CI 2 – SLCI : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

CHAPITRE 2 – MODÉLISATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS
TRANSFORMÉE DE LAPLACE

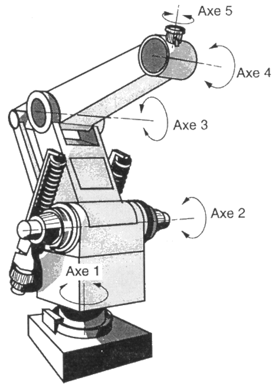
TRAVAIL DIRIGÉ

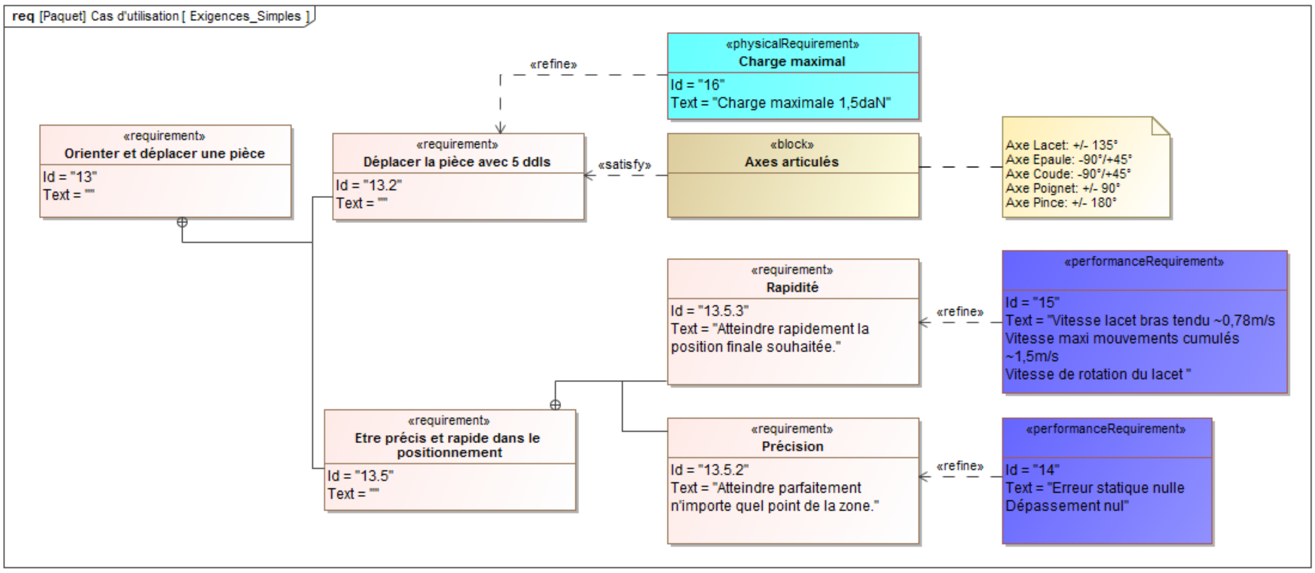
Robot Ericc

Le robot Ericc est un robot série équipé de 5 axes en série qui lui permettent d'atteindre toutes les positions et toutes les orientations de l'espace. Le dernier axe peut être équipé d'une pince ou d'un outil spécifique. Le robot est par exemple utilisé sur les chaînes de montage dans le domaine de l'automobile afin de souder des éléments de carrosserie de voiture.

Les axes sont appelés ainsi :
- axe 1 : axe de lacet ;
- axe 2 : axe d'épaule ;
- axe 3 : axe de coude ;
- axe 4 : axe de poignet ;
- axe 5 : axe de pince.

On s'intéresse uniquement au déplacement de l'axe de lacet. On donne le cahier des charges partiel du robot Ericc.



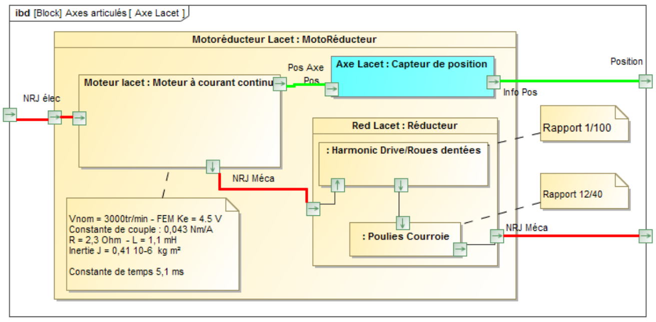


Objectif

L'objectif est de vérifier les exigences de performance *14*.

Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
ID 13.5.2	Erreur Statique	0	Aucune
	Dépassement	Aucun	Aucune

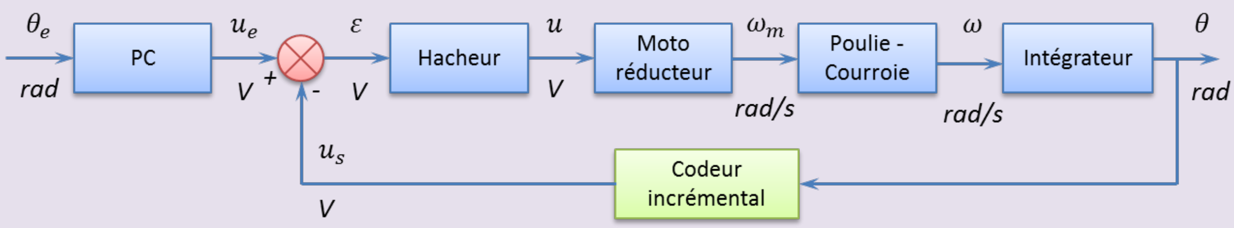
Pour déplacer uniquement l'axe de rotation du lacet l'utilisateur peut, par le biais d'un logiciel, piloter l'angle à atteindre par l'axe. Un hacheur permet de distribuer l'énergie électrique dans un motoréducteur. Ce dernier est relié à un système poulie-courroie. La position de l'axe de lacet est mesurée par un codeur incrémental. Le signal du codeur est alors comparé à la consigne de l'utilisateur.



Question 1

Réaliser le schéma-bloc fonctionnel de l'axe de lacet du robot Ericc.

Correction



Remarque : le réducteur pourrait être sorti du bloc moteur.

Étude de la vitesse du moteur en boucle ouverte

Un moteur électrique est alimenté par une tension continue. Pour une tension donnée, le moteur tourne à une vitesse donnée.

Le comportement du moteur est régit par l'équation différentielle suivante :

$$\omega_m(t)+\tau\frac{d\omega_m(t)}{dt}=K u(t)$$

en notant :

- $\omega_m(t)$ la fréquence de rotation du moteur (en rad/s) ;
- $u(t)$ la tension d'alimentation du moteur (en V) ;
- $K = 23,26 rad\cdot s^{-1}V^{-1}$ le gain du moteur ;
- $\tau = 0,51 s$: constante de temps mécanique du moteur.

Le moteur est suivi de deux réducteurs. Le rapport de réduction total est noté $r=\dfrac{12}{4000}$. La fréquence de rotation en sortie des réducteurs $\omega(t)$ peut se calculer ainsi :

$$\omega(t) = r\,\omega_m(t)$$

Question 2

On se place dans les conditions de Heaviside. Donner les deux équations dans le domaine de Laplace. Exprimer alors $\Omega(p)$ en fonction de $U(p)$.

Correction

On a :

$$\Omega_m(p) + \tau p \Omega_m(p) = K U(p) \quad \Omega(p) = r\Omega_m(p)$$

En conséquence,

$$\Omega(p) = \frac{rK}{1+\tau p} U(p)$$

Question 3

On sollicite le système par une entrée échelon d'amplitude 1V. Déterminer l'expression de $\Omega(p)$ *sous forme littérale.*

Correction

Dans ces conditions, $U(p) = \dfrac{1}{p}$. On a donc :

$$\Omega(p) = \frac{rK}{1+\tau p} \cdot \frac{1}{p}$$

Question 4

Après avoir déterminé les valeurs initiales et finales de $\omega(t)$ *ainsi que la pente à l'origine, tracer l'allure de* $u(t)$ *et* $\omega(t)$ *en indiquant les valeurs numériques.*

Correction

D'après le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} \omega(t) = \lim_{p\to\infty} p\Omega(p) = 0$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \lim_{p\to 0} p\Omega(p) = Kr$$

La valeur de la pente à l'origine peut être déterminé ainsi :

$$\lim_{t\to 0} \frac{d\omega(t)}{dt} = \lim_{p\to\infty} p^2\Omega(p) = \frac{Kr}{\tau}$$

Question 5

Commenter l'allure de la courbe.

Correction

Étude de la position du moteur en boucle ouverte

On souhaite maintenant avoir accès à la position du moteur en fonction du temps. La position angulaire de l'axe de lacet est notée θ.

On se replace dans les conditions où $U(p)$ n'est pas un échelon.

Question 6

Exprimer la relation entre $\theta(t)$ et $\omega(t)$. En déduire la relation entre $\Theta(p)$ et $\Omega(p)$.

Correction

Le taux de rotation angulaire étant la dérivée de la position angulaire, on a donc :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$$

Dans les conditions de Heavside, on a donc :

$$\Omega(p) = p\Theta(p)$$

Question 7

Exprimer alors $\Theta(p)$ en fonction de $U(p)$.

Correction

On a :

$$\Theta(p) = \frac{\Omega(p)}{p} = \frac{Kr}{\left(1+\tau p\right)p} U(p)$$

Question 8

On sollicite à nouveau le système par une entrée échelon d'amplitude 1V. Déterminer l'expression de $\Theta(p)$ sous forme littérale.

Correction

On a :

$$\Theta(p) = \frac{\Omega(p)}{p} = \frac{Kr}{\left(1+\tau p\right)p^2}$$

Question 9

Après avoir déterminé les valeurs initiales et finales de $\theta(t)$ ainsi que la pente à l'origine, tracer l'allure de la courbe en indiquant les valeurs numériques.

Correction

D'après le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} \theta(t) = \lim_{p\to\infty} p\Theta(p) = \lim_{p\to\infty} p\frac{Kr}{\left(1+\tau p\right)p^2} = 0$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \lim_{p\to 0} p\Theta(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{Kr}{\left(1+\tau p\right)p^2} = +\infty$$

Correction

La valeur de la pente à l'origine peut être déterminé ainsi :

$$\lim_{t\to 0}\frac{d\theta(t)}{dt}=\lim_{p\to 0}p^2\Theta(p)=\lim_{p\to\infty}p^2\frac{Kr}{\left(1+\tau p\right)p^2}=Kr$$

Question 10

Commenter l'allure de la courbe. Ce comportement et-il envisageable sur l'axe de lacet du robot ? Commenter. Justifier la nécessité de mettre en œuvre un asservissement en position.

Correction

Lorsqu'on alimente un moteur, il tourne. Sa position angulaire augmente donc jusqu'à l'infini. Pour un moteur isolé cela ne pose pas de problèmes. Sur un robot avec des axes en série, la plupart du temps, les axes le peuvent pas tourner indéfiniment (problèmes de câblages ...)

Si on veut avoir un positionnement angulaire du moteur, il est nécessaire d'avoir une boucle de retour afin d'asservir le système.

Question 11

Déterminer l'expression de $\Theta(p)$ *dans le domaine temporel. On utilisera la transformée de Laplace inverse.*

Correction

$\Theta(p)$ peut se décomposer en élément simple sous la forme suivante :

$$\Theta(p)=\frac{Kr}{\left(1+\tau p\right)p^2}=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{p^2}+\frac{\gamma}{1+\tau p}$$

En multipliant par p^2 et en posant $p=0$ on a :

$$\beta=Kr$$

En multipliant par $1+\tau p$ et en posant $p=-\dfrac{1}{\tau}$ on a :

$$\gamma=\frac{Kr}{\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)^2}=Kr\tau^2$$

On pose $p=1$:

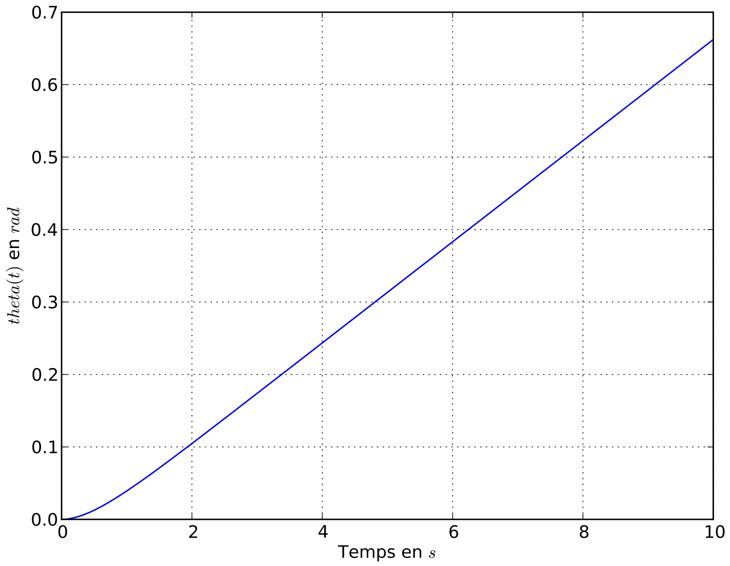
$$\frac{Kr}{1+\tau}=\alpha+Kr+\frac{Kr\tau^2}{1+\tau}\Longleftrightarrow\alpha=\frac{1}{1+\tau}\left(Kr-Kr\tau^2-Kr-Kr\tau\right)\Longleftrightarrow\alpha=\frac{-\tau Kr}{1+\tau}(1+\tau)=-\tau Kr$$

Au final,

$$\Theta(p)=\frac{-\tau Kr}{p}+\frac{Kr}{p^2}+\frac{Kr\tau^2}{1+\tau p}=\frac{-\tau Kr}{p}+\frac{Kr}{p^2}+\frac{1}{\tau}\cdot\frac{Kr\tau^2}{\dfrac{1}{\tau}+p}=\frac{-\tau Kr}{p}+\frac{Kr}{p^2}+\frac{Kr\tau}{\dfrac{1}{\tau}+p}$$

Dans le domaine temporel, on a donc :

$$\forall t>0\quad\theta(t)=-\tau Kr+Krt+Kr\tau e^{-\frac{t}{\tau}}=Kr\left(-\tau+t+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Étude de l'asservissement en position de l'axe de lacet

On se replace dans les conditions où $U(p)$ n'est pas un échelon.

Afin d'asservir la position angulaire de l'axe de lacet, on utiliser un codeur incrémental. La loi de comportement du codeur est la suivante :

$$u_s(t) = K_{capt} \cdot \theta(t)$$

La consigne angulaire donnée par l'utilisateur est adaptée suivant la loi de comportement suivante :

$$u_e(t) = K_{Adapt} \cdot \theta_e(t) \quad \text{avec} \quad K_{Adapt} = K_{Capt} = 1\ V/rad$$

Un comparateur permet de comparer la tension d'entrée et la tension de sortie :

$$\varepsilon(t) = u_e(t) - u_s(t)$$

Enfin, le hacheur permet d'amplifier la faible tension $\varepsilon(t)$ en tension de commande pour le moteur à courant continu :

$$u(t) = K_{Ampli} \cdot \varepsilon(t) \quad K_{Ampli} = 10$$

Question 12

Justifier que $K_{Adapt} = K_{Capt}$.

Correction

En reprenant le schéma bloc de la question 1, on se rend compte d'une part que le PC et le capteur réalisent la même opération à savoir convertir une position angulaire en tension.

De plus, si on se place en régime permanent, dans le cas où l'erreur statique du système serait nulle, on a donc une consigne θ_e qui est égale à θ. u_e et u_s étant leur image respective, il est donc logique qu'ils soient égaux. En conséquence, l'opération à réaliser par le codeur et par le PC doit être la même ce qui justifie que $K_{Adapt} = K_{Capt}$.

On se place dans les conditions de Heaviside.

Question 13
Transformer chacune des 4 équations dans le domaine de Laplace.

Correction

Dans les conditions de Heaviside,

$$\begin{aligned} U_s(p) &= K_{capt}\Theta(p) \\ U_e(p) &= K_{Adapt}\Theta_e(p) \\ \varepsilon(p) &= U_e(p) - U_s(p) \\ U(p) &= K_{Ampli}\cdot\varepsilon(p) \end{aligned}$$

Question 14
Exprimer $\Theta(p)$ en fonction de $\Theta_e(p)$.

Correction

D'après la partie précédente :

$$\Theta(p) = \frac{K\,r\,U(p)}{(1+\tau p)\,p}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \Theta(p) &= \frac{K\,r}{(1+\tau p)\,p}K_{Ampli}\cdot\varepsilon(p) \\ &= \frac{K\,r}{(1+\tau p)\,p}K_{Ampli}\cdot\left(U_e(p)-U_s(p)\right) \\ &= \frac{K\,r}{(1+\tau p)\,p}K_{Ampli}\cdot\left(K_{Adapt}\Theta_e(p)-K_{capt}\Theta(p)\right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\Theta(p)\left(1+\frac{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}}{(1+\tau p)\,p}\right) = \frac{K\,r\,K_{Ampli}\cdot K_{Adapt}}{(1+\tau p)\,p}\Theta_e(p)$$

$$\Longleftrightarrow \Theta(p)\left(\frac{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+(1+\tau p)\,p}{(1+\tau p)\,p}\right) = \frac{K\,r\,K_{Ampli}\cdot K_{Adapt}}{(1+\tau p)\,p}\Theta_e(p)$$

Au final :

$$\Theta(p) = \frac{K\,r\,K_{Ampli}\cdot K_{Adapt}}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+(1+\tau p)\,p}\Theta_e(p)$$

Question 15
On désire connaître la réponse indicielle du système (entrée échelon d'amplitude $1\ rad$). Exprimer $\Theta(p)$ en fonction de $\Theta_e(p)$.

Correction

Pour une réponse indicielle, on a : $\Theta_e(p) = \dfrac{1}{p}$. En conséquence,

$$\Theta(p) = \frac{K\,r\,K_{Ampli} \cdot K_{Adapt}}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt} + \left(1+\tau p\right)p} \cdot \frac{1}{p}$$

Question 16

Après avoir déterminé les valeurs initiales et finales de $\theta(t)$ ainsi que la pente à l'origine, tracer l'allure de la courbe en indiquant les valeurs numériques.

Correction

D'après le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0}\theta(t) = \lim_{p\to\infty} p\Theta(p) = 0$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \lim_{p\to 0} p\Theta(p) = 1$$

La valeur de la pente à l'origine peut être déterminé ainsi :

$$\lim_{t\to 0}\frac{d\theta(t)}{dt} = \lim_{p\to 0} p^2\Theta(p) = 0$$

Question 17

Déterminer l'expression de $\Theta(p)$ dans le domaine temporel. On utilisera la transformée de Laplace inverse.

Correction

On a :

$$\Theta(p) = \frac{K\,r\,K_{Ampli} \cdot K_{Adapt}}{p \cdot \left(K\,r\,K_{Ampli}K_{capt} + p + \tau p^2\right)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta + \gamma p}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt} + p + \tau p^2}$$

En multipliant par p et en posant $p = 0$:

$$\alpha = \frac{K_{Adapt}}{K_{capt}}$$

On multiplie le deux expressions par p et on calcule la limite en $+\infty$: D'une part,

$$\lim_{p\to+\infty} p\frac{K\,r\,K_{Ampli} \cdot K_{Adapt}}{p \cdot \left(K\,r\,K_{Ampli}K_{capt} + p + \tau p^2\right)} = 0$$

D'autre part,

$$\lim_{p\to+\infty} p\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta + \gamma p}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt} + p + \tau p^2}\right) = \alpha + \frac{\gamma}{\tau}$$

On a donc :

$$\gamma = -\alpha\tau = -\frac{K_{Adapt}}{K_{capt}}\tau$$

Enfin, pour $p=1$ on a :

$$\frac{K\,r\,K_{Ampli}\cdot K_{Adapt}}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+1+\tau}=\frac{K_{Adapt}}{K_{capt}}+\frac{\beta-\dfrac{K_{Adapt}}{K_{capt}}\tau}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+1+\tau}$$

$$\Longleftrightarrow K\,r\,K_{Ampli}K_{Adapt}=\left(K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+1+\tau\right)\frac{K_{Adapt}}{K_{capt}}+\beta-\frac{K_{Adapt}}{K_{capt}}\tau$$

$$\Longleftrightarrow K\,r\,K_{Ampli}K_{Adapt}K_{capt}=\left(K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+1+\tau\right)K_{Adapt}+\beta K_{capt}-K_{Adapt}\tau$$

$$\Longleftrightarrow \beta=\frac{-(1+\tau)K_{Adapt}+K_{Adapt}\tau}{K_{capt}}=-\frac{K_{Adapt}}{K_{capt}}$$

Au final : On a :

$$\Theta(p)=\frac{\dfrac{K_{Adapt}}{K_{capt}}}{p}+\frac{-\dfrac{K_{Adapt}}{K_{capt}}-\dfrac{K_{Adapt}}{K_{capt}}\tau p}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+p+\tau p^2}=\frac{\dfrac{K_{Adapt}}{K_{capt}}}{p}-\frac{K_{Adapt}}{K_{capt}}\frac{1+\tau p}{K\,r\,K_{Ampli}K_{capt}+p+\tau p^2}$$

Application numérique partielle :

$$\Theta(p)=\frac{1}{p}-\frac{1+\tau p}{K\,r\,K_{Ampli}+p+\tau p^2}=\frac{1}{p}-\frac{\tau}{\tau}\cdot\underbrace{\frac{\dfrac{1}{\tau}+p}{\dfrac{K\,r\,K_{Ampli}}{\tau}+\dfrac{1}{\tau}p+p^2}}_{F(p)}$$

$$F(p)=\frac{1+\tau p}{\left(p+\dfrac{1}{2\tau}\right)-\dfrac{1}{4\tau^2}+\dfrac{K\,r\,K_{Ampli}}{\tau}}$$

On pose $A^2=-\dfrac{1}{4\tau^2}+\dfrac{K\,r\,K_{Ampli}}{\tau}$

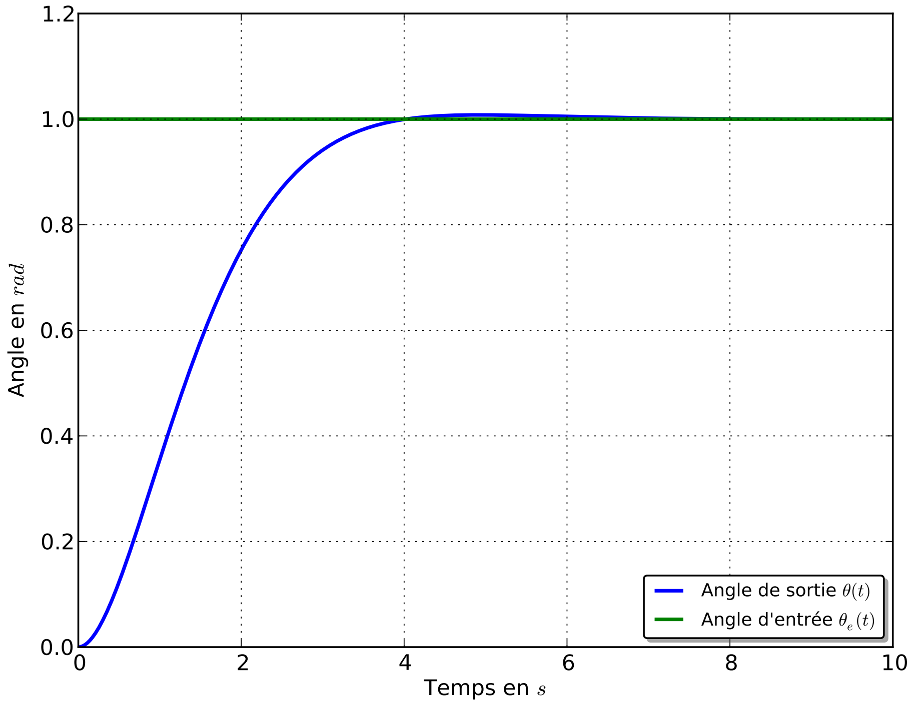
On a alors :

$$F(p)=\frac{\dfrac{1}{\tau}+p+\dfrac{1}{2\tau}-\dfrac{1}{2\tau}}{\left(p+\dfrac{1}{2\tau}\right)+A^2}=\frac{p+\dfrac{1}{2\tau}}{\left(p+\dfrac{1}{2\tau}\right)+A^2}+\frac{\dfrac{1}{2\tau}}{\left(p+\dfrac{1}{2\tau}\right)+A^2}=\frac{p+\dfrac{1}{2\tau}}{\left(p+\dfrac{1}{2\tau}\right)+A^2}+\frac{1}{2\tau A}\cdot\frac{A}{\left(p+\dfrac{1}{2\tau}\right)+A^2}$$

On a donc :

$$\forall t>0\quad \theta(t)=1-e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(At)-\frac{1}{2\tau A}e^{-\frac{t}{2\tau}}\sin(At)$$

Correction



Question 18

Conclure sur la validité du cahier des charges.

Correction

On observe que le système a un écart statique nul : la consigne était de 1 rad et l'angle atteint par l'axe de lacet est de 1 rad. Le critère d'écart statique est donc vérifié.

En revanche, on observe un léger dépassement de la consigne. En conséquence, le critère de dépassement nul n'est pas vérifié.