

CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

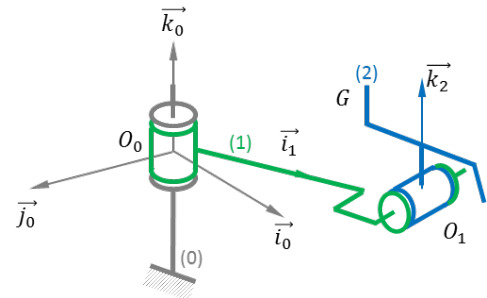
CHAPITRE 5 – CINÉMATIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

EXERCICE D'APPLICATION

Etude d'une centrifugeuse à 2 degrés de liberté [1]

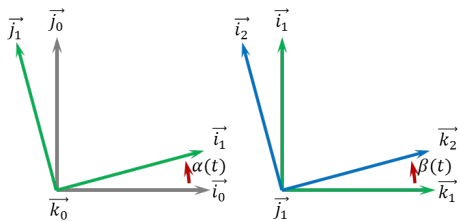


Centrifugeuse humaine développée par le CNRS /
MEDES



Modélisation cinématique

Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a \vec{i}_1$;
- $\overrightarrow{O_1G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$.

Question 1

Donner la trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 .

La trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a \vec{i}_1 + b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans \mathcal{R}_0 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_0G}(t) &= a (\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0) + b (\cos \beta(t) \vec{i}_1 - \sin \beta(t) \vec{k}_1) + c (\cos \beta(t) \vec{k}_1 + \sin \beta(t) \vec{i}_1) \\ &= a (\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0) + b (\cos \beta(t) (\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0) - \sin \beta(t) \vec{k}_0) \\ &\quad + c (\cos \beta(t) \vec{k}_0 + \sin \beta(t) (\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0)) \\ &= \begin{bmatrix} a \cos \alpha(t) + b \cos \beta(t) \cos \alpha(t) + c \sin \beta(t) \cos \alpha(t) \\ a \sin \alpha(t) + b \cos \beta(t) \sin \alpha(t) + c \sin \beta(t) \sin \alpha(t) \\ -b \sin \beta(t) + c \cos \beta(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

Question 2

Calculer $V(O_0 \in S_1/S_0)$.

Correction

Question 3

Calculer $\overrightarrow{V}(O_1 \in S_2/S_1)$.

Question 4

Calculer $\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0)$.

Méthode 1 – Par définition,

$$\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d(a\vec{i}_1)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = a \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[\frac{d(\cos\alpha(t)\vec{i}_0 + \sin\alpha(t)\vec{j}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\cos\alpha(t)}{dt}\vec{i}_0 \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d\sin\alpha(t)}{dt}\vec{j}_0 \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d\cos\alpha(t)}{dt}\vec{i}_0 + \cos\alpha(t) \underbrace{\left[\frac{d\vec{i}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} + \frac{d\sin\alpha(t)}{dt}\vec{j}_0 + \sin\alpha(t) \underbrace{\left[\frac{d\vec{j}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} \\ &= -\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\vec{i}_0 + \dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\vec{j}_0 = \dot{\alpha}(t)\vec{j}_1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = \begin{bmatrix} -a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) \\ a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\dot{\alpha}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Dans les deux cas, $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ est dérivé par rapport \mathcal{R}_0 mais il s'exprime différemment dans \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 :

– $\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = -a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\vec{i}_0 + a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\vec{j}_0$: ici la base de **projection** et de **dérivation** est la base \mathcal{B}_0 ;

– $\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = a\dot{\alpha}(t)\vec{j}_1$: ici la base de dérivation est la base \mathcal{B}_0 et la base de projection est \mathcal{B}_1 .

Méthode 2 – Utilisation de la dérivation vectorielle.

Calcul de $\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0)$.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = a \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Le calcul de $\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\alpha}\vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\alpha}\vec{j}_1$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = a\dot{\alpha}\vec{j}_1$$

Méthode 3 – Calcul de $\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0)$.

S_1 et S_0 sont en liaison pivot de centre O_0 , on a donc : $\overrightarrow{V}(O_0 \in S_1/S_0) = \vec{0}$.

En conséquence,

$$\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = \overrightarrow{V}(O_0 \in S_1/S_0) + \overrightarrow{O_1O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \vec{0} - a\vec{i}_1 \wedge (\dot{\alpha}\vec{k}_0) = a\dot{\alpha}\vec{j}_1$$

Question 5

Calculer $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$, $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

Question 6

Calculer $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)}$.

On a :

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)} = \overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)}$$

Calculons $\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\vec{j}_1 - (b\vec{i}_2 + c\vec{k}_2) \wedge (\dot{\alpha}\vec{k}_0)$$

$$\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\vec{j}_1 + b\dot{\alpha}\sin(\beta + \pi/2)\vec{j}_1 + c\dot{\alpha}\sin\beta\vec{j}_1 = \dot{\alpha}(a + b\cos\beta + c\sin\beta)\vec{j}_1$$

Par ailleurs calculons $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(O_1 \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = -(b\vec{i}_2 + c\vec{k}_2) \wedge (\dot{\beta}\vec{j}_1) = -\dot{\beta}(b\vec{k}_2 - c\vec{i}_2)$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)} = \dot{\alpha}(a + b\cos\beta + c\sin\beta)\vec{j}_1 - \dot{\beta}(b\vec{k}_2 - c\vec{i}_2)$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)} = \left[\frac{d\vec{O_0G}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Correction

Question 7

Calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_1 \in S_2/S_0)}$.

Correction

Question 8

Calculer $\overrightarrow{\Gamma(G \in S_2/S_0)}$.

Correction

Références

- [1] Centrifugeuse humaine – CNRS Photothèque/Sébastien Godefroy et MEDES, *Avio et Tiger*, http://www.medes.fr/home_fr/fiche-centrifugeuse/mainColumnParagraphs/0/document/Presentation%20centrifugeuse%2018.12.07.pdf.