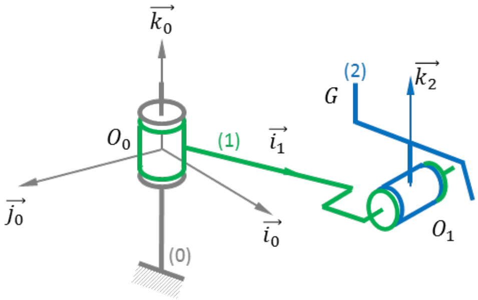
CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE 5 – CINÉMATIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

EXERCICE D'APPLICATION

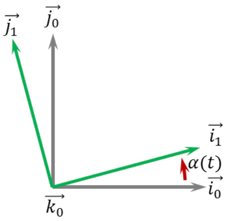
Etude d'une centrifugeuse à 2 degrés de liberté [1]

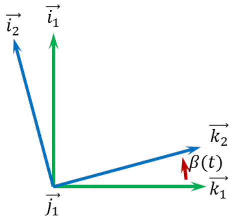
Centrifugeuse humaine développée par le CNRS / MEDES



Modélisation cinématique

Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :





Les paramètres constants du système sont les suivants :
- $\overrightarrow{O_0O_1} = a\,\overrightarrow{i_1}$;
- $\overrightarrow{O_1G} = b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$.

Question 1

Donner la trajectoire du point G dans le repère $\mathscr{R}_0$.

Correction

La trajectoire du point G dans le repère $\mathscr{R}_0$ est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a\,\overrightarrow{i_1} + b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans $\mathscr{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0G}(t) &= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{i_1} - \sin\beta(t)\overrightarrow{k_1}\right) + c\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{k_1} + \sin\beta(t)\overrightarrow{i_1}\right)\\
&= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) - \sin\beta(t)\overrightarrow{k_0}\right)\\
&\quad + c\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{k_0} + \sin\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)\right)\\
&= \begin{bmatrix} a\cos\alpha(t) + b\cos\beta(t)\cos\alpha(t) + c\sin\beta(t)\cos\alpha(t)\\ a\sin\alpha(t) + b\cos\beta(t)\sin\alpha(t) + c\sin\beta(t)\sin\alpha(t)\\ -b\sin\beta(t) + c\cos\beta(t)\end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}
\end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

Question 2

Calculer $\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/S_0)}$.

Question 3
Calculer $\overrightarrow{V(O_1 \in S_2/S_1)}$.

Question 4
Calculer $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)}$.

Méthode 1 – Par définition,

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{d\left(a\overrightarrow{i_1}\right)}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = a\left[\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} &= \left[\frac{d\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{d\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\frac{d\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}\\
&= \frac{d\cos\alpha(t)}{dt}\overrightarrow{i_0} + \cos\alpha(t)\underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{i_0}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}}_{\overrightarrow{0}} + \frac{d\sin\alpha(t)}{dt}\overrightarrow{i_0} + \sin(t)\underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{j_0}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}\\
&= -\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\overrightarrow{j_0} = \dot{\alpha}(t)\overrightarrow{j_1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \begin{bmatrix} -a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\\ a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\\ 0\end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0} = \begin{bmatrix} 0\\ a\dot{\alpha}(t)\\ 0\end{bmatrix}_{\mathscr{R}_1}$$

Dans les deux cas, $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ est dérivé par rapport $\mathscr{R}_0$ mais il s'exprime différemment dans $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$:
– $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = -a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\overrightarrow{j_0}$: ici la base de **projection** et de **dérivation** est la base $\mathscr{B}_0$;
– $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{j_1}$: ici la base de dérivation est la base $\mathscr{B}_0$ et la base de projection est $\mathscr{B}_1$.

Méthode 2 – Utilisation de la dérivation vectorielle.
Calcul de $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)}$.
On rappelle que :

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = a\left[\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Le calcul de $\left[\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$ peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_1}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}$$

Méthode 3 – Calcul de $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)}$.
S_1 et S_0 sont en liaison pivot de centre O_0, on a donc : $\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{0}$.
En conséquence,

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_0 \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{O_1O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} - a\overrightarrow{i_1} \wedge \left(\dot{\alpha}\overrightarrow{k_0}\right) = a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}$$

Correction

Question 5
Calculer $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$, $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ *et* $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

Question 6
Calculer $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}$.

Correction

Calcul de $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}$.
On a :

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}=\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}$$

Calculons $\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}+\overrightarrow{GO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}-\left(b\,\overrightarrow{i_2}+c\,\overrightarrow{k_2}\right)\wedge\left(\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\right)$$

$$\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}+b\dot{\alpha}\sin(\beta+\pi/2)\,\overrightarrow{j_1}+c\dot{\alpha}\sin\beta\,\overrightarrow{j_1}=\dot{\alpha}\left(a+b\cos\beta+c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}$$

Par ailleurs calculons $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}=\overrightarrow{V(O_1\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{GO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=-\left(b\,\overrightarrow{i_2}+c\,\overrightarrow{k_2}\right)\wedge\left(\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_1}\right)=-\dot{\beta}\left(b\,\overrightarrow{k_2}-c\,\overrightarrow{i_2}\right)$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}=\dot{\alpha}\left(a+b\cos\beta+c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}-\dot{\beta}\left(b\,\overrightarrow{k_2}-c\,\overrightarrow{i_2}\right)$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}=\left[\frac{d\,\overrightarrow{O_0G}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Question 7
Calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_1\in S_2/S_0)}$.

Correction

Question 8
Calculer $\overrightarrow{\Gamma(G\in S_2/S_0)}$.

Correction

Références

[1] Centrifugeuse humaine – CNRS Photothèque/Sébastien Godefroy et MEDES, *Avio et Tiger*, http://www.medes.fr/home_fr/fiche-centrifugeuse/mainColumnParagraphs/0/document/Presentation%20centrifugeuse%2018.12.07.pdf.