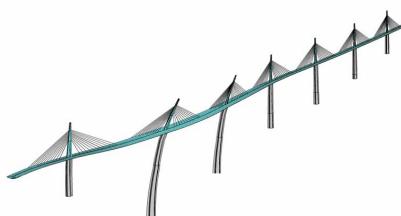


# CI 06 : ÉTUDE DU COMPORTEMENT STATIQUE DES SYSTÈMES

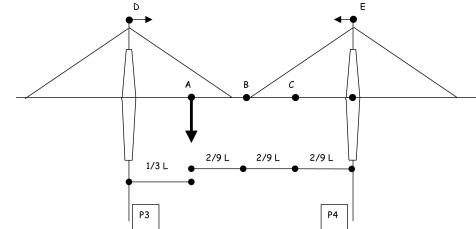
## CHAPITRE 1 – MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES



*Viaduc de Millau [1]*



*Mode de flexion [1]*



*Sollicitation de la structure [1]*

Le dimensionnement des structures mécaniques passe par la connaissance des efforts qui vont s'appliquer à elle. Le viaduc de Millau doit par exemple supporter les efforts dus au passage des différents véhicules (moto, voiture, bus, camions, ...) à l'effort du vent. Ces efforts sont supportés d'une part par les piles du pont et d'autre part par les différents haubans. Ceux-ci doivent aussi être dimensionnés pour supporter le poids du tablier et le poids des piles elles-mêmes.

Ainsi, la connaissance des efforts s'exerçant sur la structure permettra de les dimensionner afin de résister aux différentes sollicitations.

Problématique

### PROBLÉMATIQUE :

- Comment modéliser un système afin de réaliser une étude de statique ?
- Comment modéliser les efforts s'exerçant sur système ?

Savoir

### SAVOIRS :

- Mod-C15 : Modélisation des actions mécaniques
  - Mod-C15.1 : Modèle local (densité surfacique, linéique et volumique d'effort) :
    - contact parfait ;
    - modélisation du frottement sec – Lois de Coulomb ;
    - Mod-C15.2 : Modèle global (torseur d'action mécanique)
    - Mod-C15.3 : Modèle global du frottement visqueux.
    - Mod-C15-S1 : Associer un modèle à une action mécanique.
    - Mod-C15-S2 : Écrire la relation entre le modèle local et le modèle global associé aux actions mécaniques dans les cas suivants : action d'un fluide, action entre solides (liaisons avec et sans frottement).
    - Mod-C15-S3 : Écrire le modèle global de l'action de la pesanteur, du frottement fluide, de la résistance au roulement et du pivotement.
    - Mod-C15-S4 : Associer un modèle global d'effort au comportement d'une liaison réelle.

1	Définitions .....	2
1.1	Action mécanique .....	2
1.2	Torseur statique .....	6
2	Actions mécaniques à distance .....	6
2.1	Action mécanique de pesanteur .....	6

3	<b>ACTIONS MÉCANIQUES DE CONTACT</b>	.9
3.1	<b>Actions surfaciques</b>	.9
3.2	<b>Torseurs d'actions mécaniques dans les liaisons cinématiques</b>	11
3.3	<b>Théorème de Pascal</b>	11
3.4	<b>Théorème d'Archimède</b>	12
3.5	<b>Action transmissible par des ressorts</b>	12
3.6	<b>Actions de frottement visqueux</b>	13
4	<b>Étude locale du contact entre pièces</b>	15
4.1	<b>Cas du contact ponctuel</b>	15
4.2	<b>Cas général</b>	17
4.3	<b>Notions de tribologie</b>	19

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

## 1 Définitions

### Hypothèse

- En statique, les solides (ou systèmes matériels) étudiés sont supposés :
- géométriquement parfaits ;
  - indéformables ;
  - de masse constante.

### Définition

#### Systèmes matériels

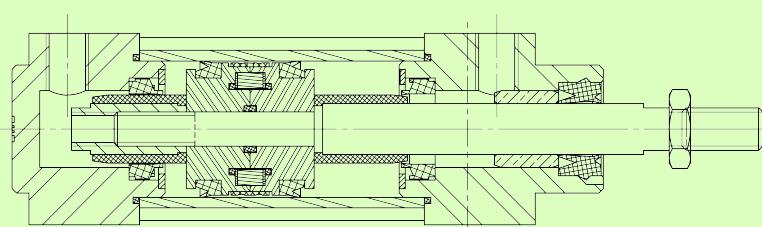
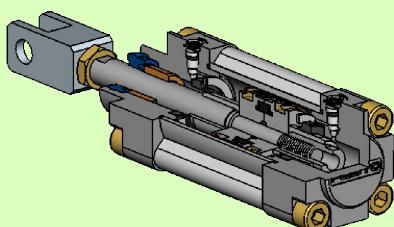
Quantité de matière dont la masse reste constante pendant l'étude. On note  $S$  un système matériel et  $\bar{S}$  l'extérieur de  $S$ .

### Remarque

Un système matériel peut être un solide, un ensemble de solides, une partie de solide, un fluide.

### Exemple

#### Vérin double effet Festo [2]



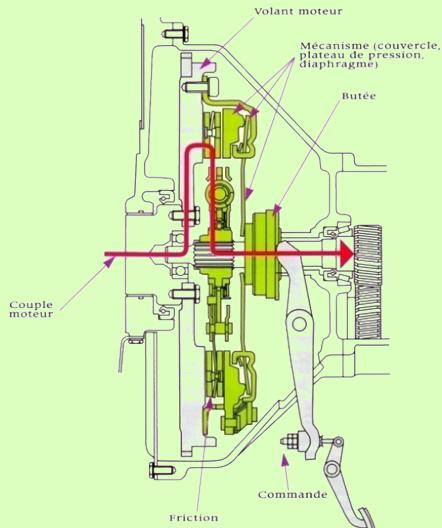
La tige de vérin peut être considérée comme un solide. Le piston, avec toutes les pièces qui le composent, peut être considéré comme un système matériel.

Le fluide peut aussi être considéré comme un ensemble matériel.

### 1.1 Action mécanique

### Action mécanique (AM)

Une action mécanique désigne tout phénomène physique capable de provoquer un mouvement ou une déformation d'un système matériel.



Airbus Zéro G [3]

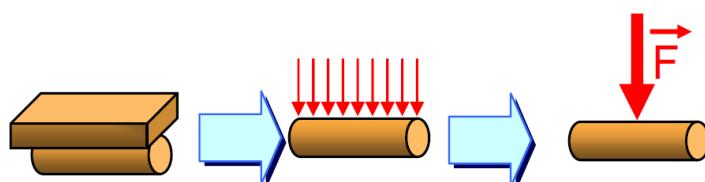
*Embrayage de voiture*

On distingue :

- les actions mécaniques de contact : elles s'appliquent sur la surface (ou une portion de surface) d'un système matériel (action d'un système matériel sur un autre, action d'un fluide sur un système matériel) ;
- les actions mécaniques à distance : elles s'appliquent sur tout le volume d'un système matériel (pesanteur, actions magnétiques).

Suivant le point de vue utilisé, les actions mécaniques peuvent être modélisées par :

- le modèle local, qui s'intéresse aux actions en chaque point de la surface de contact entre deux systèmes matériels (ou en tout point du volume s'il s'agit d'actions volumiques) ;
- le modèle global, qui, à partir de la modélisation locale, permet de se ramener à une action en un point.



### Force élémentaire

Une force élémentaire  $d\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S}$  est une action mécanique extérieure (*ext*) s'exerçant sur une partie d'un système matériel  $S$  :

- un élément linéaire  $dl$  ( $m$ ) ;
- un élément surfacique  $dS$  ( $m^2$ ) ;
- un élément de volumique  $dV$  ( $m^3$ ) .

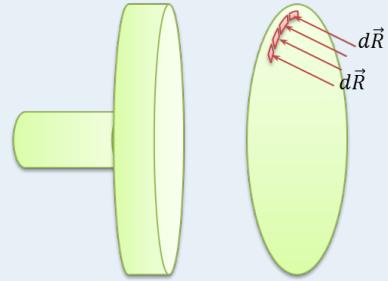
Cette force est représentable par un glisseur  $(M, d\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S})$  où  $M$  est le point d'application. On note  $\overrightarrow{u}(M)$  la direction de l'effort.  $\|d\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S}\|$  s'exprime en Newton (N).

On note  $f(M)$  la fonction densité d'effort. Suivant que l'action mécanique s'exerce sur une ligne, une surface ou un volume, on parlera de densité d'effort linéique (en  $N/m$ ), surfacique (en  $N/m^2$ ) ou volumique (en  $N/m^3$ ).

On a donc :

$$d\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S} = f(M) \overrightarrow{u}(M) dV$$

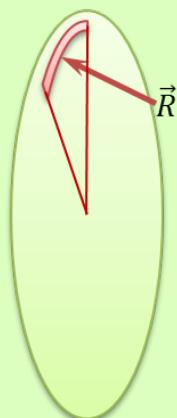
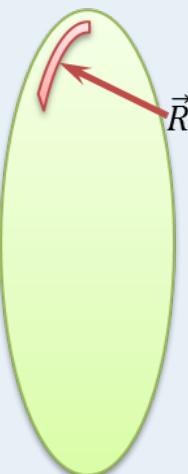
Respectivement,  $d\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S} = f(M) \overrightarrow{u}(M) dl$  et  $d\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S} = f(M) \overrightarrow{u}(M) dS$  en respectant l'homogénéité de la force.



### Force globale

La force globale extérieure agissant sur un système matériel  $S$  se calcule alors ainsi :

$$\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S} = \iiint_V d\overrightarrow{R}_{\text{ext}\rightarrow S} = \iiint_V f(M) \overrightarrow{u}(M) dV$$



Une portion de couronne est soumise à une pression uniforme  $p$ . Les dimensions de la surface sont les suivantes :

- $r$  : « petit » rayon ;
- $R$  : « grand » rayon ;
- $\alpha$  : portion angulaire.

Calculer l'effort résultant.

2. Qu'en est-il si le champ de pression est de la forme  $p_0 \cos \theta$  ?

### Moment d'une force

Soit une force élémentaire appliquée au point  $M$  :  $d\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}$ . On appelle moment élémentaire de la force  $d\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}$  au point  $P$  le vecteur défini par :

$$d\overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} = \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}$$

Par intégration, le moment global s'exprime donc ainsi :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} = \iiint_V d\overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)}$$

### Moment d'une force – Interprétation graphique

Prenons le cas du serrage d'un écrou avec un effort  $\vec{F} = -F \vec{y}$  :



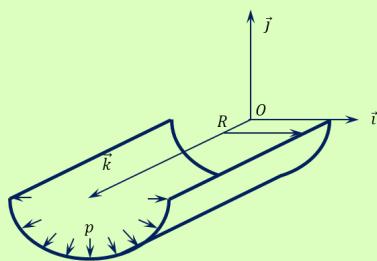
Dans l'hypothèse où l'effort  $\vec{F}$  s'appliquerait au point  $O$ , il n'y aurait donc pas de serrage de l'écrou. Le moment (ou couple de serrage) serait donc nul :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Clef} \rightarrow \text{Ecrou})} = \overrightarrow{0}$ .

Si l'effort s'applique en  $P$ ,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Clef} \rightarrow \text{Ecrou})} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = L \vec{x} \wedge -F \vec{y} = -LF \vec{z}$$

Pour un même effort, la norme du moment augmente quand le bras de levier augmente.

Exemple



Un demi cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $h$  est soumis à un champ de pression uniforme  $p$  orienté suivant la normale au cylindre.

1. Déterminer le moment résultant du champ de pression.
2. Qu'en est-il si le champ de pression est de la forme  $p_0 \cos \theta$  ?

## 1.2 Torseur statique

### Torseur statique ou torseur sthénique ou torseur d'efforts

L'action mécanique d'un système matériel  $S_1$  (ou d'un phénomène physique) sur un système matériel  $S_2$  est représentable par un torseur au point M :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} = \iiint_{\gamma} f(M) \overrightarrow{u(M)} dV \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, S_2 \rightarrow S_1)} = \iiint_{\gamma} \overrightarrow{PM} \wedge dR(S_2 \rightarrow S_1) \end{array} \right\}_P$$

Il est aussi possible d'écrire ce torseur en colonne :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{ll} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{M, \mathcal{R}}$$

Définition

Remarque

Propriété

La norme de vecteur  $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$  est en Newton (N). La norme du vecteur  $\overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)}$  est en Newton – mètre ( $N \cdot m$ ).

Le torseur statique étant un torseur, on a donc :

$$\forall B, \overrightarrow{\mathcal{M}(B, S_2 \rightarrow S_1)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, S_2 \rightarrow S_1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$$

## 2 Actions mécaniques à distance

### 2.1 Action mécanique de pesanteur

Définition

#### Masse d'un solide

Soit un solide de masse volumique  $\mu$  et de volume  $\mathcal{V}$ . Sa masse  $m$  est définie par :

$$m = \int_{\mathcal{V}} \mu d\mathcal{V}$$

### Centre d'inertie d'un solide – Programme PT

Soit un point  $M$  quelconque et un solide  $S$  de masse  $m$ . Soit  $P$  un point appartenant à  $S$ . Le centre d'inertie (ou centre de gravité ou centre de masse) est le point  $G$  défini par :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{m} \int \overrightarrow{MP} dm$$

### Centre d'inertie d'un système matériel

Soient un système matériel  $E$  de masse  $m$ , composé de  $n$  solides  $S_i$  de masse  $m_i$  et de centre d'inertie  $G_i$ . Le centre d'inertie d'inertie  $G$  de  $E$  est défini par :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{MG_i}$$

### Action mécanique de pesanteur ou gravité

Soit un solide  $S$  situé dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  et de volume  $\mathcal{V}$ .

On note  $G$  son centre de gravité.

Le vecteur densité de force est donné par :  $f(M)\overrightarrow{u(M)} = \mu(M)\vec{g}$  où  $\mu(M)$  désigne la masse volumique du solide (en  $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

Au **centre d'inertie** du système  $G$ , on peut exprimer le torseur des actions mécaniques :

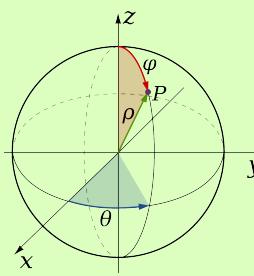
$$\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pesanteur} \rightarrow S)} = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(M) \vec{g} d\mathcal{V} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G, \text{Pesanteur} \rightarrow S)} = \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pesanteur} \rightarrow S)} = m \vec{g} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G, \text{Pesanteur} \rightarrow S)} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$\vec{g}$  est le champ de pesanteur terrestre, supposé uniforme à la surface de la terre. Dans la réalité il dépend de la latitude et de l'altitude. Il est orienté vers le centre de la terre et définit la verticale.

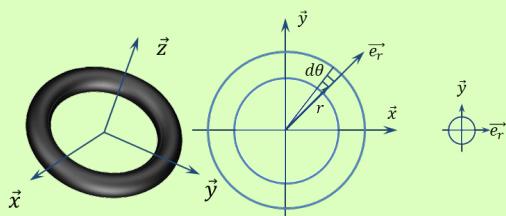
Dans la pratique, on prendra  $\|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

**Calcul de masse d'une sphère de masse volumique  $\mu$  (en  $\text{kg}/\text{m}^3$ ).**

Exemple



*Calcul de masse d'un tore de masse volumique  $\mu$  (en  $\text{kg}/\text{m}^3$ ).*

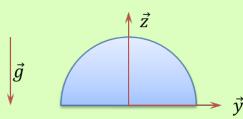


Exemple

Exemple

*Calcul du centre de gravité d'un demi disque d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\mu$  (en  $\text{kg}/\text{m}^2$ ).*

Exemple



### 3 Actions mécaniques de contact

#### 3.1 Actions surfaciques

##### Actions surfaciques

Soit un solide  $S$  (ou une partie de  $S$ ) soumis à un champ de pression sur une surface  $\mathcal{S}$ .

Le vecteur densité de force est donné par :  $f(M)\overrightarrow{u(M)} = p(M)\overrightarrow{n(M)}$  où  $p(M)$  désigne un champ de pression (en Pa) et  $\overrightarrow{n(M)}$  le vecteur normal à la surface au point  $M$ .

Au point  $M$ , on peut exprimer le torseur des actions mécaniques :

$$\{\mathcal{T}(\text{Pres} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pres} \rightarrow S)} = \iint_{\mathcal{S}} p(M) \overrightarrow{n} d\mathcal{S} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, \text{Pres} \rightarrow S)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pres} \rightarrow S)} = \iint_{\mathcal{S}} p(M) \overrightarrow{n} d\mathcal{S} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pres} \rightarrow S)} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{OM} \wedge p(M) \overrightarrow{n} d\mathcal{S} \end{array} \right\}_O$$

Résultat

n

Remarque

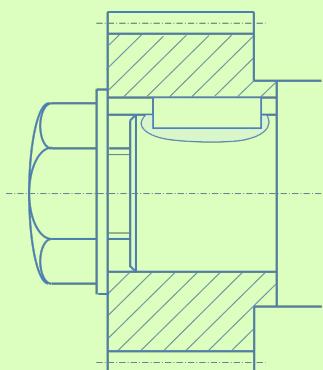
Ce modèle permet d'exprimer :

- les actions mécaniques d'un fluide sur une surface (dans un vérin par exemple) ;
- les actions mécaniques d'un solide sur un autre (embrayage).

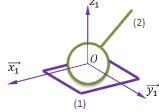
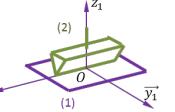
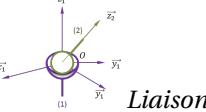
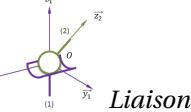
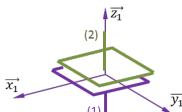
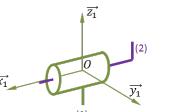
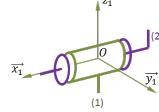
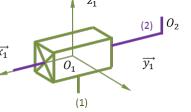
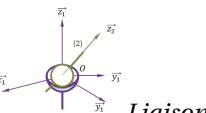
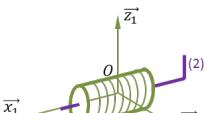
Exemple

*Efforts transmissibles par clavette*

Exemple



### 3.2 Torseurs d'actions mécaniques dans les liaisons cinématiques

 <p>Liaison sphère – plan</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_O$	 <p>Liaison cylindre – plan</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_O$
 <p>Liaison rouleau</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_O$	 <p>Liaison sphère – cylindre</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_O$
 <p>Liaison appui plan</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_O$	 <p>Liaison pivot glissant</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_O$
 <p>Liaison pivot</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_O$	 <p>Liaison glissière</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_O$
 <p>Liaison roule à doigt</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_O$	 <p>Liaison hélicoïdale</p>	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_O$ $L_{12} = -X_{12} \cdot \frac{pas}{2\pi}$

### 3.3 Théorème de Pascal

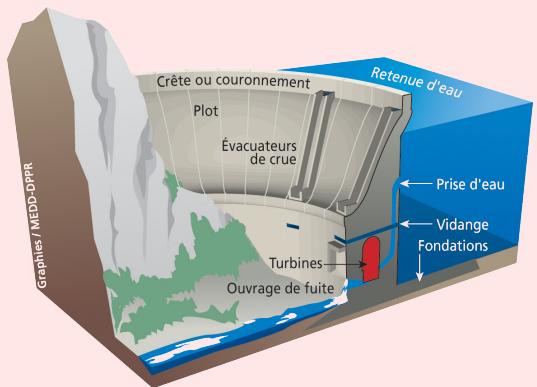
**Théorème**

**Théorème de Pascal**  
Pour un fluide statique, la pression effective en u point  $M$  immergé à une profondeur  $h$  veut :

$$P(M) - P_{\text{atm}} = \mu g h$$

On note :

- $P(M)$  la pression absolue au point  $M$  (en Pa) ;
- $P_{\text{atm}}$  : pression atmosphérique (en Pa) ;
- $\mu$  : masse volumique du fluide en  $\text{kg}/\text{m}^3$  ;
- $h$  : profondeur du point  $M$  (en m).


**Remarque**

Une pression s'exprime en Pascal (Pa).

On a  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ,  $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$ ,  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

### 3.4 Théorème d'Archimède

**Théorème**

#### Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une action mécanique représentable par un glisseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Fluide} \rightarrow S)} = -m_f \overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$$

- $G$  centre d'inertie du solide (ou de l'ensemble matériel) ;
- $m_f$  : masse de fluide déplacée (en kg) ;
- $\overrightarrow{g}$  : accélération de la pesanteur (en  $\text{m/s}^2$ ).



Flottabilité d'un bateau [4]

### 3.5 Action transmissible par des ressorts

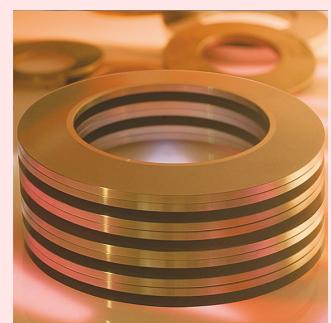
**Résultat**

#### Ressort de compression – traction

Le torseur d'action d'un ressort sur un système matériel  $S$  est donné par :

$$\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Ressort} \rightarrow S)} = k(l - l_0) \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Ressort} \rightarrow S)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

- $k$  : coefficient de raideur du ressort (en  $\text{N/m}$ ) ;
- $l_0$  : longueur libre (ou à vide) (en m) ;
- $l$  : longueur en charge (en m).



Rondelles de Belleville [5]

**Ressort couple**  
Le torseur d'action d'un ressort sur un système matériel  $S$  est donné par :

$$\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Ressort} \rightarrow S)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Ressort} \rightarrow S)} = k\alpha \vec{u} \end{array} \right\}_A$$

- $k$  : coefficient de raideur du ressort (en  $Nm/rad$ ) ;
- $\alpha$  : déflexion angulaire (en  $rad$ ).



Ressort de torsion[6]

### 3.6 Actions de frottement visqueux

#### Force de frottement – Basse vitesse – Régime laminaire

Soit un système matériel animé d'une vitesse  $\overrightarrow{V(C \in S/\mathcal{R})}$ . Lors de son déplacement, pour des basses vitesses et en régime laminaire, les actions du fluide sur  $S$  au centre de poussée  $P$  peuvent être modélisées par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Fluide} \rightarrow S)} = -f_v \overrightarrow{V(C \in S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(C, \text{Fluide} \rightarrow S)} = \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

avec  $f_v$  : frottement visqueux (en  $N \cdot s \cdot m^{-1}$ ).

On peut considérer une vitesse faible comme étant inférieur à  $5 \text{ m/s}$  dans l'air.

#### Couple de frottement – Basse vitesse – Régime laminaire

Soit un système matériel animé d'un taux de rotation  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R})} = \omega \vec{z}$ . Lors de sa rotation, pour des basses vitesses, le couple de frottement peut être modélisé par le torseur ( $A$  est un point appartenant à l'axe de rotation) :

$$\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Fluide} \rightarrow S)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Fluide} \rightarrow S)} = -f_v \overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}_A$$

avec  $f_v$  : frottement visqueux (en  $N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$ ).

#### Force de frottement – Vitesse moyenne – Régime turbulent

Soit un système matériel animé d'une vitesse  $\overrightarrow{V(C \in S/\mathcal{R})}$  de vecteur directeur  $\vec{u}$ . Lors de son déplacement, les actions du fluide sur  $S$  au centre de poussée  $P$  peuvent être modélisées par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Fluide} \rightarrow S)} = -C_x \frac{1}{2} \rho S \overrightarrow{V(C \in S/\mathcal{R})}^2 \vec{u} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(C, \text{Fluide} \rightarrow S)} = \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

avec :

- $C_x$  : coefficient de traînée caractérisant la géométrie du solide (sans unité) ;

Théorème

–  $\rho$  : masse volumique du fluide ( $kg/m^3$ ) ;

–  $S$  : aire du solide selon la direction perpendiculaire à la vitesse (en  $m^2$ ) ;

On peut considérer une moyenne faible comme étant inférieur entre 5 et 20  $m/s$  dans l'air.

## 4 Étude locale du contact entre pièces

Hypothèse

On considérera que :

- les pièces sont considérées indéformables ;
- la résistance au roulement et au pivotement sont négligées (voir définition dans le cours de cinématique).

On rappelle que le torseur des actions transmissibles est donné par :

$$\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(\text{ext} \rightarrow S)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge dR(\text{ext} \rightarrow S) \end{array} \right\}_P$$

$f(M) \cdot \overrightarrow{u(M)}$  désigne le vecteur densité d'effort.

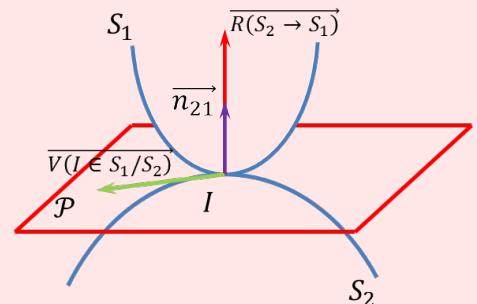
### 4.1 Cas du contact ponctuel

#### 4.1.1 Modèle sans frottement

Résultat

Dans le cas d'un contact ponctuel en  $I$  et de normale  $\overrightarrow{n_{21}}$ , le torseur d'action mécanique de la pièce  $S_2$  sur  $S_1$  est donné par :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} = \|\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}\| \overrightarrow{n_{21}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(I, S_2 \rightarrow S_1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I$$



#### 4.1.2 Modèle avec frottement – Modèle de Coulomb

Théorème

##### Glissement

On considère un contact ponctuel en  $I$  et de normale  $\overrightarrow{n_{21}}$ .  $\overrightarrow{V(I \in S_1/S_2)}$  est la vitesse de glissement entre les solides.  $\overrightarrow{V(I \in S_1/S_2)}$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  tangent entre les deux solides.

On se place dans le cas où la vitesse de glissement est non nulle :

$$\overrightarrow{V(I \in S_1/S_2)} \neq \overrightarrow{0}$$

Dans ce cas,  $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$  se décompose en un effort normal  $\overrightarrow{N(S_2 \rightarrow S_1)}$  suivant le vecteur  $\overrightarrow{n_{21}}$  et un effort tangentiel  $\overrightarrow{T(S_2 \rightarrow S_1)}$  appartenant au plan  $\mathcal{P}$ .

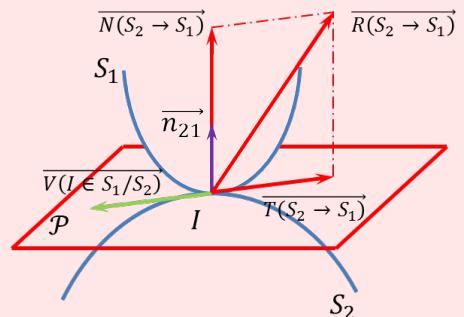
On a alors :

$$\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} = \overrightarrow{N(S_2 \rightarrow S_1)} + \overrightarrow{T(S_2 \rightarrow S_1)}$$

Par ailleurs, en notant  $f$  le facteur de frottement entre les deux solides, on a la relation suivante :

$$\|\overrightarrow{T(S_2 \rightarrow S_1)}\| = f \cdot \|\overrightarrow{N(S_2 \rightarrow S_1)}\|$$

Enfin, le vecteur tangentiel  $\overrightarrow{T(S_2 \rightarrow S_1)}$  s'oppose au vecteur  $\overrightarrow{V(I \in S_1/S_2)}$



### Adhérence

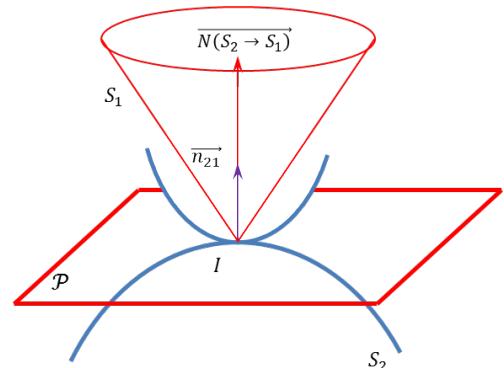
On se place dans le cas où la vitesse de glissement est nulle :

$$\overrightarrow{V(I \in S_1/S_2)} = \overrightarrow{0}$$

On note  $\mu$  le facteur d'adhérence entre les deux matériaux. On a alors :

$$\|\overrightarrow{T(S_2 \rightarrow S_1)}\| \leq \mu \cdot \|\overrightarrow{N(S_2 \rightarrow S_1)}\|$$

#### 4.1.3 Interprétation graphique



Suivant la direction de la vitesse de glissement, l'effort  $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$  décrit donc un cône de sommet  $I$  et de demi-angle au sommet  $\varphi$ .

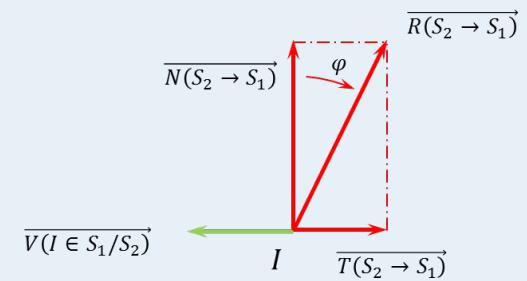
Lorsqu'il y a **glissement**, l'effort  $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$  est situé **sur** le cône de frottement.

Lorsqu'il y a **adhérence**, l'effort  $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$  est situé **dans** le cône de révolution. **La direction de l'effort n'est donc pas connue, a priori.**

Remarque

Dans le cas du glissement, en redessinant les efforts et en utilisant la relation de Coulomb, on a donc :

$$f = \tan \varphi$$



## 4.2 Cas général

### Torseur d'action mécanique transmise par contact avec frottement

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(ext \rightarrow S)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{M(P, ext \rightarrow S)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge dR_{(ext \rightarrow S)} \end{array} \right\}_M$$

On a alors :

$$f(M) \overrightarrow{u(M)} = p_{21}(M) \overrightarrow{n_{21}} + \overrightarrow{\tau_{21}}(M)$$

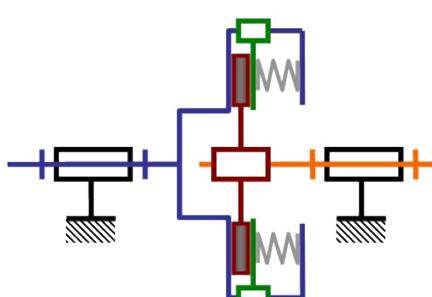
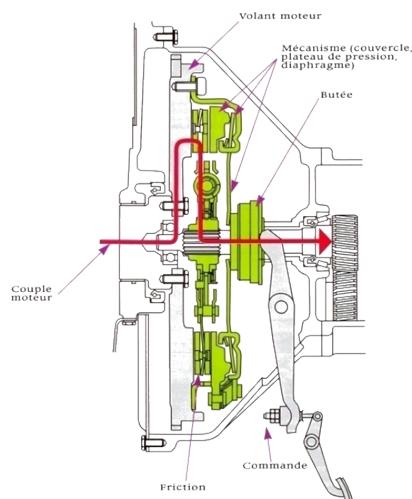
Dans le cas du glissement :

$$\|\overrightarrow{\tau_{21}}(M)\| = p_{21} \cdot f$$

En notant :

- $p_{21}(M)$  pression de contact au point  $M$  (en  $N/m^2$ );
- $\overrightarrow{\tau_{21}}(M)$  : la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en  $N/m^2$ );
- $f$  facteur de frottement.

### 4.2.1 Exemple : Couple transmis par frottement dans un embrayage à disque



—	<i>Bloc moteur (bâti commun)</i>
—	<i>Arbre moteur</i>
—	<i>Arbre récepteur</i>
—	<i>Disque</i>
—	<i>Plateau de pression</i>
—	<i>Ressorts</i>

Exemple

On donne  $k$  la raideur des ressorts,  $f$  le facteur de frottement entre le disque et l'arbre moteur,  $r$  le petit rayon de la couronne et  $R$  le grand rayon de la couronne. Calculer le couple transmissible par adhérence entre l'arbre moteur et le disque. On fera l'hypothèse que l'action créée par les ressorts sur le plateau de compression est uniforme.

**Expression du couple infinitésimal**

$$d\overrightarrow{\mathcal{M}(\text{Plateau, Disque} \rightarrow O)} = d\overrightarrow{\mathcal{M}(P, D \rightarrow O)} = \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{R(P \rightarrow D)}$$

**Expression de la résultante infinitésimale**

$$d\overrightarrow{R(P \rightarrow D)} = d\overrightarrow{N(P \rightarrow D)} + d\overrightarrow{T(P \rightarrow D)}$$

**Expression de l'effort normal**

$$d\overrightarrow{N(P \rightarrow D)} = p \overrightarrow{n} d\mathcal{S} = -p \overrightarrow{z} d\mathcal{S}$$

**Expression de l'unité de surface**

$$d\mathcal{S} = \rho d\theta d\rho$$

**Expression de l'effort tangentiel**

D'après le modèle de Coulomb, on commence par identifier le vecteur  $\overrightarrow{V}(M \in D/P)$ . Le vecteur tangentiel est donc opposé à ce dernier. A la limite du glissement on a alors :

$$d\overrightarrow{T(P \rightarrow D)} = -f \|d\overrightarrow{N(P \rightarrow D)}\| \overrightarrow{v} = f \rho d\mathcal{S} \overrightarrow{v}$$

**Calcul final**

On note  $\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow D)} &= d\overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow D)} \\ &= \int \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{R(P \rightarrow D)} \\ &= \int \rho \overrightarrow{u} \wedge (d\overrightarrow{N(P \rightarrow D)} + d\overrightarrow{T(P \rightarrow D)}) \\ &= \int \rho \overrightarrow{u} \wedge (-p \overrightarrow{z} d\mathcal{S} + f \rho d\mathcal{S} \overrightarrow{v}) \\ &= \iint p \rho \overrightarrow{v} d\mathcal{S} + \iint p f \rho \overrightarrow{z} d\mathcal{S} = \iint p \rho \overrightarrow{v} \rho d\theta d\rho + \iint p f \rho \overrightarrow{z} \rho d\theta d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint p \rho \vec{v} \rho d\theta d\rho &= \iint p \rho (\cos \theta \vec{y} - \sin \theta \vec{x}) \rho d\theta d\rho \\
 &= \iint p \rho \cos \theta \vec{y} \rho d\theta d\rho - \iint p \rho \sin \theta \vec{x} \rho d\theta d\rho \\
 &= p \vec{y} \int_r^R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \rho^2 d\rho - p \vec{x} \int_r^R \int_0^{2\pi} \sin \theta \rho^2 d\theta d\rho \\
 &= p [\sin \theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{y} - p [-\cos \theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{x} = \vec{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint p f \rho^2 \vec{z} d\theta d\rho &= p f [\theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{z} \\
 &= p f 2\pi \frac{R^3 - r^3}{3}
 \end{aligned}$$

Enfin, en notant  $F_r$  l'effort (uniformément réparti) exercé par le ressort sur toute la couronne, on a donc :

$$p = \frac{F_r}{\pi(R^2 - r^2)}$$

Au final :

Exemple

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow D)} = f \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} F_r$$

## 4.3 Notions de tribologie

### 4.3.1 Facteur de frottement et de glissement

Le facteur de frottement dépend :

- de la nature des matériaux en contact ;
- de la rugosité des surfaces de contact ;
- de la présence ou non de lubrifiant.

Le facteur de frottement ne dépend pas de la pression de contact entre deux solides.

Matériaux	Facteur d'adhérence		Facteur de glissement	
	Sec	Lubrifié	Sec	Lubrifié
Acier / Acier	0,2 à 0,3	0,15 à 0,2	0,2	0,12
Acier / Fonte	0,2	0,12 à 0,2	0,15	0,08
Acier / Bronze	0,2	0,15 à 0,2	0,2	0,12
Acier / Métal fritté		0,1 à 0,18	0,1 à 0,12	0,03 à 0,06
Acier / Garniture de friction	0,3 à 0,4		0,25 à 0,35	
Acier / Graphite		0,1		0,09
Acier / Palier PTFE	0,08 à 0,4		0,02 à 0,08	0,003 à 0,05
Pneu neuf / Route	1	0,6	0,5 à 0,6	0,2 à 0,5

## Références

- [1] [http://cnrsm.creteil.iufm.fr/g01\\_dp/viaduc\\_millau\\_apk\\_44/01\\_greish/06\\_instrumentation\\_millau\\_final\\_otua.pdf](http://cnrsm.creteil.iufm.fr/g01_dp/viaduc_millau_apk_44/01_greish/06_instrumentation_millau_final_otua.pdf).
- [2] [http://maaon.free.fr/articles/?page\\_id=2](http://maaon.free.fr/articles/?page_id=2).
- [3] [http://3.bp.blogspot.com/-Nv8wocGYY9w/Td2EzuOWTKI/AAAAAAAARw/Fsn1MvhEWDQ/s1600/airbus\\_zero\\_G\\_1.jpg](http://3.bp.blogspot.com/-Nv8wocGYY9w/Td2EzuOWTKI/AAAAAAAARw/Fsn1MvhEWDQ/s1600/airbus_zero_G_1.jpg).
- [4] <http://www.voile.banquepopulaire.fr/pics/9/1044/3e40b1889ec5435595b93795554ceb69.jpg>.
- [5] <http://www.directindustry.fr/prod/borrelly/rondelles-elastiques-belleville-50471-343362.html>.
- [6] <http://www.hellopro.fr/images/produit-2/0/2/5/ressort-de-torsion-259520.jpg>.