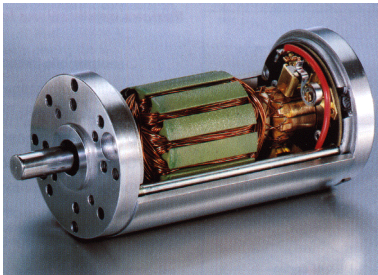


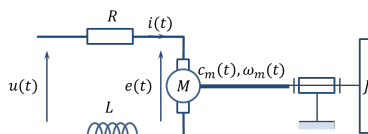
# CI 2 – SLCI : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

## CHAPITRE 3 – MODÉLISATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

### MODÉLISATION PAR SCHÉMAS BLOCS



Moteur à courant continu



Schématisation

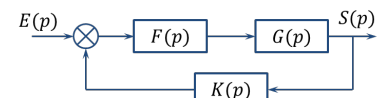


Schéma bloc

Problématique

- Comment modéliser un système complexe multiphysique en utilisant la modélisation en schéma bloc et la modélisation dans le domaine de Laplace ?
- Comment déterminer la fonction de transfert d'un système dans le but de prévoir son comportement ?

Savoir

- Modéliser :
  - Mod-C4.1 : Représentation par schéma bloc
  - Mod-C4.2 : Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée
  - Mod-C4.3 : Classe d'un système
  - Mod-C4-S1 : Établir le schéma-bloc du système
  - Mod-C4-S2 : Déterminer les fonctions de transfert du système en boucle ouverte et en boucle fermée.
- Résoudre :
  - Rés-C5-S1 : Schéma bloc ou d'une fonction de transfert les grandeurs caractérisant les performances du modèle

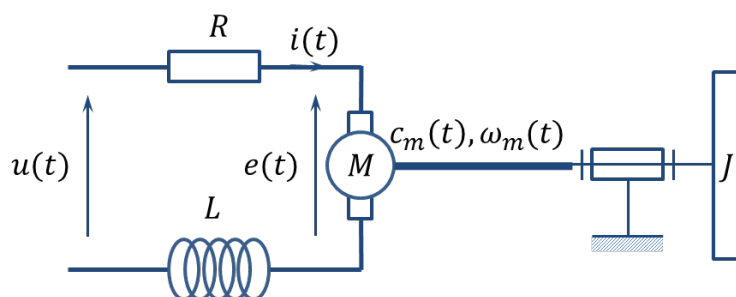
Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1	Fonction de transfert des systèmes	2
1.1	Le moteur à courant continu	2
1.2	Définitions	3
1.3	Représentation par schémas blocs	5
2	Schémas blocs et fonctions de transfert de systèmes élémentaires	6
2.1	Théorèmes de la mécanique	6
2.2	Lois de frottements visqueux	6
2.3	Lois de comportement des ressorts	7
2.4	Systèmes électriques	7
2.5	Le moteur à courant continu en schéma bloc	7
3	Manipulation des schémas blocs	8
3.1	Blocs en série	8
3.2	Blocs en parallèle	9
3.3	Comparateurs en série	9
3.4	Déplacement des points de prélèvement	9
3.5	Déplacement des sommateurs	9
4	Fonctions de transfert des systèmes bouclés	10
4.1	Systèmes en boucles fermées	10
4.2	Calcul de l'erreur (ou écart)	11
4.3	Systèmes en boucles ouvertes	12
4.4	Fonction de transfert boucle fermée des systèmes multi-variables	12

## 1 Fonction de transfert des systèmes

### 1.1 Le moteur à courant continu

On adopte, pour le moteur à courant continu, la représentation suivante :



Loi des mailles dans le circuit électrique :

Couple de frottement en sortie du moteur :

$$c_r(t) = f_v \omega_m(t)$$

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Équation de la dynamique de l'arbre moteur :

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

$$c_m(t) = K_C \cdot i(t)$$

Équation électromécanique :

$$e(t) = K_E \cdot \omega_m(t)$$

Ainsi, dans le cas du moteur à courant continu, on peut écrire l'équation différentielle liant la tension d'entrée aux bornes du circuit électrique  $u(t)$  et la vitesse angulaire  $\omega_m(t)$  :

Équation différentielle du MCC :

$$u(t) = \left( K_e + \frac{Rf_v}{K_C} \right) \omega_m(t) + \left( \frac{RJ}{K_C} + \frac{Lf_v}{K_C} \right) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{LJ}{K_C^2} \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2}$$

Dans le cas où on néglige l'impact du couple résistant, on a :

$$u(t) = K_e \omega_m(t) + \frac{RJ}{K_C} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{LJ}{K_C^2} \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2}$$

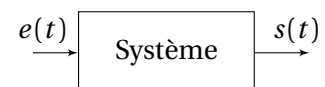
Exemple

## 1.2 Définitions

Soit un système linéaire, continu, invariant et mono-variable d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$ . Le système est donc modélisable par une équation différentielle de la forme suivante :

$$a_0 s(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = b_0 e(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad n \geq m$$

Ce système est modélisable par un schéma bloc :



En se plaçant dans les conditions de Heaviside, l'équation différentielle se transforme dans le domaine de Laplace :

$$a_0 S(p) + \sum_{i=1}^n a_i p^i S(p) = b_0 E(p) + \sum_{i=1}^m b_i p^i E(p)$$

En factorisant l'expression, on obtient donc :

$$S(p) \sum_{i=0}^n a_i p^i = E(p) \sum_{i=0}^m b_i p^i$$

### Fonctions de transfert – Transmittance

On définit la fonction de transfert d'un système la fonction  $H(p)$  telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Équation du MCC dans le domaine de Laplace :

$$U(p) = \left( K_e + \frac{Rf_v}{K_C} \right) \Omega_m(p) + \left( \frac{RJ}{K_C} + \frac{Lf_v}{K_C} \right) p \Omega_m(p) + \frac{LJ}{K_C^2} p^2 \Omega_m(p)$$

$$\Leftrightarrow U(p) = \Omega_m(p) \left[ \left( K_e + \frac{Rf_v}{K_C} \right) + \left( \frac{RJ}{K_C} + \frac{Lf_v}{K_C} \right) p + \frac{LJ}{K_C^2} p^2 \right]$$

Fonction de Transfert du MCC :

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{1}{\left( K_e + \frac{Rf_v}{K_C} \right) + \left( \frac{RJ}{K_C} + \frac{Lf_v}{K_C} \right) p + \frac{LJ}{K_C^2} p^2}$$

Sous sa forme normalisée, la fonction de transfert devient :

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_C K_e + Rf_v}{K_C}}{1 + \left( \frac{RJ + Lf_v}{K_C K_e + Rf_v} \right) p + \frac{LJ}{K_C^2 K_e + R K_C f_v} p^2}$$

Note : le dénominateur a été factorisé par  $K_e + \frac{Rf_v}{K_C} = \frac{K_C K_e + Rf_v}{K_C}$ .

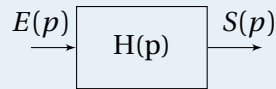
Dans le cas où on néglige l'impact du couple résistant, on a :

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_C K_e}{K_C}}{1 + \frac{RJ}{K_C K_e} p + \frac{LJ}{K_C^2 K_e} p^2}$$

## Schéma-bloc

Définition

Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc suivant :

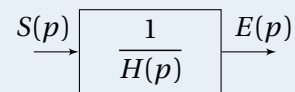
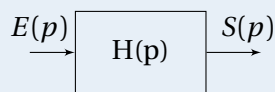


La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p)$$

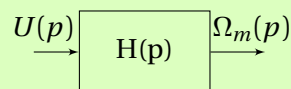
Remarque

Les deux représentations suivantes sont équivalentes :



Exemple

Schéma bloc du moteur à courant continu :



On a bien :

$$\Omega_m(p) = U(p) \cdot H(p)$$

Propriétés

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de  $D(p)$  est appelé ordre  $n$  du système ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).**
- L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- Le facteur constant  $K$  est appelé gain du système.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  $\alpha$  **est la classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

### 1.3 Représentation par schémas blocs

La représentation par schéma bloc d'un système est déduite de la représentation par la transformée de Laplace.

Le schéma fonctionnel, ou schéma bloc, est ainsi une représentation graphique du système d'équations différentielles, ou des relations entre les variables que décrit le système d'équations différentielles.

Méthode

Pour établir un schéma fonctionnel la démarche est la suivante :

1. Appliquer la transformée de Laplace à chaque équation du système différentiel : on obtient alors un système d'équations linéaires dans le domaine de Laplace, que va traduire le schéma.
2. Rechercher les fonctions de transfert élémentaires et les variables qu'elles relient.
3. Constituer, tracer les schémas en assemblant les blocs des fonctions de transfert élémentaires.
4. Rassembler les schémas, simplifier à l'aide des règles définies un peu plus tard.

La représentation par le schéma fonctionnel et la fonction de transfert permettent ainsi de déterminer les caractéristiques principales du système sans résoudre d'équations différentielles.

## 2 Schémas blocs et fonctions de transfert de systèmes élémentaires

Pour les équations "simples" de la physique, on peut aisément mettre les théorèmes fondamentaux sous forme de schémas blocs et de fonctions de transfert.

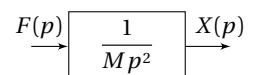
### 2.1 Théorèmes de la mécanique

Théorème de la  
résultante dynamique  
(position)

Exemple : Mouvement  
d'un solide en  
translation

$$F(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$F(p) = M p^2 X(p)$$

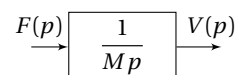


Théorème de la  
résultante dynamique  
(vitesse)



$$F(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(p) = M p V(p)$$

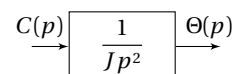


Théorème du  
moment dynamique  
(position)

Mouvement d'un  
solide en rotation

$$C(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$$

$$C(p) = J p^2 \Theta(p)$$

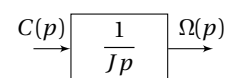


Théorème du  
moment dynamique  
(vitesse)



$$C(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$C(p) = J p \Omega(p)$$



On note :

- $C(t)$  : le couple exprimé en  $Nm$
- $J$  : l'inertie exprimée en  $kg.m^2$
- $\theta$  : position angulaire en  $rad$
- $\omega$  : vitesse angulaire en  $rad/s$

## 2.2 Lois de frottements visqueux

Frottements visqueux  
pour des solides en  
translation



$$f(t) = f \frac{dx(t)}{dt}$$

$$F(p) = f p X(p)$$

$$F(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{f p}} \rightarrow X(p)$$

Frottements visqueux  
pour des solides en  
rotation

*Frottements dans les  
paliers d'un moteur à  
courant continu*

$$C(t) = f \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$C(p) = f p \Theta(p)$$

$$C(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{f p}} \rightarrow \Theta(p)$$

## 2.3 Lois de comportement des ressorts

Ressorts en  
compression de  
raideur  $k$



$$f(t) = k x(t)$$

$$F(p) = k X(p)$$

$$F(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{k}} \rightarrow X(p)$$

Ressorts en traction  
de raideur  $k$



$$C(t) = k \theta(t)$$

$$C(p) = k \Theta(p)$$

$$C(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{k}} \rightarrow \Theta(p)$$



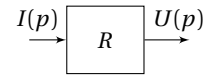
## 2.4 Systèmes électriques

Résistor



$$u(t) = Ri(t)$$

$$U(p) = RI(p)$$

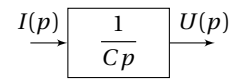


Condensateur

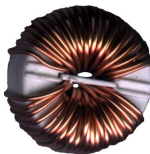


$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$U(p) = \frac{1}{Cp} I(p)$$

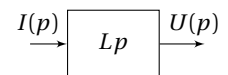


Inductance



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$U(p) = Lp I(p)$$

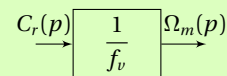


## 2.5 Le moteur à courant continu en schéma bloc

Exprimer les équations du moteur à courant continu sous forme de schéma bloc.

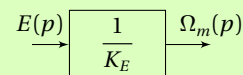
$$c_r(t) = f_v \omega_m(t)$$

$$C_r(p) = f_v \Omega_m(p)$$



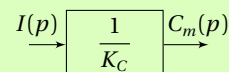
$$e(t) = K_E \cdot \omega_m(t)$$

$$E(p) = K_E \cdot \Omega_m(p)$$



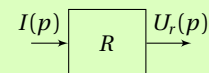
$$c_m(t) = K_C \cdot i(t)$$

$$C_m(p) = K_C \cdot I(p)$$



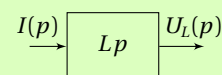
$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$U_R(p) = R \cdot I(p)$$



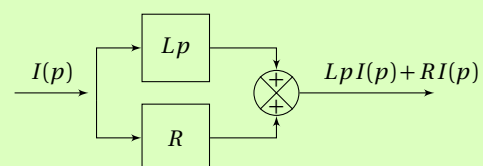
$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$U_L(p) = Lp I(p)$$



$$u_L(t) + u_R(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

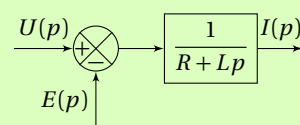
$$U_L(p) + U_R(p) = Lp I(p) + RI(p)$$



$$u(t) - e(t) = u_L(t) + u_R(t)$$

$$U(p) - E(p) = U_L(p) + U_R(p)$$

$$U(p) - E(p) = Lp I(p) + RI(p)$$



Exemple

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

$$Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$$

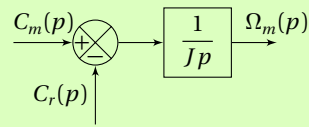
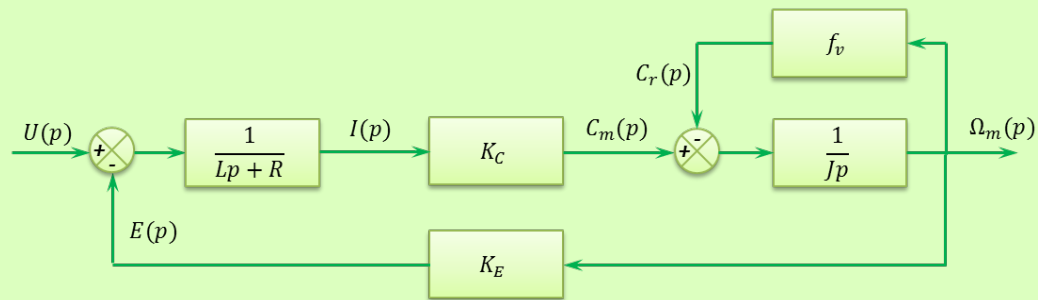


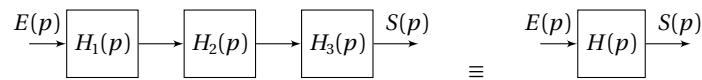
Schéma bloc du MCC complet :



Exemple

### 3 Manipulation des schémas blocs

#### 3.1 Blocs en série



$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)$$

#### 3.2 Blocs en parallèle



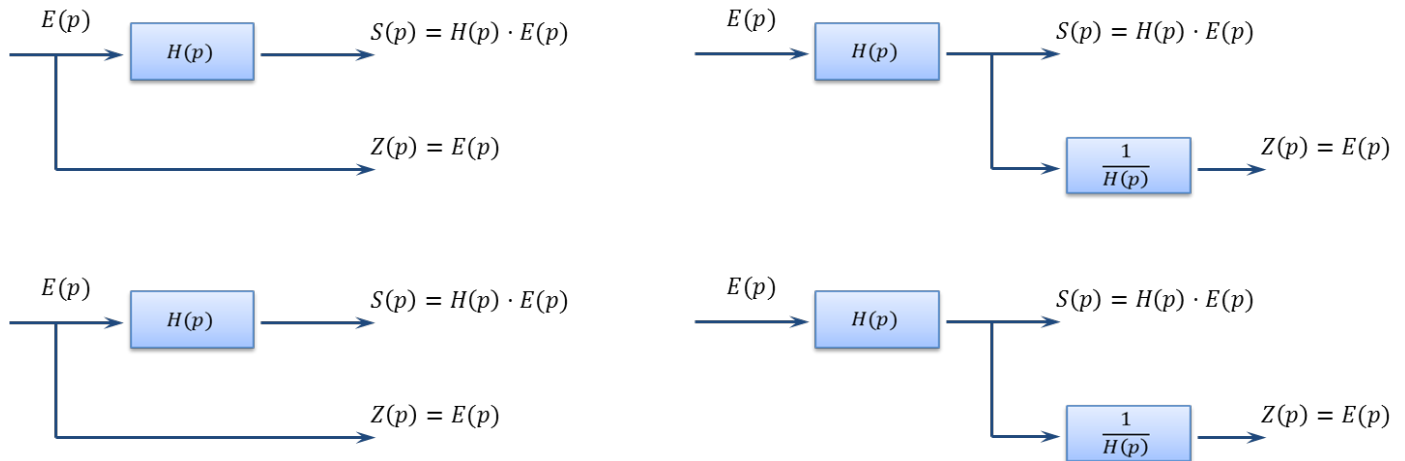
$$S(p) = H_1(p) \cdot E(p) + H_2(p) \cdot E(p)$$

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p)$$

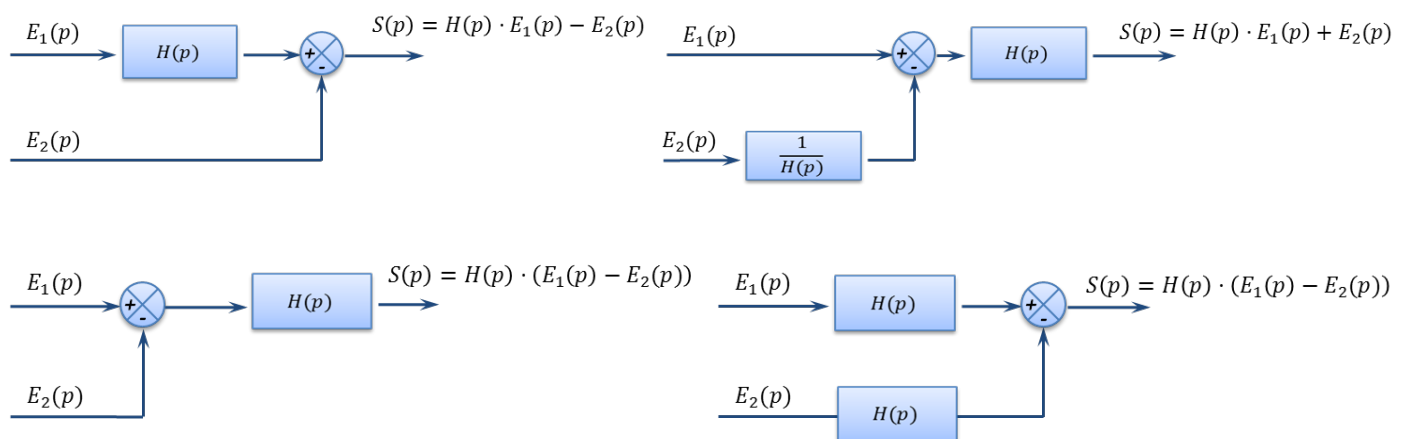
#### 3.3 Comparateurs en série



### 3.4 Déplacement des points de prélèvement



### 3.5 Déplacement des sommateurs



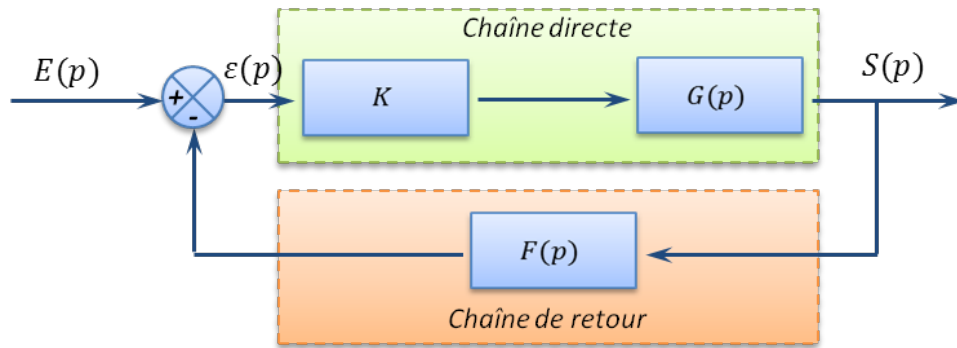
## 4 Fonctions de transfert des systèmes bouclés

Il peut être parfois intéressant de modifier un diagramme fonctionnel en vue de simplifier les calculs de fonctions de transfert. Pour cela quelques règles sont à respecter.

Les manipulations suivantes n'ont pas forcément de sens physique, mais sont symboliques.

### 4.1 Systèmes en boucles fermées

Soit la structure ci-dessous constituée en trois blocs :



### Fonction de Transfert en Boucle Fermée

La fonction  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  est appelée fonction de transfert en boucle fermée du système. On la note **FTBF**. De manière générale, la FTBF s'exprime ainsi :

$$H(p) = \frac{\text{Chaîne directe}}{1 + \text{Chaîne directe} \times \text{Chaîne de retour}}$$

**Attention :** le signe + du dénominateur provient du fait que la chaîne de retour arrive avec le signe - sur le comparateur.

Montrons que dans le schéma bloc précédent, la fonction de transfert en boucle fermée peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)}$$

Recherchons la relation entre  $S(p)$  et  $E(p)$ .

En analysant la chaîne directe :

$$S(p) = C(p) \cdot G(p) = \varepsilon(p) \cdot K \cdot G(p)$$

En analysant la chaîne de retour :

$$R(p) = S(p) \cdot F(p)$$

Équation donnée par le comparateur :

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p)$$

On peut donc en déduire que :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \cdot F(p)$$

D'où :

$$S(p) = [E(p) - S(p) \cdot F(p)] \cdot K \cdot G(p)$$

On a donc :

$$S(p) = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)} E(p)$$

Au final :

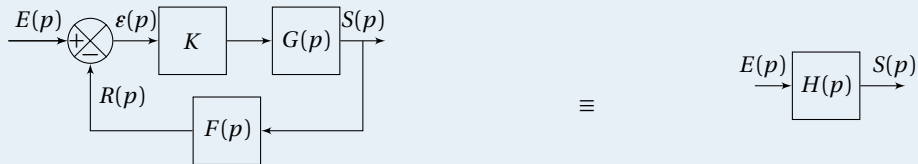
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)}$$

Résultat

Démonstration

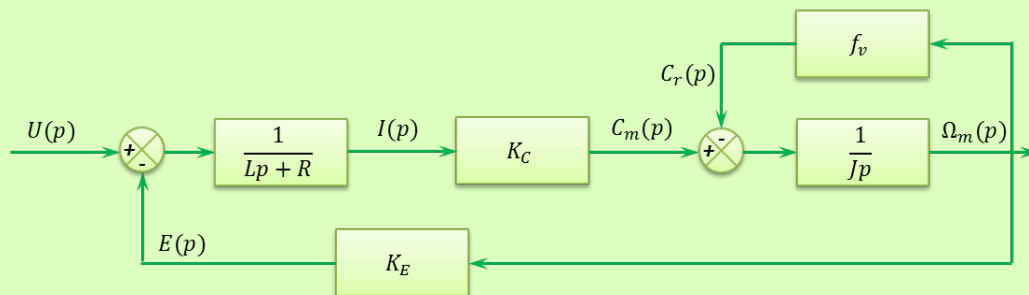
Démonstration

On a donc :



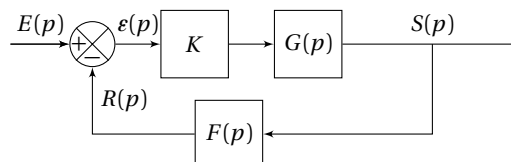
Exemple

Calcul de la FTBF du MCC :



## 4.2 Calcul de l'erreur (ou écart)

On reprend le système suivant :



### Expression de l'erreur d'un système

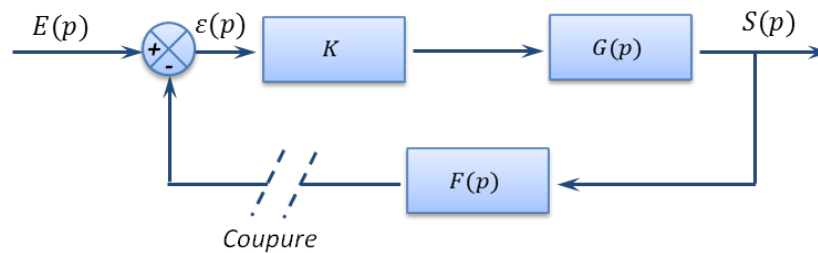
Dans le but d'exprimer l'erreur du système, il est intéressant d'exprimer la fonction de transfert relative à l'erreur  $\varepsilon(p)$ . On montre que :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K \cdot G(p) \cdot F(p)} E(p) = \frac{1}{1 + \text{Chaîne directe} \times \text{Chaîne de retour}} E(p)$$

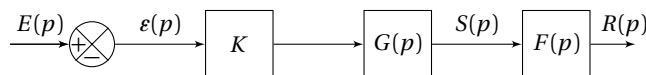
Résultat

## 4.3 Systèmes en boucles ouvertes

Pour l'étude du comportement du système et pour déterminer certaines de ses performances on utilise la fonction de transfert en boucle ouverte du système (**FTBO**). On déduit le comportement en boucle fermée (cas réel) à partir du système en boucle ouverte (la FTBO est plus simple à manipuler).



La boucle ouverte a donc la forme suivante :



### Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

La FTBO s'écrit donc ainsi :

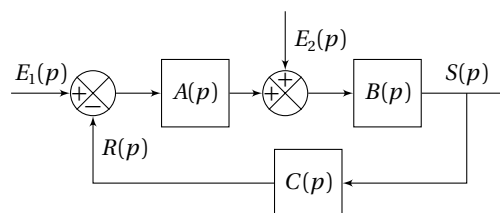
$$FTBO(p) = K \cdot G(p) \cdot F(p)$$

**Attention** à ne pas confondre la FTBO et la chaîne directe !

Résultat

## 4.4 Fonction de transfert boucle fermée des systèmes multi-variables

Dans un système réel, plusieurs entrées peuvent venir modifier la sortie. Ces entrées comprennent non seulement l'entrée principale (grandeur par rapport à laquelle on détermine la sortie) mais aussi des entrées supplémentaires très souvent parasites (bruit, effort résistant...).



### Principe de superposition

Soit un système avec deux entrées  $E_1(p)$  et  $E_2(p)$ . Pour calculer  $S(p)$  on procède de la manière suivante :

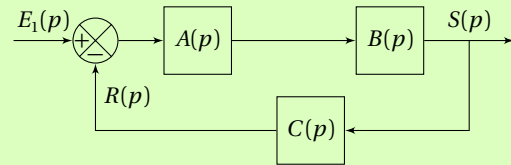
1. On considère que  $E_1(p) \neq 0$  et que  $E_2(p) = 0$ .
2. On calcule alors  $H_1(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)}$ .
3. On considère que  $E_1(p) = 0$  et que  $E_2(p) \neq 0$ .
4. On calcule alors  $H_2(p) = \frac{S(p)}{E_2(p)}$ .
5. On conclue alors par superposition que  $S(p) = E_1(p) \cdot H_1(p) + E_2(p) \cdot H_2(p)$ .

Cette méthode peut être étendue à un système à  $n$  entrées. On considèrera alors à chaque étape que  $n - 1$  entrées sont nulles.

Méthode

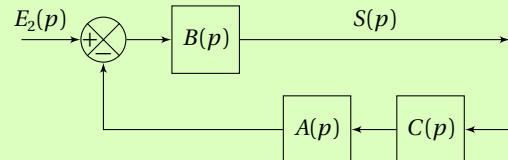
1. On considère que  $E_1(p) \neq 0$  et que  $E_2(p) = 0$ .

2. On calcule alors  $H_1(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)}$ .



3. On considère que  $E_1(p) = 0$  et que  $E_2(p) \neq 0$ .

4. On calcule alors  $H_2(p) = \frac{S(p)}{E_2(p)}$ .



5. On conclue alors par superposition que  $S(p) = E_1(p) \cdot H_1(p) + E_2(p) \cdot H_2(p)$ .

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} E_2(p)$$