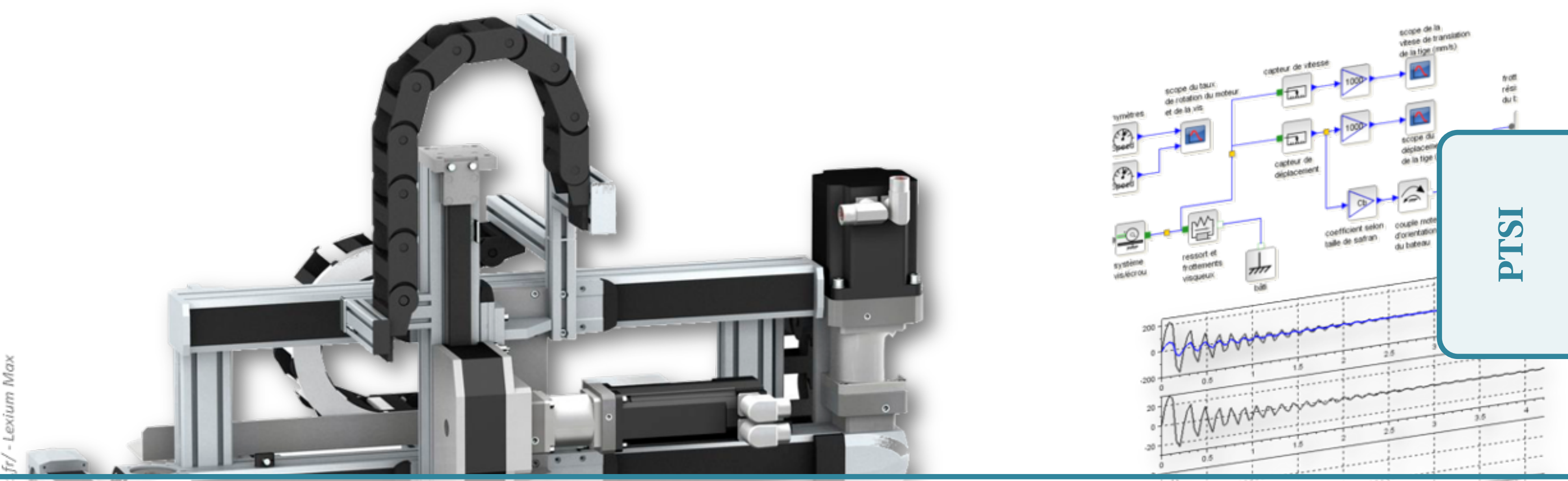


PTSI

Partie 2

Découverte des Systèmes Linéaires Continus et Invariants
Analyse, Modélisation, Résolution

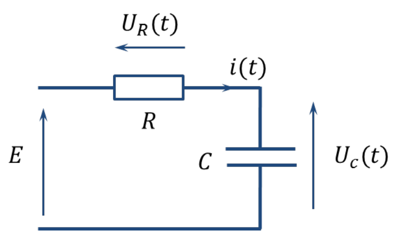
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

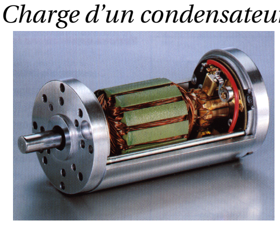
Chapitre 4
Étude des systèmes fondamentaux du premier ordre

Savoirs et compétences :

- *Mod-C2.3 : Modèles canoniques du premier ordre*
  - *Mod-C2-S1 : Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse temporelle*
  - *Mod-C2-S2 : Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux*
  - *Mod-C2-S3 : On pourra étudier les systèmes du premier ordre présentant un retard pur*



Charge d'un condensateur



Moteur à courant continu (suivant les hypothèses)

1 Définition 2
2 Caractéristiques de la réponse impulsionnelle 2
3 Caractéristiques de la réponse indicielle 2
4 Caractéristiques de la réponse à une rampe 3

Xavier Pessoles
PTSI

1 Définition

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

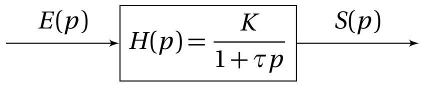
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)$$

Définition Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

On note :
- τ la constante de temps ($\tau > 0$) ;
- K le gain statique du système ($K > 0$).

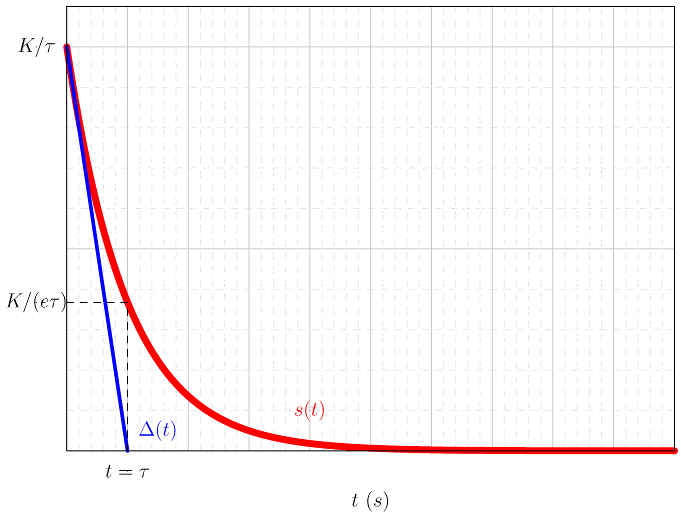
Schéma-bloc d'un système du premier ordre :



2 Caractéristiques de la réponse impulsionnelle

Par définition on rappelle que la réponse impulsionnelle correspond à la courbe de réponse du système sollicité par une fonction de Dirac.

Réponse temporelle :	$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Valeur initiale :	$s(0) = \frac{K}{\tau}$
Valeur finale :	$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 0$
Équation de la tangente à l'origine :	$\Delta(t) = \frac{K}{\tau} - \frac{K}{\tau^2} t$



Démonstration *Éléments de démonstration*

Dans le cas d'une réponse impulsionnelle, l'entrée est un Dirac : on a donc $E(p) = 1$.
En conséquence,

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

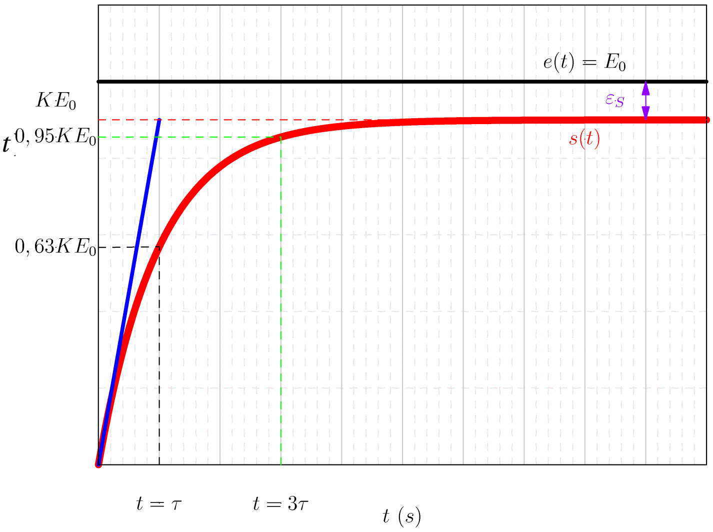
La transformée de Laplace inverse permet de conclure directement que :

$$\forall t > 0 \quad s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3 Caractéristiques de la réponse indicielle

Par définition on rappelle que la réponse indicielle correspond à la courbe de réponse du système sollicité par une fonction échelon d'amplitude E_0 : $\forall t > 0, \quad e(t) = E_0$.

Réponse temporelle :	$s(t)=KE_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$
Valeur initiale :	$s(0)=0$
Valeur finale :	$\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)=K\cdot E_0$
Équation de la tangente à l'origine :	$\Delta(t)=\dfrac{KE_0}{\tau}t$



Caractéristiques remarquables de la réponse indicielle

R L'écart statique d'un système du premier ordre répondant à une entrée indicielle est nul si le gain K est égal à 1.

Résultat Pour $t=\tau$,

$$s(\tau)=KE_0(1-e)\simeq 0,63KE_0$$

Lorsque $t=\tau$ la sortie a donc atteint 63% de la valeur finale.

Résultat On note t_r le temps de réponse à 5%.

$$t_r=-\ln(0,05)\tau\simeq 3\tau$$

Démonstration *Éléments de démonstration*

Dans le cas d'une réponse indicielle, l'entrée est un échelon d'amplitude E_0, on a donc $E(p)=\dfrac{E_0}{p}$.

En conséquence,

$$S(p)=E(p)\cdot H(p)=\frac{E_0}{p}\cdot\frac{K}{1+\tau p}$$

$S(p)$ se décompose en éléments simples de la façon suivante :

$$S(p)=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{1+\tau p}=\frac{E_0K}{p}-\frac{E_0K\tau}{1+\tau p}$$

La transformée de Laplace inverse permet de conclure que :

$$\forall t>0 \quad s(t)=KE_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

4 Caractéristiques de la réponse à une rampe

On sollicite un système du premier ordre avec une rampe de pente A. On a $e(t)=At\,u(t)$ dans le domaine temporel et $E(p)=\dfrac{A}{p^2}$ dans le domaine de Laplace.

Réponse temporelle : $s(t) = AK\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$

Valeur initiale : $s(0) = 0$

Valeur finale : $\lim\limits_{t \to +\infty = 0} s(t) = +\infty$

Coefficient directeur
de l'asymptote en $+\infty$: AK

Erreur dynamique : $AK\tau$