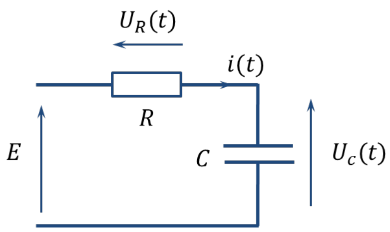
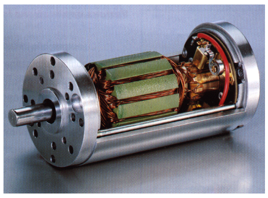
CI 2 – SLCI : Étude du comportement des Systèmes Linéaires Continus Invariants

Chapitre 4 – Étude des systèmes fondamentaux du premier ordre



Charge d'un condensateur



Moteur à courant continu (suivant les hypothèses)

Problématique :
- Le comportement réel de certains systèmes asservis peut se modéliser par des systèmes dits du premier ordre. Comment modéliser de tels systèmes ?

Savoir

Savoirs :
- Mod-C2.3 : Modèles canoniques du premier ordre
  - Mod-C2-S1 : Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse temporelle
  - Mod-C2-S2 : Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux
  - Mod-C2-S3 : On pourra étudier les systèmes du premier ordre présentant un retard pur

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Définition

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Définition

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

On note :
- τ la constante de temps ($\tau > 0$) ;
- K le gain statique du système ($K > 0$).

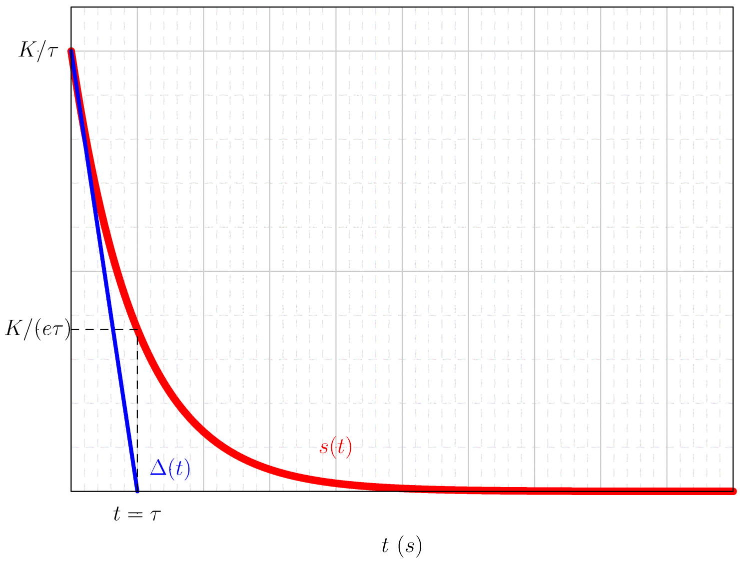
Schéma-bloc d'un système du premier ordre :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}} \longrightarrow S(p)$$

2 Caractéristiques de la réponse impulsionnelle

Par définition on rappelle que la réponse impulsionnelle correspond à la courbe de réponse du système sollicité par une fonction de Dirac.

Réponse temporelle :	$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Valeur initiale :	$s(0) = \frac{K}{\tau}$
Valeur finale :	$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 0$
Équation de la tangente à l'origine :	$\Delta(t) = \frac{K}{\tau} - \frac{K}{\tau^2} t$



Démonstration

Éléments de démonstration

Dans le cas d'une réponse impulsionnelle, l'entrée est un Dirac : on a donc $E(p) = 1$.

En conséquence,

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

La transformée de Laplace inverse permet de conclure directement que :

$$\forall t > 0 \quad s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3 Caractéristiques de la réponse indicielle

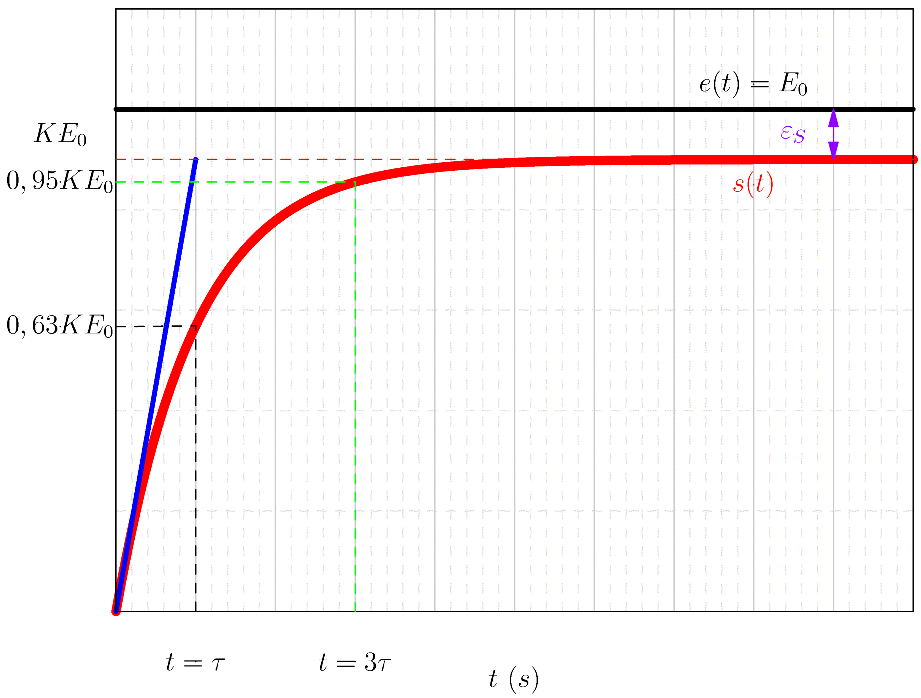
Par définition on rappelle que la réponse indicielle correspond à la courbe de réponse du système sollicité par une fonction échelon d'amplitude E_0 : $\forall t > 0, \quad e(t) = E_0$.

Réponse temporelle : $s(t) = K E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Valeur initiale : $s(0) = 0$

Valeur finale : $\lim_{t \to +\infty} s(t) = K \cdot E_0$

Équation de la tangente à l'origine : $\Delta(t) = \dfrac{K E_0}{\tau} t$



Caractéristiques remarquables de la réponse indicielle

Remarque

L'écart statique d'un système du premier ordre répondant à une entrée indicielle est nul si le gain K est égal à 1.

Résultat

Pour $t = \tau$,

$$s(\tau) = K E_0 (1 - e) \simeq 0,63 K E_0$$

Résultat

Lorsque $t=\tau$ la sortie a donc atteint 63% de la valeur finale.

Résultat

On note t_r le temps de réponse à 5%.

$$t_r = -\ln(0,05)\tau \simeq 3\tau$$

Démonstration

Éléments de démonstration

Dans le cas d'une réponse indicielle, l'entrée est un échelon d'amplitude E_0, on a donc $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$.

En conséquence,

$$S(p) = E(p)\cdot H(p) = \frac{E_0}{p}\cdot\frac{K}{1+\tau p}$$

$S(p)$ se décompose en éléments simples de la façon suivante :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+\tau p} = \frac{E_0 K}{p} - \frac{E_0 K \tau}{1+\tau p}$$

La transformée de Laplace inverse permet de conclure que :

$$\forall t>0 \quad s(t) = K E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

4 Caractéristiques de la réponse à une rampe

On sollicite un système du premier ordre avec une rampe de pente A. On a $e(t) = A t u(t)$ dans le domaine temporel et $E(p) = \dfrac{A}{p^2}$ dans le domaine de Laplace.

Réponse temporelle : $s(t) = AK\left(t - \tau + \tau e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)u(t)$

Valeur initiale : $s(0) = 0$

Valeur finale : $\lim\limits_{t\to+\infty=0} s(t) = +\infty$

Coefficient directeur de l'asymptote en $+\infty$: AK

Erreur dynamique : $AK\tau$