

CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE 7 – TORSEURS

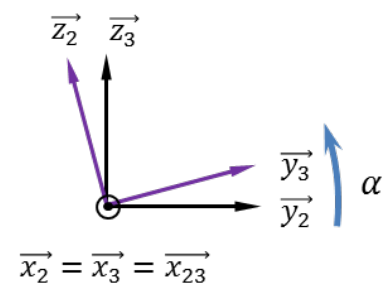
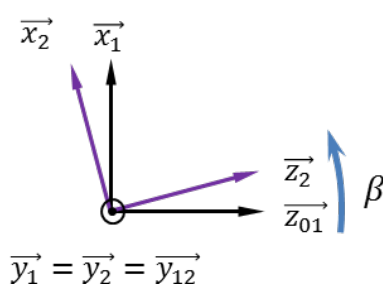
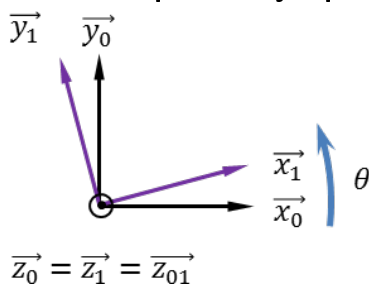
TRAVAUX DIRIGÉS

D'après ressources ???

1 Pales d'hélicoptères

1.1 Mise en situation

1.2 Cinématique analytique



Question 1

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V}(G \in S_3/S_2)$.

On a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha} \vec{x}_{23} \\ \overrightarrow{V}(A_3 \in S_3/S_2) = \vec{0} \end{array} \right\}_{A_3}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V}(G \in S_3/S_2) = \underbrace{\overrightarrow{V}(A_3 \in S_3/S_2)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{GA_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = -a \vec{x}_{23} \wedge \dot{\alpha} \vec{x}_{23} = \vec{0}$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha} \vec{x}_{23} \\ \overrightarrow{V}(G \in S_3/S_2) = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Corrigé

Question 2

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V}(G \in S_2/S_1)$.

On a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta} \vec{y}_{12} \\ \overrightarrow{V}(A_3 \in S_2/S_1) = \vec{0} \end{array} \right\}_{A_3}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V}(G \in S_2/S_1) = \underbrace{\overrightarrow{V}(A_3 \in S_2/S_1)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{GA_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = -a \vec{x}_{23} \wedge \dot{\beta} \vec{y}_{12} = -a \dot{\beta} \vec{z}_2$$

Corrigé

Corrigé

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} = -a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$$

Question 3

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)}$.

On a :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(O \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O \in S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = (-a \overrightarrow{x_{23}} - r \overrightarrow{x_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} = a \dot{\theta} \cos \beta \overrightarrow{y_{12}} + r \dot{\theta} \overrightarrow{y_{12}}$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \dot{\theta} (a \cos \beta + r) \overrightarrow{y_{12}} \end{array} \right\}_G$$

Corrigé

Question 4

Déduire des questions précédentes le torseur $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}$ au point G.

Par composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\} = \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} + \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

Tous les torseurs ayant déjà été exprimés au même point, on a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} + \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = \dot{\theta} (a \cos \beta + r) \overrightarrow{y_{12}} - a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$$

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_{12}} - a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2}$.

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_{12}} - a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2}$.

Question 5

Exprimer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)}$.

Par définition,

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)} = \left[\frac{\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Il est donc nécessaire de dériver $\overrightarrow{y_{12}}$ et $\overrightarrow{z_2}$:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{y_{12}} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \wedge \overrightarrow{y_{12}} = -\dot{\theta} \overrightarrow{x_1}$$

Corrigé

Corrigé

Corrigé

$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta} \vec{z}_{01} + \dot{\beta} \vec{y}_{12}) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta} \sin \beta \vec{y}_1 + \dot{\beta} \vec{x}_2$$

Au final :

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)} = -a\dot{\beta} \sin \beta \dot{\theta} \vec{y}_{12} + (a \cos \beta + r)\ddot{\theta} \vec{y}_{12} - (a \cos \beta + r)\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 - a\ddot{\beta} \vec{z}_2 - a\dot{\beta}(\dot{\theta} \sin \beta \vec{y}_1 + \dot{\beta} \vec{x}_2)$$

Question 6

La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1.1). Pour $\beta = 0$, calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de 250 tr/min.

Corrigé

Lorsque $\beta = 0$ la vitesse en bout de pale est donnée par $L\dot{\theta}$. $\dot{\theta} = 250 \text{ tr/min} = \frac{250 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 26,18 \text{ rad/s}$ On a donc :

$$L = \frac{295,1}{26,18} = 11,2 \text{ m}$$