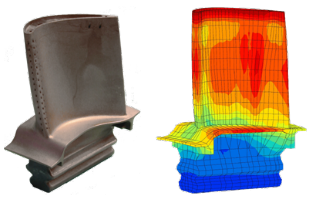
# Applications



## Exercices d'application

***Savoirs et compétences :***
***Résoudre :*** *à partir des modèles retenus :*

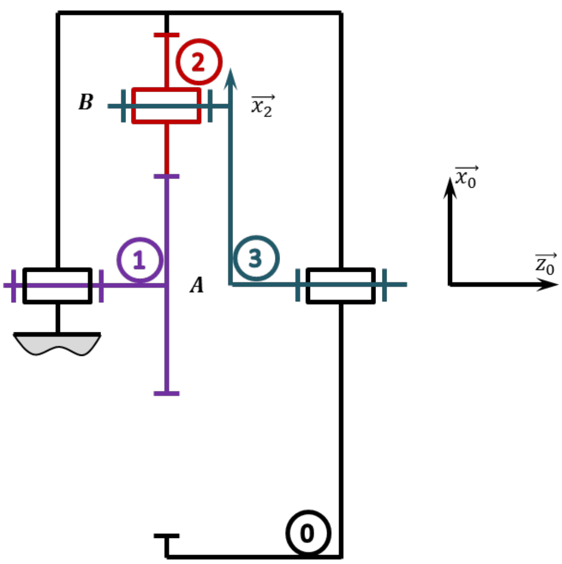
- ***
- ***
- ***

## Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\overline{\overline{I_A}}(1/0)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{I_B}}(2/0)=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{I_A}}(3/0)=\begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$$




On montre que : $\mu = \dfrac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = -\dfrac{r_1}{2r_2}$ .

**Question 1** *Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.*

**Méthode**
1. Écrire le rapport de réduction recherché.
2. Refaire le schéma en fixant le porte satellite et en libérant le bâti. Le porte satellite devient donc le bâti et le train peut être considéra comme un train simple.
3. Déterminer le rapport de réduction du train simple (les taux de rotation seront donc exprimés en fonction du porte-satellite) en fonction du nombre de dents des roues dentées.
4. Introduire les fréquences de rotation exprimées au point 1.
5. Exprimer le rapport de réduction cherché en fonction du nombre de dents des solides.

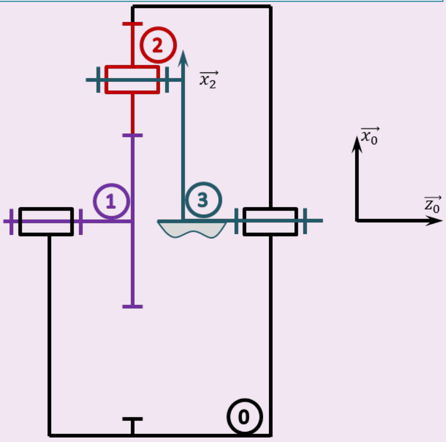
On recherche $k=\dfrac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$.

On bloque le porte satellite **3** et on libère la couronne **0**.

On peut donc exprimer $\dfrac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)}=(-1)^1\dfrac{Z_1\cdot Z_2}{Z_2\cdot Z_0}=-\dfrac{Z_1}{Z_0}$.

En décomposant le taux de rotation, on introduit $\omega(1/0)$ et $\omega(0/3)$ :
$\dfrac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)} = \dfrac{\omega(0/3)}{\omega(1/0)+\omega(0/3)} = -\dfrac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \dfrac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0)-\omega(3/0)} = -\dfrac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow$
$Z_0\omega(3/0) = Z_1\left(\omega(1/0)-\omega(3/0)\right) \Leftrightarrow \omega(3/0)(Z_0+Z_1) = Z_1\omega(1/0) \Leftrightarrow$
$\dfrac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}=\dfrac{Z_1}{Z_1+Z_0}$.

Au final, $k=\dfrac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}=\dfrac{Z_1}{Z_1+Z_0}$.




**Question 2** *Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble $E=\{1,2,3\}$ par rapport au référentiel de la pièce* ***0*** *supposé galiléen.*

**Méthode**
1. On calcule $T(1/0)$,

**Calcul de l'énergie cinétique du planétaire :** $T(1/0)$

Par définition, $2T(1/0)=\{\mathscr{V}(1/0)\}\otimes\{\mathscr{C}(1/0)\}$ $A$ étant un point fixe dans **0**, on a :

$$\{\mathscr{V}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\omega(1/0)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(A\in 1/0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$$

$$\{\mathscr{C}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{l}M_1\overrightarrow{V(G\in 1/0)}\\ \overrightarrow{\sigma(A\in 1/0)}=\overline{\overline{I}}(A,0)\overrightarrow{\Omega(1/0)}=C_1\omega(1/0)\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_A$$

On a donc :

$$T(1/0)=\frac{1}{2}C_1\omega(1/0)^2$$

**Correction** **Calcul de l'énergie cinétique du porte-satellite :** $T(3/0)$

Par définition, $2T(2/0)=\{\mathscr{V}(2/0)\}\otimes\{\mathscr{C}(2/0)\}$ ; on a :

$$\{\mathscr{V}(3/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(3/0)}=\omega(3/0)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(A\in 3/0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$$

$$\{\mathscr{C}(3/0)\}=\left\{\begin{array}{l}M_3\overrightarrow{V(G\in 3/0)}\\ \overrightarrow{\sigma(A\in 3/0)}=\overline{\overline{I}}(A,3)\overrightarrow{\Omega(3/0)}=C_3\omega(3/0)\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0)=\frac{1}{2}C_3\omega(3/0)^2=\frac{1}{2}k^2C_3\omega(1/0)^2$$

**Correction** **Calcul de l'énergie cinétique d'un seul satellite :** $T(2/0)$

Par définition, $2T(2/0)=\{\mathscr{V}(2/0)\}\otimes\{\mathscr{C}(2/0)\}$ et le centre d'inertie d'un porte satellite est au point $B$ on a donc :

$$\{\mathscr{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\omega(2/0)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(B\in 2/0)}\end{array}\right\}_B$$

$$\{\mathscr{C}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{l}M_2\overrightarrow{V(G\in 2/0)}\\ \overrightarrow{\sigma(A\in 2/0)}=\overline{\overline{I}}(A,2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}=C_2\omega(2/0)\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_A$$

$\overrightarrow{V(B\in 2/0)}=\overrightarrow{V(B\in 2/3)}+\overrightarrow{V(B\in 3/0)}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{V(A\in 3/0)}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(3/0)}=-R_3\overrightarrow{x_3}\wedge\omega(3/0)\overrightarrow{z_0}=-R_3\omega(3/0)\overrightarrow{y_3}$.

R Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est porté par le porte satellite. Par ailleurs, les points $A$, $B$ ainsi que les points de contact dans les engrenages sont toujours suivant la direction du porte satellite. Enfin, $R_3=R_1+R_2$.

D'où :

$$\{\mathscr{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\omega(2/0)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(B\in 2/0)}=-R_3\omega(3/0)\overrightarrow{y_3}\end{array}\right\}_B$$

$$\{\mathscr{C}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{l}M_2\overrightarrow{V(G\in 2/0)}=-R_3\omega(3/0)\overrightarrow{y_3}\\ \overrightarrow{\sigma(A\in 2/0)}=C_2\omega(2/0)\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0)=\frac{1}{2}C_2\omega(2/0)^2+\frac{1}{2}M_2R_3^2\omega(3/0)^2=\frac{1}{2}C_2\frac{r_1^2}{4r_2^2}\omega(1/0)^2+\frac{1}{2}M_2R_3^2k^2\omega(1/0)^2=\frac{1}{2}C_2\mu^2\omega(1/0)^2+\frac{1}{2}M_2R_3^2\omega(3/0)^2$$

**Correction** **Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble E :** $T(E/0)$

Sans oublier qu'il y a 3 satellites (...), on a donc :

$$T(E/0)=T(1/0)+T(2/0)+T(3/0)$$

$$T(E/0)=\frac{3}{2}C_2\frac{r_1^2}{4r_2^2}\omega(1/0)^2+\frac{3}{2}M_2R_3^2k^2\omega(1/0)^2+\frac{1}{2}C_1\omega(1/0)^2+\frac{1}{2}k^2C_3\omega(1/0)^2$$

D'où

$$T(E/0)=\frac{1}{2}\left(3C_2\mu^2+3M_2R_3^2k^2+C_1+k^2C_3\right)\omega(1/0)^2$$

On note donc $J_{eq}=3C_2\mu^2+3M_2R_3^2k^2+C_1+k^2C_3$ l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

**Méthode**

**Correction** **Calcul des puissances externes**

**Calcul des puissances dues aux actions de contact**

**Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 1 et 0 :** $\mathscr{P}_{0\to 1}$ **:**

On a : $\mathscr{P}_{0\to 1}=\{\mathscr{V}(1/0)\}\otimes\{\mathscr{T}(1\to 0)\}$

$$\{\mathscr{V}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\omega(1/0)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(A\in 1/0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A \quad \{\mathscr{T}(1\to 0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(1\to 0)}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,1\to 0)}=L_{01}\overrightarrow{x_0}+L_{01}\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_A$$

On a donc : $\mathscr{P}_{0\to 1}=0$.