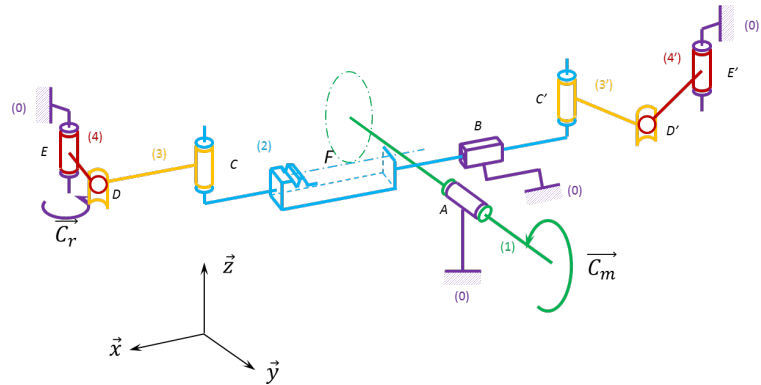


# CI 06 : ÉTUDE DU COMPORTEMENT STATIQUE DES SYSTÈMES

## CHAPITRE 2 – PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE



Direction assistée électrique de Clio [1]



Modélisation cinématique de la DAE de Twingo

Sur un véhicule automobile, la direction assistée permet d'aider le conducteur à diriger le véhicule en fonction de sa vitesse. En effet, à basse vitesse, l'adhérence entre les pneus et le sol rend difficile les manœuvres. Sur le système de direction assistée présenté ci-dessus, un moteur électrique lié à la colonne de direction par l'intermédiaire d'un réducteur roue-vis sans fin permet de restituer un couple d'assistance.

On cherche à dimensionner le moteur électrique pour qu'il fournisse un couple suffisant dans le but d'aider le conducteur.

Problématique

### PROBLÉMATIQUE :

- Comment calculer les efforts dans les liaisons d'un système mécanique ?
- Comment déterminer le couple maximal à fournir par le moteur électrique d'assistance ?

Savoir

### SAVOIRS :

- Mod – C15 : Modélisation des actions mécaniques :
  - Mod – C15.4 : Principe fondamental de la statique
  - Mod – C15 – S5 : Appliquer le PFS à un solide ou à un système de solides.
- Rés – C2 : Actions mécaniques dans les liaisons, équations de mouvement
  - Rés – C2.1 : Théorème des actions réciproques
  - Rés – C2.S1 : Choisir un modèle et une méthode de résolution (choix des isoléments et théorèmes appliqués).
  - Rés – C2.S2 : Déterminer les actions mécaniques désirées.

1	Principe fondamental de la statique – PFS	2
2	Résolution d'un problème en statique	3
2.1	Modélisation du système	3
2.2	Recherche des inconnues dans les liaisons	4
2.3	Recherche d'une relation entre le couple moteur et l'action dans la liaison pignon-crémaillère	8
2.4	Résolution finale du problème	9
3	Méthodes de résolution des problèmes de statique	11

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

# 1 Principe fondamental de la statique – PFS

Théorème

## Principe fondamental de la statique – PFS

On note  $S$  un système matériel à l'équilibre et  $\bar{S}$  le milieu extérieur à ce système.

$S$  est à l'équilibre par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}$  si  $\forall M \in S, \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ .

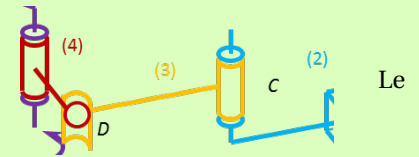
Si  $S$  est à l'équilibre, alors :

$$\{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\} = \{0\}$$

$\{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}$  désigne la somme des actions mécaniques agissant sur  $S$ .

Exemple

On isole le solide 3. Si on néglige la pesanteur, le solide est soumis à l'action de la liaison linéaire annulaire et de l'action de la liaison pivot.



PFS appliqué au solide 3 au point  $C$  s'écrit donc ainsi :

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \{0\}$$

En écrivant les torseurs au point  $C$  ( $\overrightarrow{CD} = -\lambda \overrightarrow{x}$ ) :

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D, \mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ 0 & -\lambda Y_{43} \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}} \quad \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}}$$

On a donc :

$$\begin{Bmatrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ 0 & -\lambda Y_{43} \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}} + \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}}$$

Théorème

## Équations vectorielles du PFS

De l'écriture sous forme de torseurs découle deux théorèmes.

Théorème de la résultante statique :

$$\overrightarrow{R}(\bar{S} \rightarrow S) = \overrightarrow{0}$$

Théorème du moment statique au point  $M$  :

$$\mathcal{M}(M, \bar{S} \rightarrow S) = \overrightarrow{0}$$

Deux ces 2 équations vectorielles en 3 dimension, on peut donc déduire un système à 6 équations.

Exemple

Le théorème de la résultante statique appliqué au solide 3 s'écrit :

$$\overrightarrow{R(4 \rightarrow 3)} + \overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} = \vec{0}$$

Le théorème du moment statique appliqué au solide 3 au point C s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 4 \rightarrow 3)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} = \vec{0}$$

Théorème

### Théorème des actions réciproques

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux systèmes mécaniques en équilibre. On a donc :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = -\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\}$$

Exemple

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = -\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} \iff \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_{C, \mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(3 \rightarrow 2)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 3 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{C, \mathcal{R}}$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{array} \right\}_{C, \mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{cc} -X_{32} & -L_{32} \\ -Y_{32} & -M_{32} \\ -Z_{32} & 0 \end{array} \right\}_{C, \mathcal{R}}$$

## 2 Résolution d'un problème en statique

Lors de la résolution d'un problème en statique, les difficultés sont entre autres :

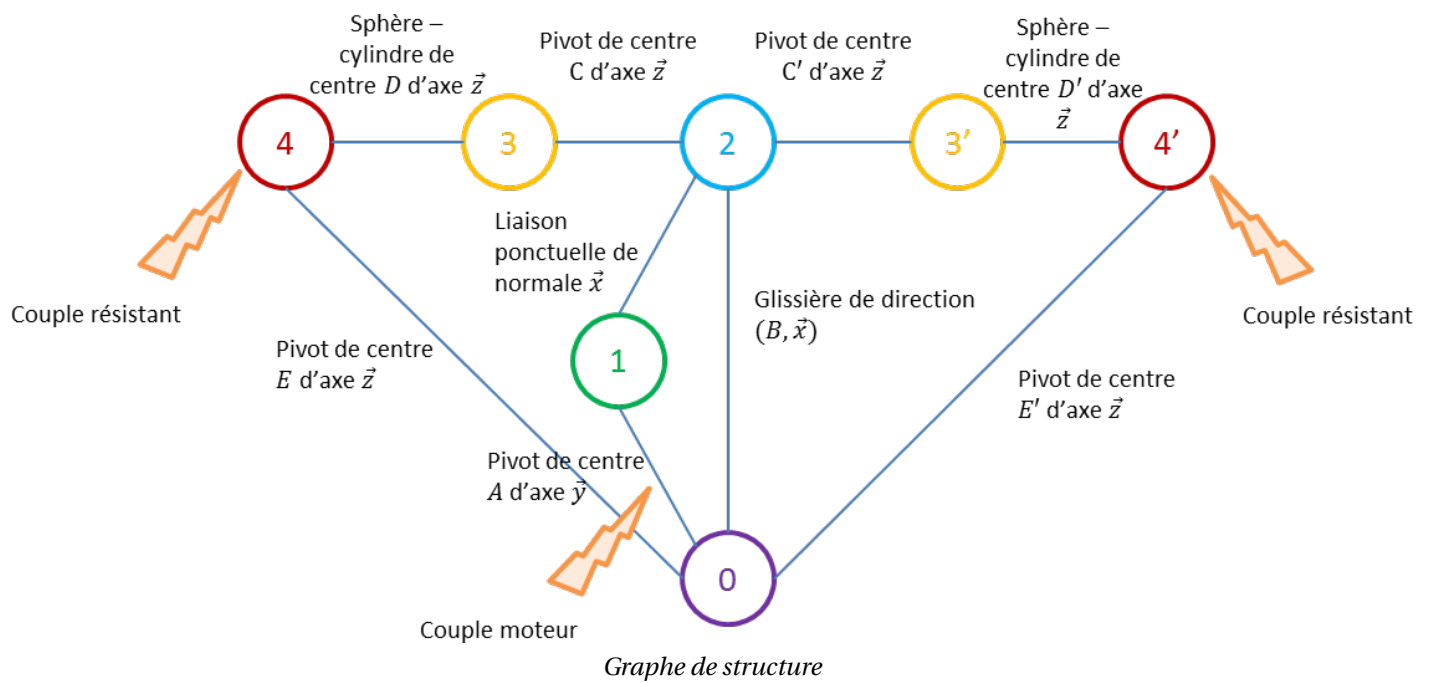
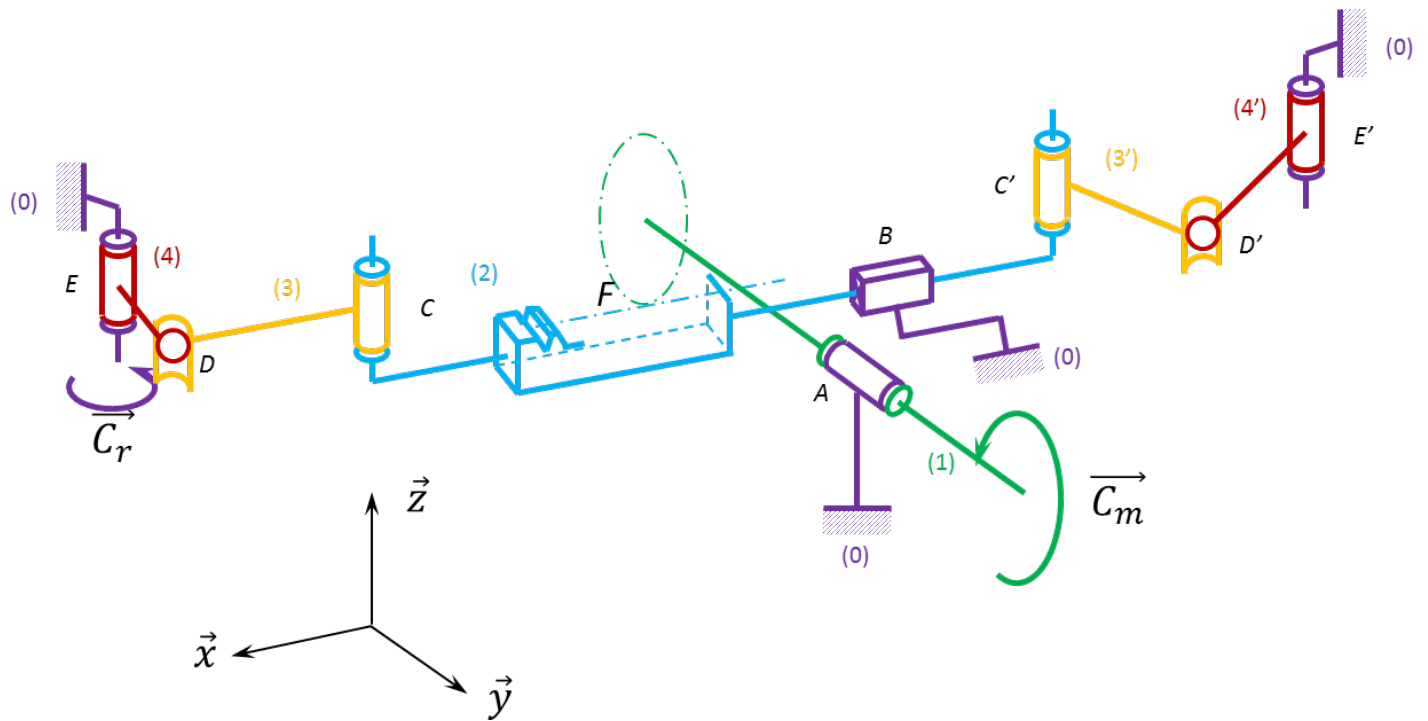
- modéliser le problème ;
- définir le système mécanique auquel on désire appliquer PFS ;
- faire le bilan exhaustif des actions mécaniques agissant sur le système ;
- en fonction du problème, choisir au mieux le théorème à utiliser pour éviter trop de calculs.

Dans la suite, on cherche d'une part à calculer le couple moteur afin de dimensionner le moteur d'assistance. D'autre part, on cherche à déterminer les efforts dans les liaisons dans le but de pouvoir les dimensionner.

Le couple résistant  $\vec{C}_r$  est connu.

### 2.1 Modélisation du système

Deux outils permettent de modéliser un système en vu de la résolution d'un problème de statique : le schéma d'architecture et le graphe de structure. Ils permettent de traduire par des liaisons cinématiques chacun des contacts entre les différentes classes d'équivalence cinématiques d'un système.



## 2.2 Recherche des inconnues dans les liaisons

L'objectif est ici de déterminer les composantes du torseur statique.

## 2.2.1 Bilan des actions mécaniques extérieures

Remarque

Le but est ici de donner l'ensemble des torseurs d'actions mécaniques exerçant sur le système.

### Actions à distance

La seule action à distance est ici la pesanteur.

Action de la pesanteur agissant sur la pièce 1 en son centre d'inertie  $G_1$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 1)} = -M_1 g \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G_1, \text{pes} \rightarrow 1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}}$$

Action de la pesanteur agissant sur la pièce 2 en son centre d'inertie  $G_2$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 2)} = -M_2 g \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G_2, \text{pes} \rightarrow 2)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}}$$

Action de la pesanteur agissant sur la pièce 3 en son centre d'inertie  $G_3$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 3)} = -M_3 g \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G_3, \text{pes} \rightarrow 3)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3, \mathcal{R}}$$

Action de la pesanteur agissant sur la pièce 4 en son centre d'inertie  $G_4$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 4)} = -M_4 g \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow 4)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G_4, \mathcal{R}}$$

Action de la pesanteur agissant sur la pièce 3' en son centre d'inertie  $G'_3$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 3')\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 3')} = -M'_3 g \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G'_3, \text{pes} \rightarrow 3')} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G'_3, \mathcal{R}}$$

Action de la pesanteur agissant sur la pièce 4' en son centre d'inertie  $G'_4$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 4')\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 4')} = -M'_4 g \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G'_4, \text{pes} \rightarrow 4')} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G'_4, \mathcal{R}}$$

## Action dans les liaisons cinématiques

Action de la liaison pivot d'axe  $\vec{y}$  de 0 sur 1 en A :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{pmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

Action de la liaison glissière d'axe  $\vec{x}$  de 0 sur 2 en B :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \begin{pmatrix} 0 & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{pmatrix}_{B, \mathcal{R}}$$

Action de la liaison ponctuelle de normale  $\vec{x}$  de 1 sur 2 en F (pignon – crémaillère) :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{pmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{F, \mathcal{R}}$$

Action de la liaison pivot d'axe  $\vec{z}$  de 2 sur 3 en C :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \begin{pmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{pmatrix}_{C, \mathcal{R}}$$

Action de la liaison sphère-cylindre d'axe  $\vec{z}$  de 3 sur 4 en

D :

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \begin{pmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{D, \mathcal{R}}$$

Action de la liaison pivot d'axe  $\vec{z}$  de 0 sur 4 en E :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} = \begin{pmatrix} X_{04} & L_{04} \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & 0 \end{pmatrix}_{E, \mathcal{R}}$$

Action de la liaison pivot d'axe  $\vec{z}$  de 2 sur 3' en C' :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3')\} = \begin{pmatrix} X_{23'} & L_{23'} \\ Y_{23'} & M_{23'} \\ Z_{23'} & 0 \end{pmatrix}_{C', \mathcal{R}}$$

Action de la liaison sphère-cylindre d'axe  $\vec{z}$  de 3' sur 4' en D' :

$$\{\mathcal{T}(3' \rightarrow 4')\} = \begin{pmatrix} X_{3'4'} & 0 \\ Y_{3'4'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{D', \mathcal{R}}$$

Action de la liaison pivot d'axe  $\vec{z}$  de 0 sur 4 en E' :

$$\{\mathcal{T}(0' \rightarrow 4')\} = \begin{pmatrix} X_{0'4'} & L_{0'4'} \\ Y_{0'4'} & M_{0'4'} \\ Z_{0'4'} & 0 \end{pmatrix}_{E', \mathcal{R}}$$

## Actions de contact

Action du couple moteur agissant sur la pièce 1 en A :

$$\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 1)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

Action du couple résistant agissant sur la pièce 4 en E :

$$\{\mathcal{T}(\text{res} \rightarrow 4)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_r \end{pmatrix}_{E, \mathcal{R}}$$

Action du couple résistant agissant sur la pièce 4' en E' :

$$\{\mathcal{T}(\text{res} \rightarrow 4')\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C'_r \end{pmatrix}_{E', \mathcal{R}}$$

## Bilan des actions mécaniques

Au bilan, le poids de chaque pièce est connu ainsi que les couples de frottements dans les liaisons pivots entre 0 et 4 et entre 0 et 4'.

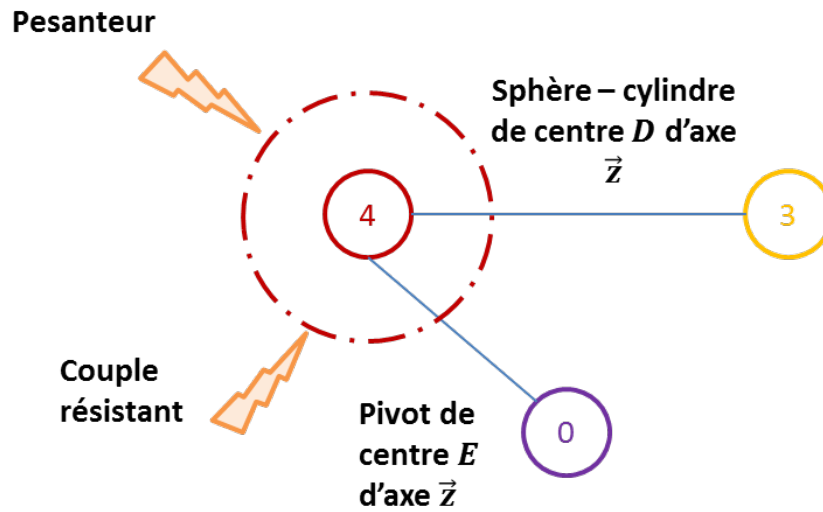
Il y a 35 inconnues de liaisons et une action mécanique inconnue : le couple moteur.

**Il y a donc 36 inconnues dans ce système.**

## 2.2.2 Calcul des actions mécaniques dans la pièce 4

**Isolons le solide 4.**

4 est soumis à la pesanteur, au couple résistant et aux actions de liaisons entre 4 et 0 et entre 3 et 4. Ces torseurs ont été écrits précédemment.



Remarque

En isolant le solide 4, on est en présence de 7 inconnues (5 inconnues de liaisons dans la liaison pivot 2 inconnues dans la liaison linéaire annulaire). Le PFS va permettre d'écrire 6 équations. Il n'est donc pas *a priori* possible de déterminer toutes les inconnues.

Appliquons le PFS au solide 4 au point  $E$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{res} \rightarrow 4)\} + \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 4)\} + \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} + \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \{0\}$$

Pour appliquer le PFS, il faut donc écrire chacun des torseurs en un point. Nous avons choisi le point  $E$ . Le point  $E$  est choisi car deux torseurs y sont déjà connus.

On note :  $\overrightarrow{EG_4} = x_{G_4} \overrightarrow{x} + y_{G_4} \overrightarrow{y} + z_{G_4} \overrightarrow{z}$  et  $\overrightarrow{ED} = x_D \overrightarrow{x} + y_D \overrightarrow{y}$ .

Exprimons le torseur de pesanteur au point  $E$  :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 4)} = -M_4 g \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(E, \text{pes} \rightarrow 4)} = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow 4)}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{EG_4} \wedge \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 4)} = (x_{G_4} \overrightarrow{x} + y_{G_4} \overrightarrow{y} + z_{G_4} \overrightarrow{z}) \wedge (-M_4 g \overrightarrow{z}) \end{array} \right\}_{G_4, \mathcal{R}}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(E, \text{pes} \rightarrow 4)} = M_4 g x_{G_4} \overrightarrow{y} - M_4 g y_{G_4} \overrightarrow{x}$$

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{pes} \rightarrow 4)} = -M_4 g \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(E, \text{pes} \rightarrow 4)} = M_4 g x_{G_4} \overrightarrow{y} - M_4 g y_{G_4} \overrightarrow{x} \end{array} \right\}_{E, \mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -y_{G_4} M_4 g \\ 0 & x_{G_4} M_4 g \\ -M_4 g & 0 \end{array} \right\}_{E, \mathcal{R}}$$

Exprimons le torseur liaison entre 3 et 4 au point  $E$  :

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D,\mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_D \\ \overrightarrow{ED} \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}} + \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} X_{34} \\ Y_{34} \\ 0 \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & 0 \\ 0 & x_D Y_{34} - y_D X_{34} \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}}$$

Tous les torseurs sont appliqués au point  $E$ . On peut donc appliquer le PFS :

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_r \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}} + \begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & 0 \\ 0 & x_D Y_{34} - y_D X_{34} \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}} + \begin{Bmatrix} 0 & -y_{G_4} M_4 g \\ 0 & x_{G_4} M_4 g \\ -M_4 g & 0 \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}} + \begin{Bmatrix} X_{04} & L_{04} \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & 0 \end{Bmatrix}_{E,\mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D,\mathcal{R}}$$

On peut donc écrire un système de 6 équations avec chacune des composantes de chacun des vecteurs :

$$\begin{cases} 0 + X_{34} + 0 + X_{04} = 0 \\ 0 + Y_{34} + 0 + Y_{04} = 0 \\ 0 + 0 - M_4 g + Z_{04} = 0 \\ 0 + 0 - y_{G_4} M_4 g + L_{04} = 0 \\ 0 + 0 + x_{G_4} M_4 g + M_{04} = 0 \\ C_r + x_D Y_{34} - y_D X_{34} + 0 + 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X_{34} + X_{04} = 0 \\ Y_{34} + Y_{04} = 0 \\ -M_4 g + Z_{04} = 0 \\ -y_{G_4} M_4 g + L_{04} = 0 \\ x_{G_4} M_4 g + M_{04} = 0 \\ C_r + x_D Y_{34} - y_D X_{34} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X_{34} + X_{04} = 0 \\ Y_{34} + Y_{04} = 0 \\ Z_{04} = M_4 g \\ L_{04} = y_{G_4} M_4 g \\ M_{04} = -x_{G_4} M_4 g \\ C_r + x_D Y_{34} - y_D X_{34} = 0 \end{cases}$$

Comme prévu, le système d'équations ne permet pas d'isoler les inconnues.

**Pour simplifier les calculs, nous négligerons l'effet du poids par la suite.**

En isolant le solide 4, le PFS au point  $E$  devient donc :

Par symétrie, en isolant le solide 4', le PFS au point  $E'$  s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} X_{34} + X_{04} = 0 \\ Y_{34} + Y_{04} = 0 \\ Z_{04} = 0 \\ L_{04} = 0 \\ M_{04} = 0 \\ C_r + x_D Y_{34} - y_D X_{34} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{3'4'} + X_{04'} = 0 \\ Y_{3'4'} + Y_{04'} = 0 \\ Z_{04'} = 0 \\ L_{04'} = 0 \\ M_{04'} = 0 \\ C_r + x'_D Y_{3'4'} - y'_D X_{3'4'} = 0 \end{cases}$$

Remarque

A ce stade, restent à déterminer les 8 inconnues suivantes :  $X_{34}$ ,  $X_{04}$ ,  $Y_{34}$ ,  $Y_{04}$ ,  $X_{3'4'}$ ,  $X_{04'}$ ,  $Y_{3'4'}$  et  $Y_{04'}$ .

6 équations n'ont pas encore été utilisées.

2 équations supplémentaires sont donc nécessaires pour calculer les inconnues.

Il faudrait donc réaliser d'autres isolements et leur appliquer le PFS pour pouvoir déterminer les inconnues manquantes.

## 2.3 Recherche d'une relation entre le couple moteur et l'action dans la liaison pignon-crémaillère

Dans certain cas il n'est pas indispensable d'appliquer le PFS dans sa totalité. L'application du théorème de la résultante statique ou du moment statique en un point peut suffire. En allant un peu plus loin, seule la projection d'un des théorèmes peut suffire.



Dans notre cas, commençons par **isoler le solide 1**.

1 est soumis au couple moteur, à la sphère – plan en  $I$ , à la liaison pivot de centre  $A$ .

Nous souhaitons une relation entre  $C_m$  et  $X_{12}$ . Par ailleurs, la liaison pivot ne transmet pas de couple autour de  $\vec{y}$ . On va donc appliquer le théorème du moment statique en  $A$  en projection autour de l'axe  $\vec{y}$ .

Commençons par déplacer le torseur  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$  (pignon – crémaillère) au point  $A$ . On note  $\vec{AF} = -L\vec{y} - R\vec{z}$ .

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(F, 1 \rightarrow 2)} + \vec{AF} \wedge R(1 \rightarrow 2) = (-L\vec{y} - R\vec{z}) \wedge X_{12}\vec{x} = LX_{12}\vec{z} - RX_{12}\vec{y}$$

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{F, \mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & -RX_{12} \\ 0 & LX_{12} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}} \iff \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} -X_{12} & 0 \\ 0 & RX_{12} \\ 0 & -LX_{12} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

Par ailleurs,

$$\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}} \quad \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

L'application du théorème du moment statique au point  $A$  sur l'axe  $\vec{y}$  se traduit donc par l'équation suivante :

$$RX_{12} + C_m = 0$$

## 2.4 Résolution finale du problème

Le problème de choix du moteur d'assistance demande d'établir le lien entre :

- le couple de frottement entre la route et les pneus ;
- le couple moteur.

## Ensemble soumis à 2 actions mécaniques

**Isolons le solide 3**

**Bilan des actions mécanique extérieures à 3**  $\vec{CD} = a\vec{x}$

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D, \mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ 0 & aY_{43} \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}} \quad \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}}$$

**Théorème du moment statique appliqué à 3 en  $C$  en projection suivant  $\vec{z}$  :**

$$aY_{43} = 0 \iff Y_{43} = 0$$

Par analogie, le théorème du moment statique appliqué à 3' en  $C'$  en projection suivant  $\vec{z}$

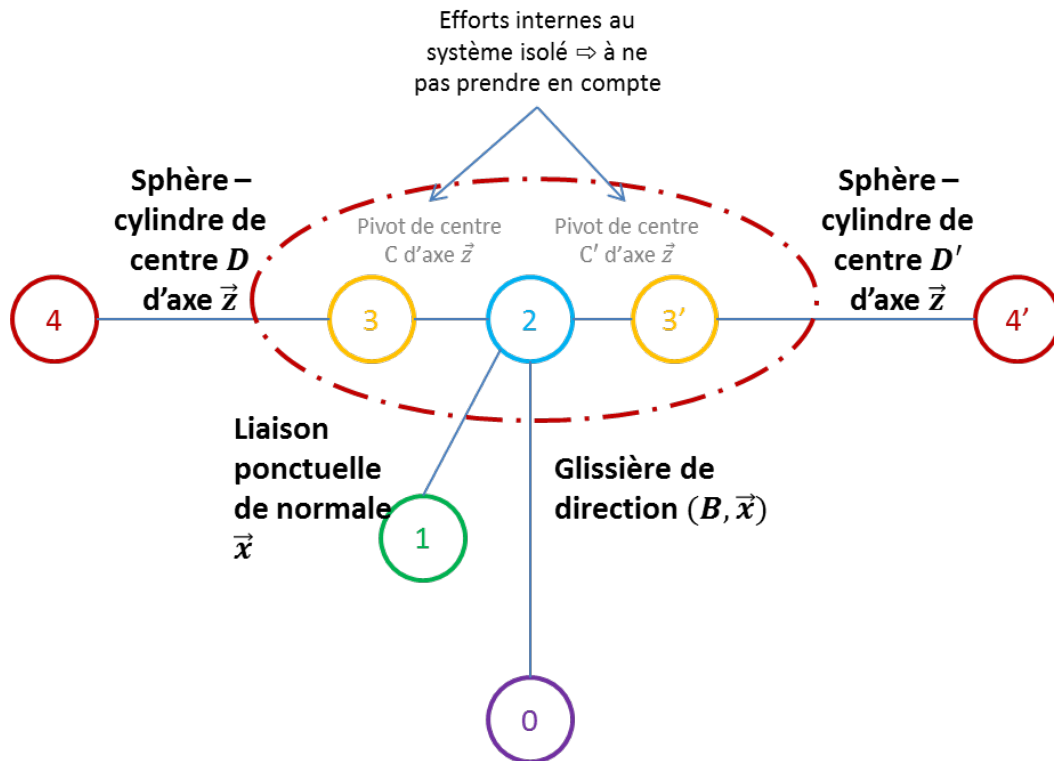
$$Y_{4'3'} = 0$$

## Ensemble soumis à 4 actions mécaniques

Isolons l'ensemble  $S = \{2 + 3 + 3'\}$

### Bilan des actions mécanique extérieures au système

Ce système est soumis aux actions des liaisons sphères cylindres en  $D$  et  $D'$ , à la liaison ponctuelle en  $F$  et la glissière en  $B$ . Déplaçons les torseurs au point  $B$ .



$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D, \mathcal{R}} \quad \{\mathcal{T}(4' \rightarrow 3')\} = \begin{Bmatrix} X_{4'3'} & 0 \\ Y_{4'3'} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D', \mathcal{R}}$$

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{F, \mathcal{R}} \quad \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}}$$

En appliquant le théorème de la résultante statique : à l'ensemble  $S$  en projection sur l'axe  $\vec{x}$  :

$$X_{43} + X_{4'3'} + X_{12} = 0$$

## Bilan

A l'aide des équations déterminées précédemment on a :

$$\begin{cases} X_{34} + X_{04} = 0 \\ Y_{34} + Y_{04} = 0 \\ Z_{04} = 0 \\ L_{04} = 0 \\ M_{04} = 0 \\ C_r + x_D Y_{34} - y_D X_{34} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{3'4'} + X_{04'} = 0 \\ Y_{3'4'} + Y_{04'} = 0 \\ Z_{04'} = 0 \\ L_{04'} = 0 \\ M_{04'} = 0 \\ C'_r + x'_D Y_{3'4'} - y'_D X_{3'4'} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R X_{12} + C_m = 0 \\ X_{43} + X_{4'3'} + X_{12} = 0 \\ Y_{4'3'} = 0 \\ Y_{4'3'} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{34} + X_{04} = 0 \\ C_r - y_D X_{34} = 0 \\ X_{3'4'} + X_{04'} = 0 \\ C'_r - y'_D X_{3'4'} = 0 \\ R X_{12} + C_m = 0 \\ X_{43} + X_{4'3'} + X_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_D X_{34} = C_r \\ y'_D X_{3'4'} = C'_r \\ R X_{12} + C_m = 0 \\ X_{43} + X_{4'3'} + X_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{43} = -\frac{C_r}{y_D} \\ X_{4'3'} = -\frac{C'_r}{y'_D} \\ X_{12} = -\frac{C_m}{R} \\ X_{43} + X_{4'3'} + X_{12} = 0 \end{cases}$$

Au final :

$$X_{43} + X_{4'3'} + X_{12} = 0 \Leftrightarrow -\frac{C_r}{y_D} - \frac{C'_r}{y'_D} - \frac{C_m}{R} = 0 \Leftrightarrow C_m = -R \left( \frac{C_r}{y_D} + \frac{C'_r}{y'_D} \right)$$

Résultat

Au final :

$$C_m = -R \left( \frac{C_r}{y_D} + \frac{C'_r}{y'_D} \right)$$

### 3 Méthodes de résolution des problèmes de statique

Méthode

#### Recherche de toutes les inconnues de liaisons

1. Réaliser le graphe de structure
2. Réaliser un bilan complet des actions mécaniques et compléter le graphe de structure
3. Identifier les solides ou les systèmes soumis à l'actions de deux actions mécaniques
4. Rechercher une frontière d'isolement
5. Réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures au système (BAME)
6. Écrire le PFS en un point (de préférence un point où un grand nombre de torseurs sont déjà exprimés)
7. Si le nombre d'inconnues est inférieur à 6 on résout le système, sinon on réalise un autre isolement
8. Effectuer l'application numérique

Méthode

#### Recherche d'une équation

1. Réaliser le graphe de structure
2. Réaliser un bilan complet des actions mécaniques et compléter le graphe de structure
3. Identifier les solides ou les systèmes soumis à l'actions de deux actions mécaniques
4. Rechercher une frontière d'isolement
5. Réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures au système (BAME)
6. Observer les torseurs et choisir le théorème à appliquer (théorème de la résultante statique ou du moment statique)
7. Résoudre le système d'équation
8. Effectuer l'application numérique

## Références

- [1] <http://www.renault.com/fr/innovation/au-coeur-de-la-technique/pages/effeuillage-d-un-moteur.aspx>