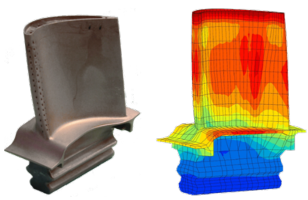
Méthode de résolution permettant la détermination des déformations et des contraintes des pièces déformables
Analyse, Modélisation, Résolution

Chapitre n– Titre Chapitre

Applications



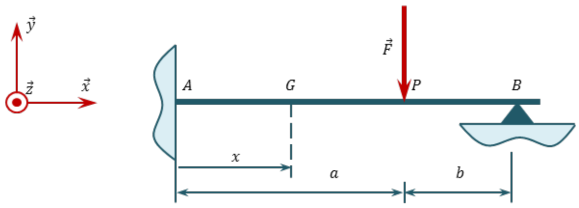
Exercices d'application

Savoirs et compétences :
Résoudre : *à partir des modèles retenus :*

- ❒ ***
- ❒ ***
- ❒ ***

Exercice 1 – Calcul des efforts dans une liaison encastrement

On donne le schéma ci-dessous.



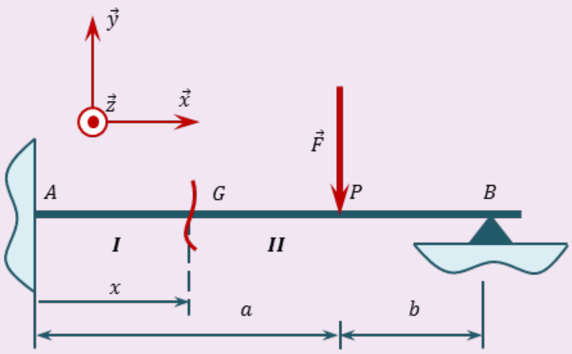
Question 1 *Déterminer le degré d'hyperstatisme.*

Question 2 *Déterminer les actions mécaniques en A et en B en fonction d'une seule inconnue.*

Correction En isolant la poutre, en réalisant un bilan des actions mécaniques et en réalisant le PFS en A, on obtient : $\left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - F = 0 \\ N_A - Fa + Y_B L = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = F - Y_B \\ Y_B = \dfrac{Fa - N_A}{L} \end{array} \right.$

Question 3 *Après avoir identifier les différentes parties constituant la poutre, déterminer les torseurs de cohésion sur chacune de ces parties.*

Correction **On étudie tout d'abord la partie $[AP]$.**



En isolant la partie I et en appliquant le PFS, on a :

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I} + \{\mathscr{T}_{\text{ext}\rightarrow I}\} = \{0\} \Longleftrightarrow \{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I} = -\{\mathscr{T}_{\text{ext}\rightarrow I}\}$$

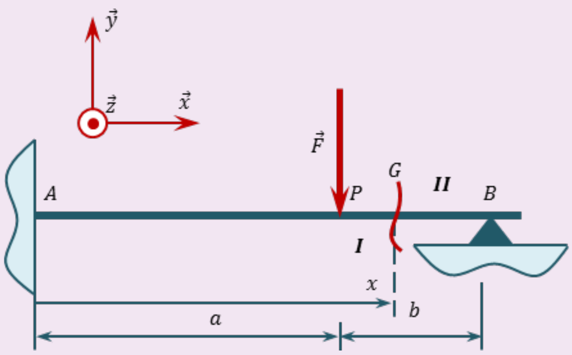
Détermination de $\{\mathscr{T}_{\text{ext}\rightarrow I}\}$:

$$\{\mathscr{T}_{\text{ext}\rightarrow I}\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A - x\,Y_A \end{array}\right\}_G$$

Détermination de $\{\mathscr{T}_{\text{II}\rightarrow I}\}$:

$$\forall x \in [0,a]: \quad \{\mathscr{T}_{\text{II}\rightarrow I}\} = \left\{\begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array}\right\}_G = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -Y_A & 0 \\ 0 & x\,Y_A - N_A \end{array}\right\}_G$$

Correction **On étudie ensuite la partie $[PB]$.**



On isole la partie II, on réalise le bilan des actions mécaniques extérieures et on applique le PFS :

$$\{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{I\rightarrow II} + \{\mathscr{T}_{\text{Ext}\rightarrow II}\} = \{0\} \Longleftrightarrow \{\mathscr{T}_{\text{coh}}\}_{II\rightarrow I} = \{\mathscr{T}_{\text{Ext}\rightarrow II}\}$$

Détermination de $\{\mathscr{T}_{\text{ext}\rightarrow II}\}$:

$$\{\mathscr{T}_{\text{ext}\rightarrow II}\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_B = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & (L-x)Y_B \end{array}\right\}_G$$

Détermination de $\{\mathscr{T}_{\text{II}\rightarrow I}\}$:

$$\forall x \in [a,L]: \quad \{\mathscr{T}_{\text{II}\rightarrow I}\} = \left\{\begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array}\right\}_G = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & (L-x)Y_B \end{array}\right\}_G$$

Correction Équation de la déformée sur la première partie :

$$\forall x \in [0,a]: \quad E\,I_{Gz}\,y_1''(x) = M_{fz} \Leftrightarrow E\,I_{Gz}\,y_1''(x) = x\,Y_A - N_A$$

$$\Rightarrow E\,I_{Gz}\,y_1'(x) = \frac{1}{2}x^2\,Y_A - N_A x + v_1$$

$\Rightarrow E I_{Gz} y_1(x) = \dfrac{1}{6} x^3 Y_A - \dfrac{1}{2} N_A x^2 + v_1 x + y_1$

La poutre étant encastrée en A, on a donc $y_1(0)=0$ et $y_1'(0)=0$. En conséquences, $y_1=0$ et $v_1=0$ et

$$E I_{Gz} y_1(x) = \frac{1}{6} Y_A x^3 - \frac{1}{2} N_A x^2$$

Équation de la déformée sur la seconde partie : $\forall x \in [a, L]$: $E I_{Gz} y_2''(x) = M_{fz} \Leftrightarrow E I_{Gz} y_2''(x) = (L-x) Y_B \Leftrightarrow E I_{Gz} y_2''(x) = -x Y_B + L Y_B$

$\Rightarrow E I_{Gz} y_2'(x) = -\dfrac{1}{2} Y_B x^2 + L Y_B x + v_2$

$\Rightarrow E I_{Gz} y_2(x) = -\dfrac{1}{6} Y_B x^3 + \dfrac{1}{2} L Y_B x^2 + v_2 x + y_2$

La poutre étant en appui ponctuel en B, on a donc $y_2(L)=0$. En conséquences,

$$y_2 = \frac{1}{6} Y_B L^3 - \frac{1}{2} Y_B L^3 - v_2 L = -\frac{1}{3} Y_B L^3 - v_2 L$$

La poutre étant un solide continu, on a donc nécessairement $y_1(a) = y_2(a)$ et $y_1'(a) = y_2'(a)$. D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} Y_A a^3 - \frac{1}{2} N_A a^2 = -\frac{1}{6} Y_B a^3 + \frac{1}{2} L Y_B a^2 + v_2 a - \frac{1}{3} Y_B L^3 - v_2 L \\ \frac{1}{2} a^2 Y_A - N_A a = -\frac{1}{2} Y_B a^2 + L Y_B a + v_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y_A a^3 - 3 N_A a^2 = -Y_B a^3 + 3 L Y_B a^2 + 6 v_2 a - 2 Y_B L^3 - 6 v_2 L \\ v_2 = \end{array} \right.$$

$$Y_A a^3 - 3 N_A a^2 = -Y_B a^3 + 3 L Y_B a^2 + 6a \left(\frac{1}{2} a^2 Y_A - N_A a + \frac{1}{2} Y_B a^2 - L Y_B a \right) - 2 Y_B L^3 - 6L \left(\frac{1}{2} a^2 Y_A - N_A a + \frac{1}{2} Y_B a^2 - L Y_B a \right)$$

$$Y_A a^3 - 3 N_A a^2 = -Y_B a^3 + 3 L Y_B a^2 + 3 a^3 Y_A - 6 a N_A a + 3 Y_B a^3 - 6 a L Y_B a - 2 Y_B L^3 - 3 L a^2 Y_A + 6 L N_A a - 3 L Y_B a^2 - + 6 L^2 a Y_B$$

$$0 = 2 Y_B a^3 + 2 a^3 Y_A - 3 N_A a^2 - 6 L Y_B a^2 - 2 Y_B L^3 - 3 L a^2 Y_A + 6 L N_A a - 6 L^2 a Y_B$$

$$\Longleftrightarrow N_A \left(3a^2 - 6La \right) = Y_B \left(2a^3 - 6La^2 - 2L^3 - 6L^2 a \right) + Y_A \left(2a^3 - 3La^2 \right)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_A = Y_B \dfrac{\left(2a^3 - 6La^2 - 2L^3 - 6L^2 a\right)}{(3a^2 - 6La)} + Y_A \dfrac{\left(2a^3 - 3La^2\right)}{(3a^2 - 6La)} \\ Y_A = F - Y_B \\ N_A = Fa - Y_B L \end{array} \right.$$

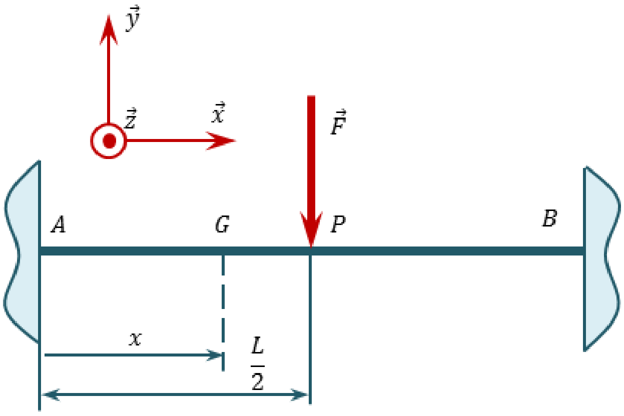
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_A = Y_B \dfrac{\left(2a^3 - 6La^2 - 2L^3 - 6L^2 a\right)}{(3a^2 - 6La)} + Y_A \dfrac{\left(2a^3 - 3La^2\right)}{(3a^2 - 6La)} \\ Y_A = F - Y_B \\ Y_B \left(2a^3 - 6La^2 - 2L^3 - 6L^2 a\right) + Y_A \left(2a^3 - 3La^2\right) = Fa \left(3a^2 - 6La\right) - Y_B L \left(3a^2 - 6La\right) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_A = Y_B \dfrac{\left(2a^3 - 6La^2 - 2L^3 - 6L^2 a\right)}{(3a^2 - 6La)} + Y_A \dfrac{\left(2a^3 - 3La^2\right)}{(3a^2 - 6La)} \\ Y_A = F - Y_B \\ 2 Y_B a^3 - 6 Y_B L a^2 - 2 Y_B L^3 - 6 Y_B L^2 a + 2 F a^3 - 3 F L a^2 - Y_B 2 a^3 + Y_B 3 L a^2 = 3 F a^3 - F 6 L a^2 - Y_B L 3 a^2 + Y_B 6 L^2 a \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_A = Y_B \dfrac{\left(2a^3 - 6La^2 - 2L^3 - 6L^2 a\right)}{(3a^2 - 6La)} + Y_A \dfrac{\left(2a^3 - 3La^2\right)}{(3a^2 - 6La)} \\ Y_A = F - Y_B \\ Y_B \left(-2L^3 - 12 L^2 a\right) = F a^3 - 3 F L a^2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_A = Y_B \dfrac{\left(2a^3-6La^2-2L^3-6L^2a\right)}{(3a^2-6La)} + Y_A \dfrac{\left(2a^3-3La^2\right)}{(3a^2-6La)} \\ Y_A = F - Y_B \\ Y_B = Fa^2 \dfrac{3L-a}{2L^2(L+6a)} \end{array} \right.$$

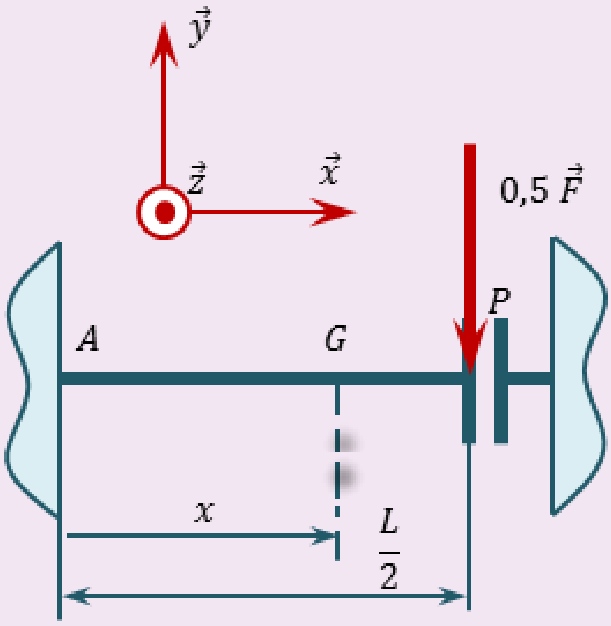
Exercice 2 : Déformation d'une poutre bi-encastrée



Question 1 *Déterminer la flèche maximale.*

Correction

On résout le problème en raisonnant par symétrie. On cherche donc à résoudre le problème suivant.



On isole la poutre, on réalise le bilan des actions mécaniques et on exprime le PFS au point A :

$$\{\mathcal{T}_{\text{Ext}\rightarrow\text{Poutre}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{AP}\rightarrow\text{Poutre}}\} = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{cc} X_P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_P \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\dfrac{F}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$$

$$\left\{\begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{cc} X_P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_P \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\dfrac{F}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{F}{2}\dfrac{L}{2} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_A$$

Au final,

$$\left\{\begin{array}{l} X_A + X_P = 0 \\ Y_A - \dfrac{F}{2} = 0 \\ N_A + N_P - \dfrac{FL}{4} = 0 \end{array}\right.$$

Détermination de $\{\mathscr{T}_{\text{II}\to I}\}$:

$$\forall x \in [0, L/2]: \quad \{\mathscr{T}_{\text{II}\to I}\} = \left\{\begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array}\right\}_G = -\left\{\begin{array}{cc} X_A & 0 \\ \dfrac{F}{2} & 0 \\ 0 & N_A - x\dfrac{F}{2} \end{array}\right\}_G$$

La déformée de la poutre est donnée par :

$$EI_{Gz}\,y''(x) = M_{fz}(x) \Longleftrightarrow EI_{Gz}\,y''(x) = -N_A + x\frac{F}{2} \Rightarrow EI_{Gz}\,y'(x) = -N_A x + \frac{F}{4}x^2 + v_0$$

$$\Rightarrow EI_{Gz}\,y(x) = -\frac{1}{2}N_A x^2 + \frac{F}{12}x^3 + v_0 x + y_0$$

La poutre étant en liaison encastrement en A on a : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. En conséquences, $v_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Par continuité de la matière, $y'(L/2) = 0$. En conséquences,

$$0 = -N_A\frac{L}{2} + \frac{F}{4}\frac{L^2}{4} \Leftrightarrow N_A = \frac{FL}{8}$$

Au final,

$$EI_{Gz}\,y(x) = -\frac{FL}{16}x^2 + \frac{F}{12}x^3$$

La flèche est obtenue lorsque $x = L/2$ en conséquences,

$$f = \frac{1}{EI_{Gz}}\left[-\frac{FL}{16}x^2 + \frac{F}{12}x^3\right] \Leftrightarrow f = \frac{FL^3}{EI_{Gz}}\left[-\frac{1}{64} + \frac{1}{96}\right] = -\frac{FL^3}{192\,EI_{Gz}}$$