CI 2 – SLCI : ETUDE DU COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

CHAPITRE 2 – MODÉLISATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Préliminaire

Le but de ce document n'est pas de se substituer à un cours de mathématiques mais de fournir quelques techniques de calcul pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

Remarque

1. Dans les fonctions que nous utiliserons, le degré du numérateur sera toujours inférieur ou égal au degré du numérateur : $N(p) \leq D(p)$.
2. On appelle **pôles** d'une fonction rationnelle les racines du dénominateur. On appelle **zéros** d'une fonction rationnelle les racines du numérateur.
3. Le numérateur sera un produit de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2.

1 Cas d'une fonction avec des pôles réels simples – $deg(N(p)) < deg(D(p))$

Résultat

Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)\cdots(p-p_n)}$$

avec $deg(N(p)) < deg(D(p))$, $p_1 \neq p_2 \neq p_n$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{p-p_n}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Méthode

1. On multiplie les deux formes de $F(p)$ par $(p-p_i)$.
2. On pose $p = p_i$.

Méthode

3. On détermine α_i.
4. On réalise l'opération n fois (avec $n = deg(D(p))$.

Exemple

Décomposer la fonction suivante en éléments simples :

$$F(p) = \frac{p^3+4}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$$

2 Cas d'une fonction avec des pôles réels simples – $deg(N(p)) = deg(D(p))$

Résultat

Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)\cdots(p-p_n)}$$

avec $deg(N(p)) = deg(D(p))$, $p_1 \neq p_2 \neq p_n$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p) = K + \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{p-p_n}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{R}$

Méthode

1. Calcul des α_i :
   (a) On multiplie les deux formes de $F(p)$ par $(p-p_i)$.
   (b) On pose $p = p_i$.
   (c) On détermine α_i.
   (d) On réalise l'opération n fois (avec $n = deg(D(p))$.
2. Calcul de K :
   (a) Pour les deux formes de $F(p)$ on calcule $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)$.
   (b) On détermine K.

Exemple

Décomposer la fonction suivante en éléments simples :

$$F(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)(p+4)}$$

3 Cas d'une fonction avec des pôles réels multiples – $deg(N(p)) < deg(D(p))$

Résultat

Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)^n}$$

avec $deg(N(p)) < deg(D(p))$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{\left(p-p_1\right)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\left(p-p_1\right)^n}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Méthode

Les méthodes précédentes restent utilisables. Elles ne permettent pas de déterminer touts les α_i.
On peut alors mettre les deux formes de $F(p)$ au même dénominateur et identifier les monômes.
On peut aussi prendre des valeurs particulières de p et résoudre un système d'équations.
Le calcul de certaines limites en ∞ peut permettre de déterminer certains coefficients.

Exemple

Décomposer la fonction suivante en éléments simples :

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p^3(p+1)}$$

4 Cas d'une fonction avec des pôles complexes – $deg(N(p)) < deg(D(p))$

Résultat

Soit la fonction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)(ap^2+bp+c)}$$

avec $deg(N(p)) < deg(D(p))$. On peut décomposer la fonction ainsi :

$$F(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2+\alpha_3 p}{ap^2+bp+c}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Exemple

Décomposer la fonction suivante en éléments simples :

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p^2+1)}$$