2(p)$ par p et on pose $p=0$:

$$\frac{1+p}{p^2+p+1} = \alpha + \frac{\beta+\gamma p}{p^2+p+1}p \Longleftrightarrow \alpha = 1$$

Et donc $\alpha = 1$.

Posons $p=1$ et $p=-1$:

Correction

$$\begin{cases} S_1(1)=S_2(1) \\ S_1(-1)=S_2(-1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}=1+\dfrac{\beta+\gamma}{3} \\ 0=-1+\beta-\gamma \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2=3+2\beta-1 \\ \gamma=\beta-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma=-1 \\ \beta=0 \end{cases}$$

Au final :

$$S(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+p+1}$$

Question 6

En déduire $s(t)$ en utilisant la transformée de Laplace inverse.

Correction

Dans un premier temps, transformant $S(p)$ afin d'identifier des formes connues :

$$S(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+p+1}=\frac{1}{p}-\frac{p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$S(p)=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$S(p)=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

En utilisant le tableau des transformées inverses et le théorème de l'amortissement on a, pour tout $t>0$:

$$s(t)=1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

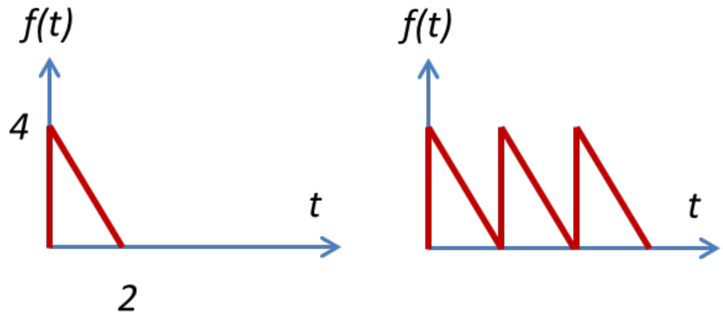
Question 7

Donner l'allure de la $s(t)$.

Correction

Exercice 2 – Application du théorème du retard – Application de la propriété de la périodicité – Modélisation des signaux

Modéliser les signaux ci-contre.



Correction

On pourrait définir le premier signal ainsi : $\forall t \in [0,2]$, $f_1(t) = 4 - 2t$, sinon $f_1(t) = 0$.

Une seconde façon serait d'utiliser la fonction de Heaviside définit par : $\forall t > 0 u(t) = 1$, sinon $u(t) = 0$. On aurait alors $\forall t \in]-\infty, 2]$, $f_2(t) = (4-2t)\cdot u(t)$, sinon $f_2(t) = 0$.

Enfin, dans un troisième temps on peut rechercher une fonction qui serait définie sur $\mathbb{R}$. Pour cela, définissons d'abord une fonction g telle que $g(t) = (-4+2t)\cdot u(t-2)$.

On peut donc définir f ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (4-2t)\cdot u(t) + (-4+2t)\cdot u(t-2)$.

Dans le domaine de Laplace, on a donc :

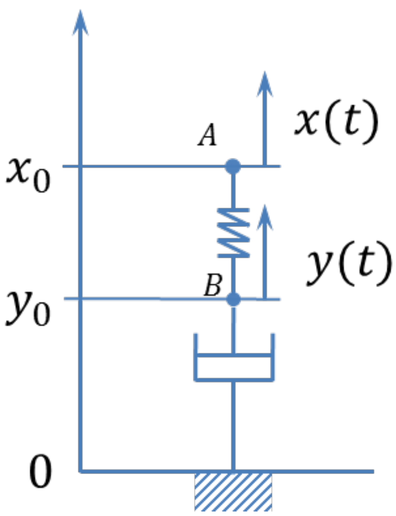
$$F(p) = \frac{4}{p} - \frac{2}{p^2} + e^{-2p}\left(-\frac{4}{p} + \frac{2}{p^2}\right)$$

Enfin, si le signal est 2-périodique, on obtient :

$$F(p) = \frac{\frac{4}{p} - \frac{2}{p^2} + e^{-2p}\left(-\frac{4}{p} + \frac{2}{p^2}\right)}{1 - e^{-2p}}$$

Exercice 3 – Système mécanique

Soit le système mécanique ci-contre constitué d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement f. On peut déplacer l'extrémité du ressort A d'une quantité x. Á l'instant $t = 0$ le système est en équilibre, le point A est positionné en x_0 et le point B est positionné en y_0.
On notera $x(t)$ et $y(t)$ les variations des positions des points A et B autour de x_0 et y_0.



Question 1

Donner l'équation différentielle faisant intervenir $x(t)$ et $y(t)$. K désigne la raideur du ressort, f désigne le coefficient visqueux de l'amortisseur. La pièce liant ressort et amortisseur au point B est considérée comme ayant une masse quasiment nulle.

Correction

En appliquant le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $\overrightarrow{x}$ au système ressort – amortisseur, on obtient :

$$k\left(x(t)-y(t)\right)-f\frac{dy(t)}{dt}=M\frac{dy^2(t)}{dt^2}$$

Dans notre cas, la masse du système isolée est nulle. On a donc :

$$k\left(x(t)-y(t)\right)=f\frac{dy(t)}{dt}$$

Question 2

Réécrire cette équation en passant du domaine temporel au domaine de Laplace.

Correction

Dans le domaine de Laplace, on a donc directement :

$$k\left(X(p)-Y(p)\right)=f\,p\,Y(p)$$

Question 3

Déterminer la fonction $H(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}$. H sera appelée fonction de transfert du système.

Correction

Il vient directement :

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{K}{K+fp}$$

Question 4

Donner la réponse du système à un échelon unitaire puis mettre $S(p)$ sous la forme $S(p)=\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{A+\tau p}$. On précisera l'expression de τ.

Correction

L'entrée du système correspond à la position de A et la sortie à la position de B.

Si on sollicite le système par un échelon de position, on a donc $X(p)=\dfrac{1}{p}$:

$$Y(p)=H(p)\cdot X(p)=\frac{k}{k+fp}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{1+\frac{f}{k}p}\cdot\frac{1}{p}$$

On pose alors $\tau=\dfrac{f}{k}$

Question 5

Mettre $Y(p)$ sous la forme $\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{\beta}{1+\tau p}$.

Correction

Posons :

$$Y_1(p)=\frac{1}{1+\tau p}\cdot\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad Y_2(p)=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{1+\tau p} \quad \text{avec} \quad Y_1(p)=Y_2(p)$$

On multiplie Y_1 et Y_2 par p et on pose $p=0$. On obtient alors $\alpha=1$.

On multiplie ensuite Y_1 et Y_2 par $1+\tau p$ et on pose $p=-\dfrac{1}{\tau}$. On obtient alors $\beta=-\tau$.

On obtient donc :

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{\tau}{1+\tau p}$$

Question 6

En déduire la réponse $y(t)$ à un échelon unitaire.

Correction

On modifie $Y(p)$ pour la mettre sous une forme connue :

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{\dfrac{1}{\tau}+p}$$

Dans le domaine temporel, on a donc :

$$y(t)=u(t)\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Question 7

Tracer graphiquement l'allure générale de $y(t)$.

Correction

Question 8

Recommencer le même travail en étudiant la réponse du système à une entrée sinusoïdale $e(t)=\sin(\omega\cdot t)\cdot u(t)$ avec $\omega=1\,rad/s$ et $T=\dfrac{f}{K}=1$. On fera donc l'hypothèse que le système est particulier, c'est-à-dire que $T=1$.

Correction

En appliquant $x(t)=\sin(t)$, on a :

$$Y(p)=\frac{1}{1+p}\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1+p}-\frac{p-1}{p^2+1}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1+p}-\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}\right]$$

Correction

On a donc dans le domaine temporel :

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-t} - \cos t + \sin t\right]$$

Remarque :

$$\sin t - \cos t = \sin t - \cos t \cdot \frac{\tan}{\pi} 4 = \sin t - \cos t \frac{\sin \pi 4}{\cos \pi 4} = \sqrt{2}\left(\sin t \cos \frac{\pi}{4} - \cos t \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Au final :

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-t} + \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Exercice 4 – Transformée de Laplace

Connaissant les transformées de Laplace des fonctions $\cos(\omega t)\cdot u(t)$, donner la transformée de Laplace de $e^{-at}\cdot\cos(\omega t)\cdot u(t)$.

Exercice 5 – Transformée de Laplace inverse

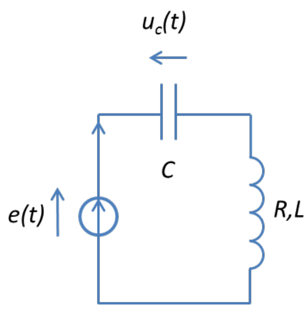
Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{K_1}{(p+a)\cdot(p+b)} \qquad F_2(p) = \frac{K_2}{p\cdot(1+\tau p)} \qquad F_3(p) = \frac{K_3\cdot p}{(p+a)\,(p+b)}$$

$$F_4(p) = \frac{K_4 p^2}{(p-1)^2\cdot(p+1)} \qquad F_5(p) = \frac{3p+1}{(p-1)\cdot(p^2+1)}$$

Exercice 6 – Circuit RLC

On donne le schéma électrique ci-contre. On suppose que les conditions initiales sont nulles.



Question 1

Déterminer l'équation différentielle liant $u_c(t)$ et $e(t)$.

Question 2

$e(t)$ étant un échelon d'amplitude E_0, résoudre l'équation en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 7 – Transformées de Laplace inverse

On donne les fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{3}{p\cdot(p+1)\cdot(p+2)} \qquad F_2(p) = \frac{2p+1}{p^2+2p+10}$$

Question 1

En utilisant la transformées de Laplace inverse, donner les fonctions causales du temps.

Exercice 8

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{p^2+1}{p^2\,(p+1)}$$

. On fait subir au système représenté par cette fonction de transfert une entrée échelon unitaire.

Question 1
Calculer $S(p)$ la réponse du système.

Question 2
Décomposer là en éléments simples sous la forme : $\dfrac{A}{p^3}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p}+\dfrac{D}{p+1}$.

Question 3
Déterminer $s(t)$.

Question 4
Réaliser un tracé représentatif de la fonction $s(t)$.

Équation différentielle

Il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=e(t) \quad \text{avec} \quad y(0)=2 \quad \frac{dy(0)}{dt}=2$$

Par ailleurs, $e(t)=6\cdot u(t)$.

Question 1
Écrire cette équation à l'aide de la transformée de Laplace.

Question 2
Décomposer $Y(p)$ sous la forme $\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+\alpha}+\dfrac{C}{p+\beta}$.

Question 3
Donner une représentation graphique de $y(t)$.