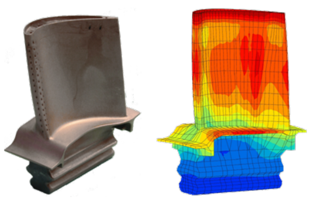
Applications



Exercices d'application

D'après notes de cours PT – Lycée G. Eiffel, Bordeaux.

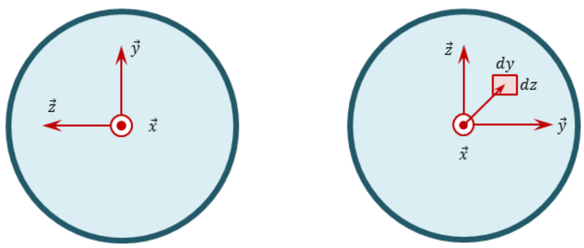
Savoirs et compétences :

Résoudre : *à partir des modèles retenus :*

- ❒ ***
- ❒ ***
- ❒ ***

Exercice 1 – Calcul d'un moment quadratique

On donne sur le schéma ci-dessous.



Question 1 *Déterminer* $I_{G_\Sigma,\overrightarrow{z}}(x)$.

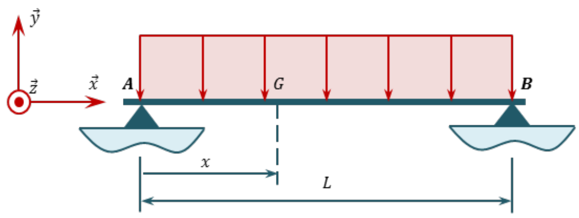
Correction $I_{G_\Sigma,\overrightarrow{z}}(x) = I_{Gz} = \iint y^2 \mathrm{d}S$

En coordonnées cartésiennes l'élément infinitésimal de surface se note $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

$$
\begin{aligned}
I_{Gz} &= \iint y^2 \mathrm{d}S = \iint y^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{R} \rho^2 \cos^2\theta\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{R} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\rho\,\mathrm{d}\rho^3\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\theta)\int_{0}^{R}\rho^3\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{8}R^4\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{8}R^4\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{8}R^4\left(\pi+\frac{1}{2}\sin 2\pi-\left(-\pi+\frac{1}{2}\sin(-2\pi)\right)\right) \\
&= \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 – Calcul de déformation

On considère la poutre suivante soumise à une charge de densité linéique p répartie uniformément :

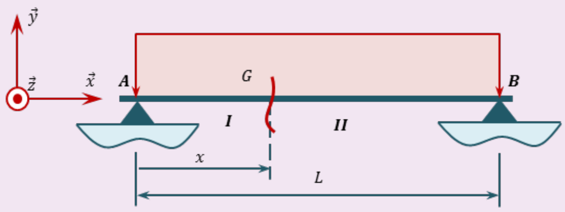


Question 1 *Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.*

Correction En utilisant le PFS, on montre que : $Y_A = Y_B = \dfrac{Lp}{2}$.

Question 2 *Après avoir identifié les différentes parties et les différents tronçons, déterminer le torseur de cohésion.*

Correction Cette poutre n'est constituée que d'une seule partie.



On isole le tronçon I, on réalise le bilan des actions mécaniques et on applique le PFS :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{II\to I} + \{\mathcal{T}_{\text{Ext}\to I}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Pression}\to I}\} = \{0\}$$

Détermination de $\{\mathcal{T}_{\text{Ext}\to I}\}$:

$$\{\mathcal{T}_{\text{Ext}\to I}\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Ext}\to I)} = \dfrac{Lp}{2}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A,\text{Ext}\to I)} = \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Ext}\to I)} = \dfrac{Lp}{2}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A,\text{Ext}\to I)} = -x\overrightarrow{x} \wedge \dfrac{Lp}{2}\overrightarrow{y} = -\dfrac{Lp}{2}x\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_G$$

Détermination de $\{\mathcal{T}_{\text{Pression}\to I}\}$:

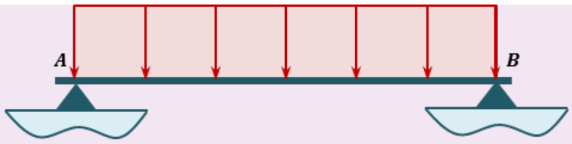
$$\{\mathcal{T}_{\text{Pr}\to I}\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pr}\to I)} = -p\,x\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G,\text{Pr}\to I)} = \dfrac{1}{2}p\,x^2\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_G$$

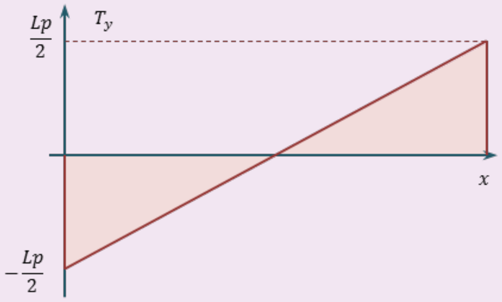
Détermination de $\{\mathcal{T}_{\text{II}\to I}\}$:

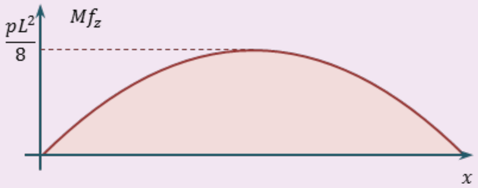
$$\{\mathcal{T}_{\text{II}\to I}\} = \left\{\begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array}\right\}_G = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\dfrac{Lp}{2} + p\,x & 0 \\ 0 & \dfrac{Lp}{2}x - \dfrac{1}{2}p\,x^2 \end{array}\right\}_G$$

Question 3 *Tracer les diagrammes des sollicitations.*

Correction







Question 4 *Rechercher l'équation de déformation de la poutre ainsi que la flèche maximale.*

Correction L'équation de la déformée y est donnée par : $EI_{Gz}\,y''(x) = M_{fz}(x)$.

On a donc :

$EI_{Gz}\,y''(x) = M_{fz}(x) \Leftrightarrow EI_{Gz}\,y''(x) = \dfrac{Lp}{2}x - \dfrac{1}{2}px^2 \Rightarrow EI_{Gz}\,y'(x) = \dfrac{Lp}{2}\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}p\dfrac{1}{3}x^3$

$\Rightarrow EI_{Gz}\,y'(x) = \dfrac{Lp}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}px^3 + v_0$

$\Rightarrow EI_{Gz}\,y(x) = \dfrac{Lp}{12}x^3 - \dfrac{1}{24}px^4 + v_0 x + y_0$

Par ailleurs, la poutre étant en appui en A et B, on a : $y(0) = 0$ et $y(L) = 0$. En conséquences :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = y_0 \\ 0 = \dfrac{Lp}{12}L^3 - \dfrac{1}{24}pL^4 + v_0 L + y_0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ 0 = \dfrac{p}{12}L^3 - \dfrac{1}{24}pL^3 + v_0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ v_0 = -\dfrac{p}{12}L^3 + \dfrac{1}{24}pL^3 = -\dfrac{pL^3}{24} \end{array}\right.$$

On a donc :

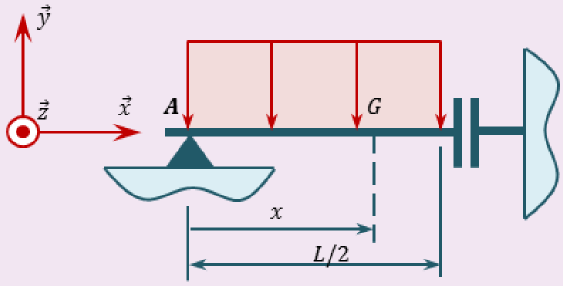
$$\left\{\begin{array}{l} EI_{Gz}\,y'(x) = \dfrac{Lp}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}px^3 - \dfrac{pL^3}{24} \\ EI_{Gz}\,y(x) = \dfrac{Lp}{12}x^3 - \dfrac{1}{24}px^4 - \dfrac{pL^3}{24}x \end{array}\right.$$

La déformée maximale est atteinte lorsque la dérivée de la déformée est nulle : $EI_{Gz}\,y'(x) = \dfrac{Lp}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}px^3 - \dfrac{pL^3}{24} = 0$

Lorsque $x = L/2$, on a : -$y_{\max} = -\dfrac{5}{384}\cdot\dfrac{pL^4}{EI}$

Question 5 *Donner un modèle équivalent qui aurait pu être utilisé pour réaliser les calculs.*

Correction


$\vec{y}$
$\vec{z}$
$\vec{x}$
A
G
x
L/2