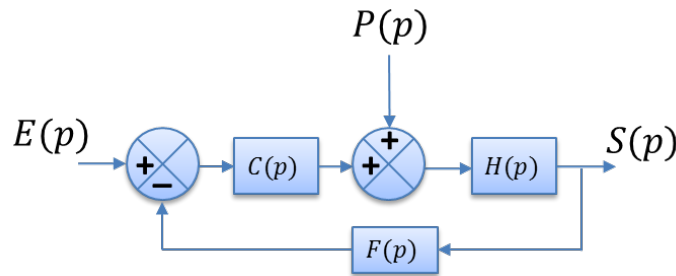
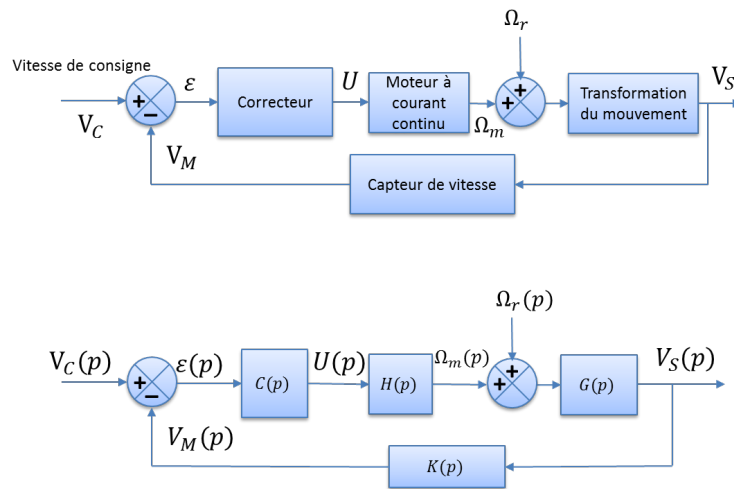


1 Introduction

On s'intéresse à un système asservi classique. Les contraintes à respecter vis-à-vis du cahier des charges sont des contraintes de stabilité, rapidité et de précision.

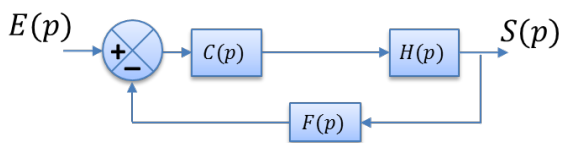


■ **Exemple** Pour modéliser l'axe asservi d'une machine outil la modélisation suivante :



On prendra $K(p) = 1$, $H(p)$ une fonction de transfert du premier ordre de gain K_M et de constante de temps τ , $G(p) = K_T$ permet de transformer la vitesse de rotation en une vitesse de translation. $C(p)$ est un correcteur de la forme $C(p) = K_C$.

2 Étude du modèle sans perturbation



Dans ces conditions, exprimons la fonction de transfert en boucle fermée, la fonction de transfert en boucle ouverte et la précision du système :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)F(p)}$$

$$FTBO(p) = C(p) \cdot H(p) \cdot F(p)$$

Dans tous les cas, $FTBO(p)$ est une fraction rationnelle et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$FTBO(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K(1 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_mp^m)}{p^a(1 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_np^n)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p) = \frac{1}{1 + C(p) \cdot H(p) \cdot F(p)}$$

R La précision du système dépend des caractéristiques de la FTBO. On note K son gain et α sa classe.

Exprimons l'erreur du système :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}} \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot E(p)$$

■ **Exemple** On considère la perturbation nulle. ■

2.1 Entrée échelon

Dans ce cas :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^\alpha}{p^\alpha + K}$$

Ainsi :

- si $\alpha = 0$: $\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K}$. Le système est donc plus précis lorsque le gain K de la FTBO augmente ;
- si $\alpha > 0$: $\varepsilon_S = 0$. L'écart statique est donc nul quel que soit K .

■ **Exemple** ■

2.2 Entrée rampe

Dans ce cas :

$$\varepsilon_V = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Ainsi :

- si $\alpha = 0$: $\varepsilon_S = \infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha = 1$: $\varepsilon_S = \frac{E_0}{K}$. L'écart de trainage diminue lorsque K augmente ;
- si $\alpha > 1$: $\varepsilon_S = 0$. L'écart de trainage est nul.

■ Exemple

2.3 Entrée en accélération

Dans ce cas :

$$\varepsilon_A = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

Ainsi :

- si $\alpha = 0$: $\varepsilon_A = \infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha = 1$: $\varepsilon_A = \infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha = 2$: $\varepsilon_A = \frac{E_0}{K}$. L'écart diminue lorsque K augmente.

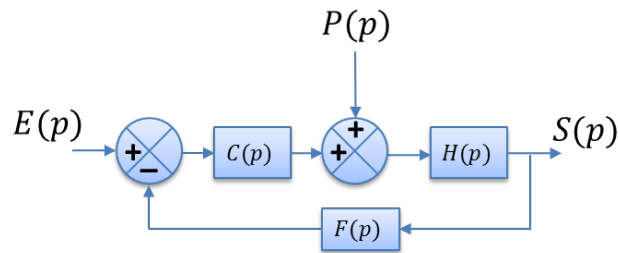
2.4 Bilan

Résultat La précision d'un système dépend du gain K et de la classe α de la FTBO.

$e(t)$	$E(p)$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Échelon	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1+K}$	0	0
Rampe	$\frac{1}{p^2}$	∞	$\frac{1}{K}$	0
Accélération	$\frac{1}{p^3}$	∞	∞	$\frac{1}{K}$

R On montre en deuxième année que l'augmentation de K ou de la classe peut être cause d'instabilité.

3 Étude du système soumis à une perturbation



Exprimons l'erreur du système soumis à perturbation en fonction des deux entrées :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \cdot F(p) \\
 &= E(p) - (P(p) + \varepsilon(p)C(p)) \cdot F(p)H(p) \\
 &= E(p) - P(p)F(p)H(p) - \varepsilon(p)C(p)F(p)H(p)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + C(p)F(p)H(p)) = E(p) - P(p)F(p)H(p)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p) - P(p)F(p)H(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + C(p)F(p)H(p)} E(p) - \frac{F(p)H(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)} P(p)$$

■ **Exemple** Cas 1 : $C(p) = K_C$

■ **Exemple** Cas 2 : $C(p) = \frac{K_C}{p}$

4 Étude de la stabilité des systèmes

Il ne s'agit pas ici de faire une étude exhaustive de la stabilité des systèmes asservis, mais d'avoir une idée sur un des critères de stabilité

4.1 Système d'ordre 1

Soit un système du premier ordre sous sa forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Sa réponse temporelle à une entrée échelon d'amplitude E_0 est donnée par :

$$s(t) = E_0 K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Le système est instable si τ est négatif.

4.2 Système d'ordre 2

Soit un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2}$$

On le sollicite par un échelon d'amplitude E_0 . En conséquence, $E(p) = \frac{E_0}{p}$ et on a :

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2}$$

Cas où $\xi > 1$

Dans ce cas, $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ peut se factoriser sous la forme $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$ avec $p_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ et $p_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$.

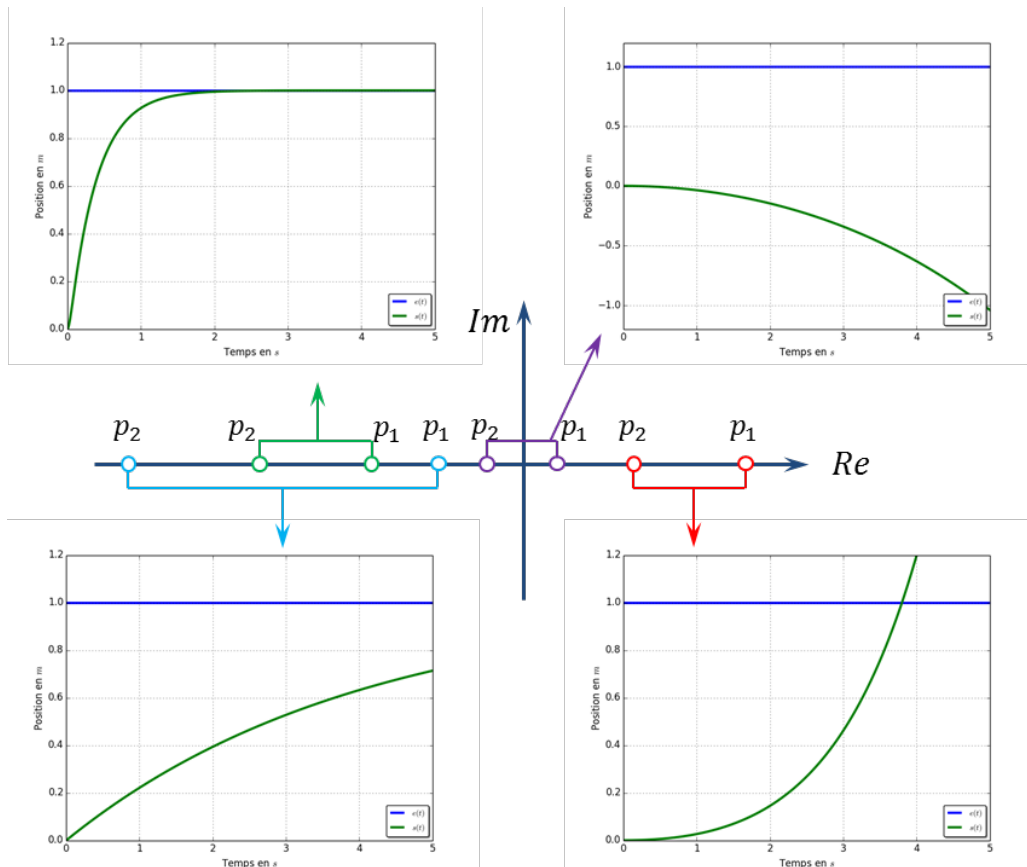
On montre donc que :

$$S(p) = \frac{K E_0}{p} + \frac{K E_0 p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{K E_0 p_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_2}$$

Et alors,

$$s(t) = K E_0 \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t} \right) \cdot u(t)$$

Dans ce cas,



Cas où $\xi = 1$

Dans ce cas, $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ se met sous la forme $(p - p_1)^2$ avec $p_1 = -\omega_0$.

On montre donc que :

$$S(p) = \frac{K E_0}{p} - \frac{K E_0}{p - p_1} - \frac{K E_0 \omega_0}{(p - p_1)^2}$$

Et alors,

$$s(t) = K E_0 (1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}) \cdot u(t)$$

Cas où $\xi < 1$

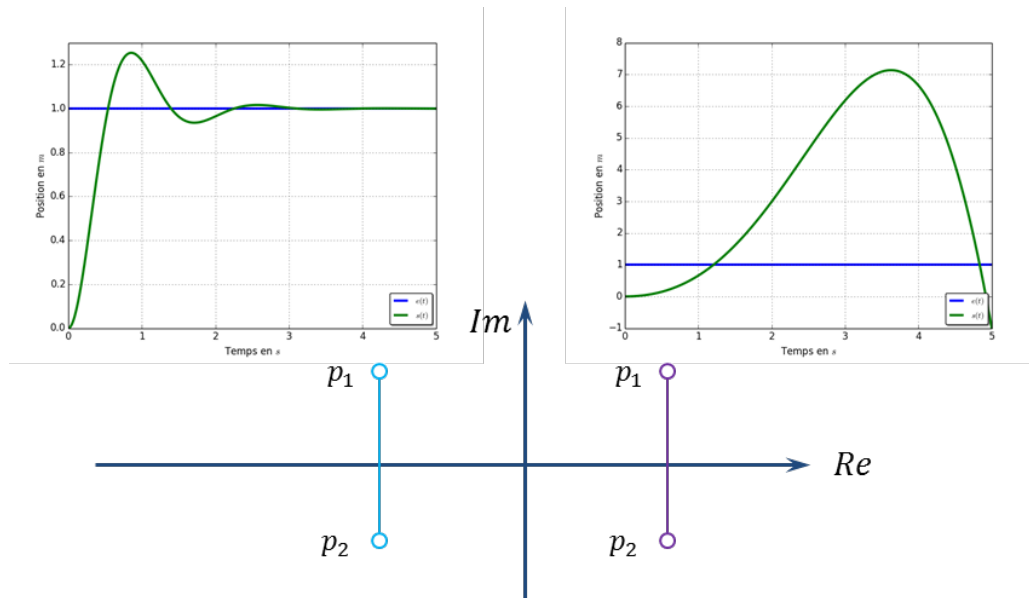
Dans ce cas, $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ peut se factoriser sous la forme $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$ avec $p_1 = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ et $p_2 = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$.

On montre donc que :

$$S(p) = K E_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + \xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\xi^2)} - \frac{\xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\xi^2)} \right)$$

Et alors,

$$s(t) = K E_0 \left(1 - e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \cos(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) \right) \cdot u(t)$$



Résultat On montre qu'un système est stable si les pôles de la FTBF sont à partie réelle **strictement négative**.

Références

- [1] DMU 60 eVo linear, DMG – Deckel Maho – Gildemeiseter, <http://fr.dmg.com>.
- [2] Programmation des machines-outils à commande numérique (MOCN), Étienne Lefur et Christophe Sohier, École Normale Supérieure de Cachan, <http://etienne.lefur.free.fr/>.
- [3] SLCI : Systèmes asservis en boucle fermée : stabilité et précision, Joël Boiron, PTSI – Lycée Gustave Eiffel de Bordeaux.