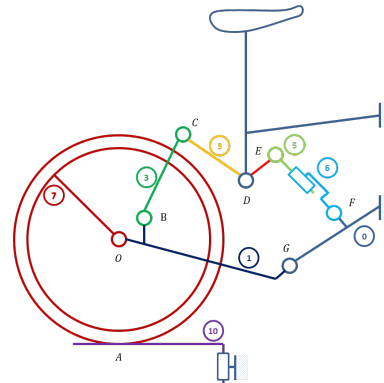


CI 6 : ÉTUDE DU COMPORTEMENT STATIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE 3 – RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE STATIQUE PLANE



VTT Kona One à suspension blocable [1]



Modélisation cinématique

Le calcul des efforts dans un système peut paraître fastidieux quand il s'agit de le résoudre analytiquement. L'application du principe fondamental de la statique permet de développer des méthodes plus rapides.

Problématique

PROBLÉMATIQUE :

- Appliquer le PFS lors de problèmes plans.

Savoir

SAVOIRS :

- Résoudre méthodiquement des problèmes de statiques planes (méthode analytique et graphique)
- Résoudre méthodiquement des problèmes graphiques pour des solides soumis à 2 ou 3 glisseurs
- Résoudre les problèmes d'arc boutements

1	Hypothèse de travail en statique plane	2
2	Résolution analytique des problèmes de statique plane	2
3	Résolution graphique des problèmes de statique plane	4
3.1	Décompte du nombre d'inconnus	4
3.2	Cas d'un solide soumis à 2 glisseurs	5
3.3	Cas d'un solide soumis à 3 glisseurs	6
3.4	Cas du frottement dans une liaison ponctuelle	7
4	Résolution des problèmes d'arc boutements	7

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Hypothèse de travail en statique plane

Définition

Soit le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. En statique le problème est dans le plan (\vec{u}, \vec{v}) lorsque la résultante des efforts appartient à ce plan et lorsque le moment est suivant le vecteur \vec{w} .

Soit une liaison glissière d'axe \vec{z} . Le torseur de la liaison est le suivant :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

Dans le plan (\vec{x}, \vec{y})

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & \cancel{L_{12}} \\ Y_{12} & \cancel{M_{12}} \\ \emptyset & N_{12} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

Dans le plan (\vec{y}, \vec{z})

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} \cancel{X_{12}} & L_{12} \\ Y_{12} & \cancel{M_{12}} \\ 0 & \cancel{N_{12}} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

Dans le plan (\vec{z}, \vec{x})

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & \cancel{L_{12}} \\ \cancel{Y_{12}} & M_{12} \\ 0 & \cancel{N_{12}} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}}$$

Exemple

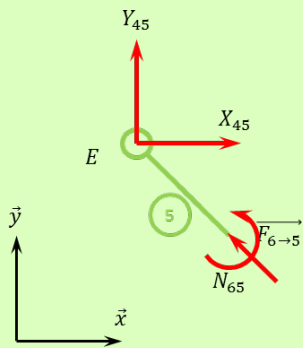
2 Résolution analytique des problèmes de statique plane

Lorsque le problème est plan et qu'on souhaite résoudre un problème de statique de manière analytique, il n'est pas indispensable de passer par les torseurs.

1. Réaliser un bilan des actions mécaniques de façons graphique. Pour cela on réalise un croquis de l'ensemble isolé.
2. Sur le croquis on fait représenter tous les efforts connus (en respectant la direction et le sens de l'effort). Les résultantes sont représentées par des flèches, les moments par des arcs de cercles (Attention au point d'application et à l'orientation).
3. Sur le croquis, représenter les efforts inconnus. Par convention on trace les efforts dans le sens positif. (Si leur valeur est négative cela apparaîtra naturellement dans le calcul).
4. Appliquer le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{x} puis sur \vec{y} (si le mouvement est dans le plan (\vec{x}, \vec{y})). Pour cela sommer toutes les composantes sur \vec{x} puis toutes les composantes sur \vec{y} (Attention à bien respecter le sens des actions mécaniques).
5. Appliquer le théorème du moment statique en un point bien précisé (P). Pour cela, on tient compte du fait que le moment est le produit d'un effort par un bras de levier. Le bras de levier étant la distance entre P et la droite directrice de l'effort. Enfin, le signe est donné par le sens de la rotation de centre P qui serait induit par l'effort.

Méthode

Exemple



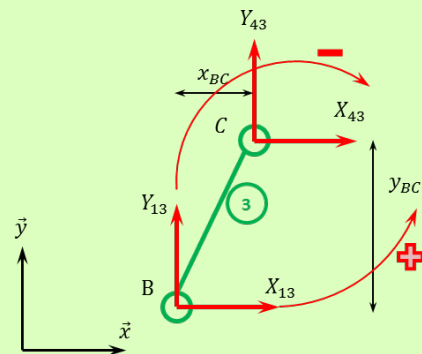
Théorème de la résultante statique :

$$\begin{cases} X_{45} + \vec{F}_{65} \cdot \vec{x} = 0 \\ Y_{45} + \vec{F}_{65} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment statique en E sur \vec{z} :

$$N_{65} = 0$$

Exemple



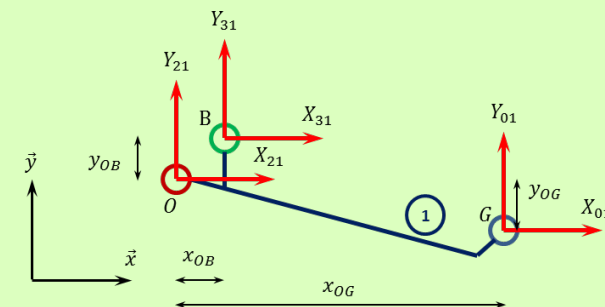
Théorème de la résultante statique :

$$\begin{cases} X_{13} + X_{43} = 0 \\ Y_{13} + Y_{43} = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment statique en C sur \vec{z} :

$$X_{13}y_{BC} - Y_{13}x_{BC} = 0$$

Exemple



Théorème de la résultante statique :

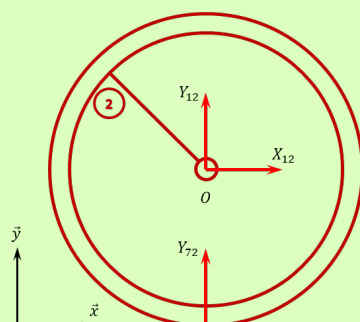
$$\begin{cases} X_{21} + X_{31} + X_{01} = 0 \\ Y_{21} + Y_{31} + Y_{01} = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment statique en O sur \vec{z} :

$$-X_{31}y_{OB} + X_{01}y_{OG} + Y_{31}x_{OB} + Y_{01}x_{OG} = 0$$

Fin de la résolution

Exemple

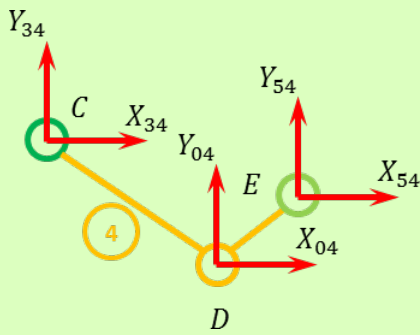


Théorème de la résultante statique :

$$\begin{cases} X_{12} = 0 \\ Y_{12} + Y_{72} = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment statique en O sur \vec{z} :

$$0 = 0$$



Théorème de la résultante statique :

$$\begin{cases} X_{34} + X_{04} + X_{54} = 0 \\ Y_{34} + Y_{04} + Y_{54} = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment statique en C sur \vec{z} :

$$X_{04}y_{CD} + Y_{04}x_{CD} + X_{54}y_{CE} + Y_{54}x_{CE} = 0$$

Théorème de la résultante statique :

$$\begin{cases} X_{06} + \vec{F}_{56} \cdot \vec{x} = 0 \\ Y_{06} + \vec{F}_{56} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment statique en F sur \vec{z} :

$$N_{56} = 0$$

F_{sol} représente l'action du sol sur la roue de vélo. Son module est de 700 N.

Théorème de la résultante statique :

$$\begin{cases} X_{07} = 0 \\ F_{sol} + Y_{27} = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment statique en O sur \vec{z} :

$$N_{07} - Y_{27}x_{AH} = 0$$

3 Résolution graphique des problèmes de statique plane

3.1 Décompte du nombre d'inconnus

Résoudre graphiquement un problème de statique plane revient à déterminer le point d'application, la direction, ainsi que la norme de la résultante du torseur statique.

Les inconnues peuvent être décomptées ainsi :

- vecteur glissant entièrement connu : 0 inconnue ;
- support connu : 1 inconnue ;
- norme et direction connues : 1 inconnue ;
- norme et point d'application connus : 1 inconnue ;
- point d'application connu : 2 inconnues ;
- direction connue : 2 inconnues ;
- norme connue : 2 inconnues ;
- support tangent à 1 cercle (de frottement) : 2 inconnues ;
- support à l'intérieur d'un cône de frottement : 2 inconnues.

Remarque

Notation, lorsqu'on isole un solide i , on peut noter l'action du solide j sur le solide i au point P par :

$$\overrightarrow{R(i \rightarrow j)} = \overrightarrow{P_{i \rightarrow j}}$$

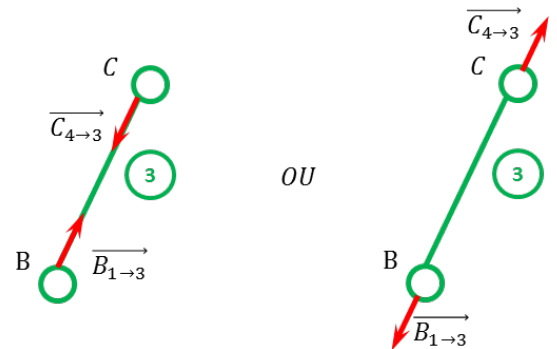
3.2 Cas d'un solide soumis à 2 glisseurs

Résultat

On montre que lorsqu'un solide est soumis à 2 forces, l'application du PFS implique que les deux forces sont :

- de même direction ;
- de même norme ;
- de sens opposé.

La direction des efforts est la droite liant les points sur lesquels agissent les efforts.



Soit un ensemble matériel S soumis à 2 glisseurs $\{\mathcal{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(1 \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$ et $\{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(2 \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.

D'après le théorème de la résultante statique, on a :

$$\overrightarrow{R(1 \rightarrow S)} + \overrightarrow{R(2 \rightarrow S)} = \overrightarrow{0}$$

D'après le théorème du moment statique appliqué en A , on a :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow S)} = \overrightarrow{0}$$

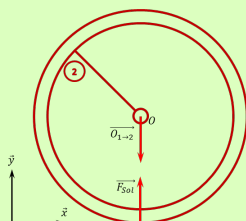
En conséquence, \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{R(2 \rightarrow S)}$ sont colinéaires, et pour tout point appartenant à (AB) , on aura $\overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow S)} = \overrightarrow{0}$. $\{\mathcal{T}_2\}$ est donc de support (AB) .

Il en est de même pour $\{\mathcal{T}_1\}$.

CQFD.

Démonstration

Exemple



On isole la roue 2. Elle est soumise à 2 efforts : celle du sol (qui est entièrement connue) et l'action de la pièce 1 : la direction, le sens et la norme de l'effort sont inconnus.

Il y a donc 3 inconnues. Le problème est donc soluble.

2 étant soumis à deux forces, ces deux forces sont donc de même direction, de même norme et de sens opposé.

3.3 Cas d'un solide soumis à 3 glisseurs

Soit un ensemble matériel S soumis à 3 glisseurs non parallèles $\{\mathcal{T}_1\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R(1 \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_A$, $\{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R(2 \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_B$ et $\{\mathcal{T}_3\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R(3 \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_X$.

On note I l'intersection des supports des glisseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$

D'après le théorème de la résultante statique, on a :

$$\overrightarrow{R(1 \rightarrow S)} + \overrightarrow{R(2 \rightarrow S)} + \overrightarrow{R(3 \rightarrow S)} = \overrightarrow{0}$$

D'après le théorème du moment statique appliqué en I , on a :

$$\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow S)} + \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow S)} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{R(3 \rightarrow S)} = \overrightarrow{0}$$

Or I appartient au support des glisseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$. On a donc $\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{R(3 \rightarrow S)} = \overrightarrow{0}$ et donc \overrightarrow{IC} et $\overrightarrow{R(3 \rightarrow S)}$ sont colinéaires. Le support de $\{\mathcal{T}_3\}$ passe donc par I . Les 3 glisseurs sont donc concourants en un même point.

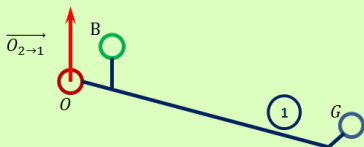
Dans le cas où les supports de $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ sont parallèles, le théorème de la résultante statique montre que les 3 glisseurs sont parallèles.

Résultat

On montre que lorsqu'un solide est soumis à 3 glisseurs non parallèles, l'application du PFS implique que les trois forces sont :

- coplanaires ;
- concourantes ou parallèles ;
- de somme nulle.

Exemple



On isole la pièce 1. Elle est soumise à 3 efforts :

- $\overrightarrow{O_{21}}$ est entièrement connue (voir partie précédente) ;
- $\overrightarrow{B_{31}}$: la norme et la direction de l'effort sont inconnus ;
- $\overrightarrow{G_{01}}$: la norme et la direction de l'effort sont inconnus.

Il y a donc 4 inconnues. Le problème ne peut pas être résolu a priori.

Il nous faudrait, par exemple, connaître la direction d'un effort pour pouvoir conclure.

Isolons le solide 3. Ce solide est soumis à deux forces : $\overrightarrow{B_{13}}$ et $\overrightarrow{G_{43}}$. Ces deux efforts sont donc de même norme, de même direction, et de sens opposés. La direction de l'effort est la droite (BC) . La direction de l'effort $\overrightarrow{B_{13}}$ est donc désormais connue.

En revenant à l'isolement de la pièce 1, une inconnue est donc levée. Il y a donc 3 inconnues. D'après le PFS, $\overrightarrow{O_{21}}$, $\overrightarrow{B_{31}}$ et $\overrightarrow{G_{01}}$ sont **coplanaires, concourants et de somme nulle**.

Méthode

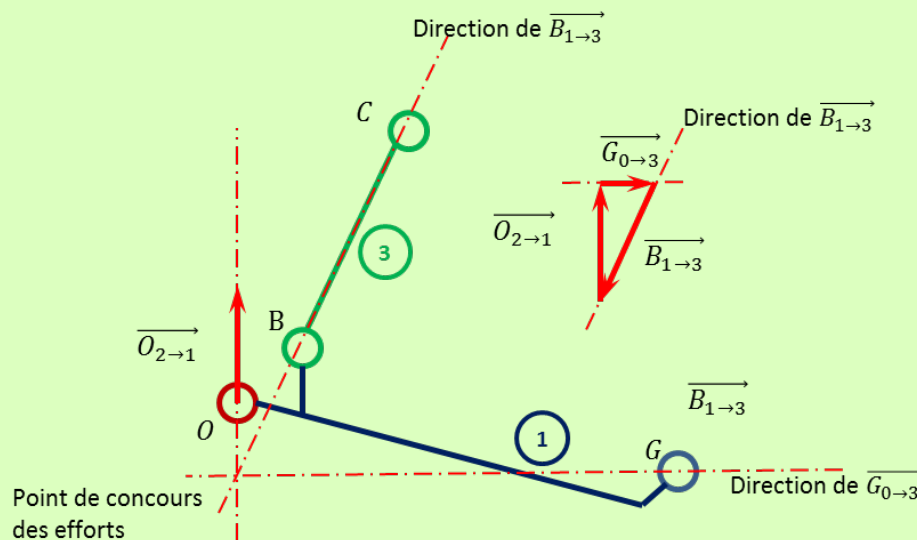
Lorsqu'on isole un solide soumis à 3 forces $(A, \overrightarrow{R_A})$, $(B, \overrightarrow{R_B})$ et $(C, \overrightarrow{R_C})$. $(A, \overrightarrow{R_A})$ est entièrement connue. La direction de $(B, \overrightarrow{R_B})$ est connue. La méthode de résolution est la suivante.

1. Tracer les 2 directions connues. Ces deux droites sont concourantes en un point P .
2. Tracer la droite joignant le point P et le point où est appliqué le dernier effort. On détermine ainsi la direction de ce troisième effort.
3. Tracer l'effort connu sur le côté du schéma.

Méthode

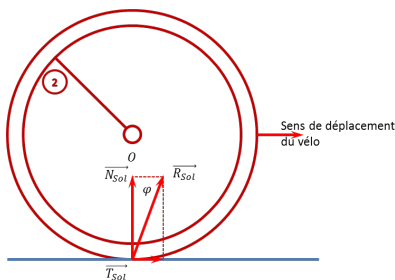
- Tracer une parallèle à la droite (BP) passant par une extrémité du vecteur et une parallèle à la droite (CP) passant par l'autre extrémité. On forme ainsi le triangle des forces.
- Identifier \vec{R}_B et \vec{R}_C en prenant garde au sens.

Exemple



De pièce en pièce, il est alors possible de déterminer les efforts dans chacune des pièces.

3.4 Cas du frottement dans une liaison ponctuelle



Lorsqu'il y a un contact avec frottement, commencer par tracer l'effort normal. Ici, si on isole la roue, l'effort normal va du sol vers la roue.

Tracer ensuite le cône de frottement. A la limite du glissement, la résultante de l'effort se trouve sur le cône de frottement ($f = \tan \varphi$ avec φ demi angle au sommet du cône).

Choisir le côté du cône de manière à ce que l'effort tangentiel s'oppose à la vitesse de glissement.

Remarque pour tracer un cône de frottement : si le coefficient de frottement est de 0, 1, dans la situation ci-contre, à la limite du glissement, la résultante de l'effort sera orientée par le vecteur (1, 10)

4 Résolution des problèmes d'arc boutements

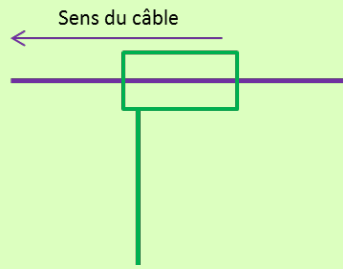
L'arc boutement résulte d'une modification du contact entre deux pièces, lors du basculement d'une d'entre elles.

Exemple

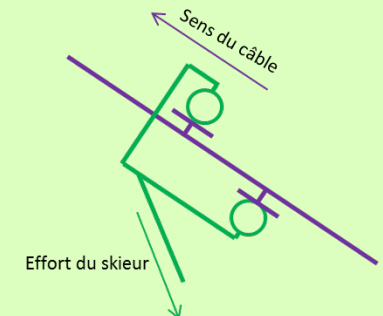
Perche d'un téléski



Mécanisme d'une perche



Modélisation de la liaison perche –
câble dans la zone de stockage



Modélisation de la liaison perche –
câble en cours d'ascension du
skieur

Exemple

Lorsque les perches sont dans la zone de stockage, le câble glisse dans la perche. A contrario, lorsqu'il est nécessaire au skieur de prendre une perche dans le but de gravir la pente, l'orientation de la perche par rapport au câble se modifie provoquant une modification de la zone de contact. Ce changement se modéliser par le passage d'une liaison pivot glissant à deux liaisons sphère-plan.

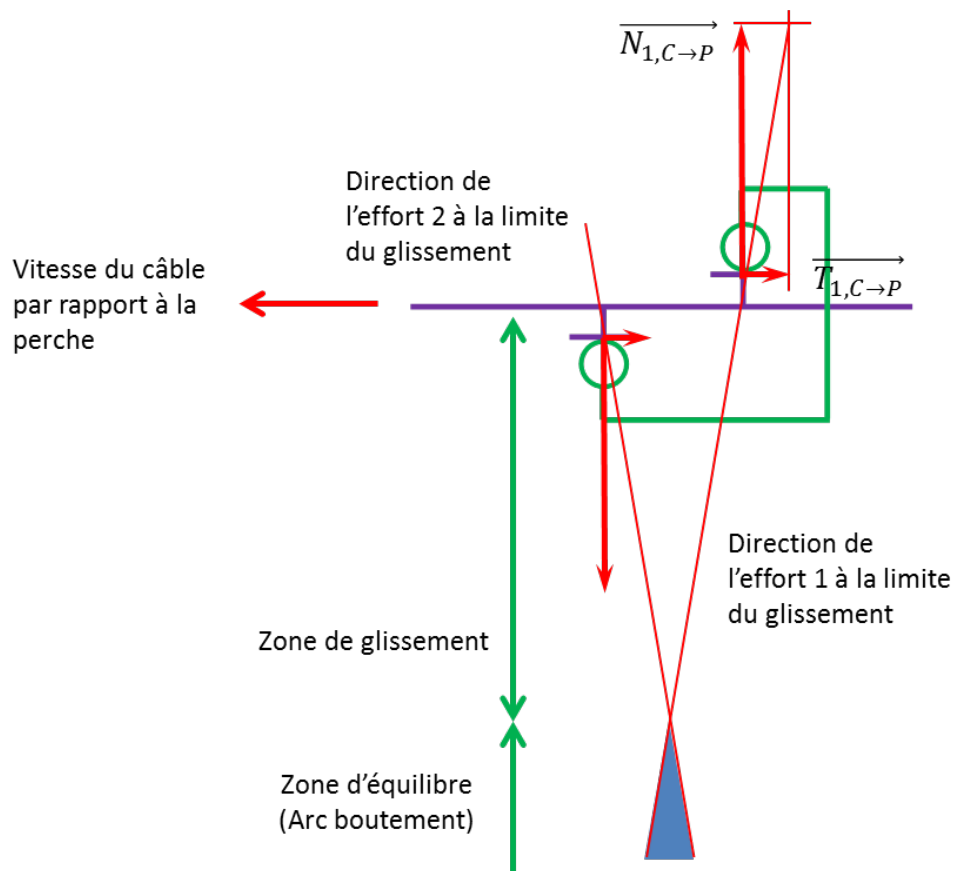
Dans la réalité, au poste de stockage, une pièce supplémentaire permet d'éviter le basculement de la perche. Le déblocage (automatique ou par le perchman) de cette pièce permet à la perche de s'archouter.

Un problème d'arc boutement peut être résolu par une méthode graphique ou une méthode analytique. En règle général le solide est soumis à 3 forces dont 2 qui sont des liaisons ponctuelles. L'inconnue peut être :

- le coefficient de frottement ;
- le jeu dans un mécanisme ou la dimension des éléments ;
- la direction ou le point d'application du troisième effort.

Méthode

1. Tracer le dessin en situation d'arc boutement.
2. Tracer la vitesse de glissement.
3. Tracer les efforts normaux et tangentiels dans les deux liaisons ponctuelles à l'aide des lois de Coulomb.
4. A la limite du glissement, tracer les directrices des résultantes.
5. L'intersection des résultantes permet de définir la zone de coincement et la zone de glissement.



Dans le cas où est l'effort est horizontal :

- si le point de l'application de l'effort est dans la zone supérieure, il y a glissement et le câble ne peut pas tirer la perche ;
- si le point de l'application de l'effort est dans la zone inférieure il y a équilibre et le câble tracte le skieur.

Pour augmenter la taille de la zone d'équilibre on peut augmenter le coefficient de frottement, diminuer l'écart suivant \vec{x} ou augmenter la distance suivant \vec{y} .

Références

- [1] http://www.clumpstore.com/media/g_vignette/2791.jpg
 [2] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/30/Platter_lift_cable_grip.jpg