Résistance des matériaux

Chapitre 1 – Modélisation des pièces déformables

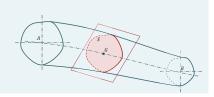
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Hypothèses de la RdM

Définition

Poutre:

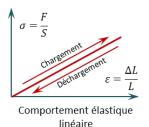
Une poutre d'origine A et et d'extrémité B est un solide engendré par une surface plane S dont une dimension est très grande par rapport aux deux autres. On appelle alors AB la ligne moyenne (ou fibre neutre), S la section droite, perpendiculaire à la ligne moyenne et G son centre d'inertie.



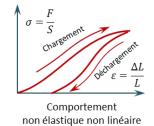
Hypothèse(s) Matériaux

On suppose en RdM que les matériaux sont :

- continus : malgré l'organisation en grains ou en fibres de certains matériaux, on considère que les dimensions de ces grains ou fibres sont négligeables devant les dimensions de la pièce étudie;
- homogènes : en tous points les caractéristiques des matériaux sont les mêmes (acier ou plastique, à la différence du béton ou du bois);
- isotropes: en tous points les caractéristiques mécaniques sont les mêmes dans toutes les directions;
- élastiques: après suppression des contraintes mécaniques, le matériau retrouve ces dimensions initiales;
- **linéaires**: contraintes et déformations sont liées par une loi linéaire.







Hypothèse(s)

Hypothèse de Navier - Bernoulli - Hypothèse cinématique

Lors de la déformation d'une poutre droite, on fait l'hypothèse que le déplacement d'une section droite est un déplacement de corps rigide. Autrement dit, une section plane perpendiculaire à la fibre neutre avant déformation reste perpendiculaire à la fibre neutre après déformation. (Cette hypothèse n'est plus vérifiée lorsque existe une contrainte de cisaillement.)



Hypothèse(s) Hypothèse des petits déplacements : les déplacements petits devront rester petits devant les dimensions de la poutre.

Torseur de cohésion et sollicitations

Hypothèse(s) Hypothèse de Barré – Saint Venant :

En s'éloignant suffisant des zones où sont concentrés les efforts, les contraintes et déformations ne dépendent que du torseur de cohésion.

Définition Torseur de cohésion :

Sous une action mécanique extérieure à une poutre, des actions intérieures assurent sa cohésion. Ces actions internes sont modélisées par le torseur de cohésion.

1



En subdivisant la poutre en deux tronçons notés I et II, puis en isolant la partie I, cette dernière est alors soumise aux actions mécaniques de cohésions du tronçon II sur le tronçon I ainsi qu'aux actions mécaniques extérieures. D'après le PFS appliqué à la poutre on a alors : $\{\mathscr{T}(\text{Ext} \to I)\} + \{\mathscr{T}(II \to I)\} = \{0\} \iff \{\mathscr{T}(II \to I)\} = \{0\}$ $-\{\mathcal{T}(\operatorname{Ext} \to I)\}.$

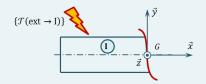
Par convention, le torseur de cohésion s'exprime au point G et représente l'action du tronçon II sur le tronçon I. On le notera : \mathcal{T}_{coh} .



Définition Sollicitations:

On a:

$$\{\mathcal{T}_{\rm coh}\} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G, \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)}.$$



On appelle:

- N: l'effort normal, induisant un allongement ou un raccourcissement de la poutre;
- T_v et T_z : les efforts tranchants suivant \overrightarrow{y} ou \overrightarrow{z} , induisant un glissement des sections;
- M_t : le moment de torsion, induisant un glissement des sections;
- M_{fy} et M_{fz} : les moments de flexion autour de \overrightarrow{y} ou \overrightarrow{z} , induisant une modification de la courbure de la



On peut montrer qu'en un point *G* d'abscisse *x* :

- la dérivée de l'effort tranchant est égale à la charge élémentaire appliquée en ce point ;
- la dérivée du moment de flexion autour de \overrightarrow{z} est égale à l'opposé de l'effort tranchant T_v en ce point :
- la dérivée du moment de flexion autour de \overrightarrow{y} est égale à l'effort tranchant T_z en ce point : $\frac{dM_{fy}(x)}{dt} = T_z(x)$;

Méthode: détermination des diagrammes des sollicitations

- 1. Modélisation du problème : le problème étant donné, il est nécessaire de réaliser un modèle paramétré (schéma cinématique, paramétrage, modélisation des actions mécaniques).
- 2. Résolution des actions mécaniques dans les liaisons grâce au PFS.
- 3. Découpage de la poutre en tronçons (un nouveau tronçon correspondant à une discontinuité géométrique - discontinuité de la ligne moyenne - ou à une discontinuité en effort - nouvelle charge, répartie ou non,
- 4. Résolution du PFS dans le but de déterminer les torseurs de cohésion.
- 5. Tracer des diagrammes des sollicitations. 6. Vérifier que $\frac{\mathrm{d}M_{fz}(x)}{\mathrm{d}t} = -T_y(x)$.

Traction	Torsion	Cisaillement
$\mathcal{T}_{coh} = \left\{ \begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}'\right)}.$	$\mathscr{T}_{\mathrm{coh}} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G, \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)}.$	$\mathcal{T}_{coh} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)}.$
Flexion pure	Flexion simple	Flexion + Traction
$\mathcal{T}_{\text{coh}} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_{G, \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)}.$	$\mathscr{T}_{\mathrm{coh}} = \left\{ egin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_{y} & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} ight\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z} ight)}.$	$\mathcal{T}_{\mathrm{coh}} = \left\{ \begin{array}{cc} N & 0 \\ T_{y} & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)}.$
Flexion + Torsion	Flambage	Flexion déviée
$\mathcal{T}_{\rm coh} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_{G, \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)}.$	$\mathcal{T}_{\mathrm{coh}} = \left\{ \begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_{G, \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)}.$	$\mathcal{T}_{\text{coh}} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)}.$



4 Notions de contraintes et déformations

$$\begin{split} \mathcal{T}_{\mathrm{coh}} &= \left\{ \begin{array}{l} N\overrightarrow{x} + T_{y}\overrightarrow{y} + T_{z}\overrightarrow{z} \\ M_{t}\overrightarrow{x} + M_{fy}\overrightarrow{y} + M_{fz}\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)} = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_{S} \overrightarrow{C}\left(M,\overrightarrow{x_{S}}\right)dS \\ \int\limits_{S} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{C}\left(M,\overrightarrow{x_{S}}\right)dS \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_{S} \left(\sigma(M)\overrightarrow{x_{S}} + \overrightarrow{\tau(M)}\right)dS \\ \int\limits_{S} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{C}\left(M,\overrightarrow{x_{S}}\right)dS \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_{S} \left(\sigma(M)\overrightarrow{x_{S}} + \tau_{y}\overrightarrow{y_{S}} + \tau_{z}\overrightarrow{z_{S}}\right)dS \\ \int\limits_{S} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{C}\left(M,\overrightarrow{x_{S}}\right)dS \end{array} \right\}_{G,\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)}. \end{split}$$