

## Applications

### Savoirs et compétences :

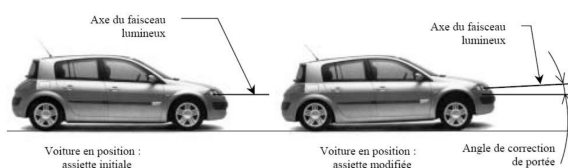
- *Mod-C2.3 : Modèles canoniques du second ordre*
  - *Mod-C2-S1 : Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse temporelle*
  - *Mod-C2-S2 : Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux*

## Correcteur de phare

*D'après ressources de Florestan Mathurin – concours CCP PSI 2003.*

### Présentation du système

L'assiette d'un véhicule se modifie avec sa charge, le profil de la route ou les conditions de conduite (phase de freinage ou d'accélération). Cette modification entraîne une variation d'inclinaison de l'axe du faisceau lumineux produit par les phares du véhicule. Ceux-ci peuvent alors éblouir d'autres conducteurs ou mal éclairer la chaussée.



Certaines voitures sont équipées de système de correction de portée. Ce système fait appel à des capteurs d'assiette reliés aux essieux avant et arrière du véhicule. Les données sont traitées électroniquement par un calculateur et transmises aux actionneurs situés derrière les projecteurs. La position du projecteur est ajustée en maintenant un angle de faisceau optimal évitant tout éblouissement et fournissant le meilleur éclairage de la route. Le système étudié est un correcteur de portée statique, qui corrige la portée lorsque le véhicule est à l'arrêt et conserve cette correction lorsque le véhicule roule (le correcteur ne tient compte que de la variation d'assiette due à la charge).

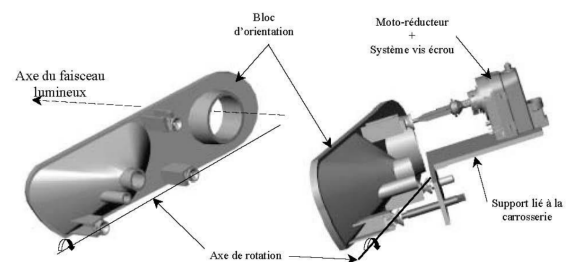
Le but de l'étude est d'analyser le système et de montrer s'il est capable de corriger la portée de manière dynamique, c'est à dire en tenant compte des variations d'assiette dues au profil de la route.

### Éléments constitutifs du correcteur de portée

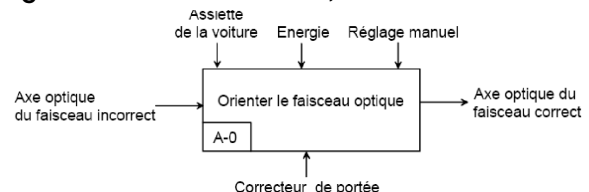
**Capteurs d'assiette :** codeurs optiques permettant de mesurer le débattement des suspensions.

**Système d'orientation :** bloc d'orientation + moto-réducteur + système vis écrou

Le bloc d'orientation supporte les différentes lampes du phare (codes, clignotants...). Il peut pivoter par rapport au support lié à la carrosserie autour d'un axe horizontal (axe de rotation indiqué sur la figure ci-dessous). Le bloc est protégé par une vitre liée à la carrosserie. Ce mouvement est motorisé grâce au moto-réducteur + système vis écrou. Il existe aussi une possibilité de réglage manuel en sortie d'usine ou en cas de défaillance du système électrique.



### Diagrammes SADT niveau A-0, A0 et A3



### Étude de la chaîne d'action complète

La chaîne d'action complète comprend :

- l'ensemble transducteur (**capteur + amplificateur + calculateur**) qui mesure l'angle de tangage  $\beta$

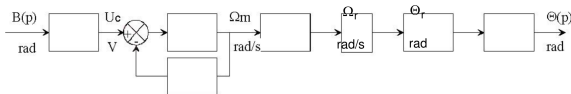
du véhicule et commande le moteur du système. L'ensemble est assimilable à un gain pur :  $K_c$  ;

- le **moteur à courant continu** dont la fonction de transfert est notée  $M(p)$  ;
- on équipe ce moteur d'un retour tachymétrique assimilable à un gain pur :  $K_{tachy} = 0,03 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$  ;
- le **réducteur de vitesse** dont le rapport de réduction est de 490 ;
- l'ensemble **vis-écrou** (de pas  $p = 6 \text{ mm}$ ) qui transforme la rotation de l'axe du réducteur en translation de l'axe de sortie. (NB : 1 tour de la vis fait avancer de 1 pas l'écrou) ;
- le **bloc d'orientation** : l'angle de correction de portée  $\theta(t)$  étant petit, on peut linéariser la loi entrée-sortie sur le domaine d'utilisation ; l'angle  $\theta(t)$  est proportionnel au déplacement  $x(t)$  de la vis.

( $\theta(t)$  varie entre  $-\frac{\pi}{20}$  et  $\frac{\pi}{20}$  et pour  $x(t)$  compris entre -15mm et +15mm).

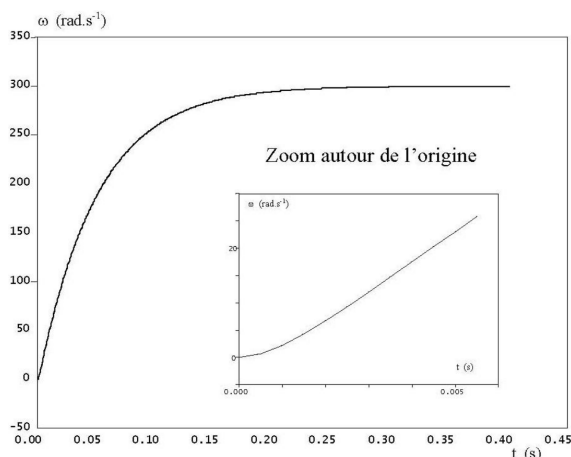
**Question 1** Refaire, sur votre copie, le diagramme fonctionnel de la chaîne d'action ci-dessous, en précisant le nom des constituants dans les blocs, les informations véhiculées entre les blocs ainsi que leur symbole et leur unité (les fonctions de transfert ne seront pas déterminées). NB :

- l'entrée  $B(p)$  est la transformée de Laplace de  $\beta(t)$  et la sortie  $\Theta(p)$ , la transformée de Laplace de  $\theta(t)$  ;
- attention, un bloc modélise le passage de la vitesse angulaire  $\Omega(p)$  à la position angulaire  $\Theta(p)$ .



**Question 2** Refaire, sur votre copie, le diagramme fonctionnel de la chaîne d'action ci-dessus, mais cette fois-ci en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc.

Pour déterminer la fonction de transfert du moteur,  $M(p)$ , on dispose de sa réponse indicielle (entrée unitaire) :



**Question 3** Quelle est la forme de la fonction de transfert du moteur et pourquoi ?

**Question 4** Quelle hypothèse pouvons-nous faire pour modéliser le système par un système du 1<sup>er</sup> ordre ? NB : Pour démontrer ce raisonnement, déterminer la réponse temporelle d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre apériodique, puis simplifier

cette réponse avec votre hypothèse et enfin conclure. Cette hypothèse vous semble-t-elle justifiée ici au vu de la réponse indicielle.

**Question 5** Identifier  $M(p)$  à un 1<sup>er</sup> ordre. (Pour cela déterminer les paramètres caractéristiques sur la courbe).

**Question 6** En déduire la fonction de transfert  $M'(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}$  du moteur équipé du retour tachymétrique. Quels sont les avantages et les inconvénients de cette boucle de retour ?

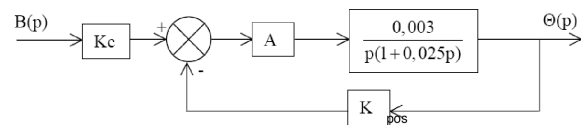
La fonction de transfert de la chaîne d'action complète est donnée approximativement par :  $H(p) = \frac{\Theta(p)}{B(p)} = K_c \frac{0,003}{(1 + 0,025p)p}$  (Les angles d'entrée et de sortie sont exprimés en radian).

Le véhicule est brusquement chargé à l'arrière.

**Question 7** Tracer, SANS FAIRE DE CALCUL, l'allure de la loi d'entrée, puis l'allure de la réponse. Justifier votre tracé. Est-ce satisfaisant ?

Pour remédier à ce problème on asservit le système en position en plaçant :

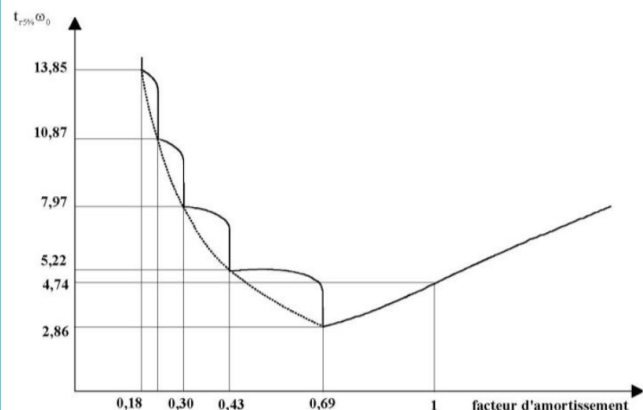
- un capteur de position, de gain  $K_{pos}$ , qui mesure l'angle  $\theta$ ,
- un amplificateur de gain pur  $A$ .



**Question 8** Déterminer la nouvelle fonction de transfert  $\frac{\Theta(p)}{B(p)}$  ainsi que ses paramètres caractéristiques.

**Question 9** Expliquer en deux lignes pourquoi le problème a été remédié.

**Question 10** À partir de la courbe ci-contre, déterminer la quantité  $AK_{pos}$  qui permet d'avoir le système le plus rapide. Calculer alors le temps de réponse à 5% du système.



## Étude du plan horizontal réglable (PHR) de l'airbus A340

D'après ressources d'Alain Caignot.

### Présentation

Le thème proposé concerne l'aéronautique et plus particulièrement la commande en position du plan horizontal réglable (PHR) de l'airbus A340.

Le calculateur génère une tension de commande qui va alimenter le moteur électrique qui est asservi en position angulaire pour permettre de générer l'angle de consigne initial. Cet angle de consigne initial est adapté à l'aide du réducteur 1. L'angle de sortie du réducteur 1 permet de commander les deux distributeurs proportionnels, qui vont délivrer un débit de fluide hydraulique pour alimenter les deux moteurs hydrauliques. Ces deux moteurs hydrauliques transforment l'énergie hydraulique en énergie mécanique de rotation. Les deux mouvements de rotation ainsi générés sont additionnés à l'aide du différentiel pour créer un seul mouvement de rotation à sa sortie. La sortie du différentiel est reliée au réducteur 6 qui va adapter l'énergie mécanique de puissance pour actionner la vis 4. La vis 4 est reliée à la gouverne de profondeur et permet de commander son angle.

L'angle de rotation de la vis 4 est capté à l'aide du réducteur 7 qui va l'adapter afin d'être comparé à la rotation de commande des distributeurs à l'aide du train épicycloïdal, qui joue ici le rôle d'un comparateur.

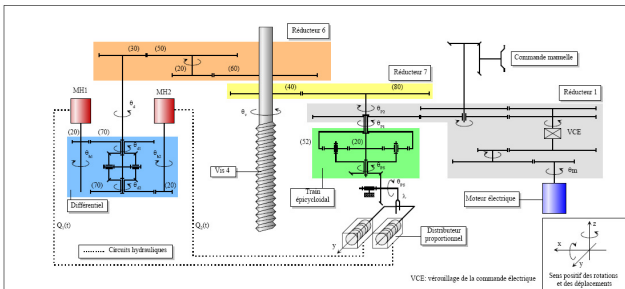


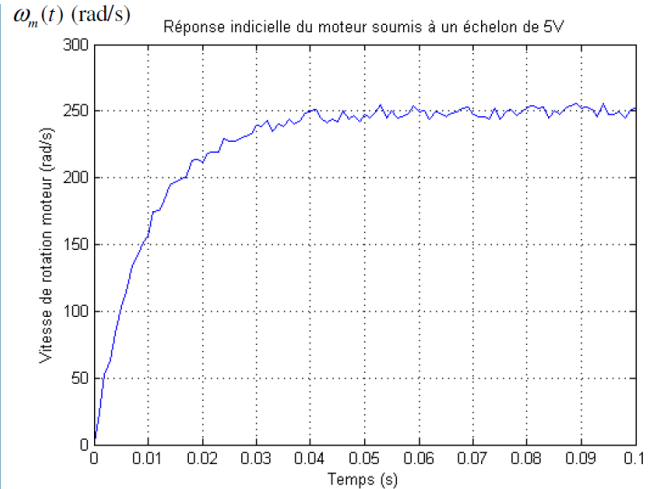
Figure 3

### Étude de l'asservissement en position du moteur électrique

#### Analyse du moteur électrique

Le moteur électrique est un moteur à courant continu. Les ingénieurs procèdent à une identification du moteur en le soumettant à un échelon de tension  $U = 5V$ , afin de déterminer par un modèle de comportement sa fonction de transfert. On obtient la réponse indicielle (vitesse de rotation  $\omega_m(t)$ ) donnée ci-après.

**Question 1** Identifier la réponse en justifiant le modèle retenu et la (ou les) techniques utilisées pour déterminer les paramètres. Les tracés seront laissés apparents sur la figure ci-après.



Pour valider le modèle expérimental, on peut utiliser les équations du moteur à courant continu :

- équation électrique liant la tension  $u$  aux bornes du moteur et le courant  $i$  le traversant :  $u(t) = Ri(t) + e(t)$ ;
- équation de couplage électrique liant la tension contre-électromotrice  $e(t)$  à la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  de l'arbre du moteur et le couple moteur :  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ;
- équation de la mécanique liant la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  et le couple moteur  $C_m(t)$  :  $J_e \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$ ;
- équation de couplage mécanique liant le couple moteur au courant :  $C_m(t) = k_a i(t)$

Avec :

- $R$  : la résistance de l'induit ( $R = 1\Omega$ ) ;
- $J_e$  : inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur ( $J_e = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ) ;
- $k_e$  : constante de force contre électromotrice ( $k_e = 0,02 \text{ V/(rad/s)}$ ) ;
- $k_a$  : constante de couple ( $k_a = 0,02 \text{ Nm/A}$ ).

### Détermination de la fonction de transfert du moteur

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert  $M(p) = \frac{\theta_m(p)}{U(p)}$  du moteur électrique et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un intégrateur  $1/p$  multiplié par une fonction de transfert d'un 1<sup>er</sup> ordre de gain statique  $K_m$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

**Question 3** Donner les expressions littérales de  $K_m$  et  $\tau_m$ .

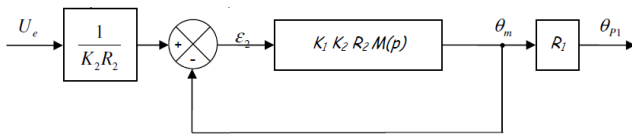
**Question 4** Application numérique : calculer  $K_m$  et  $\tau_m$  en précisant les unités.

### Schéma bloc de l'asservissement

La fonction de transfert du correcteur et amplificateur peut être assimilé dans un gain  $K_1$ . La fonction de transfert du réducteur 2 est un gain noté  $R_2$ . La fonction de transfert du réducteur 1 est un gain noté  $R_1$ . La fonction de transfert

du capteur potentiométrique est assimilée à un gain noté  $K_2$ .

Les schéma bloc peut se mettre sous la forme suivante :



Le rapport de transmission du réducteur 1 est  $R_1 = \frac{1}{150}$ .

### Détermination de la fonction de transfert en boucle ouverte

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $T(p) = \frac{\theta_m(p)}{\varepsilon_2(p)}$ , la mettre sous la forme  $T(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau_m p)}$  et en déduire l'expression du gain de la boucle  $K_{BO}$ .

### Détermination de la fonction de transfert en boucle fermée

**Question 6** Déterminer la fonction de transfert  $F(p) = \frac{\theta_{p1}(p)}{U_e(p)}$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre. On notera  $K_{BF}$  le gain statique  $\xi$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation propre.

**Question 7** Donner l'expression littérale de  $K_{BF}$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $K_2$  de  $\xi$  et  $\omega_0$  en fonction de  $K_{BO}$  et  $\tau_m$ .

### Analyse des performances

**Question 8** Déterminer la valeur du gain de boucle  $K_{BO}$  de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement.

**Question 9** Déterminer l'écart de position pour une entrée de type échelon en calculant l'écart statique :  $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_2(t)$ . Le système est précis à une entrée de type échelon si  $\varepsilon_s = 0$ . Conclure.

**Question 10** Déterminer le temps de réponse à 5% à l'aide de la figure 3.

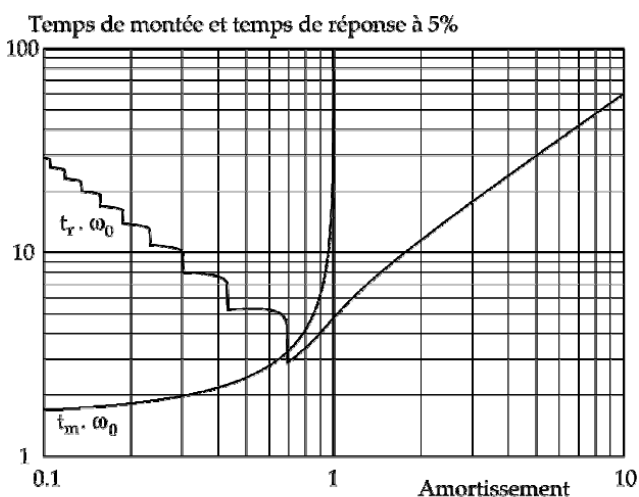


Figure 3

### Analyse des performances en mode suiveur

Dans le cas d'une entrée de type rampe  $u_e(t) = t u(t)$ , le cahier des charges stipule que l'écart de traînage ne doit pas excéder  $\varepsilon_T \leq 0,5 \text{ rad}$ .

**Question 11** Déterminer l'écart de traînage  $\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_2(t)$  à une entrée de type rampe.

**Question 12** En déduire une première inégalité sur  $K_{BO}$  permettant de vérifier cette partie du cahier charges.

**Question 13** En reprenant la **Question 8**, déterminer une seconde inégalité sur  $K_{BO}$  permettant d'assurer que la réponse indiciale du système ne présentera pas de dépassement.

Dans la pratique le régulateur est un correcteur dont la fonction de transfert est :

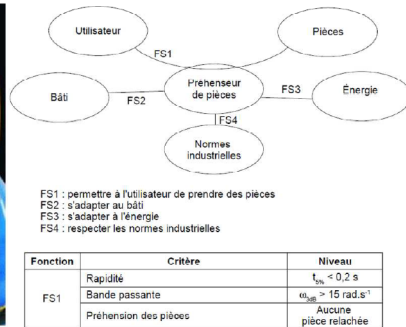
$$C_1(p) = K_1 \frac{1 + T_1 p}{1 + b T_1 p} \text{ avec } b > 1$$

**Question 14** Justifier la nécessité de ce correcteur.

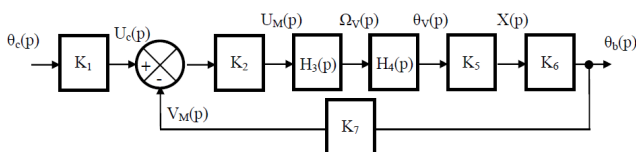
## Robot préhenseur

D'après ressources Florestan Mathurin.

Le support de l'étude est un préhenseur de pièces. Il permet à l'utilisateur de prendre des pièces pour les déplacer. L'application illustrée sur l'image ci-dessous est la prise de bouteilles plastiques sur un tapis roulant, afin de les trier pour faire du recyclage.



L'objectif de cette étude est de vérifier les performances de la fonction FS1, décrites dans le cahier des charges de ce système. On réalise l'asservissement de la position angulaire d'un bras du préhenseur de pièces, selon le schéma bloc qui suit (l'angle du bras  $\theta_b(t)$ , l'angle consigne est  $\theta_c(t)$ ).



Avec  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_5$ ,  $K_6$  et  $K_7$  : constantes,  $\theta_c(p)$  : angle de consigne,  $U_c(p)$  : tension de consigne,  $U_M(p)$ , tension moteur,  $\Omega_V(p)$  : vitesse angulaire de la vis,  $\theta_V(p)$  : angle de la vis,  $X(p)$  : déplacement de l'écrou,  $\theta_b(p)$  : position angulaire du bras,  $V_M(p)$  : tension mesurée image de  $\theta_b(p)$ .

**Question 1** Déterminer le lien entre  $K_1$  et  $K_7$  pour que  $\theta_b(p)$  soit asservi sur  $\theta_c(p)$ .

La fonction de transfert  $H_3(p)$  est réalisée par un moteur, dont les équations de comportement sont :  $u_M(t) = e(t) + R \cdot i(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_v(t)$ ,  $J \cdot \frac{d\omega_v(t)}{dt} = C_M(t)$ ,  $C_M(t) = k_m i(t)$ .

Avec  $u_M(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V),  $e(t)$  : force contre-électromotrice (en V),  $i(t)$  intensité (en A),  $\omega_v(t)$  : vitesse de rotation de la vis en sortie de moteur (en rad/s),  $C_M(t)$  ; couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner).  $J$  inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ),  $R$  résistance du moteur (en  $\Omega$ ),  $k_e$  constante de force contre-électromotrice ( $\text{V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$ ),  $k_m$  : constante de couple ( $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ ).

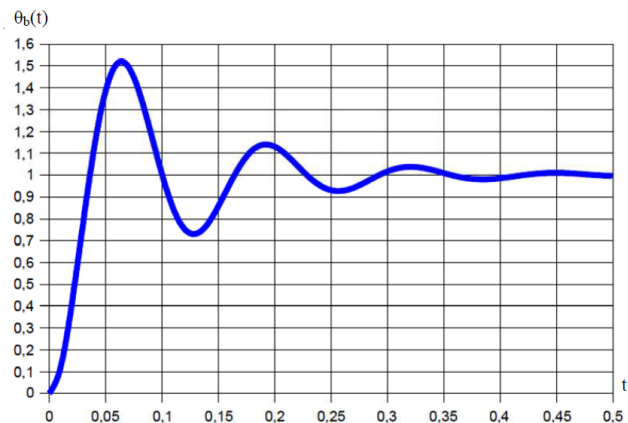
**Question 2** Déterminer la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{\Omega_V(p)}{U_M(p)}$ . Montrer que  $H_3(p)$  peut se mettre sous la forme canonique d'un système du premier ordre où les valeurs  $K_3$  et  $T_3$  seront à déterminer.

**Question 3** Déterminer  $\omega_v(t)$  lorsque  $u_M(t)$  est un échelon de tension d'amplitude  $U_0$ . Préciser la valeur de  $\omega_v(t)$  à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de  $\omega_v(t)$  et la valeur finale atteinte par  $\omega_v(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert  $H_4(p)$ .

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta_b(p)}{\theta_c(p)}$ . Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre ou les valeurs de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$  seront à déterminer.

La réponse indicielle de  $H(p)$  à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :



**Question 6** Déterminer, en expliquant la méthode, les valeurs numériques de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

**Question 7** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant à la capacité du préhenseur à vérifier (ou non) le critère de rapidité de FS1.



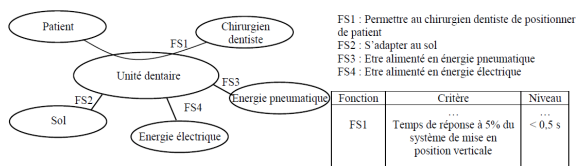
## UNITÉ DENTAIRE

### Unité dentaire

(Selon le concours E3A PSI 2007)

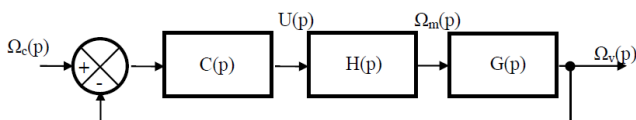
Le support de l'étude est une "unité dentaire" dont on donne un extrait du cahier des charges fonctionnel. Cet équipement a été conçu et réalisé dans le but d'une adaptabilité maximale aux différentes méthodes de travail des chirurgiens dentistes. Son ergonomie, sa maniabilité, son design, sa fiabilité en font une "unité universelle". Sa conception est modulaire avec une technologie avancée.

Le chirurgien dentiste possède une pédale et un pupitre de commande, qui lui permet de monter ou descendre verticalement le corps du patient, de l'incliner plus ou moins, et de positionner sa tête. Le patient pouvant prendre une position spatiale pertinente, tous les actes médicaux sont facilités.



On s'intéresse dans ce sujet au critère de la FS1 concernant le temps de réponse du système permettant de mettre en position verticale le patient.

Pour régler le patient en position verticale, le chirurgien dentiste appuie sur une pédale, plus ou moins fort. Un moteur électrique se met en route, sa vitesse de rotation dépend de l'appui plus ou moins profond du chirurgien dentiste sur la pédale. La vitesse de rotation du moteur est diminuée par un réducteur à engrenages. En sortie du réducteur à engrenages se trouve une vis dont la rotation  $\Omega_v(p)$  entraîne, par un système vis-écrou, la translation du siège en hauteur. L'ensemble peut se représenter par le schéma bloc suivant. Le composant de fonction de transfert  $C(p)$  est un correcteur :



**Question 1** Déterminer le nom des composants qui réalisent les fonctions  $H(p)$  et  $G(p)$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système  $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)}$ .

Les équations du moteur utilisé sont les suivantes :

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad e(t) = k_e \omega_m(t) \quad J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - f \omega_m(t)$$

On note  $u(t)$  tension du moteur,  $e(t)$ , la force contre électro motrice du moteur,  $i(t)$  l'intensité dans le moteur,  $C_m(t)$  le couple exercé par le moteur et  $\omega_m(t)$  la vitesse angulaire du moteur. Les grandeurs physiques  $R$ ,  $L$ ,  $k_e$ ,  $J$ ,  $f$  et  $k_m$  sont des constantes.

**Question 3** En supposant les conditions initiales nulles, exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.

**Question 4** Montrer que, dans le domaine de Laplace, la relation entre  $\Omega_m(p)$  et  $U(p)$  peut s'écrire sous la forme d'une fonction de transfert du second ordre. On déterminera les différentes constantes.

Si on utilise un correcteur proportionnel, l'application numérique des grandeurs physiques permet de trouver la fonction suivante :  $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_T}{1 + T_T p}$  avec  $K_T = 0,9$  et  $T_T = 0,1$  s..

**Question 5** Déterminer  $\omega_v(t)$  lorsque le chirurgien dentiste demande un échelon de rotation  $\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$ . Exprimer le résultat en fonction de  $\omega_{c0}$ ,  $K_T$  et  $T_T$ .

**Question 6** Déterminer le temps de réponse à 5% du système et effectuer l'application numérique. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Le patient, initialement immobile, bouge verticalement selon le déplacement  $x_v(t)$  tel que  $\frac{dx_v(t)}{dt} = a \omega_v(t)$  avec  $a$  constante qui représente le pas réduit de la vis.

**Question 7** Déterminer la transformée de Laplace  $X_v(p)$  de  $x_v(t)$ .

**Question 8** Déterminer  $x_v(t)$  en fonction de  $a$ ,  $K_T$ ,  $T_T$  et  $\omega_{c0}$ .

Si on utilise un correcteur proportionnel, dérivé et intégral, l'application numérique des grandeurs physiques permet de trouver la fonction suivante :  $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1}{1 + 2p + p^2}$

**Question 9** Déterminer  $\omega_v(t)$  lorsque le chirurgien dentiste demande un échelon de rotation  $\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$ .

**Question 10** Déterminer si le temps de réponse à 5% est plus faible ou plus grand que dans le cas précédent. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.