

CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE 7 – TORSEURS

TRAVAUX DIRIGÉS

D'après ressources ???

1 Carrousel au triple mouvement

Question 1

Exprimer $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{V(A \in 2/1)}$.

Corrigé

Les solides S_2 et S_1 sont en liaison pivot de centre O , d'angle β et d'axe $\overrightarrow{k_{21}}$. En conséquence en O , on a :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{k_{21}} \\ \overrightarrow{V(O, 2/1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{k_{21}} \\ \overrightarrow{V(A, 2/1)} = \overrightarrow{V(O, 2/1)} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{V(A, 2/1)} = -L \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\beta} \overrightarrow{k_{21}} = L \dot{\beta} \overrightarrow{j_2}$$

Question 2

Exprimer $\overrightarrow{\Omega(3/1)}$ et $\overrightarrow{V(C \in 3/1)}$.

Corrigé

Pour calculer la vitesse relative entre S_3 et S_1 , il faut décomposer le torseur cinématique : $\{\mathcal{V}(3/1)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\}$

Les solides S_3 et S_2 sont en liaison pivot de centre A , d'angle γ et d'axe $\overrightarrow{k_{321}}$; donc :

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\gamma} \overrightarrow{k_{321}} \\ \overrightarrow{V(A, 3/2)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$\{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/1)} = (\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \overrightarrow{k_{321}} \\ \overrightarrow{V(A, 3/1)} = L \dot{\beta} \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_A$$

En conséquences,

$$\overrightarrow{V(C, 3/1)} = \overrightarrow{V(A, 3/1)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/1)} = L \dot{\beta} \overrightarrow{j_2} + (-R \overrightarrow{i_3} - h \overrightarrow{k_{1*}}) \wedge (\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \overrightarrow{k_{321}}$$

$$\overrightarrow{V(C, 3/1)} = L \dot{\beta} \overrightarrow{j_2} + R (\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \overrightarrow{j_3}$$

Question 3

Exprimer $\overrightarrow{V(G \in 4/1)}$.

En prenant un peu de recul, il n'est pas forcément indispensable d'écrire entièrement le torseur cinématique. Par exemple, dans le cas de $\overrightarrow{V(G, 4/1)}$:

$$\overrightarrow{V(G, 4/1)} = \overrightarrow{V(C, 4/1)} + \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{\Omega(4/1)} = \underbrace{\overrightarrow{V(C, 4/3)}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{V(C, 3/1)} + \overrightarrow{GC} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(4/1)}}_{\overrightarrow{\Omega(4/3)} + \overrightarrow{\Omega(3/1)}}$$

$$\overrightarrow{V(G, 4/1)} = L\dot{\beta} \vec{j}_2 + R(\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{j}_3 + e \vec{k}_4 \wedge ((\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{k}_{321^*} + \dot{\psi} \vec{j}_{43})$$

On a :

$$\vec{k}_4 \wedge \vec{k}_{321^*} = -\sin \psi \vec{j}_{43}$$

$$\vec{k}_4 \wedge \vec{j}_{43} = -\vec{i}_4$$

On a donc :

$$\overrightarrow{V(G, 4/1)} = L\dot{\beta} \vec{j}_2 + R(\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{j}_3 - e(\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \sin \psi \vec{j}_{43} - e\dot{\psi} \vec{i}_4$$

$$\overrightarrow{V(G, 4/1)} = L\dot{\beta} \vec{j}_2 + (R - e \sin \psi)(\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{j}_3 - e\dot{\psi} \vec{i}_4$$

Corrigé

Le fût 1 est muni d'une poulie de diamètre D sur laquelle s'enroule une courroie qui entraîne en rotation la poulie de diamètre $D/2$ liée au disque 3 lors du mouvement de 2 par rapport à 1.

On a les hypothèses suivantes :

- non glissement entre la courroie et les poulies ;
- la courroie est inextensible.

De plus le siège 4 est bloqué dans la position $\psi = -\pi/2$ par rapport au disque 3.

Question 4

En utilisant les hypothèses précédentes, montrer que $\dot{\gamma} = -2\dot{\beta}$.

En considérant l'hypothèse de roulement sans glissement au point I , le point I est immobile lorsqu'on considère le mouvement de la courroie (notée c) par rapport à la poulie 1 :

$$\overrightarrow{V(I, c/1)} = \vec{0}$$

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V(I, c/1)} = \overrightarrow{V(I, c/2)} + \overrightarrow{V(I, 2/1)}$$

En conséquence,

$$\overrightarrow{V(I, c/2)} = -\overrightarrow{V(I, 2/1)}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(I, 2/1)} = \overrightarrow{V(O, 2/1)} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \vec{0} - \frac{D}{2} \vec{i}_c \wedge \dot{\beta} \vec{k}_{321^*} = \frac{D}{2} \dot{\beta} \vec{j}_c$$

De même, en considérant l'hypothèse de roulement sans glissement au point J , le point J est immobile lorsqu'on considère le mouvement de la courroie (notée c) par rapport à la poulie 3 :

$$\overrightarrow{V(J, c/3)} = \vec{0}$$

Corrigé

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V(J, c/3)} = \overrightarrow{V(J, c/2)} + \overrightarrow{V(J, 2/3)}$$

En conséquence,

$$\overrightarrow{V(J, c/2)} = -\overrightarrow{V(J, 2/3)}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(J, 2/3)} = \overrightarrow{V(A, 2/3)} + \overrightarrow{JO} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = 0 - \frac{D}{4} \vec{i}_c \wedge -\dot{\gamma} \vec{k}_{321*} = -\frac{D}{4} \dot{\gamma} \vec{j}_c$$

La courroie étant inextensible,

$$\overrightarrow{V(I, c/2)} = \overrightarrow{V(J, c/2)}$$

Et donc :

$$\dot{\gamma} = -2\dot{\beta}$$

Corrigé

Question 5

En déduire la nouvelle expression de $\overrightarrow{V(G, 4/1)}$ en fonction de R , L , e et $\dot{\beta}$.

On a donc $\dot{\psi} = 0$ et :

$$\overrightarrow{V(G, 4/1)} = L\dot{\beta} \vec{j}_2 - \dot{\beta}(R+e) \vec{j}_3$$

Corrigé

Question 6

Exprimer l'accélération du point G dans le mouvement de 4/1 en fonction de R , L , e , $\dot{\beta}$ si $\dot{\beta}$ est constant.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(G, 4/1)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{V(G, 4/1)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} = L \underbrace{\ddot{\beta}}_0 \vec{j}_2 + L\dot{\beta} \left[\frac{d\vec{j}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} - \underbrace{\ddot{\beta}}_0 (R+e) \vec{j}_3 - \dot{\beta}(R+e) \left[\frac{d\vec{j}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} \\ \left[\frac{d\vec{j}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} &= \left[\frac{d\vec{j}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/1)} \wedge \vec{j}_2 = \vec{0} + \dot{\beta} \vec{k}_{21*} \wedge \vec{j}_2 = -\dot{\beta} \vec{i}_2 \\ \left[\frac{d\vec{j}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} &= \left[\frac{d\vec{j}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/1)} \wedge \vec{j}_3 = \vec{0} + (\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{k}_{321*} \wedge \vec{j}_3 = \dot{\beta} \vec{i}_3 \\ \overrightarrow{\Gamma(G, 4/1)} &= -L\dot{\beta}^2 \vec{i}_2 - \dot{\beta}^2 (R+e) \vec{i}_3 \end{aligned}$$

Corrigé

Question 7

Calculer la valeur maximale de la norme de cette accélération pour $\dot{\beta} = 2 \text{ rad/s}$, $L = 5 \text{ m}$, $R = 1 \text{ m}$, $e = 1 \text{ m}$.

On a :

$$\|\overrightarrow{\Gamma(G, 4/1)}\|^2 = L^2 \dot{\beta}^4 + \dot{\beta}^4 (R+e)^2 + 2L\dot{\beta}^4 (R+e) \cos(\vec{i}_2, \vec{i}_3) = L^2 \dot{\beta}^4 + \dot{\beta}^4 (R+e)^2 + 2L\dot{\beta}^4 (R+e) \cos \gamma$$

Corrigé

Corrigé

$\|\vec{\Gamma}(G, 4/1)\|^2$ est maximal lorsque $\cos \gamma = 1$; donc

$$\|\vec{\Gamma}(G, 4/1)\| = \sqrt{L^2 \dot{\beta}^4 + \dot{\beta}^4 (R+e)^2 + 2L \dot{\beta}^4 (R+e)} = \dot{\beta}^2 (L+R+e) = 28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Le dessin ci-dessous montre le mécanisme permettant de faire varier en fonctionnement l'angle θ_1 . L'actionneur de ce mécanisme est le vérin hydraulique 5-6.

Soit $\vec{FH} = 2a \vec{i}_7$, $\vec{FE} = 3a \vec{i}_1$ (où a est une constante positive) ; $\vec{EH} = x(t) \vec{i}_{56}$ et $\varphi(t) = (\vec{i}_7, \vec{i}_1)$.

Question 8

Exprimer x en fonction de a et φ puis la vitesse de sortie de la tige du vérin, soit $\vec{V}(H, 6/5)$, en fonction de a , φ et $\dot{\varphi}$.

Commençons par écrire la fermeture de chaîne cinématique dans le triangle EFH :

$$\vec{EF} + \vec{FH} + \vec{HE} = \vec{0} \iff x(t) \vec{i}_{56} = 2a \vec{i}_7 - 3a \vec{i}_1$$

En élevant cette relation au carré, on a :

$$x(t)^2 = 4a^2 + 9a^2 - 12a^2 \cos \phi$$

En conséquence,

$$x(t) = a \sqrt{13 - 12 \cos \phi}$$

Par ailleurs,

$$\vec{V}(H, 6/5) = \left[\frac{d \vec{EH}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_5} = \frac{d(a \sqrt{13 - 12 \cos \phi})}{dt} \vec{i}_{56}$$

$$\vec{V}(H, 6/5) = \frac{6a \dot{\phi} \sin \phi}{\sqrt{13 - 12 \cos \phi}} \vec{i}_{56}$$

Corrigé

Question 9

En considérant que dans cet intervalle de temps, $\dot{\varphi}$ est constante, déterminer le volume d'huile nécessaire au passage de la position $\varphi = \pi/9$ à la position $\varphi = \pi/3$, si S est la section du piston sur laquelle agit l'huile.

Corrigé

$$Vol = S \cdot \left(x\left(\frac{\pi}{9}\right) - x\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 0,187 \text{ m}^3$$

AN : $a = 2\text{m}$, $S = 700\text{cm}^2$.

