Partie n

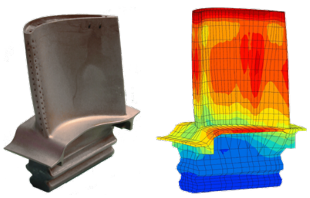
Méthode de résolution permettant la détermination des déformations et des contraintes des pièces déformables
Analyse, Modélisation, Résolution

Chapitre n– Titre Chapitre

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PT – PT⋆

Applications



Exercices d'application – Détermination du torseur de cohésion.

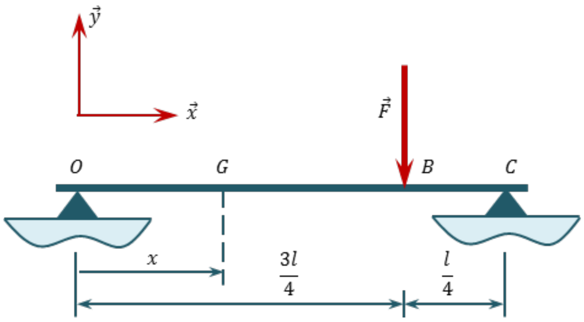
D'après notes de cours PT – Lycée G. Eiffel, Bordeaux.

Savoirs et compétences :
Résoudre : *à partir des modèles retenus :*

- ***
- ***
- ***

Exercice 1

On donne sur le schéma ci-dessous la modélisation d'une poutre et des efforts qui lui sont appliqués.



Question 1 *Déterminer les actions mécaniques en A et en B.*

Correction

- On isole la poutre.
- On réalise le bilan des actions mécaniques :
  - liaison sphère-plan en O. Sans frottement, cette action est de direction $\overrightarrow{y}$;
  - liaison sphère-plan en C. Sans frottement, cette action est de direction $\overrightarrow{y}$;
  - action mécanique en B.
- On réalise un théorème de la résultante statique en C en projection sur $\overrightarrow{y}$ et un théorème du moment statique appliqué au point O en projection suivant $\overrightarrow{z}$:

$$\left\{\begin{array}{l} Y_O + Y_C - F = 0 \\ -\dfrac{3l}{4}F + l\,Y_C = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Y_O = F - \dfrac{3}{4}F = \dfrac{F}{4} \\ Y_C = \dfrac{3}{4}F \end{array}\right.$$

On cherche à déterminer le diagramme des sollicitations dans chacun des tronçons.

Question 2 *Quels tronçons peut-on considérer ?*

Correction Dans le cadre de cette étude on considèrera les tronçons suivants : $x \in \left[0, \dfrac{3l}{4}\right]$ et $x \in \left[\dfrac{3l}{4}, l\right]$.

Question 3 *Exprimer le torseur de cohésion dans chacun des tronçons.*

Correction

- On isole le premier tronçon.
- Le tronçon est soumis d'une part à l'action mécanique en O et d'autre part à l'action mécanique du torseur de cohésion.
- On a donc :

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_O & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

On a donc :

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = -\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_O & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\dfrac{F}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{F}{4}x \end{array}\right\}_{G}$$

car $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathscr{M}(O, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GO} \wedge Y_O\overrightarrow{y} = -x\overrightarrow{x} \wedge Y_O\overrightarrow{y} = -xY_O\overrightarrow{z} = -x\dfrac{F}{4}\overrightarrow{z}$.

- On isole le second tronçon.
- Le tronçon est soumis d'une part à l'action mécanique en C et d'autre part à l'action mécanique du torseur de cohésion.
- On a donc :

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S-\to S+} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

On a donc, $\forall x \in \left[\dfrac{3l}{4}, l\right]$:

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S-\to S+} = -\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A} = -\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dfrac{3F}{4} & 0 \\ 0 & (l-x)\dfrac{3F}{4} \end{array}\right\}_{G}$$

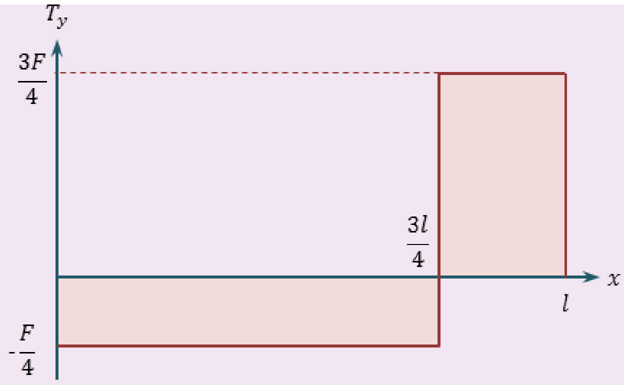
car $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathscr{M}(C, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GC} \wedge Y_C\overrightarrow{y} = (l-x)\overrightarrow{x} \wedge Y_C\overrightarrow{y} = (l-x)Y_C\overrightarrow{z} = (l-x)\dfrac{3F}{4}\overrightarrow{z}$.

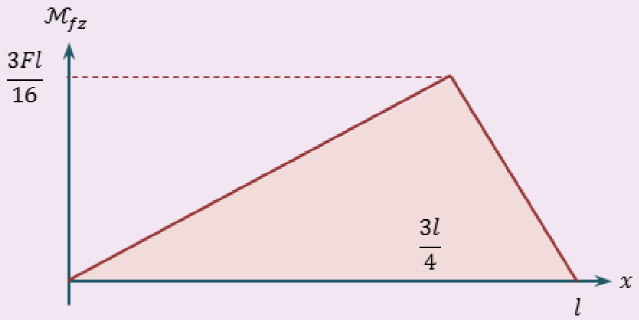
Au final,

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dfrac{3F}{4} & 0 \\ 0 & (l-x)\dfrac{3F}{4} \end{array}\right\}_{G}$$

Question 4 *Tracer les diagrammes des sollicitations.*

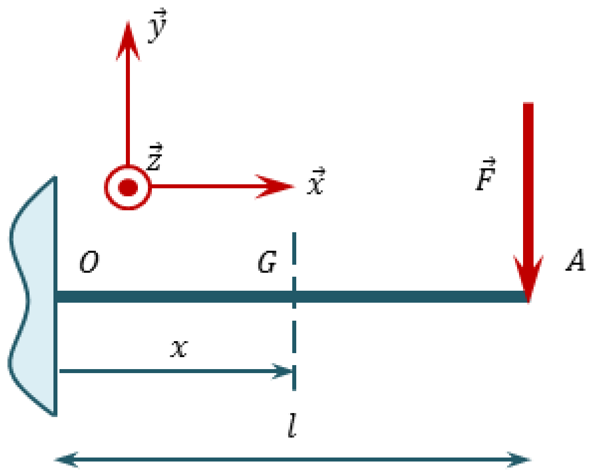
Correction





Exercice 2

On donne sur le schéma ci-dessous la modélisation d'une poutre et des efforts qui lui sont appliqués.



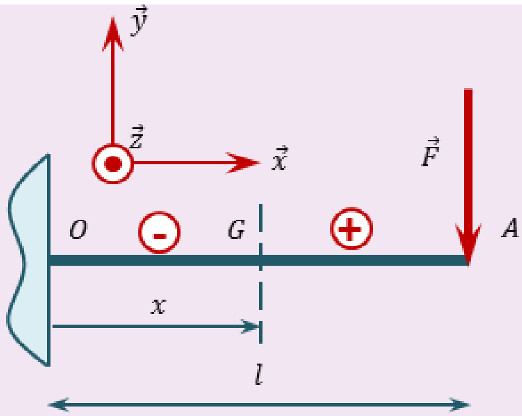
Question 1 *Donner une méthode permettant de déterminer le torseur de cohésion sans calculer les actions mécaniques en O.*

Correction Si on isole la partie comprise entre G et A et qu'on applique le PFS, cette partie est soumise aux efforts de cohésion et à l'action mécanique en A. Il n'est donc pas nécessaire de déterminer les efforts en O.

Question 2 *Exprimer le torseur de cohésion.*

Correction

- On isole la portion comprise entre G et A.
- Cette partie est soumises aux actions mécaniques de l'effort en A et des actions du torseur de cohésion.
- On réalise le PFS sur cette partie et on a :



$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S-\to S+} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array}\right\}_{A,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

On a donc, $\forall x \in [0, l]$:

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array}\right\}_{A,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & (x-l)F \end{array}\right\}_{G,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \left\{\begin{array}{cc} N & \mathcal{M}_t \\ T_y & \mathcal{M}_{fy} \\ T_z & \mathcal{M}_{fz} \end{array}\right\}_G$$

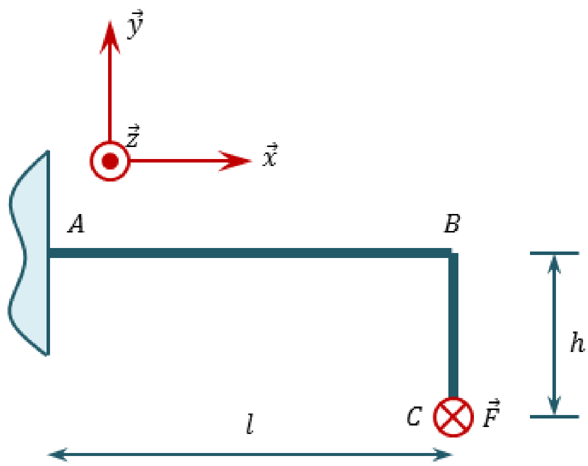
car $\overrightarrow{\mathcal{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GA} \wedge -F\overrightarrow{y} = (l-x)\overrightarrow{x} \wedge -F\overrightarrow{y} = (x-l)F\overrightarrow{z}$.

Question 3 *Tracer les diagrammes des sollicitations.*

Correction

Exercice 3

On donne sur le schéma ci-dessous la modélisation d'une poutre et des efforts qui lui sont appliqués.



Question 1 *Déterminer les actions mécaniques en A et en B... et remarquer que cela peut ne servir à rien pour la suite du problème...*

Correction *Remarque :* Pour déterminer le torseur de cohésion dans ce cas il n'est pas nécessaire de déterminer les actions mécaniques dans la liaison encastrement.

- On isole la poutre.
- La poutre est soumise à une liaison encastrement en A et à une action mécanique en C.
- On a donc :

$$\left\{\begin{array}{cc} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array}\right\}_C = \{0\}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Ext} \rightarrow \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(C, \text{Ext} \rightarrow \text{Poutre})} + \overrightarrow{AC} \wedge -F\overrightarrow{z} = \left(l\overrightarrow{x} - h\overrightarrow{z}\right) \wedge -F\overrightarrow{z} = Fl\overrightarrow{y}$$

$$\left\{\begin{array}{cc} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -Fl \\ F & 0 \end{array}\right\}_A$$

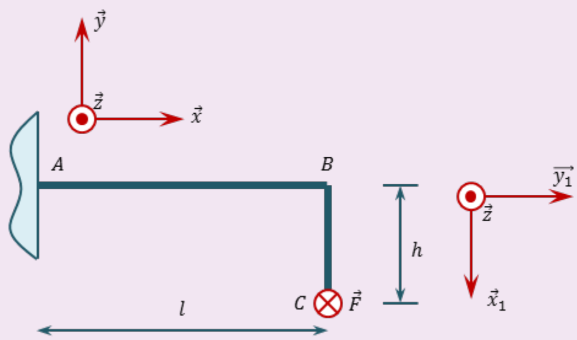
On cherche à déterminer le diagramme des sollicitations dans chacun des tronçons.

Question 2 *Quels tronçons peut-on considérer ?*

Correction

On peut considérer les deux tronçons suivants :

- le tronçon AB sur lequel $x \in [0, l]$;
- le tronçon BC sur lequel on définit un repère local.



Question 3 *Exprimer le torseur de cohésion dans chacun des tronçons.*

Correction

- On isole le premier tronçon.
- Le tronçon est soumis d'une part à l'action mécanique en A (vu qu'on l'a calculée, on va l'utilise ...) et d'autre

part à l'action mécanique du torseur de cohésion.
- On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S-\rightarrow S+} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array} \right\}_{C,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

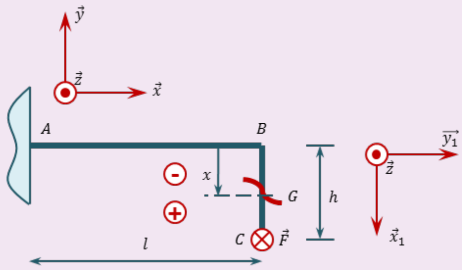
On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\rightarrow S-} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array} \right\}_{C,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}(G,\text{Ext}\rightarrow\text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(C,\text{Ext}\rightarrow\text{Poutre})} + \overrightarrow{GC} \wedge -F\overrightarrow{z} = \left((l-x)\overrightarrow{x} - h\overrightarrow{y}\right) \wedge -F\overrightarrow{z} = F(l-x)\overrightarrow{y} + Fh\overrightarrow{x}$ On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\rightarrow S-} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & Fh \\ 0 & F(l-x) \\ -F & 0 \end{array} \right\}_{G,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

- On isole la portion $[GC]$.
- Le tronçon est soumis d'une part à l'action mécanique en C et d'autre part à l'action mécanique du torseur de cohésion.
- On a donc :



$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S-\rightarrow S+} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array} \right\}_{C,(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

On a donc :

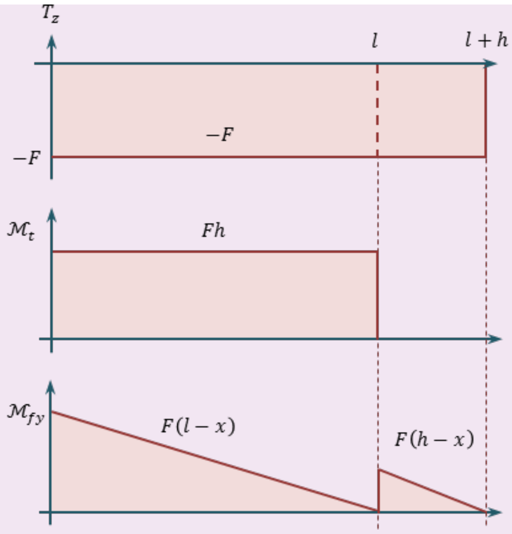
$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\rightarrow S-} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array} \right\}_{C}$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}(G,\text{Ext}\rightarrow\text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(C,\text{Ext}\rightarrow\text{Poutre})} + \overrightarrow{GC} \wedge -F\overrightarrow{z} = (h-x)\overrightarrow{x_1} \wedge -F\overrightarrow{z} = (h-x)F\overrightarrow{y_1}$. On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\rightarrow S-} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & (h-x)F \\ -F & 0 \end{array} \right\}_{G,(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z})}$$

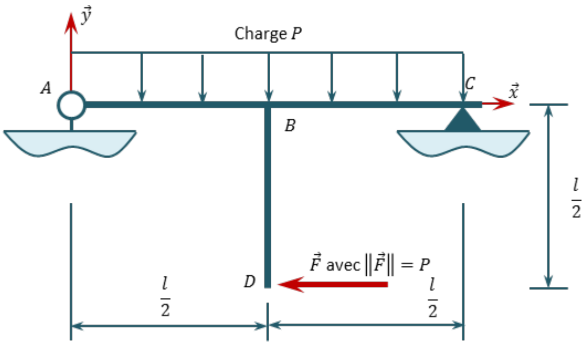
Question 4 *Tracer les diagrammes des sollicitations.*

Correction



Exercice 4

On donne sur le schéma ci-dessous la modélisation d'une poutre et des efforts qui lui sont appliqués.



Question 1 *Déterminer les actions mécaniques en A et en B.*

Correction

Le problème est plan. On isole la poutre et on réalise le bilan des actions mécaniques extérieures (figures ci-dessous).

On applique le théorème de la résultante statique sur $\overrightarrow{x}$ puis sur $\overrightarrow{y}$:

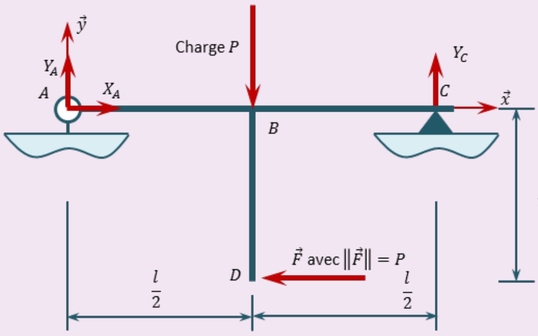
- ❒ $X_A - F = 0$;
- ❒ $Y_A + Y_C - P = 0$.

On applique le théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{z}$:

- ❒ $-\dfrac{Fl}{2} - \dfrac{Pl}{2} + l\,Y_C = 0$.

On peut alors résoudre le système :

$$\begin{cases} X_A = F \\ Y_A = -Y_C + P = 0 \\ Y_C = \dfrac{F+P}{2} = F \end{cases}$$



On cherche à déterminer le diagramme des sollicitations dans chacun des tronçons.

Question 2 *Quels tronçons peut-on considérer ?*

Correction On peut considérer les tronçons $[AB]$, $[BC]$ et $[BD]$.

Question 3 *Exprimer le torseur de cohésion dans chacun des tronçons.*

Correction

- On isole la portion $[AG]$ avec $G \in [AC]$.
- La portion est soumise d'une part à l'action mécanique en A, à l'action uniformément répartie (exprimée en M, milieu de $[AG]$) et à l'action mécanique du torseur de cohésion.
- On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} + \left\{\begin{array}{cc} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -px & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{M,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

On a donc, $\forall x \in \left[0, \dfrac{l}{2}\right]$,

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = -\left\{\begin{array}{cc} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{G} - \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -px & 0 \\ 0 & \dfrac{px^2}{2} \end{array}\right\}_{G} = \left\{\begin{array}{cc} -F & 0 \\ px & 0 \\ 0 & -\dfrac{px^2}{2} \end{array}\right\}_{G}$$

car $\overrightarrow{\mathcal{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GA} \wedge F\overrightarrow{x} = -x\overrightarrow{x} \wedge F\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

et $\overrightarrow{\mathcal{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(M, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GM} \wedge (-px)\overrightarrow{y} = -\dfrac{x}{2}\overrightarrow{x} \wedge (-px)\overrightarrow{y} = \dfrac{px^2}{2}\overrightarrow{z}$.

- On isole la portion $[GC]$ avec $G \in [BC]$.
- La portion est soumise d'une part à l'action mécanique en C, à l'action uniformément répartie (exprimée en M, milieu de $[GC]$) et à l'action mécanique du torseur de cohésion en G.
- On a donc :

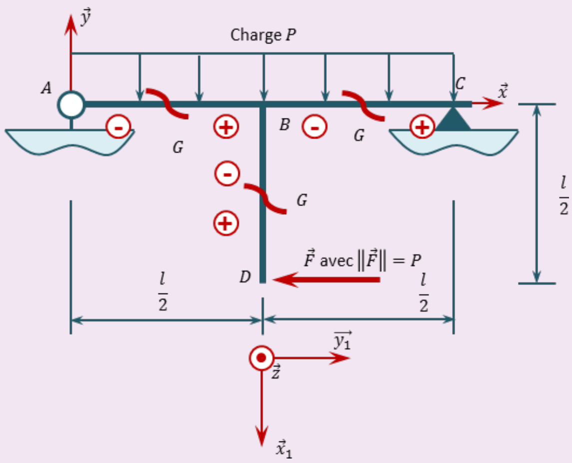
$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S-\to S+} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{C,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -p(l-x) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{M,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

On a donc, $\forall x \in \left[\dfrac{l}{2}, l\right]$,

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & (l-x)F \end{array}\right\}_{G} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -p(l-x) & 0 \\ 0 & -p\dfrac{(l-x)^2}{2} \end{array}\right\}_{G} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ F-p(l-x) & 0 \\ 0 & (l-x)F - p\dfrac{(l-x)^2}{2} \end{array}\right\}_{G}$$

car $\overrightarrow{\mathcal{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(C, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GC} \wedge F\overrightarrow{y} = (l-x)\overrightarrow{x} \wedge F\overrightarrow{y} = (l-x)F\overrightarrow{z}$

et $\overrightarrow{\mathcal{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(M, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GM} \wedge (-p(l-x))\overrightarrow{y} = \left(\dfrac{l-x}{2}\right)\overrightarrow{x} \wedge (-p(l-x))\overrightarrow{y} = -p\dfrac{(l-x)^2}{2}\overrightarrow{z}$.



- On isole la portion $[GD]$ avec $G \in [BD]$.

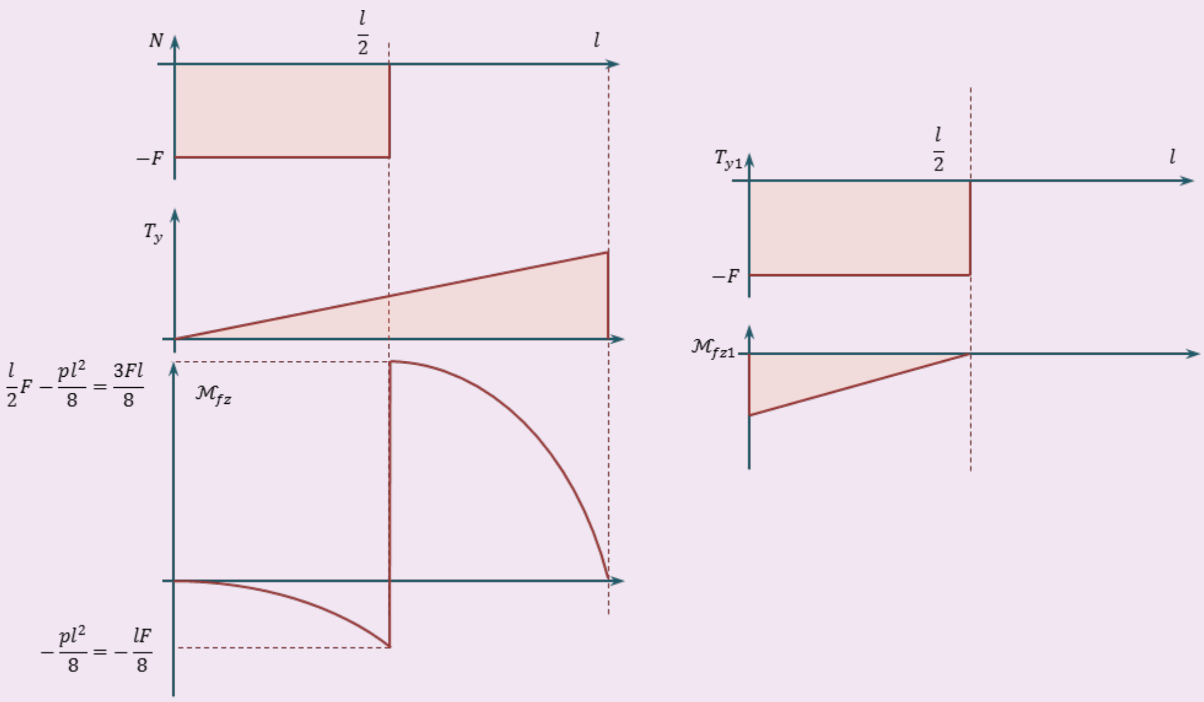
- La portion est soumise d'une part à l'action mécanique en D et à l'action mécanique du torseur de cohésion en G.
- On a donc :

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S-\to S+} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{D,(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} = \{0\} \Leftrightarrow \{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F\left(x-\dfrac{l}{2}\right) \end{array}\right\}_{G,(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

car $\overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{Ext}\to\text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathscr{M}(D,\text{Ext}\to\text{Poutre})} + \overrightarrow{GD}\wedge(-F)\overrightarrow{y_1} = \left(\dfrac{l}{2}-x\right)\overrightarrow{x_1}\wedge(-F)\overrightarrow{y_1} = F\left(x-\dfrac{l}{2}\right)\overrightarrow{z_1}$.

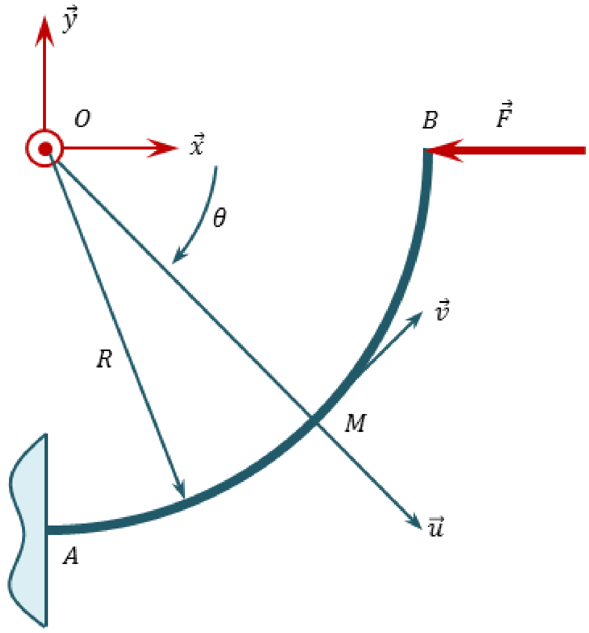
Question 4 *Tracer les diagrammes des sollicitations.*

Correction



Exercice 5

On donne sur le schéma ci-dessous la modélisation d'une poutre et des efforts qui lui sont appliqués.



Question 1 *Est-il nécessaire de déterminer les actions mécaniques en A et en B.*

Correction Si on isole la partie «II», elle est soumise à l'effort $\overrightarrow{F}$ et à l'action du torseur de cohésion. On n'aura donc pas besoin de l'action dans la liaison encastrement pour pouvoir déterminer le torseur de cohésion.

On cherche à déterminer le diagramme des sollicitations dans chacun des tronçons.

Question 2 *Exprimer le torseur de cohésion dans chacun des tronçons.*

Correction

- On isole la portion $[MB]$ (+).
- La portion est soumise d'une part à l'action mécanique en B et d'autre part à l'action mécanique du torseur de cohésion.
- On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S-\to S+} + \left\{\begin{array}{cc} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \{0\}$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}(M,\text{Ext}\to\text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(B,\text{Ext}\to\text{Poutre})} + \overrightarrow{MB} \wedge -F\overrightarrow{x} = \left(-R\overrightarrow{u} + R\overrightarrow{x}\right) \wedge -F\overrightarrow{x} = -RF\sin\theta\,\overrightarrow{z}$ et $-F\overrightarrow{x} = -F\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u} - \sin\theta\,\overrightarrow{v}\right)$.

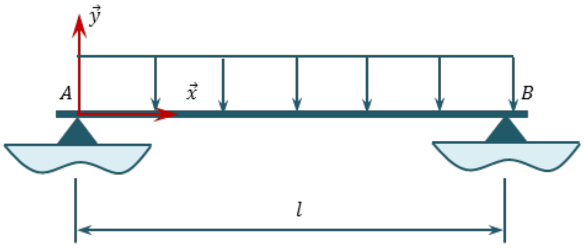
On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = \left\{\begin{array}{cc} -F\cos\theta & 0 \\ F\sin\theta & 0 \\ 0 & -RF\sin\theta \end{array}\right\}_{M,(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{z})}$$

TODO : diagrammes

Exercice 6

On donne sur le schéma ci-dessous la modélisation d'une poutre et des efforts qui lui sont appliqués. On note p la densité d'effort linéique.



Question 1 *Déterminer les actions mécaniques en A et en B.*

Correction On a $Y_A = Y_B = \dfrac{pl}{2}$.

On cherche à déterminer le diagramme des sollicitations dans chacun des tronçons.

Question 2 *Exprimer le torseur de cohésion dans chacun des tronçons.*

Correction

- On isole la portion $[GB]$.
- La portion est soumise à l'action mécanique en B, à l'action uniformément répartie (exprimée en M, milieu de $[GB]$) et à l'action mécanique du torseur de cohésion en G.
- On a donc :

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S-\to S+} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dfrac{pl}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -p(l-x) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \{0\}$$

On a donc, $\forall x \in [0, l]$,

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{S+\to S-} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dfrac{pl}{2} & 0 \\ 0 & (l-x)\dfrac{pl}{2} \end{array}\right\}_G + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -p(l-x) & 0 \\ 0 & -p\dfrac{(l-x)^2}{2} \end{array}\right\}_G = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dfrac{pl}{2} - p(l-x) & 0 \\ 0 & (l-x)\dfrac{pl}{2} - p\dfrac{(l-x)^2}{2} \end{array}\right\}_G$$

car $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GB} \wedge \dfrac{pl}{2}\vec{y} = (l-x)\vec{x} \wedge \dfrac{pl}{2}\vec{y} = \dfrac{pl(l-x)}{2}\vec{z}$

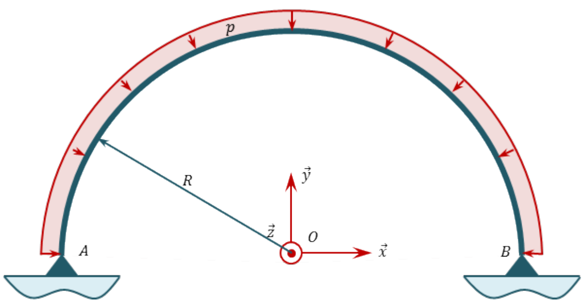
et $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{Ext} \to \text{Poutre})} = \overrightarrow{\mathscr{M}(M, \text{Ext} \to \text{Poutre})} + \overrightarrow{GM} \wedge (-p(l-x))\vec{y} = \left(\dfrac{l-x}{2}\right)\vec{x} \wedge (-p(l-x))\vec{y} = -p\dfrac{(l-x)^2}{2}\vec{z}$.

Question 3 *Tracer les diagrammes des sollicitations.*

Correction

Exercice 5

On donne sur le schéma ci-dessous la modélisation d'une poutre. On y exerce une charge répartie de pression p (en Nm^{-1}).



Question 1 *Déterminer les actions mécaniques en A et en B.*

Correction L'action de pression est modélisable par le glisseur suivant :

$$\mathcal{T}_{\text{Pression}\to\text{Poutre}} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pr}\to\text{Po})} = -2pR\overrightarrow{y} = -F\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O,\text{Pr}\to\text{Po})} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

On a donc :

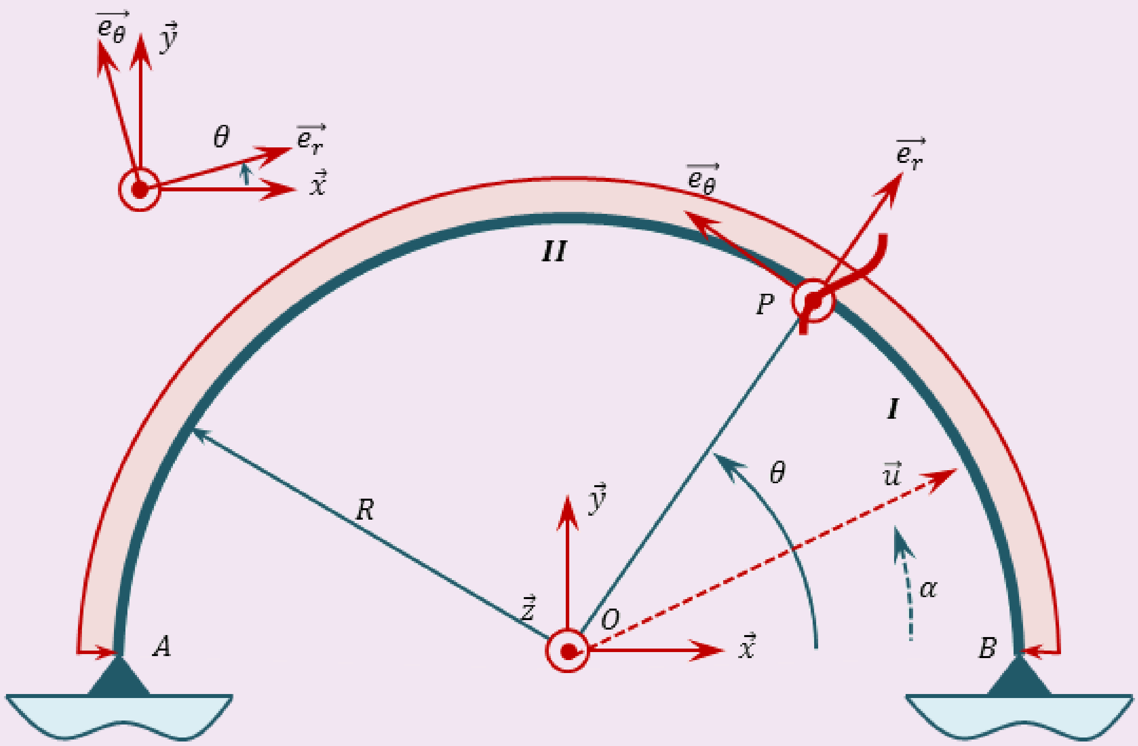
$$\mathcal{T}_{\text{Ext}\to\text{Poutre A}} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Ext}\to\text{Po A})} = \frac{1}{2}F\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O,\text{Pr}\to\text{Po A})} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\mathcal{T}_{\text{Ext}\to\text{Poutre B}} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Ext}\to\text{Po B})} = \frac{1}{2}F\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O,\text{Pr}\to\text{Po B})} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

On cherche à déterminer le diagramme des sollicitations dans chacun des tronçons.

Question 2 *Quels tronçons peut-on considérer ?*

Correction On ne considèrera qu'une seule partie, dans laquelle on aura deux tronçons.



Question 3 *Exprimer le torseur de cohésion dans chacun des tronçons, de préférence dans une base locale.*

Correction Pour $\theta \in [0;\pi]$, en appliquant le théorème de la résultante statique sur le tronçon I on a :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{II\to I} + \{\mathcal{T}_{\text{Ext}\to I}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Pression}\to I}\} = \{0\}$$

Correction Exprimons $\{\mathcal{T}_{\text{Ext}\to\text{I}}\}$ au point P :

$$\{\mathcal{T}_{\text{Ext}\to\text{I}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Ext}\to\text{I})} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P,\text{Ext}\to\text{I})} \end{array} \right\}_P$$

- $\overrightarrow{R(\text{Ext}\rightarrow \text{I})} = \dfrac{1}{2}F\overrightarrow{y} = \dfrac{1}{2}F\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$
  $\overrightarrow{R(\text{Ext}\rightarrow \text{I})} = pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}(P,\text{Ext}\rightarrow \text{I})}$
  $= \overrightarrow{\mathcal{M}(B,\text{Ext}\rightarrow \text{I})} + \overrightarrow{PB}\wedge\overrightarrow{R(\text{Ext}\rightarrow \text{I})}$
  $= \left(-R\overrightarrow{e_r} + R\overrightarrow{x}\right)\wedge\dfrac{1}{2}F\overrightarrow{y}$
  $= \left(-R\cos\theta\,\overrightarrow{x} - R\sin\theta\,\overrightarrow{y} + R\overrightarrow{x}\right)\wedge\dfrac{1}{2}F\overrightarrow{y}$
  $= \dfrac{1}{2}F(-R\cos\theta + R)\,\overrightarrow{z}$
  $= \dfrac{RF}{2}(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{z}$
  $= pR^2(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{z}$.

$$\{\mathcal{T}_{\text{Ext}\rightarrow \text{I}}\} = \left\{\begin{array}{l} pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right) \\ pR^2(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_P$$

Correction Exprimons $\{\mathcal{T}_{\text{Pression}\rightarrow \text{I}}\}$ au point O.

$$\{\mathcal{T}_{\text{Pr}\rightarrow \text{I}}\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pr}\rightarrow \text{I})} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O,\text{Pr}\rightarrow \text{I})} = \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_O$$

- $\overrightarrow{R(\text{Pr}\rightarrow \text{I})} = \int_0^\theta pR(-\overrightarrow{e_r})\text{d}\alpha$
  $= -pR\left([\sin\alpha]_0^\theta\,\overrightarrow{x} - [\cos\alpha]_0^\theta\,\overrightarrow{y}\right)$
  $= -pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{x} - (\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{y}\right)$
  $= -pR\left(\sin\theta\left(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)\right.$
  $\left.-(\cos\theta - 1)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_r}\right)\right)$
  $= -pR\left(\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin^2\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right.$
  $\left.+\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} - \cos^2\theta\,\overrightarrow{e_\theta} - \cos\theta\sin\theta\,\overrightarrow{e_r}\right)$
  $= -pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + (\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$

$$\{\mathcal{T}_{\text{Pr}\rightarrow \text{I}}\} = \left\{\begin{array}{l} -pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + (\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{e_\theta}\right) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_O$$

Correction Exprimons $\{\mathcal{T}_{\text{Pression}\rightarrow \text{I}}\}$ au point P.

$$\{\mathcal{T}_{\text{Pr}\rightarrow \text{I}}\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Pr}\rightarrow \text{I})} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P,\text{Pr}\rightarrow \text{I})} \end{array}\right\}_P$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}(P,\text{Pr}\rightarrow \text{I})} = \overrightarrow{\mathcal{M}(O,\text{Pr}\rightarrow I)} + \overrightarrow{PO}\wedge\overrightarrow{R(\text{Pr}\rightarrow \text{I})}$
$= -R\overrightarrow{e_r}\wedge\left(-pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + (\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{e_\theta}\right)\right)$
$= pR^2(\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{z}$

$$\{\mathcal{T}_{\text{Pr}\rightarrow \text{I}}\} = \left\{\begin{array}{l} -pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + (\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{e_\theta}\right) \\ pR^2(\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_P$$

Correction En conclusion,

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I} + \{\mathcal{T}_{\text{Ext}\rightarrow I}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Pression}\rightarrow I}\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I} = -\{\mathcal{T}_{\text{Ext}\rightarrow I}\} - \{\mathcal{T}_{\text{Pression}\rightarrow I}\}$$

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I}=-\left\{\begin{array}{l} pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r}+\cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)\\ pR^2(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_P-\left\{\begin{array}{l} -pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r}+(\cos\theta-1)\,\overrightarrow{e_\theta}\right)\\ pR^2(\cos\theta-1)\,\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_P$$

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I}=\left\{\begin{array}{l} -pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r}+\cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)+pR\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r}+(\cos\theta-1)\,\overrightarrow{e_\theta}\right)\\ -pR^2(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{z}-pR^2(\cos\theta-1)\end{array}\right\}_P$$

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I}=\left\{\begin{array}{l} -pR\overrightarrow{e_\theta}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_P$$