

Découverte des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Analyse, Modélisation, Résolution

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

PTSI

Chapitre 3

Modélisation des SLCI par schémas blocs

Savoirs et compétences :

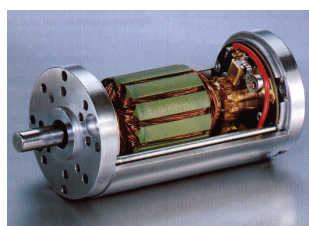
□ Modéliser :

- Mod-C4.1 : Représentation par schéma bloc
- Mod-C4.2 : Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée
- Mod-C4.3 : Classe d'un système
- Mod-C4-S1 : Établir le schéma-bloc du système
- Mod-C4-S2 : Déterminer les fonctions de transfert du système en boucle ouverte et en boucle fermée.

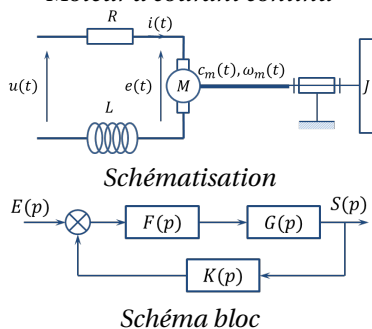
□ Résoudre :

- Rés-C5-S1 : Schéma bloc ou d'une fonction de transfert les grandeurs caractérisant les performances du modèle

Cours



Moteur à courant continu



1	Fonction de transfert des systèmes	2
1.1	Le moteur à courant continu	2
1.2	Définitions	2
1.3	Représentation par schémas blocs	4
2	Schémas blocs et fonctions de transfert de systèmes élémentaires	4
2.1	Théorèmes de la mécanique	5
2.2	Lois de frottements visqueux	5
2.3	Lois de comportement des ressorts	5
2.4	Systèmes électriques	6
2.5	Le moteur à courant continu en schéma bloc	6
3	Manipulation des schémas blocs	7
3.1	Blocs en série	7
3.2	Blocs en parallèle	7
3.3	Comparateurs en série	7
3.4	Déplacement des points de prélèvement	7
3.5	Déplacement des sommateurs	7
4	Fonctions de transfert des systèmes bouclés	8
4.1	Systèmes en boucles fermées	8
4.2	Calcul de l'erreur (ou écart)	9
4.3	Systèmes en boucles ouvertes	9
4.4	Fonction de transfert boucle fermée des systèmes multi-variables	9

On a vu précédemment que les équations différentielles régissant le comportement d'un système peuvent être transformées dans le domaine de Laplace dans le but d'être résolues.

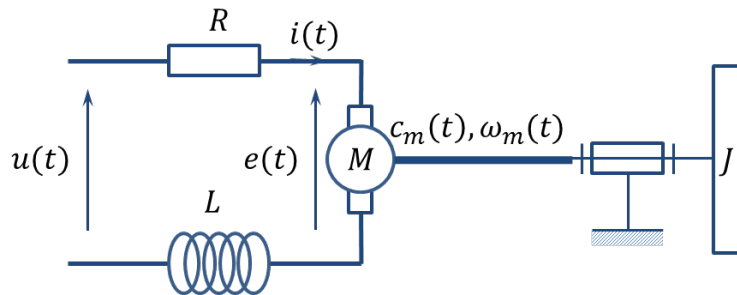
La complexité des systèmes nous poussent à utiliser une représentation schématique : les schémas blocs. Il faudra alors déterminer le lien entre cette représentation et la représentation dans le domaine de Laplace.

- Comment modéliser un système complexe multiphysique en utilisant la modélisation en schéma bloc et la modélisation dans le domaine de Laplace ?
- Comment déterminer la fonction de transfert d'un système dans le but de prévoir son comportement ?

1 Fonction de transfert des systèmes

1.1 Le moteur à courant continu

On adopte, pour le moteur à courant continu, la représentation suivante :



Loi des mailles dans le circuit électrique :

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

Équation électromécanique :

Couple de frottement en sortie du moteur :

$$c_r(t) = f_v \omega_m(t)$$

$$e(t) = K_E \cdot \omega_m(t)$$

Équation de la dynamique de l'arbre moteur :

$$c_m(t) = K_C \cdot i(t)$$

Ainsi, dans le cas du moteur à courant continu, on peut écrire l'équation différentielle liant la tension d'entrée aux bornes du circuit électrique $u(t)$ et la vitesse angulaire $\omega_m(t)$:

■ **Exemple** Équation différentielle du MCC :

$$u(t) = \left(K_e + \frac{R f_v}{K_C} \right) \omega_m(t) + \left(\frac{R J}{K_C} + \frac{L f_v}{K_C} \right) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{L J}{K_C^2} \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2}$$

Dans le cas où on néglige l'impact du couple résistant, on a :

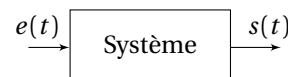
$$u(t) = K_e \omega_m(t) + \frac{R J}{K_C} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{L J}{K_C^2} \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2}$$

1.2 Définitions

Soit un système linéaire, continu, invariant et mono-variable d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$. Le système est donc modélisable par une équation différentielle de la forme suivante :

$$a_0 s(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = b_0 e(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad n \geq m$$

Ce système est modélisable par un schéma bloc :



En se plaçant dans les conditions de Heaviside, l'équation différentielle se transforme dans le domaine de Laplace :

$$a_0 S(p) + \sum_{i=1}^n a_i p^i S(p) = b_0 E(p) + \sum_{i=1}^m b_i p^i E(p)$$

En factorisant l'expression, on obtient donc :

$$S(p) \sum_{i=0}^n a_i p^i = E(p) \sum_{i=0}^m b_i p^i$$

Définition Fonctions de transfert – Transmittance

On définit la fonction de transfert d'un système la fonction $H(p)$ telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

■ Exemple Équation du MCC dans le domaine de Laplace :

$$U(p) = \left(K_e + \frac{R f_v}{K_C} \right) \Omega_m(p) + \left(\frac{R J}{K_C} + \frac{L f_v}{K_C} \right) p \Omega_m(p) + \frac{L J}{K_C^2} p^2 \Omega_m(p)$$

$$\Leftrightarrow U(p) = \Omega_m(p) \left[\left(K_e + \frac{R f_v}{K_C} \right) + \left(\frac{R J}{K_C} + \frac{L f_v}{K_C} \right) p + \frac{L J}{K_C^2} p^2 \right]$$

Fonction de Transfert du MCC :

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{1}{\left(K_e + \frac{R f_v}{K_C} \right) + \left(\frac{R J}{K_C} + \frac{L f_v}{K_C} \right) p + \frac{L J}{K_C^2} p^2} = \frac{1}{\left(\frac{K_e K_C + R f_v}{K_C} \right) + \left(\frac{R J + L f_v}{K_C} \right) p + \frac{L J}{K_C^2} p^2}$$

Sous sa forme normalisée, la fonction de transfert devient :

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_C}{K_C K_e + R f_v}}{1 + \left(\frac{R J + L f_v}{K_C K_e + R f_v} \right) p + \frac{L J}{K_C^2 K_e + R K_C f_v} p^2}$$

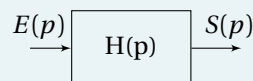
Note : le dénominateur a été factorisé par $K_e + \frac{R f_v}{K_C} = \frac{K_C K_e + R f_v}{K_C}$.

Dans le cas où on néglige l'impact du couple résistant, on a :

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_C K_e} p + \frac{L J}{K_C^2 K_e} p^2}$$

Définition Schéma-bloc

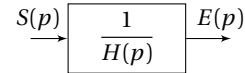
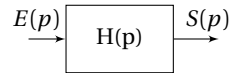
Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc suivant :



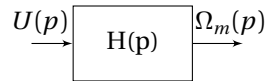
La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p)$$

R Les deux représentations suivantes sont équivalentes :



■ **Exemple** Schéma bloc du moteur à courant continu :



On a bien :

$$\Omega_m(p) = U(p) \cdot H(p)$$

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p . En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Le **degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système** ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).
- L'équation $D(p) = 0$ est appelée équation caractéristique.
- Le facteur constant K est appelé gain du système.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. α est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

1.3 Représentation par schémas blocs

La représentation par schéma bloc d'un système est déduite de la représentation par la transformée de Laplace.

Le schéma fonctionnel, ou schéma bloc, est ainsi une représentation graphique du système d'équations différentielles, ou des relations entre les variables que décrit le système d'équations différentielles.

Résultat Pour établir un schéma fonctionnel la démarche est la suivante :

1. Appliquer la transformée de Laplace à chaque équation du système différentiel : on obtient alors un système d'équations linéaires dans le domaine de Laplace, que va traduire le schéma.
2. Rechercher les fonctions de transfert élémentaires et les variables qu'elles relient.
3. Constituer, tracer les schémas en assemblant les blocs des fonctions de transfert élémentaires.
4. Rassembler les schémas, simplifier à l'aide des règles définies un peu plus tard.

La représentation par le schéma fonctionnel et la fonction de transfert permettent ainsi de déterminer les caractéristiques principales du système sans résoudre d'équations différentielles.

2 Schémas blocs et fonctions de transfert de systèmes élémentaires

Pour les équations "simples" de la physique, on peut aisément mettre les théorèmes fondamentaux sous forme de schémas blocs et de fonctions de transfert.

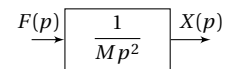
2.1 Théorèmes de la mécanique

Théorème de la
résultante dynamique
(position)

Exemple : Mouvement
d'un solide en translation

$$F(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$F(p) = M p^2 X(p)$$

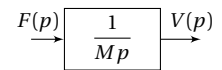


Théorème de la
résultante dynamique
(vitesse)



$$F(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(p) = M p V(p)$$

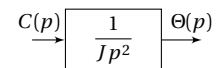


Théorème du moment
dynamique (position)

Mouvement d'un solide en
rotation

$$C(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$$

$$C(p) = J p^2 \Theta(p)$$

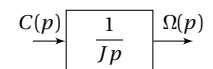


Théorème du moment
dynamique (vitesse)



$$C(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$C(p) = J p \Omega(p)$$



R On note :

- $C(t)$: le couple exprimé en $N.m$
- J : l'inertie exprimée en $kg.m^2$
- θ : position angulaire en rad
- ω : vitesse angulaire en rad/s

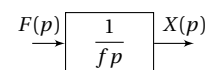
2.2 Lois de frottements visqueux

Frottements visqueux
pour des solides en
translation



$$f(t) = f \frac{dx(t)}{dt}$$

$$F(p) = f p X(p)$$

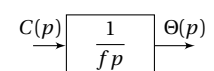


Frottements visqueux
pour des solides en
rotation

Frottements dans les pa-
liers d'un moteur à cou-
rant continu

$$C(t) = f \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$C(p) = f p \Theta(p)$$



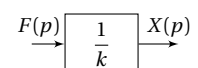
2.3 Lois de comportement des ressorts

Ressorts en compression
de raideur k



$$f(t) = k x(t)$$

$$F(p) = k X(p)$$

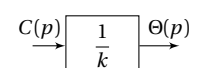


Ressorts en traction de
raideur k



$$C(t) = k \theta(t)$$

$$C(p) = k \Theta(p)$$



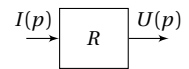
2.4 Systèmes électriques

Résistor



$$u(t) = Ri(t)$$

$$U(p) = RI(p)$$

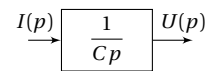


Condensateur

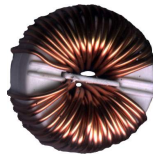


$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$U(p) = \frac{1}{Cp} I(p)$$

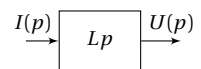


Inductance



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$U(p) = LpI(p)$$



2.5 Le moteur à courant continu en schéma bloc

■ **Exemple** Exprimer les équations du moteur à courant continu sous forme de schéma bloc.

$$c_r(t) = f_v \omega_m(t)$$

$$C_r(p) = f_v \Omega_m(p)$$

$$e(t) = K_E \cdot \omega_m(t)$$

$$E(p) = K_E \cdot \Omega_m(p)$$

$$c_m(t) = K_C \cdot i(t)$$

$$C_m(p) = K_C \cdot I(p)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$U_R(p) = R \cdot I(p)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$U_L(p) = LpI(p)$$

$$u_L(t) + u_R(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

$$U_L(p) + U_R(p) = LpI(p) + RI(p)$$

$$u(t) - e(t) = u_L(t) + u_R(t)$$

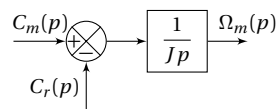
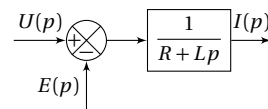
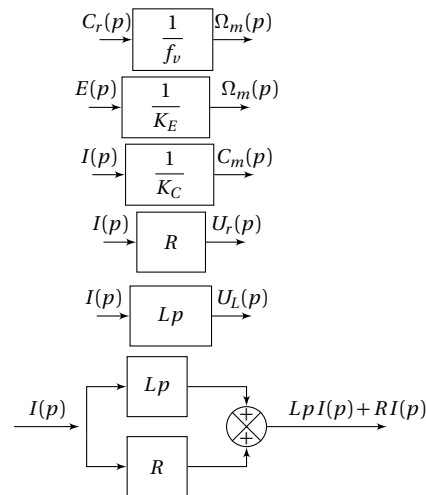
$$U(p) - E(p) = U_L(p) + U_R(p)$$

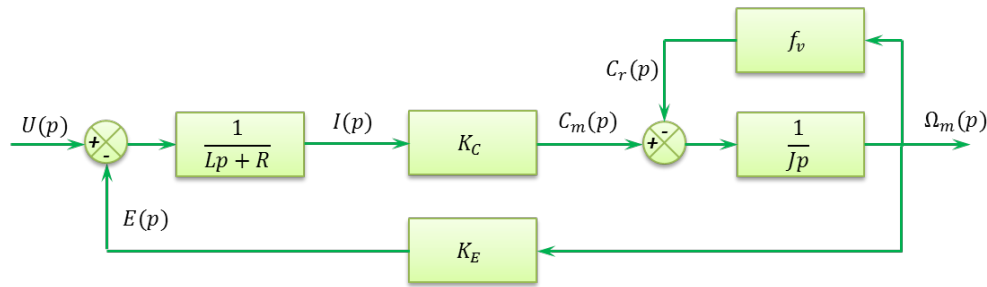
$$U(p) - E(p) = LpI(p) + RI(p)$$

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

$$Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$$

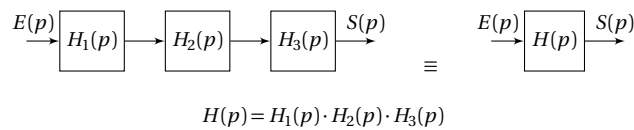
Schéma bloc du MCC complet :



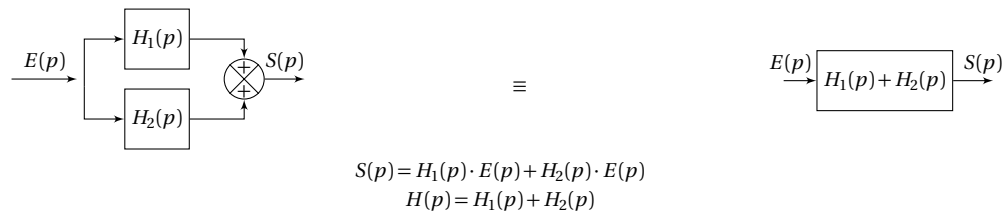


3 Manipulation des schémas blocs

3.1 Blocs en série



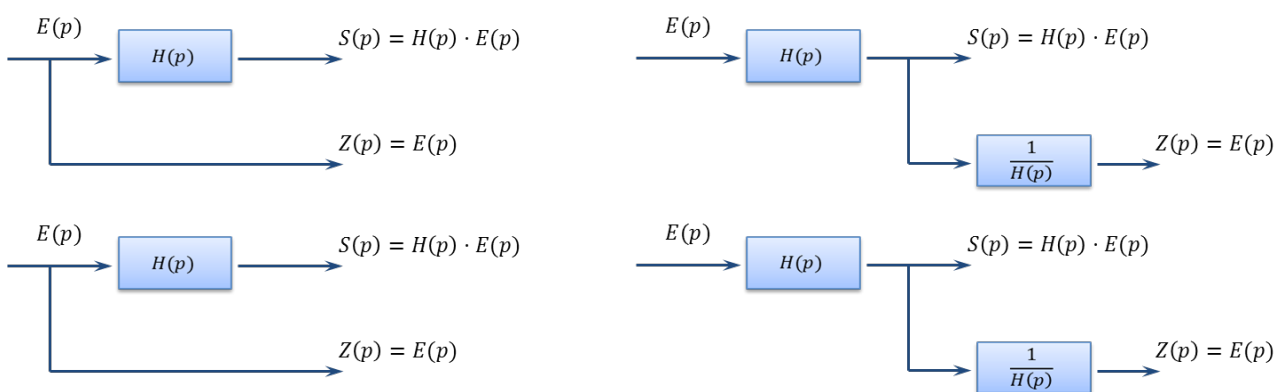
3.2 Blocs en parallèle



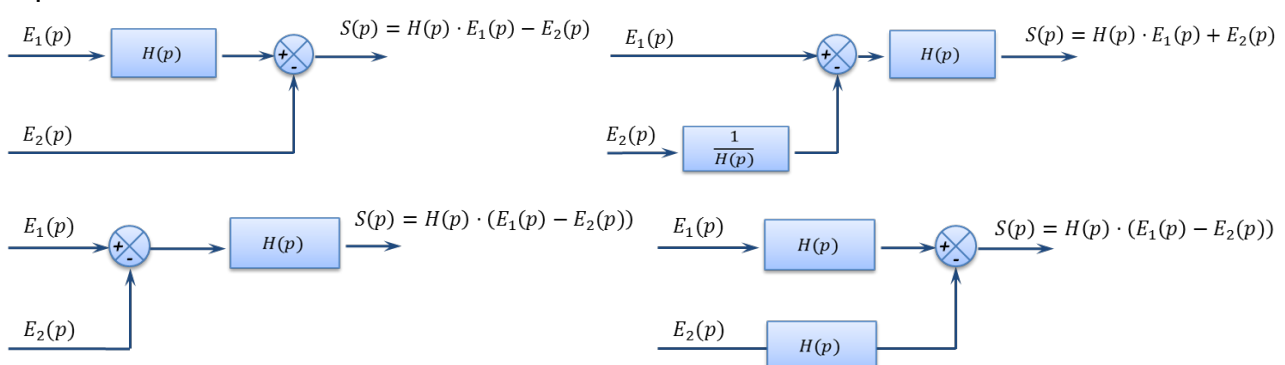
3.3 Comparateurs en série



3.4 Déplacement des points de prélèvement



3.5 Déplacement des sommateurs



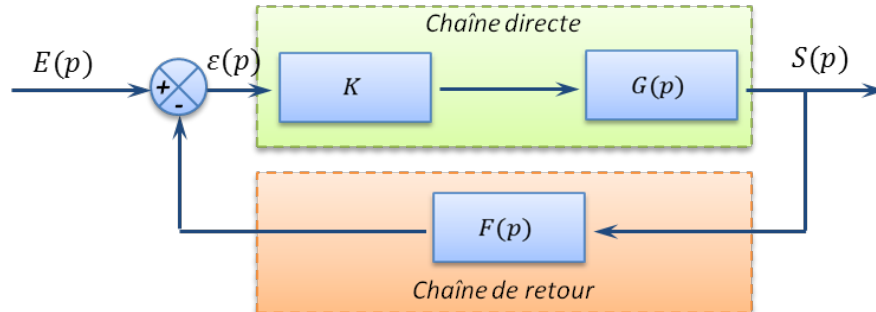
4 Fonctions de transfert des systèmes bouclés

Il peut être parfois intéressant de modifier un diagramme fonctionnel en vue de simplifier les calculs de fonctions de transfert. Pour cela quelques règles sont à respecter.

Les manipulations suivantes n'ont pas forcément de sens physique, mais sont symboliques.

4.1 Systèmes en boucles fermées

Soit la structure ci-dessous constituée en trois blocs :



Résultat Fonction de Transfert en Boucle Fermée

La fonction $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ est appelée fonction de transfert en boucle fermée du système. On la note **FTBF**. De manière générale, la FTBF s'exprime ainsi :

$$H(p) = \frac{\text{Chaîne directe}}{1 + \text{Chaîne directe} \times \text{Chaîne de retour}}$$

Attention : le signe + du dénominateur provient du fait que la chaîne de retour arrive avec le signe - sur le comparateur.

Montrons que dans le schéma bloc précédent, la fonction de transfert en boucle fermée peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)}$$

Recherchons la relation entre $S(p)$ et $E(p)$.

En analysant la chaîne directe :

$$S(p) = C(p) \cdot G(p) = \varepsilon(p) \cdot K \cdot G(p)$$

En analysant la chaîne de retour :

$$R(p) = S(p) \cdot F(p)$$

Équation donnée par le comparateur :

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p)$$

On peut donc en déduire que :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \cdot F(p)$$

D'où :

$$S(p) = [E(p) - S(p) \cdot F(p)] \cdot K \cdot G(p)$$

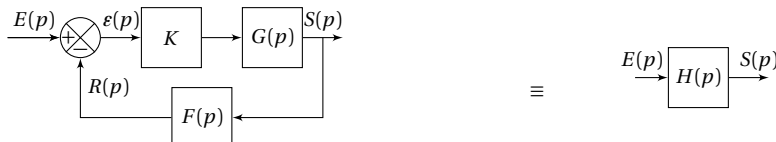
On a donc :

$$S(p) = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)} E(p)$$

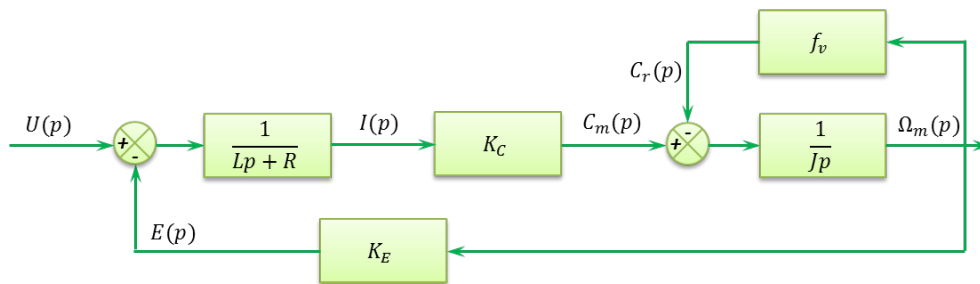
Au final :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)}$$

On a donc :

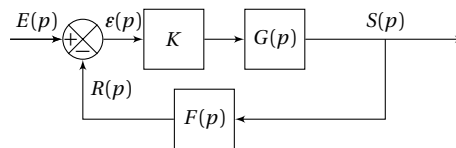


■ Exemple Calcul de la FTBF du MCC :



4.2 Calcul de l'erreur (ou écart)

On reprend le système suivant :



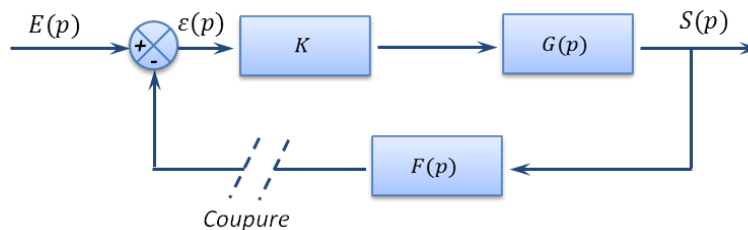
Résultat Expression de l'erreur d'un système

Dans le but d'exprimer l'erreur du système, il est intéressant d'exprimer la fonction de transfert relative à l'erreur $\epsilon(p)$. On montre que :

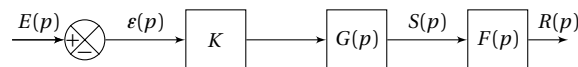
$$\epsilon(p) = \frac{1}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)} E(p) = \frac{1}{1 + \text{Chaîne directe} \times \text{Chaîne de retour}} E(p)$$

4.3 Systèmes en boucles ouvertes

Pour l'étude du comportement du système et pour déterminer certaines de ses performances on utilise la fonction de transfert en boucle ouverte du système (FTBO). On déduit le comportement en boucle fermée (cas réel) à partir du système en boucle ouverte (la FTBO est plus simple à manipuler).



La boucle ouverte a donc la forme suivante :



Résultat Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

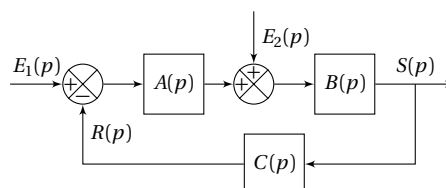
La FTBO s'écrit donc ainsi :

$$FTBO(p) = K \cdot G(p) \cdot F(p)$$

Attention à ne pas confondre la FTBO et la chaîne directe !

4.4 Fonction de transfert boucle fermée des systèmes multi-variables

Dans un système réel, plusieurs entrées peuvent venir modifier la sortie. Ces entrées comprennent non seulement l'entrée principale (grandeur par rapport à laquelle on détermine la sortie) mais aussi des entrées supplémentaires très souvent parasites (bruit, effort résistant...).



Résultat Principe de superposition

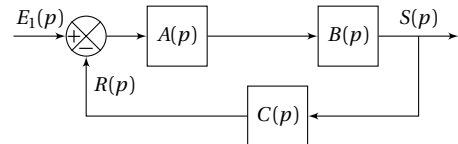
Soit un système avec deux entrées $E_1(p)$ et $E_2(p)$. Pour calculer $S(p)$ on procède de la manière suivante :

1. On considère que $E_1(p) \neq 0$ et que $E_2(p) = 0$.
 2. On calcule alors $H_1(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)}$.
 3. On considère que $E_1(p) = 0$ et que $E_2(p) \neq 0$.
 4. On calcule alors $H_2(p) = \frac{S(p)}{E_2(p)}$.
 5. On conclue alors par superposition que $S(p) = E_1(p) \cdot H_1(p) + E_2(p) \cdot H_2(p)$.
- Cette méthode peut être étendue à un système à n entrées. On considèrera alors à chaque étape que $n - 1$ entrées sont nulles.

■ Exemple

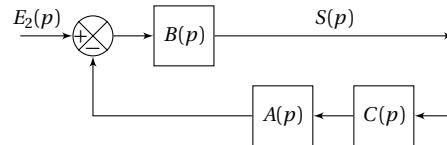
1. On considère que $E_1(p) \neq 0$ et que $E_2(p) = 0$.

2. On calcule alors $H_1(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)}$.



3. On considère que $E_1(p) = 0$ et que $E_2(p) \neq 0$.

4. On calcule alors $H_2(p) = \frac{S(p)}{E_2(p)}$.



5. On conclue alors par superposition que $S(p) = E_1(p) \cdot H_1(p) + E_2(p) \cdot H_2(p)$.

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} E_2(p)$$