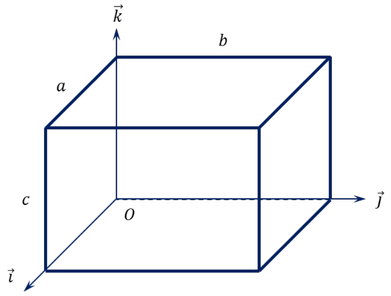
CI 06 : Étude du comportement statique des systèmes

Chapitre 1 – Modélisation des Actions Mécaniques

Exercices d'application : Géométrie des Masses

Exercice 1 – Parallélépipède rectangle



Soit un parallélépipède rectangle en matériau de masse volumique μ.

Question 1
Déterminer la masse du solide.

Question 2
Déterminer la position du centre de gravité.

Corrigé

On a :

$$m = \int_{\mathcal{V}} \mu \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Le solide étant un parallélépipède rectangle, le système de coordonnée le mieux adapté est le système cartésien. Un élément infinitésimal de volume peut donc s'écrire ainsi :

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

x variera de 0 à a, y variera de 0 à b, z variera de 0 à c.
On a donc :

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} \mu \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_0^c \int_0^b \int_0^a \mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mu \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z = \mu [x]_0^a \cdot [y]_0^b \cdot [z]_0^c$$

D'où

$$m = abc\mu$$

La position du centre d'inertie G est définie par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int \overrightarrow{OP}\mathrm{d}m$$

La position d'un point quelconque P est définie par $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$. On calcule donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int \overrightarrow{OP}\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\iiint \left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right)\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\iiint x\,\overrightarrow{i}\,\mathrm{d}m + \frac{1}{m}\iiint y\,\overrightarrow{j}\,\mathrm{d}m + \frac{1}{m}\iiint z\,\overrightarrow{k}\,\mathrm{d}m$$

En séparant les calculs :

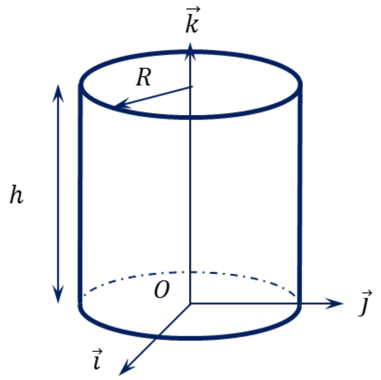
$$\begin{aligned}\iiint x\,\overrightarrow{i}\,\mathrm{d}m &= \int_0^c \int_0^b \int_0^a x\,\overrightarrow{i}\,\mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mu\,\overrightarrow{i}\left(\int_0^c \mathrm{d}z \cdot \int_0^b \mathrm{d}y \cdot \int_0^a x\mathrm{d}x\right)\\ &= \mu\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \cdot [y]_0^b \cdot [z]_0^c\right)\overrightarrow{i} = \frac{a^2}{2}\cdot b \cdot c\,\overrightarrow{i} = \mu abc\frac{a}{2}\overrightarrow{i}\end{aligned}$$

Corrigé

En faisant de même pour les autres termes, on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mu a b c}{m}\left(\frac{a}{2}\overrightarrow{i} + \frac{b}{2}\overrightarrow{j} + \frac{c}{2}\overrightarrow{k}\right) = \frac{a}{2}\overrightarrow{i} + \frac{b}{2}\overrightarrow{j} + \frac{c}{2}\overrightarrow{k}$$

Exercice 2 – Cylindre



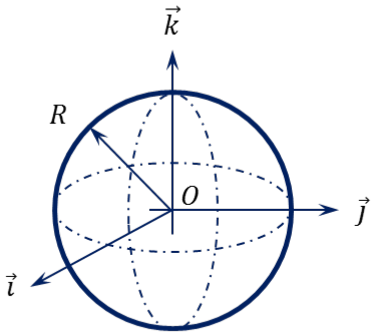
Soit un volume cylindrique de masse volumique μ.

Question 1
Déterminer la masse du solide.

Question 2
Déterminer la position du centre de gravité.

Corrigé

Exercice 3 – Boule

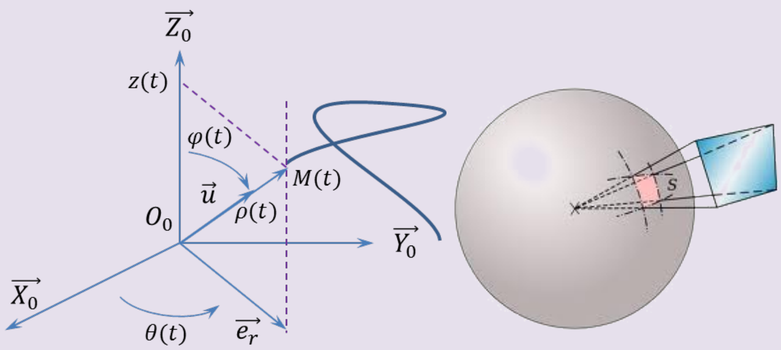


Soit une boule de masse volumique μ.

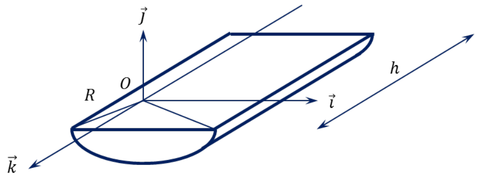
Question 1
Déterminer la masse du solide.

Question 2
Déterminer la position du centre de gravité.

Corrigé



Exercice 4 – Portion de cylindre



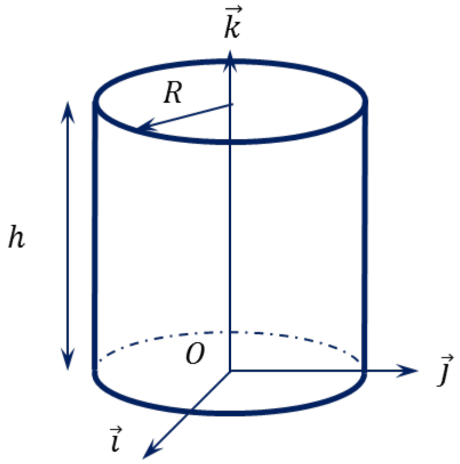
Soit une portion cylindrique de masse volumique μ et de secteur angulaire 2θ.

Question 1
Déterminer la masse du solide.

Question 2
Déterminer la position du centre de gravité.

Corrigé

Exercice 5 – Portion de cylindre



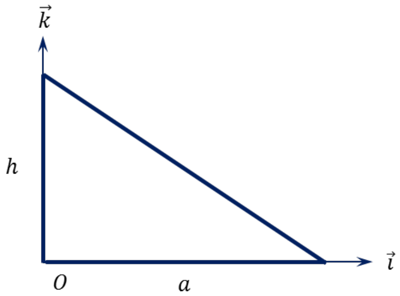
Soit une portion cylindrique de masse volumique μ, de secteur angulaire 2θ et d'épaisseur e.

Question 1
Déterminer la masse du solide.

Question 2
Déterminer la position du centre de gravité.

Corrigé

Exercice 6 – Prisme



Soit un prisme de masse volumique μ et de profondeur L.

Question 1
Déterminer la masse du solide.

Question 2
Déterminer la position du centre de gravité.

Corrigé