CI 2 – SLCI : Étude du comportement des Systèmes Linéaires Continus Invariants

Chapitre 2 – Modélisation des Systèmes Linéaires Continus Invariants
Transformée de Laplace

Exercices d'application

D'après ressources de Jean-Pierre Pupier et Florestan Mathurin.

Exercice 1

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{de(t)}{dt}+e(t)=\frac{d^3s(t)}{dt^3}+\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{ds(t)}{dt}$$

$e(t)$ est l'entrée du système, $s(t)$ la sortie.

On se place dans les conditions de Heaviside, c'est-à-dire qu'on considère que $s(t)$, $e(t)$ et leurs dérivées successives sont nulles en $t=0$.

Question 1
En utilisant les résultats sur la transformée de Laplace, donner l'équation différentielle dans le domaine de Laplace.
Pour la suite on considère que le système est soumis à une entrée $e(t)$ indicielle.

Question 2
Donner l'allure graphique d'une entrée indicielle. Donner sa forme dans le domaine temporel puis dans le domaine de Laplace. En déduire $S(p)$.

Question 3
Déterminer les valeurs finales et initiales de $s(t)$.

Question 4
Déterminer les valeurs initiales et finales de la fonction dérivée $\frac{ds(t)}{dt}$.

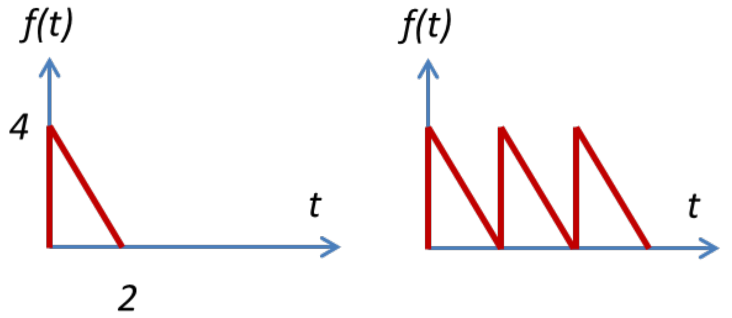
Question 5
Décomposer $S(p)$ en éléments simples puis en somme algébrique de plusieurs transformées de Laplace élémentaires.

Question 6
En déduire $s(t)$ en utilisant la transformée de Laplace inverse.

Question 7
Donner l'allure de la $s(t)$.

Exercice 2 – Application du théorème du retard – Application de la propriété de la périodicité – Modélisation des signaux

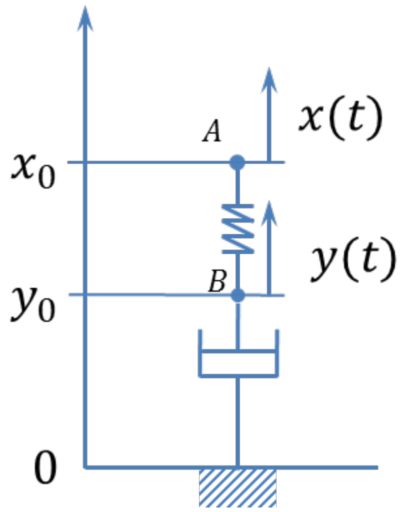
Modéliser les signaux ci-contre.



Exercice 3 – Système mécanique

Soit le système mécanique ci-contre constitué d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement f. On peut déplacer l'extrémité du ressort A d'une quantité x. Á l'instant $t = 0$ le système est en équilibre, le point A est positionné en x_0 et le point B est positionné en y_0.

On notera $x(t)$ et $y(t)$ les variations des positions des points A et B autour de x_0 et y_0.



Question 1

Donner l'équation différentielle faisant intervenir $x(t)$ et $y(t)$. K désigne la raideur du ressort, f désigne le coefficient visqueux de l'amortisseur. La pièce liant ressort et amortisseur au point B est considérée comme ayant une masse quasiment nulle.

Question 2

Réécrire cette équation en passant du domaine temporel au domaine de Laplace.

Question 3

Déterminer la fonction $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)}$. H sera appelée fonction de transfert du système.

Question 4

Donner la réponse du système à un échelon unitaire puis mettre $S(p)$ sous la forme $S(p) = \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{A+\tau p}$. On précisera l'expression de τ.

Question 5

Mettre $Y(p)$ sous la forme $\dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{1+\tau p}$.

Question 6

En déduire la réponse $y(t)$ à un échelon unitaire.

Question 7

Tracer graphiquement l'allure générale de $y(t)$.

Question 8

Recommencer le même travail en étudiant la réponse du système à une entrée sinusoïdale $e(t) = \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$ avec $\omega = 1 rad/s$ et $T = \dfrac{f}{K} = 1$. On fera donc l'hypothèse que le système est particulier, c'est-à-dire que $T = 1$.

Exercice 4 – Transformée de Laplace

Connaissant les transformées de Laplace des fonctions $\cos(\omega t) \cdot u(t)$, donner la transformée de Laplace de $e^{-at} \cdot \cos(\omega t) \cdot u(t)$.

Exercice 5 – Transformée de Laplace inverse

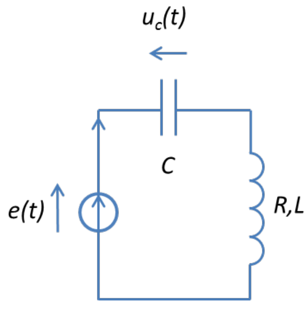
Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{K_1}{(p+a)\cdot(p+b)} \qquad F_2(p) = \frac{K_2}{p\cdot(1+\tau p)} \qquad F_3(p) = \frac{K_3 \cdot p}{(p+a)(p+b)}$$

$$F_4(p) = \frac{K_4 p^2}{(p-1)^2\cdot(p+1)} \qquad F_5(p) = \frac{3p+1}{(p-1)\cdot(p^2+1)}$$

Exercice 6 – Circuit RLC

On donne le schéma électrique ci-contre. On suppose que les conditions initiales sont nulles.



Question 1

Déterminer l'équation différentielle liant $u_c(t)$ et $e(t)$.

Question 2

$e(t)$ étant un échelon d'amplitude E_0, résoudre l'équation en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 7 – Transformées de Laplace inverse

On donne les fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{3}{p\cdot(p+1)\cdot(p+2)} \qquad F_2(p) = \frac{2p+1}{p^2+2p+10}$$

Question 1

En utilisant la transformées de Laplace inverse, donner les fonctions causales du temps.

Exercice 8

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}$$

. On fait subir au système représenté par cette fonction de transfert une entrée échelon unitaire.

Question 1
Calculer $S(p)$ la réponse du système.

Question 2
Décomposer là en éléments simples sous la forme : $\dfrac{A}{p^3}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p}+\dfrac{D}{p+1}$.

Question 3
Déterminer $s(t)$.

Question 4
Réaliser un tracé représentatif de la fonction $s(t)$.

Équation différentielle

Il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=e(t) \quad \text{avec} \quad y(0)=2 \quad \frac{dy(0)}{dt}=2$$

Par ailleurs, $e(t)=6\cdot u(t)$.

Question 1
Écrire cette équation à l'aide de la transformée de Laplace.

Question 2
Décomposer $Y(p)$ sous la forme $\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+\alpha}+\dfrac{C}{p+\beta}$.

Question 3
Donner une représentation graphique de $y(t)$.