

## Activation 1 – Corrigé

### Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

**Savoirs et compétences :**

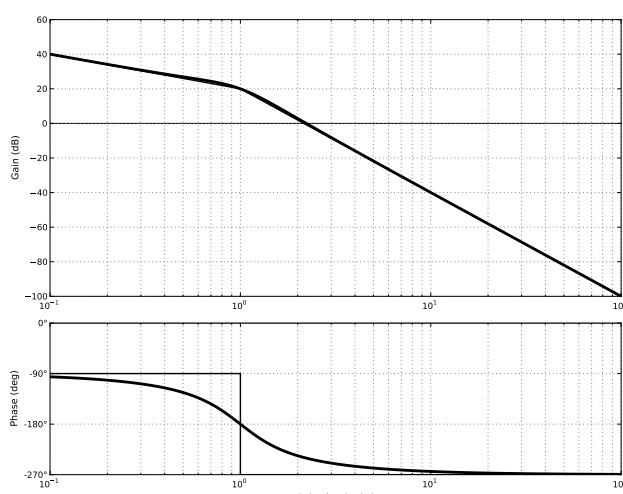
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de 45° et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

#### Correction

- On cherche  $\omega$  tel que  $G_{dB}(\omega) = 0$  dB :  $G_{dB}(\omega) = -20\log(10) - 20\log\omega - 20\log(\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2})$   
On trouve  $\omega = 2,21$  rad/s et  $M_\varphi = -60^\circ$ . Le système est instable.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Correction** Pour  $\varphi = -180^\circ$ , on a  $\omega = 1$  rad/s et  $M_G = -20$  dB. Le système est instable.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge

de phase de 45°. Vérifier la marge de gain.

**Correction** Pour  $\varphi = -135^\circ$  on a  $\omega = 0,62$  rad/s. On trouve un gain proportionnel de 0,054.

La marge de gain est alors de 5,35 dB ce qui est inférieur aux 10 dB demandés.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

**Correction** Pour  $\varphi = -180^\circ$  on a  $\omega = 1$  rad/s. On trouve un gain proportionnel de 0,316.

La marge de phase est alors de  $70^\circ$  ( $\omega = 0,0333$  rad/s).

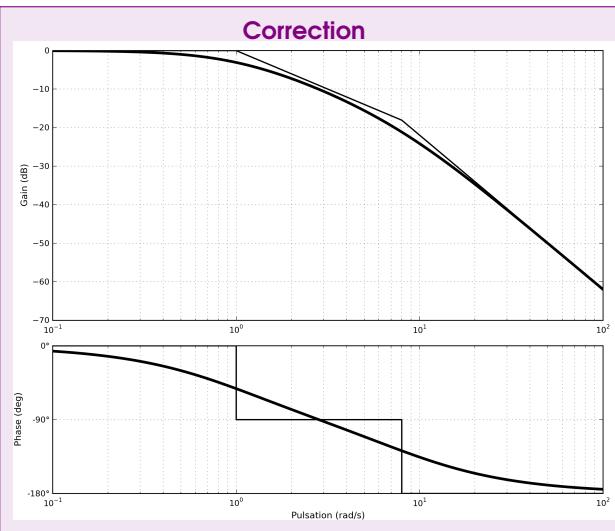
#### Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

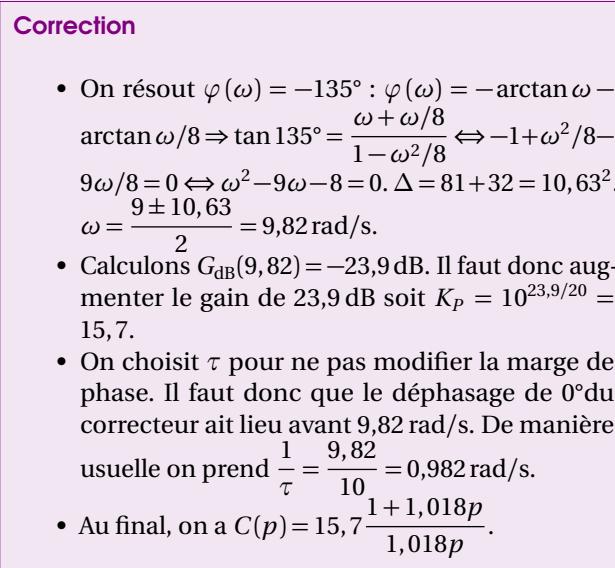
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de 45° en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1+\tau p}{\tau p}$ .

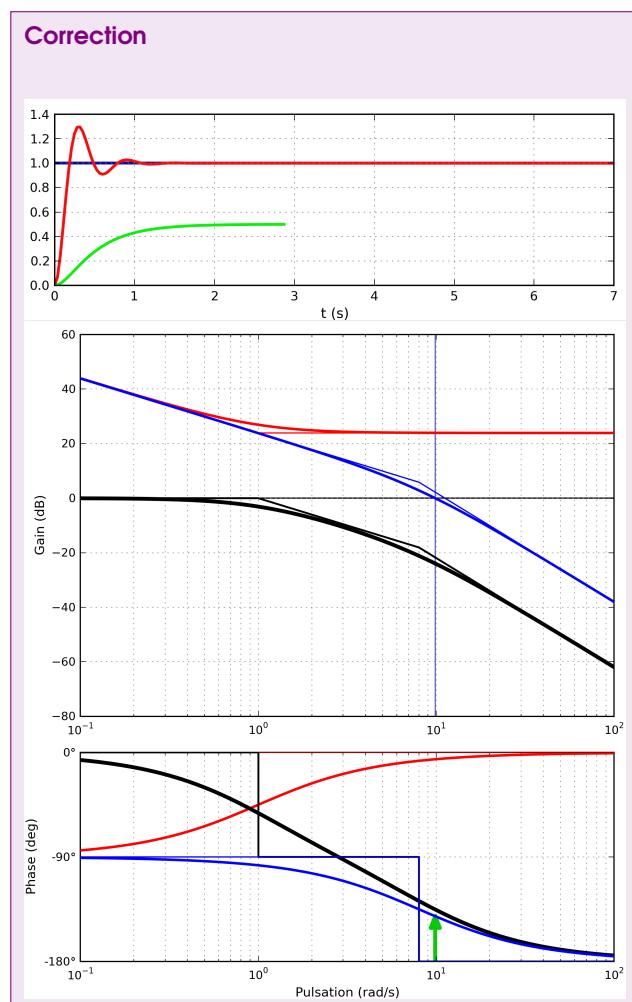
**Question 1** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Question 2** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .



**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.



## Activation 2 – Corrigé

### Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

**Savoirs et compétences :**

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\epsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Correction** Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon.  $K_{BO} = 1$ . L'écart statique est de  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

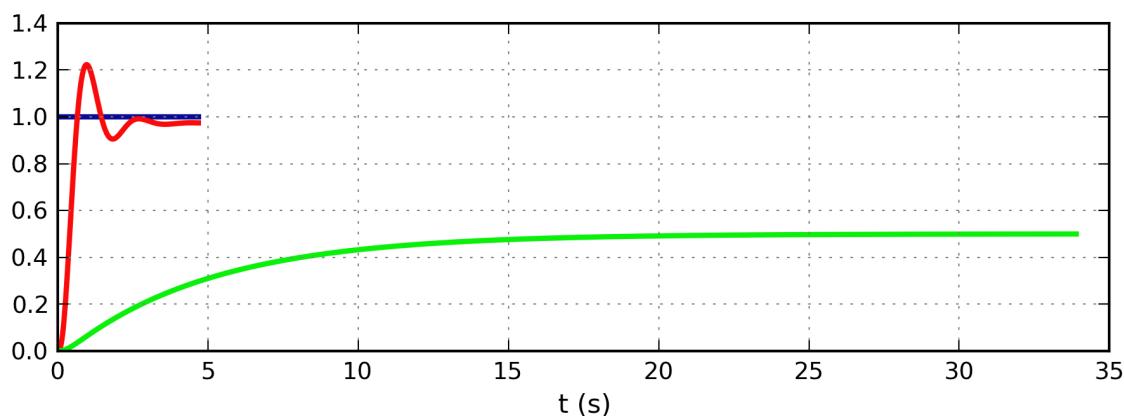


**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de 45°. Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Correction**

- On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$ .  
 $\varphi(\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \omega = 2,95 \text{ rad s}^{-1}$  (solveur Excel).
- Calculons  $G_{dB}(\omega) = -20 \log(\sqrt{1+10^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1+0,1^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1+0,2^2\omega^2}) = -31 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de 31 dB soit  $K_P = 10^{31/20} = 35,48$ .

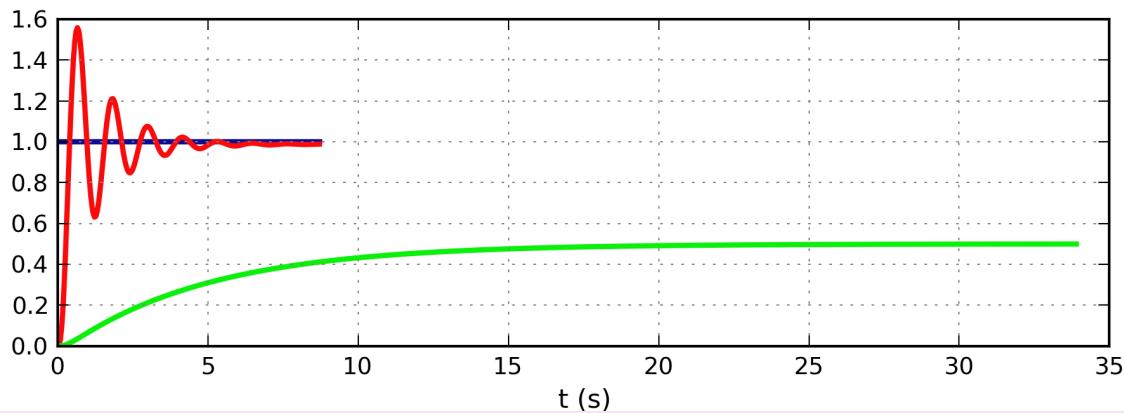
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+35,48} = 0,027$ .
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 12 \text{ dB}$ .



**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

#### Correction

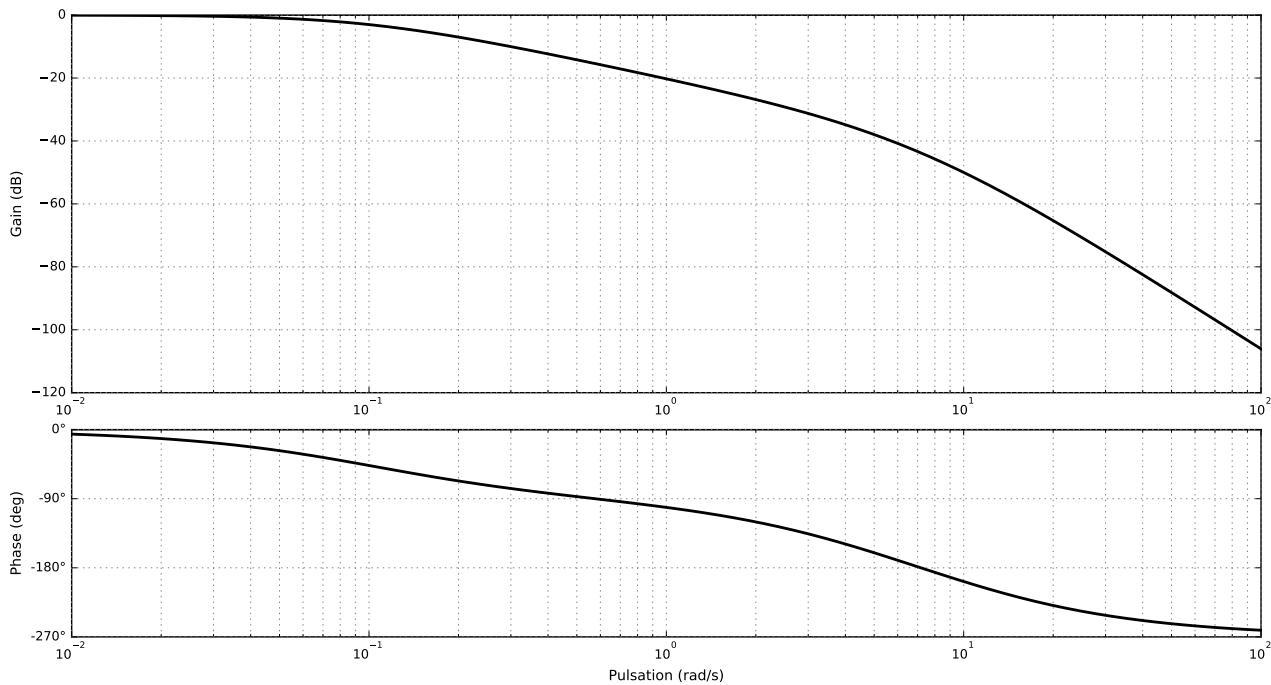
- On commence par résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 44 \text{ dB}$ .
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit  $20 \log K_P = 38 \Rightarrow K_P = 10^{38/20} = 79$ .
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+79} = 0,0125$ .
- La marge de phase est alors de  $19^\circ$ .



#### Correcteur à avance de phase

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme  $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ .

**Question 1** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .



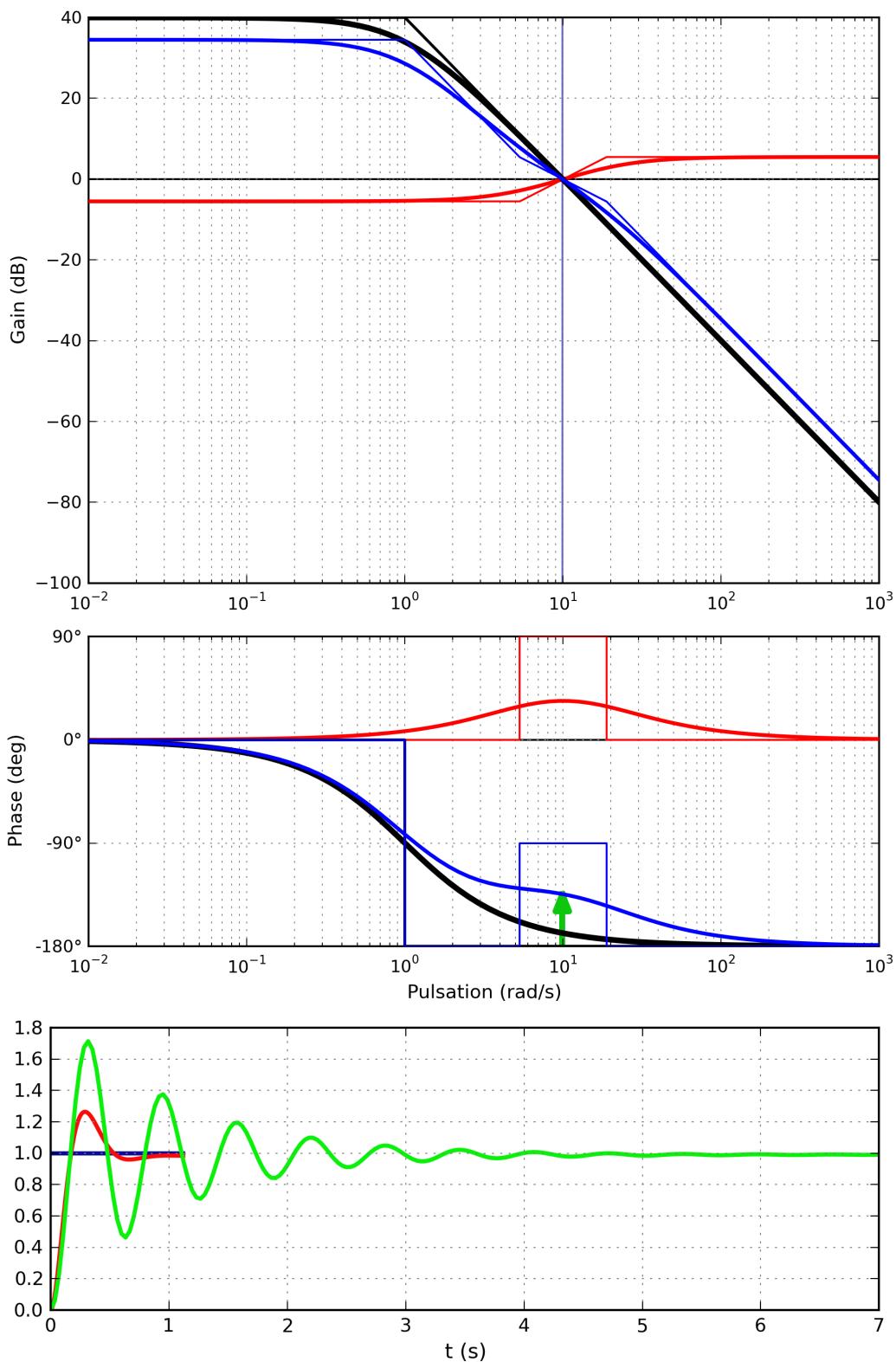
**Question 2** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

### Correction

- $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(100) - 20 \log(1 + \omega^2)$ .  $G_{\text{dB}}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + \omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99} \Rightarrow \omega = 9,95 \text{ rad/s}$ .
- $\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$  et  $\varphi(9,95) = -2,94 \text{ rad} = -169^\circ$  soit une marge de phase de  $11^\circ$ ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de  $34^\circ$ .
- $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\max}) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = -\frac{\sin(\varphi_{\max})+1}{\sin(\varphi_{\max})-1} = 3,54$ .
- $\tau = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s}$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.



## Application 1 – Corrigé

### Réglage de correcteurs P

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCPM MP 2010.

#### Savoirs et compétences :

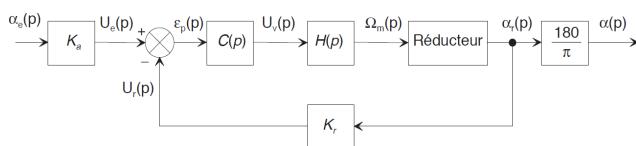
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$  ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$  ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

#### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105 \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

#### Correction

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

#### Correction

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $\tau'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

#### Correction

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

#### Correction

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

#### Correction

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

#### Correction

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105 \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105 \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

#### Correction

**Question 8** La valeur de  $K_{BO}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

#### Correction

1.  $R(p) = \frac{1}{Np}$ .
2.  $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$ .
3.  $T(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau'_m p)}$  avec  $K_{BO} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$ .
4.  $K_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$ .
5.  $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_m K_r}$ .
6.  $\epsilon_S = 0$ .
7.  $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$ .
8.  $\epsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{BO}}$ .

## TD 1 – Corrigé

## Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée \*

Concours CCP – PSI 2018

## Savoirs et compétences :

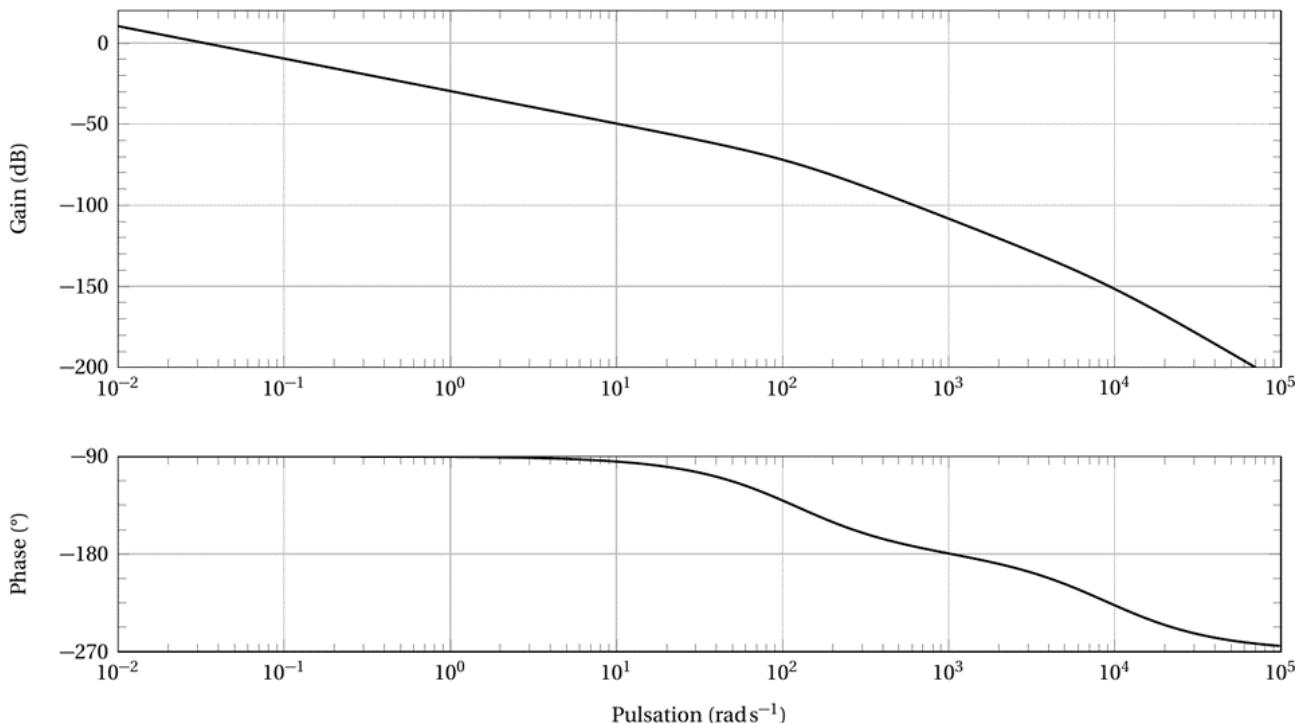
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation du prototype de canne robotisée étudié

## Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

## Modèle comportemental

**Question 1** À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit  $H_{BO\_1}(p)$  cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient  $T_1$  et  $T_2$ , telles que  $T_1 < T_2$ , les constantes de temps introduites et  $K_{BO}$  le gain de  $H_{BO\_1}(p)$ , préciser les valeurs numériques et unités de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_{BO}$ . Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.



**Correction** L'allure des courbes de gain et de phase de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte montre clairement que le comportement est équivalent à celui d'un système du second ordre (avec coefficient d'amortissement  $z > 1$ , car les courbes présentent deux cassures nettes en  $\omega_{c1} = 1/T_1$  et  $\omega_{c2} = 1/T_2$ ) associé à un intégrateur pur (pente de -20 dB/dec quand  $\omega \rightarrow 0$  pour la courbe de gain et asymptote à -90° quand  $\omega \rightarrow 0$  pour la courbe de phase). La forme canonique factorisée peut donc se mettre sous la forme :

$$H_{BO\_1}(p) = K_{BO} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+T_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1+T_2 \cdot p}$$

On relève sur les courbes :

$$\omega_{c1} \approx 10^4 \text{ rad/s, donc } T_1 = 10^{-4} \text{ s} = 0,1 \text{ ms,}$$

$\omega_{c2} \simeq 10^2$  rad/s, donc  $T_2 = 10^{-2}$  s = 10 ms,  
et en remarquant que pour  $\omega = 10^0 = 1$  rad/s,  $G_{BO} = 20 \log(K_{BO}) = -30 dB$ , on obtient  $K_{BO} = 10^{-30/20} \simeq 0,032$  s<sup>-1</sup>.

**Question 2** Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

**Correction** Une cadence de 113 pas par minute correspond à une fréquence de marche de l'ordre de  $\frac{113}{60} \simeq 1,88$  Hz.

**Question 3** Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

**Correction**  $F_{MAX} = 4$  Hz correspond à une sollicitation de pulsation  $\omega_{MAX} = 4 \times 2\pi \simeq 25$  rad/s.

On constate que  $\omega_{MAX} < \omega_{c2} = 100$  rad/s <<  $\omega_{c1} = 10^4$  rad/s.

Pour  $\omega < \omega_{MAX}$ , le système se comporte donc comme un intégrateur pur de gain égal à  $K_{BO}$ . L'approximation de  $H_{BO}(p)$  par  $K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30 \simeq 0,032$  est donc acceptable.

**Question 4** Déterminer l'expression de  $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la ???. Déterminer les paramètres caractéristiques de  $H_{BF}(p)$  et en déduire les performances de cette modélisation pour  $C(p) = K_{corr} = 1$ . Conclure vis-à vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

**Correction** En appliquant la formule de Black, il vient  $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}/p}{1 + K_{corr} \cdot K_{BO}/p}$ , avec  $K_{corr} = 1$ , on obtient :

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BO}}{p + K_{BO}}, \text{ soit sous forme canonique : } H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} \cdot p}.$$

La fonction de transfert est donc celle d'un système du 1er ordre, de gain unitaire  $K_{BF} = 1$  et de constante de temps  $1/K_{BO} = 30$  s.

Les performances de ce système sont donc :

- système stable car système du 1er ordre  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
- système précis car de gain unitaire  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
- système ne présente pas de dépassement car système du 1er ordre  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
- $tr5\% = 3 \times 30 = 90$  s  $\Rightarrow$  cdcf non vérifié car le temps de réponse attendu est de 60 ms.

Le système avec  $K_{corr} = 1$  est donc trop lent.

**Question 5** Déterminer la valeur numérique à donner à  $K_{corr}$  pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

**Correction** Il faut alors augmenter  $K_{corr}$ , tel que  $tr5\% = 3 \times \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \leqslant 60$  ms. Donc  $K_{corr} \geqslant \frac{3}{60 \cdot 10^{-3} \cdot K_{BO}}$ . L'application numérique donne  $K_{corr} \geqslant 1500$ .

**Question 6** L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

**Correction** L'allure de la réponse ne correspond pas à celle d'un système du 1er ordre car un dépassement est observé. Avec  $K_{corr} = 1500$ , le système en boucle ouverte ne peut plus être modélisé par un intégrateur pur de gain  $K_{BO}$ , en effet cette valeur élevée de  $K_{corr}$  fait monter la courbe de gain, le système a une bande passante plus élevée et l'action du terme  $\frac{1}{1+T_2 \cdot p}$  ne peut plus être négligée. Le comportement du système doit donc être modélisé par celui d'un système du second ordre pour se rapprocher du comportement observé.

**Question 7** Quelle valeur maximale de  $K_{corr}$ , notée  $K_{corr}^{MAX}$ , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

**Correction** Le critère de précision est satisfait du fait de la présence du terme intégrateur en  $\frac{1}{p}$  dans la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Pour assurer un 1er dépassement  $D1\% \leq 5\%$ , il faut que le système du second ordre ait un coefficient d'amortis-

segment  $z$ , tel que  $z \geq 0,7$ . On détermine l'expression de  $H_{BF}(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée, afin d'identifier  $z$ .

D'après la formule de Black,  $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot H_{BO}(p)}{1 + K_{corr} \cdot H_{BO}(p)} = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO} + p(1 + \tau_{BO} \cdot p)}$ .

La forme canonique de  $H_{BF}(p)$  est donc :  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p + \frac{\tau_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p^2}$

Par identification,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}$  et  $z = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}}$ , donc,  $z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau_{BO} \cdot K_{corr} \cdot K_{BO}}}$ . La condition  $z \geq 0,7$  implique donc  $K_{corr} \leq \frac{1}{(2 \times 0,7)^2 \cdot \tau_{BO} \cdot K_{BO}}$ . L'application numérique donne  $K_{corr} \leq 1700$ . On prend donc  $K_{corr}^{MAX} = 1700$ .

**Question 8** Déterminer la valeur du temps de réponse à 5%,  $t_{r5\%}$  de ce modèle pour  $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$  à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.

**Correction** D'après l'abaque du temps de réponse réduit donné en ??, pour  $z = 0,7$  on relève  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ . Or

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}, \text{ donc } t_{r5\%} = 3 \cdot \sqrt{\frac{\tau_{BO}}{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}}$$

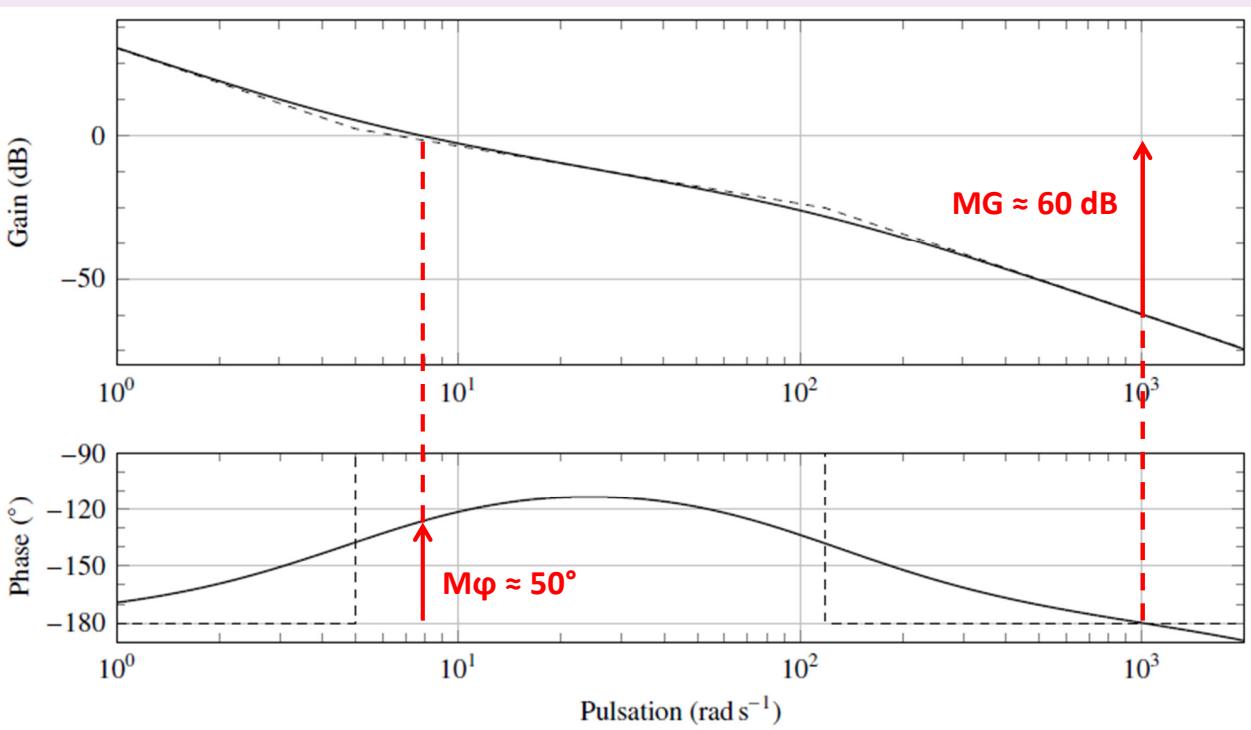
L'application numérique donne :  $t_{r5\%} \approx 38 \text{ ms} < 60 \text{ ms} \Rightarrow \text{cdcf vérifié!}$

**Question 9** Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

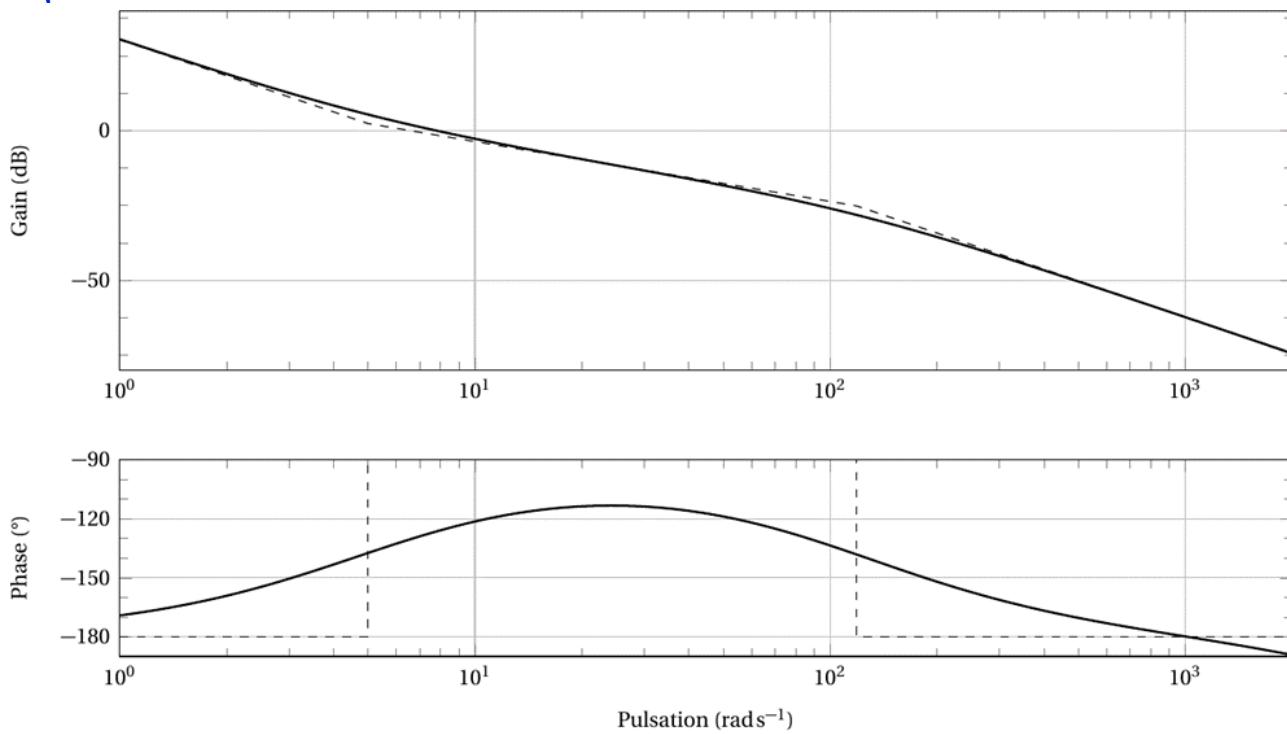
**Correction** Les performances de stabilité, rapidité et de 1er dépassement sont vérifiées. Cependant, le système avec correction proportionnelle n'arrive pas à atténuer suffisamment la perturbation (l'erreur est de l'ordre de 15 à 20% bien supérieure au 5% du cahier des charges). Un autre type de correction doit donc être envisagé pour satisfaire l'ensemble des critères.

**Question 10** Représenter sur le document réponse les marges de Gain  $M_G$  et de Phase  $M_\varphi$  du système corrigé.

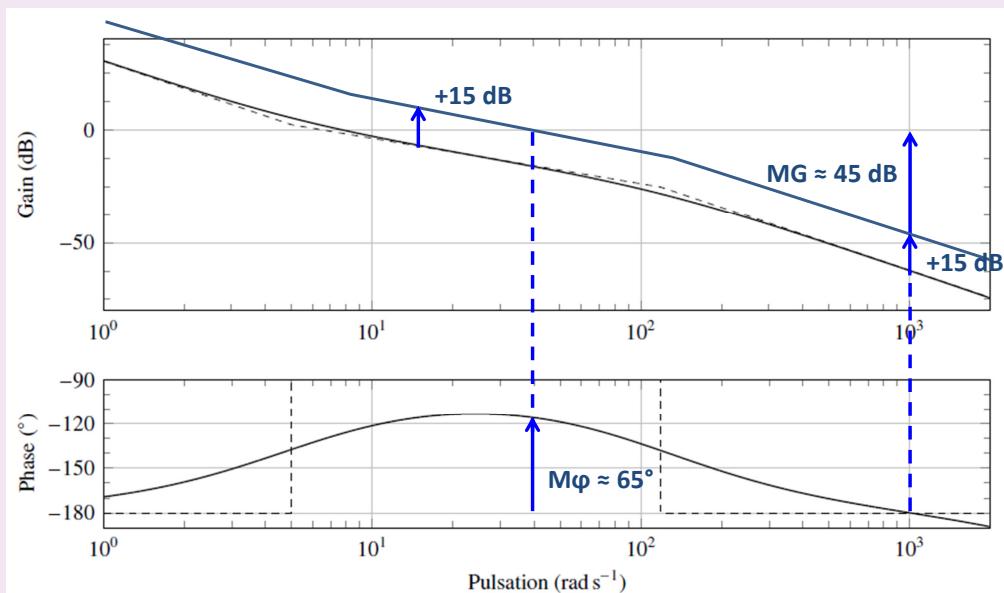
**Correction** D'après la figure ci-dessous, on relève une marge de Gain  $M_G \approx 60 \text{ dB}$  et une marge de Phase  $M_\varphi \approx 50^\circ$ . Avec ces valeurs le cahier des charges ( $M_G = 45 \text{ dB}$  et  $M_\varphi = 35^\circ$ ) est vérifié.



**Question 11** En déduire la valeur maximale à donner au gain  $K_{corr}$ , en conservant  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.



**Correction** La modification de la valeur du gain  $K_{\text{corr}}$  n'affecte que la courbe de gain. L'augmentation de  $K_{\text{corr}}$  va faire remonter la courbe de gain du système en boucle ouverte. Graphiquement, on observe que c'est le critère sur la marge de Gain qui limite la remonté de la courbe de gain (voir figure ci-dessous). La courbe de gain peut donc être remontée de +15 dB, on relève alors une marge de Gain  $M_G \approx 45$  dB et une marge de Phase  $M_\phi \approx 65^\circ$ . Initialement on avait  $K_{\text{corr}}^{\text{init}} = 1000$ , pour remonter la courbe de gain de +15 dB, il faudra prendre  $K_{\text{corr}}^{\text{new}}$  tel que :  $20 \times \log(K_{\text{corr}}^{\text{new}}) = 20 \times \log(K_{\text{corr}}^{\text{init}}) + 15$   
 $\Leftrightarrow K_{\text{corr}}^{\text{new}} = K_{\text{corr}}^{\text{init}} \times 10^{15/20}$   
 L'application numérique donne  $K_{\text{corr}}^{\text{new}} \approx 5620$ .



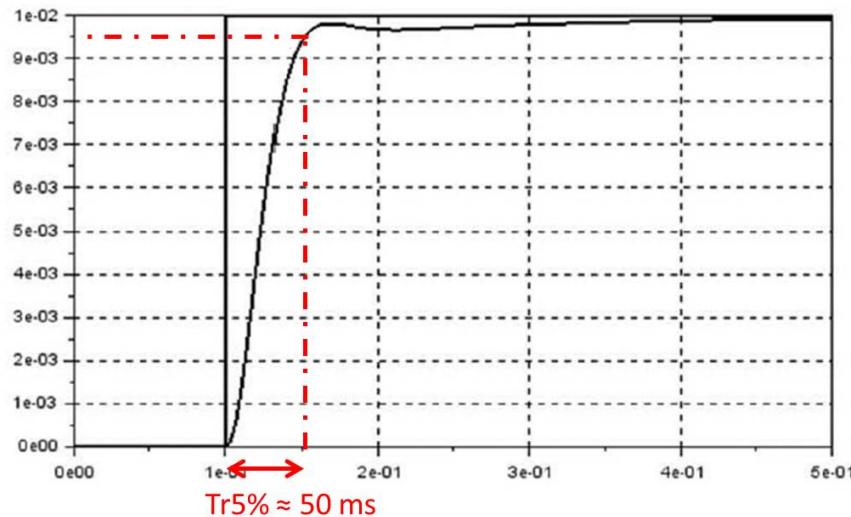
**Question 12** Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

**Correction** Avec cette correction la réponse temporelle respecte l'ensemble des critères du cahier des charges :

- le système est stable et  $M_G \simeq 45 \text{ dB}$  et  $M_\phi \simeq 65^\circ \Rightarrow \text{cdcf vérifié};$
- le système est précis  $\Rightarrow \text{cdcf vérifié};$
- système ne présente pas de dépassement  $\Rightarrow \text{cdcf vérifié};$
- $\text{tr}5\% \simeq 50 \text{ ms} \Rightarrow \text{cdcf vérifié} (< 60 \text{ ms}).$

Par contre, on relève un courant  $I_{mot}^{\text{MAX}} \simeq 35 \text{ A}$ . Or la carte ELMO ne supporte qu'un courant maximal de 20 A. Le contrôleur ELMO ne permet donc pas de réaliser cette commande.

### (a) Réponse temporelle



## Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

**Question 13** Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

**Correction** Le cahier des charges (performance Id 7) impose un écart de hauteur de main de 3 cm pour un cycle de marche. Sans correction, l'écart peut atteindre jusqu'à 4,5 cm, avec correction l'écart est limité à 2,5 cm maxi ce qui vérifie le cdcf.

Avec correction les variations de hauteur de la main sont donc moins importantes au commencement de la phase d'appui. Ceci apporte un confort dans l'utilisation avec le sentiment d'avoir une canne plus rigide (moins d'affaissement) lors de l'appui.

**Question 14** Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

**Correction** Le cahier des charges stipule comme performance à atteindre pour l'assistance de la marche (cadre Id 7) :

- un écart maximal sur l'angle d'orientation entre la canne et la jambe de  $20^\circ$ ;
- le respect de l'exigence de suivi du pied, l'appui au sol de la canne doit se situer entre l'avant et l'arrière du pied de la jambe invalide.

Pour les deux allures de marche, l'exigence de suivi de pied est respectée car la courbe de position de la canne reste comprise entre les courbes de position de l'avant du pied et de l'arrière du pied (c'est à la limite de l'avant du pied pour le cas de la marche rapide).

Pour ce qui concerne l'exigence sur l'angle d'orientation, pour les deux allures l'exigence est respectée car les écarts restent inférieurs à  $20^\circ$ . Mise à part la phase d'appui en allure normale, l'orientation de la canne est en retard par rapport à l'orientation de la jambe, et ce retard est d'autant plus important que l'allure de la marche est élevée. On peut donc conclure que ce réglage des paramètres d'asservissement permet de satisfaire les performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

## TD 2 – Corrigé

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Mise en situation

## Modèle de connaissance de l'asservissement

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Correction** On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_2(p) = \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$ .

De plus  $Jp^2\theta_m(p) = C_m(p) - C_e(p) \Leftrightarrow Jp\Omega_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_e(p)} = \frac{1}{Jp}$ .

$$\text{Enfin, } H_3(p) = \frac{C_e(p)}{\theta_m(p)} = K_{C\theta}.$$

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Correction** D'une part,  $F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}$ .

$$\text{D'autre part, } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}.$$

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

**Correction** Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. Le gain est de  $\frac{1}{2}$  et la pulsation est de  $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J}{2K_{C\theta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$ .

Pour une entrée échelon d'amplitude  $C_0$ , le système répondra par un sinus d'amplitude  $\frac{C_0}{2}$  (valeur crête à crête  $C_0$ ) de pulsation  $\omega_0$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .**Correction**

$$\text{D'une part, } F_1(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'autre part, } H_{\text{BO}}(p) &= \frac{\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+Bp+K_{C\theta}} \\
 &= \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2+\frac{B}{K_{C\theta}}p+1}.
 \end{aligned}$$

Enfin,  $(1+\tau p)^2 = 1+2\tau p+\tau^2 p^2$ . Donc nécessairement  $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$  et  $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}} \Leftrightarrow B = 2\tau K_{C\theta} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Correction** La boucle ouverte est de classe 1. L'erreur statique (entrée échelon) est donc nulle ce qui est conforme à l'exigence 1.2.2.1 du cahier des charges.

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

#### Correction

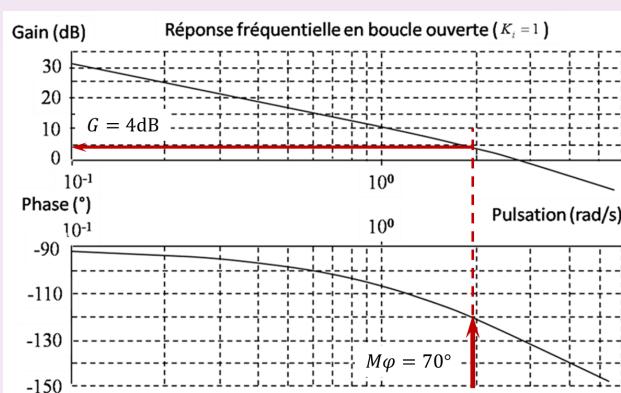
Pour avoir une FTBF d'ordre 2, il faut que la BO soit d'ordre 2. En conséquence, vu la forme de correcteur proposé, on peut envisager que le correcteur compense un pôle du système.

$$\text{Ainsi pour } \tau = T_i, \text{ on a } \frac{C_e(p)}{C_C(p)} = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1+\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i} = \frac{K_i}{\tau^2 p^2 + \tau p + K_i} = \frac{1}{\frac{K_i}{\tau^2} p^2 + \frac{\tau}{K_i} p + 1}.$$

**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.

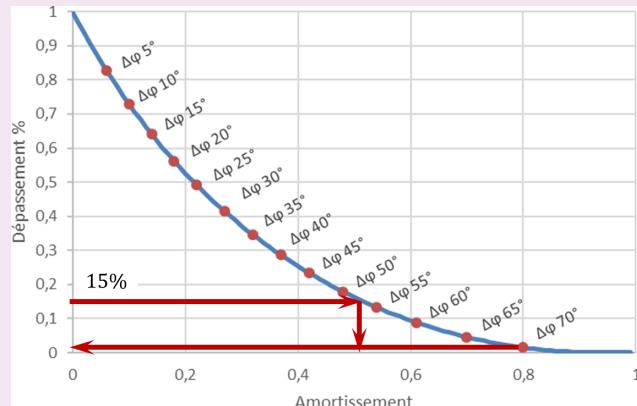
#### Correction

- Marge de gain 10 dB : la boucle ouverte est d'ordre 2. La phase est donc toujours supérieure à  $-180^\circ$  et la marge de gain est infinie. Le critère est respecté.
- Marge de phase supérieure à  $70^\circ$  : il est donc nécessaire que le gain (dB) de la boucle ouverte soit nul lorsque la phase est égale à  $120^\circ$ . D'après la réponse fréquentielle en BO, il faut donc que  $20 \log K_i \leq 4 \Rightarrow K_i \leq 10^{\frac{4}{20}} = 1,58$ .

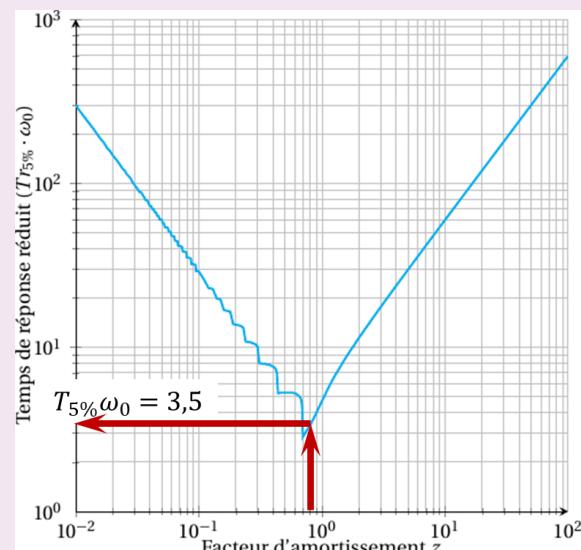
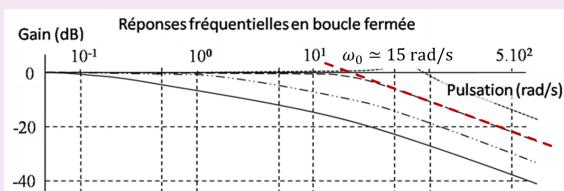


- Dépassement inférieur à 15% : l'abaque ci-dessous montre que pour une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera inférieur à 15%. Ainsi, avec une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera donc d'environ 2% et

le coefficient d'amortissement sera d'environ 0,8.



- Temps de réponse à 5% inférieur à 0,5 s : en utilisant la réponse fréquentielle pour un gain de 0,4 ( $< 1,58$ ) on a  $\omega_0 \approx 15 \text{ rad s}^{-1}$ . En utilisant l'abaque du temps de réponse réduit, on a  $\omega_0 \cdot T_{r5\%} \approx 3,5$ ; donc  $T_{r5\%} \approx \frac{3,5}{15} = 0,23 \text{ s}$ .



- D'après le diagramme de Bode en BF, le gain basse fréquence est nul. Le gain de la fonction de transfert est donc unitaire. L'erreur statique est donc nulle.

On propose donc  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .

## Retour sur le cahier des charges

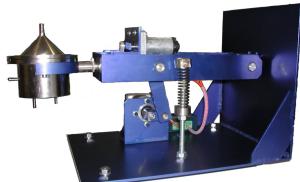
**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

### Correction

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain	10 dB	$\infty$	OK
Marges de phase	$70^\circ$	$70^\circ$	OK
Dépassement	< 15 %	2%	OK
T5 %	< 0,5 s	0,23 s	OK
Erreur statique	Nulle	Nulle	OK

Le cahier des charges est donc respecté. (Réponse indicielle d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement de 0,8 et un gain unitaire).

## TD 3 – Corrigé



## Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

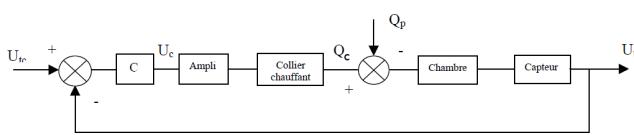
**Objectif** La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- temps de montée en température : 3 min maxi;
- précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- $U_{tc}$  : tension de consigne;
- $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$ .

## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

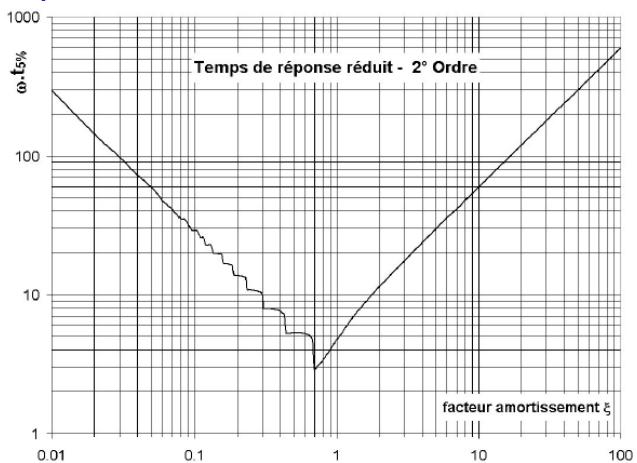
**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.



## O20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{re}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre  $\omega_n$  telle que :  $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement  $\xi$  tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \# 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$  **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

## O21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro)  $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{array} \right.$$

$\varepsilon_p = 0,66$  66 % **Incompatible** avec le cahier des charges.

## O22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition :  $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure  $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$  ;  $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6dB - 10 \cdot \log(1+25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \log(1+10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\arctan(5 \cdot \omega) - \arctan(100 \cdot \omega)$$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	-9	-27	-60
$\varphi$ ( $^\circ$ )	-48	-115	-169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante

### O23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain :  $M_G = \infty$

Marge de phase :  $M_\varphi = 180^\circ$

### O 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler  $K$  afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à  $2,3$  dB, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

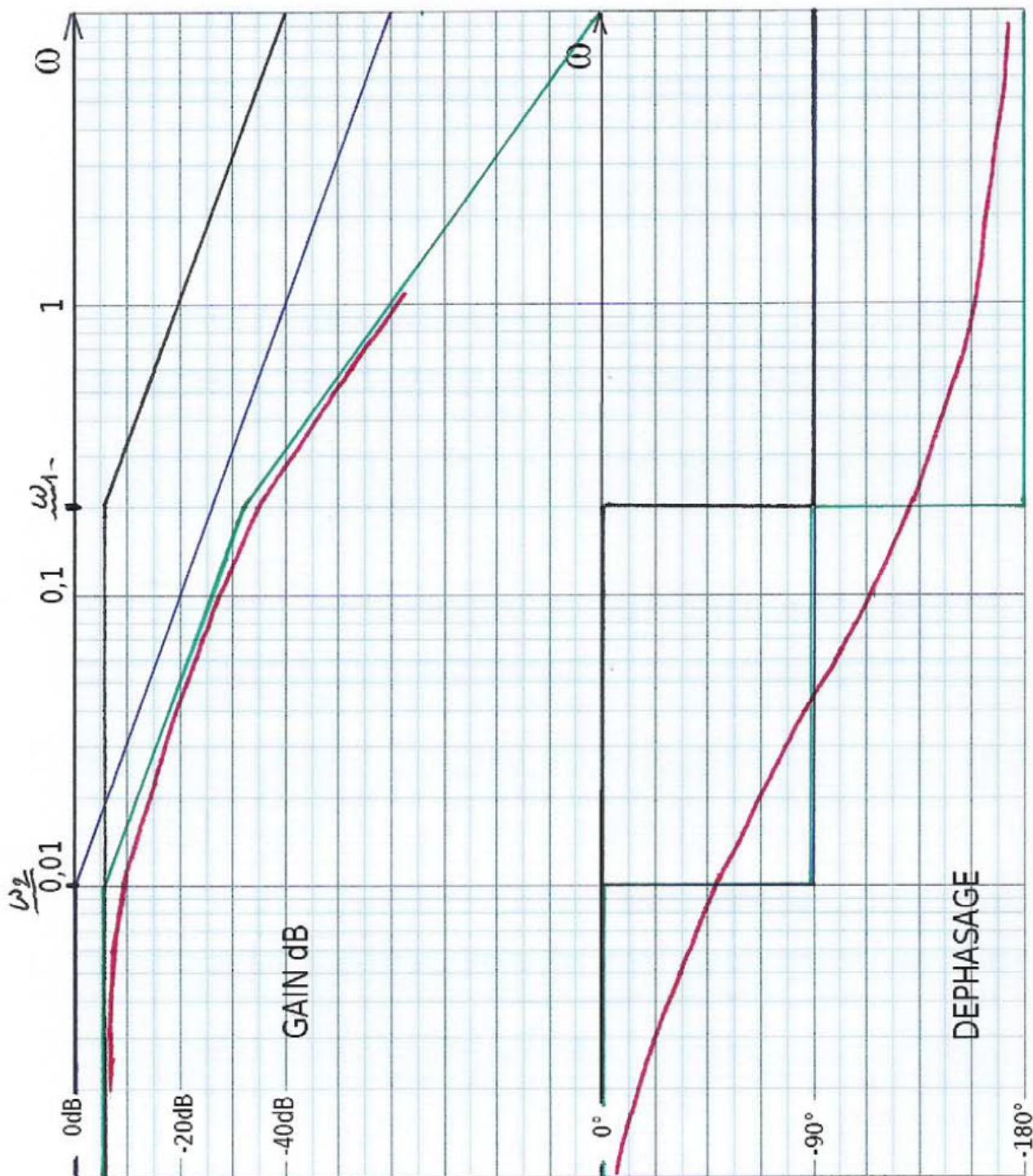
On règle  $K$  de telle sorte que  $\xi \geq 1$  ; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

**Question 22 :** Tracé de Bode



Pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot K}{500}}$

Facteur d'amortissement, il est tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1+0,5 \cdot K}$ ,

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1+0,5 \cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** :  $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$

On choisit **K=9** alors  **$\xi \approx 1$**  la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de 20 Log 9, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

### O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>bo2</sub>)

La marge de gain est inchangée :  **$M_G = \infty$**

On relève :  **$M_\phi = 90^\circ$**

**La stabilité est assurée.**

Pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow t_{5\%} = 50 \text{ s}$  **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

Fonction de transfert de classe 0 (zéro)  $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1+G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

**$\varepsilon_p = 0,55 \quad 55\%$**  **Incompatible** avec le cahier des charges.

### O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U<sub>tc</sub> est de 5 V

A 17° C correspond  $U_c = 0 \text{ V}$ , donc  $U_t = 0 \text{ V}$ .

Si  $U_{tc} = 5 \text{ V} \Rightarrow U_c = 45 \text{ V}$ . ( $U_c = K \cdot \varepsilon$ )

Alors  **$U_a = 450 \text{ V}$**  Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

## O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait par **compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps  $T_i$  du correcteur égale à la **constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain  $K$  du correcteur afin que la **réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit  $\xi = 1$ ). Le choix de  $T_i$  devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors :  $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors :  $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors :  $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors :  $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit  $\xi = 1$  la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors :  $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours :  $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$  puisque  $\xi = 1$

*Tableau des valeurs de  $K$ ,  $\omega_n$ ,  $t_{5\%}$  en fonction du choix de  $T_i$*

$T_i$	$K$	$\omega_n$	$t_{5\%}$	Commentaires
5 s	$25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$ rd/s	1 000 s	A rejeter
<b>100 s</b>	10	0,1 rd/s	<b>50 s</b>	<b>A RETENIR</b>

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100\omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain :  $G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument :  $\varphi = -90^\circ - \arctan(5\omega)$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
$\varphi$ ( $^\circ$ )	- 93	- 117 $^\circ$	- 135	- 169

### Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O., le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations  $\varphi = -90^\circ$  et  $\varphi = -180^\circ$ .

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>bo3</sub>)

La marge de gain est inchangée :  $M_G = \infty$

On relève :  $M_\varphi \approx 77^\circ$

**La stabilité est assurée.**

### O 28 – Nouvel écart de position

Le système est de classe 1  $\Rightarrow \varepsilon_p = 0$

## TD 4 – Corrigé



### Machine de rééducation SysReeduc

CCP PSI 2013

#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Mise en situation

##### Éléments de modélisation

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

#### Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + R I(p)$  et  $C_{M1}(p) = k_t I(p)$  donc  $K_2 = \frac{k_t}{R}$  ;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$  et donc  $K_7 = k_e$  ;
- $(M + m) r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m) r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$  et donc  $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M + m) r^2 \rho_1^2 p}$  ;
- $H_4(p)$  permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et  $H_4(p) = \frac{1}{p}$  ;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit  $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$  ;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement  $K_5 = \rho_1$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres) ;
- enfin,  $K_1$  convertit des mètres en incrément.  $X_c$  est la consigne que doit respectée  $X$ . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc  $\varepsilon = 0$  et  $X = X_c$  soit  $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$ . Au final,  $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système  $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$  et  $K_8$ .

#### Correction

On montre  $A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$  et  $D = \frac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}$ .

#### Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes A, B, D et  $K_c$ .

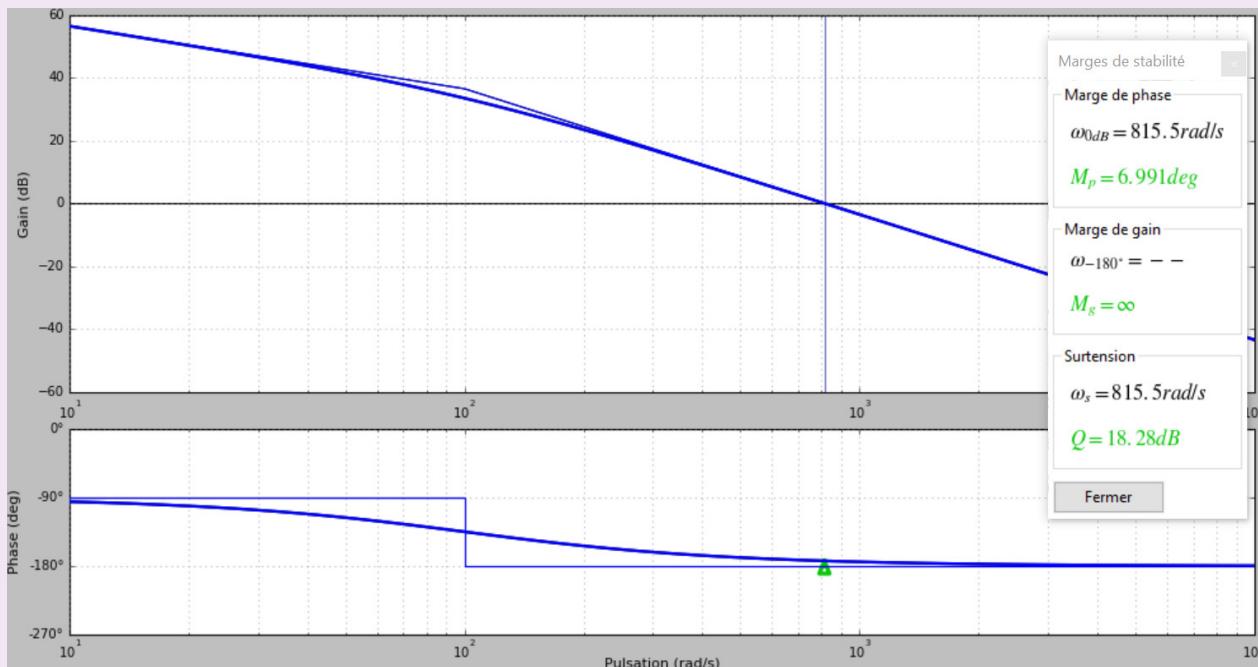
#### Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \varepsilon_x(p) &= X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left( (C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( 1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( \frac{p(Bp+1)+AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)+AC(p)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &= \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} F(p)
 \end{aligned}$$

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

#### Correction

$$\text{On a } \text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}.$$



La marge de phase n'est pas respectée.

**Question 5** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

#### Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} F_p \\
 &= \frac{D}{K_C} F_p
 \end{aligned}$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

#### Correction proportionnelle intégrale

$$\text{On suppose maintenant que } C(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_i$ .

**Correction**

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}F(p)$$

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p T_i p (Bp+1)}{p T_i p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} X_0 + \frac{AD T_i p}{T_i p p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système  $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Correction**

$$FTBO(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \left( 1 + \frac{1}{T_ip} \right) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Correction**

On souhaite que pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi(\omega) = -135^\circ$ .

$$\begin{aligned} \arg(FTBO(j\omega)) &= \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1+T_ip) \\ &= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega. \text{ En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \\ &\arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s}. \end{aligned}$$

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

**Correction**

On souhaite que  $|FTBO(j\omega)| = 1$  pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$|FTBO(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2\omega^2+1}} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2+1}}.$$

$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i\omega^2 \sqrt{B^2\omega^2+1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

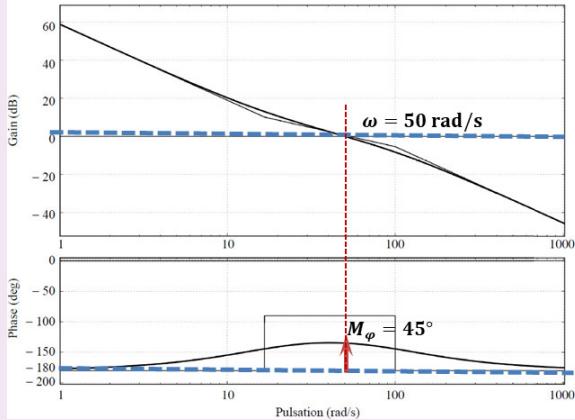
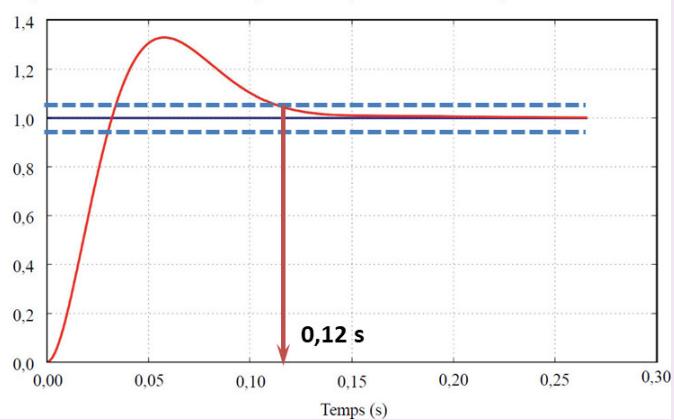
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

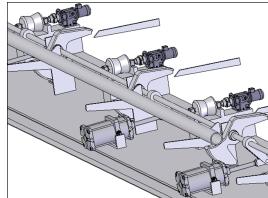
**Correction**

- Ecart de position : nul  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de gain : infine  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de phase :  $\simeq 45^\circ \Rightarrow$  Exigence OK.

Diagramme de Bode de la FTBO :


 Réponse indicielle unitaire sur le déplacement /  $F_p = 0$ . Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.


## TD 5 – Corrigé



## Banc d'épreuve hydraulique

CCP – PSI – 2010

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation

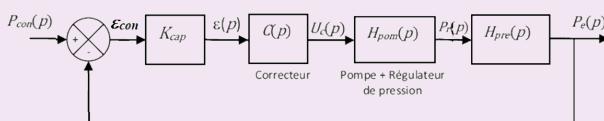
## Mise en place d'un asservissement de pression.

## Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

## Correction



**Question 2** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{con}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{con}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Correction** Dans ce cas, le système est de classe 0. L'erreur statique est donc de  $\varepsilon_{con} = \frac{P_{con}}{1 + K_{cap}K_pK_mK_{pom}}$ .

**Question 3** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{con}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

**Correction** Pour que l'erreur soit inférieure à 5% :  

$$\frac{P_{con}}{1 + K_{cap}K_pK_mK_{pom}} < 0,05P_{con}$$

$$\Leftrightarrow 1 < 0,05(1 + K_{cap}K_pK_mK_{pom})$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,95}{0,05K_{cap}K_mK_{pom}} < K_p. \text{ On a donc } K_p > 19.$$

**Question 4** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$   $\varepsilon_{pert}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

**Correction** Dans ce cas, on a toujours un système dont la BO est de classe 1 et :  $\varepsilon_{pert} = \frac{\Delta Q_e K_f}{1 + K_{cap}K_pK_mK_{pom}}$ .

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{pert}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

**Correction** Pour  $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$  on souhaite  $\varepsilon_{pert} < 40 \text{ bars}$ . En conséquence,  $\frac{\Delta Q_e K_f}{1 + K_{cap}K_pK_mK_{pom}} < 40 \Leftrightarrow \frac{\Delta Q_e K_f - 40}{40K_{cap}K_mK_{pom}} < K_p$ . On a donc  $K_p > 2,19$ .

**Question 6** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement.

**Correction** Pour avoir aucun dépassement, il est nécessaire que, si la FTBF du système est d'ordre 2, on ait  $\xi \geq 1$ . (Si la FTBF est d'ordre 1, il n'y aura pas de dépassement, si la FTBF est d'ordre supérieur à 2 il n'y a pas de résultat connu.)

On a donc, avec un débit de fuite nul,  $\frac{P_e(p)}{P_{con}(p)} = \frac{K_{cap}K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_{cap}K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}} = \frac{K_{cap}K_p K_{pom} K_m}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + K_{cap}K_p K_{pom} K_m} = \frac{K_{cap}K_p K_{pom} K_m}{(T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2 + 1 + K_{cap}K_p K_{pom} K_m}$ .  
 On a alors :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + K_{cap}K_p K_{pom} K_m}{T_1 T_2}}$  et  $\xi = \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2 (1 + K_{cap}K_p K_{pom} K_m)}}$ .

En conséquence,  $\xi > 1 \Leftrightarrow \frac{(T_1 + T_2)^2 - 4 T_1 T_2}{4 T_1 T_2 K_{cap} K_{pom} K_m} > K_p$  et donc  $K_p < 0,125$ .

**Question 7** À partir des résultats des questions pré-

céderentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

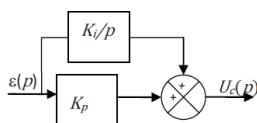
**Correction** On a donc :

- $K_p > 19$ ;
- $K_p > 2,19$ ;
- $K_p < 0,125$ .

Les 3 conditions sont incompatibles. Un autre correcteur doit être envisagé.

### Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :



**Question 8** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Correction** On a  $C(p) = \frac{K_i}{p} + K_p = \frac{K_i + K_p p}{p} = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right)$ .

**Question 9** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

**Correction**

**Question 10** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

**Correction** L'intégrateur va permettre d'annuler l'erreur (du à la consigne et à la perturbation). De plus, suivant le positionnement du correcteur, le déphasage de -90° présent en basse fréquence peut déstabiliser le système.

**Question 11** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_{0dB}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

**Correction** On souhaite que  $t_e < 40s \Leftrightarrow \frac{3}{\omega_{0dB}} < 40 \Leftrightarrow \frac{3}{40} < \omega_{0dB}$  et donc  $\omega_{0dB} > 0,075 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 12** Déterminer alors le rapport  $T = K_p/K_i$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

**Correction** On désire une marge de phase de 60°. Il faut donc que  $\varphi(\omega_{0dB}) = -120^\circ$ . On a  $FTBO(p) = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right) K_{cap} \frac{K_m}{1+T_1 p} \frac{K_{pom}}{1+T_2 p}$ . Et donc :  $\varphi(\omega) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} \omega\right) - \arctan(T_1 \omega) - \arctan(T_2 \omega)$  en  $\omega_{0dB}$  on a :  $\varphi(0,075) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} 0,075\right) - 57 = -147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} 0,075\right)$ . On cherche donc  $\frac{K_p}{K_i}$  tel que  $-147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} 0,075\right) = -120 \Rightarrow \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} 0,075\right) = 27 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i} 0,075 = 0,51 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i} = 6,79$ . Ainsi pour avoir une marge de phase supérieure à 60°, on doit avoir  $T = \frac{K_p}{K_i} > 6,79$ .

**Question 13** En déduire les valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

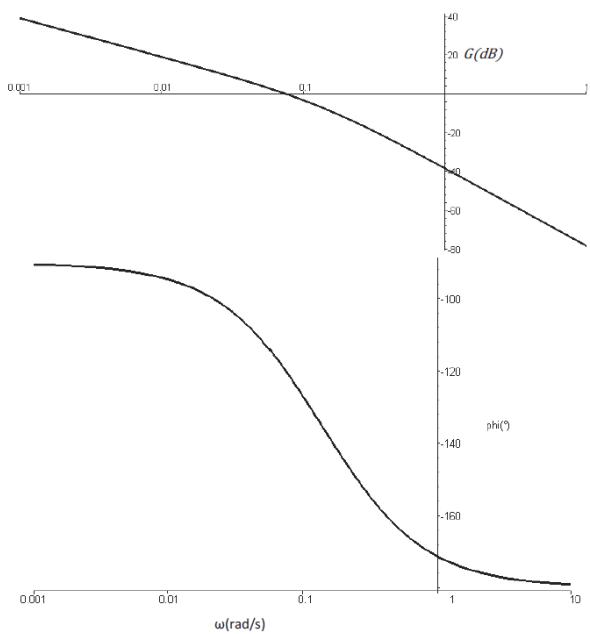
**Correction** On souhaite que le gain soit nul lorsque  $\omega_{0dB} = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } G_{dB}(\omega) &= 20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) + \\ &20 \log K_i + 20 \log(K_{cap} K_{pom} K_m) - 20 \log \omega + \\ &20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) - 20 \log(\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}) - \\ &20 \log(\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}). \end{aligned}$$

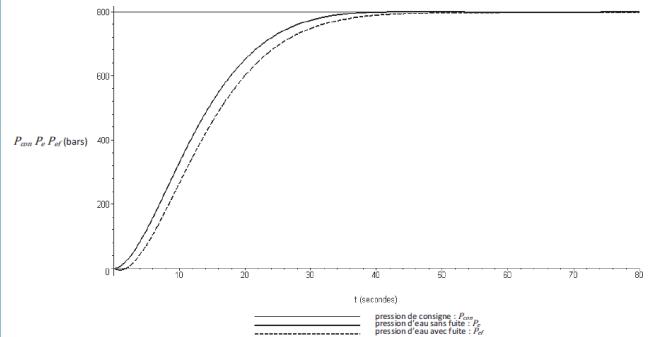
$$G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0 \Rightarrow K_i = 0,089 \text{ et } K_p = 0,615.$$

### Bilan

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.



On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.



**Question 14** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.

**Correction**

## TD 6 – Corrigé

## Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie

Emilien Durif

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

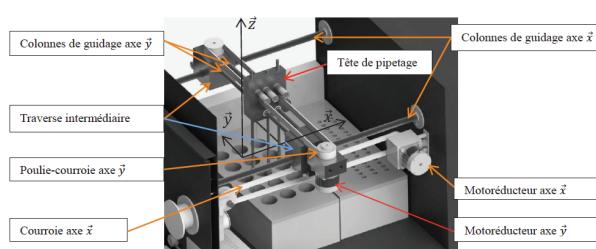
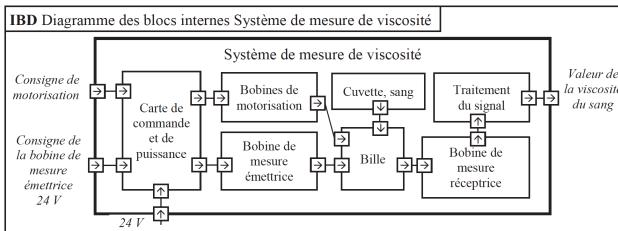
## Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti.

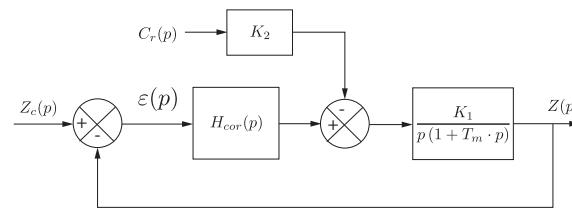
Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.



## Réglage de l'asservissement

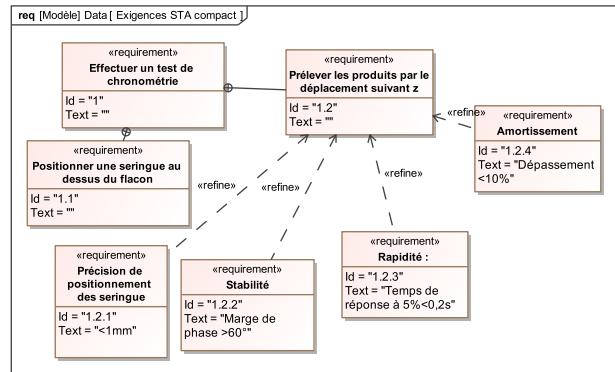
La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ .



On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{cor}(p) = K_p$ .

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.



**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour saisir le critère de précision du cahier des charges.

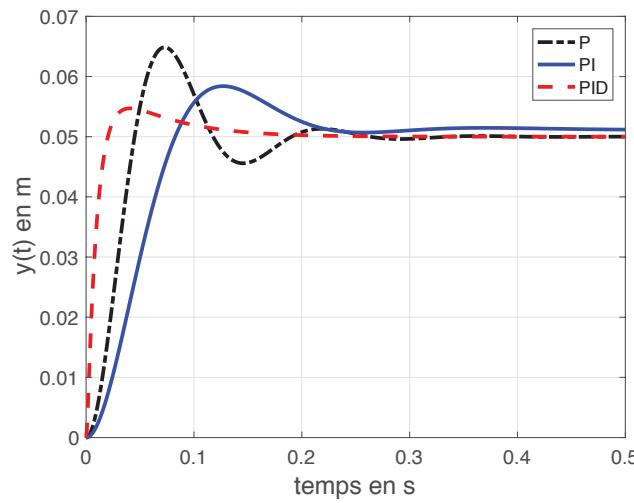
**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i p)}{T_i p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

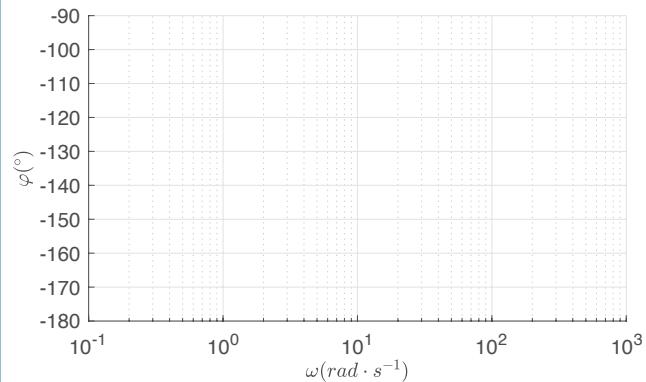
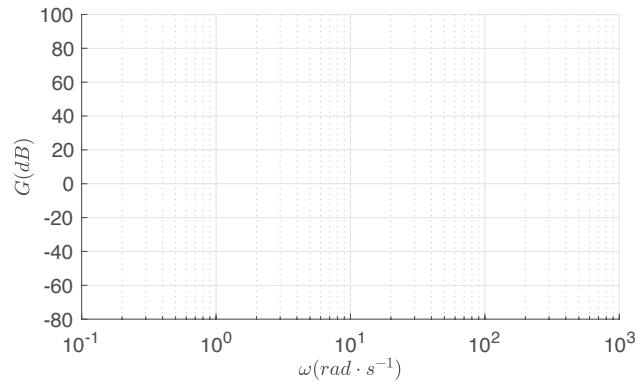
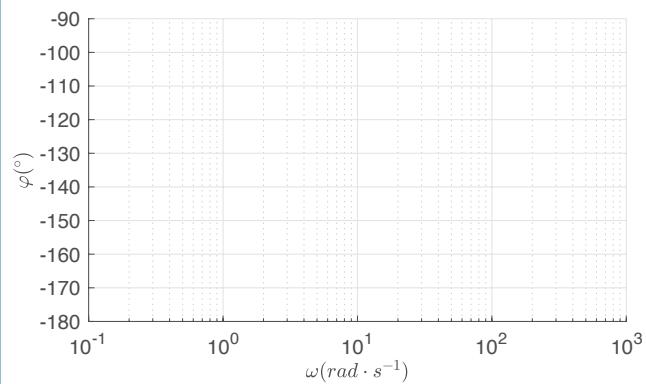
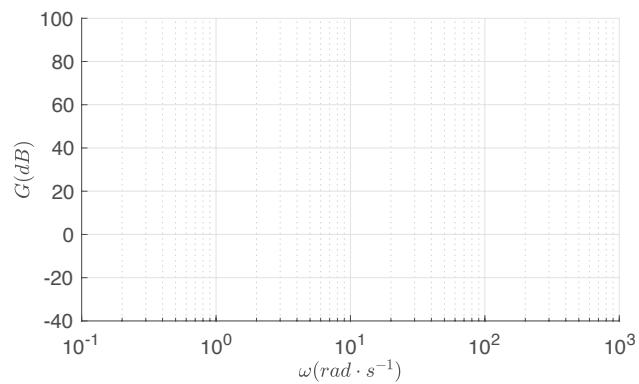
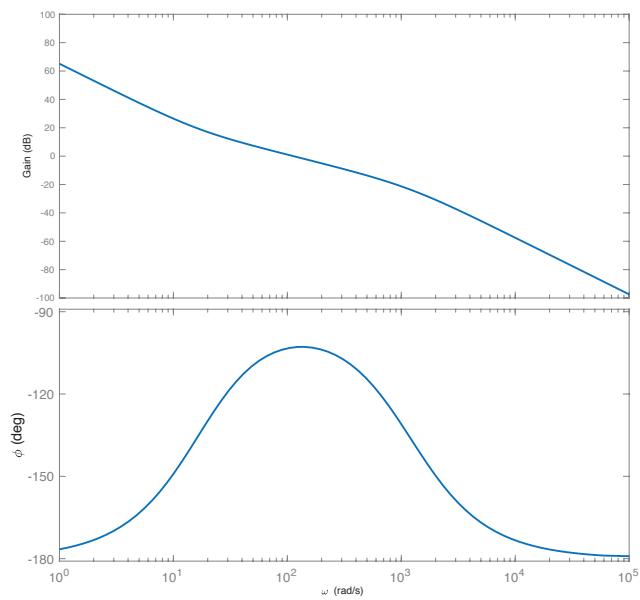
**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.



**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



**Question 8**

$$H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \text{ et } Z(p) = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p \varepsilon(p) - K_2 C_r(p)] = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p (-Z(p)) - K_2 C_r(p)] \\ \Leftrightarrow Z(p)(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}) = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)} C_r(p) \Leftrightarrow H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Zc=0} = \frac{-\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)}}{1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}} = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1} = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}}.$$

**Question 9**

L'erreur statique par rapport à une entrée échelon, la perturbation étant nulle, est égale à 0, car il y a une intégration dans la chaîne directe

Dans le cas d'une perturbation constante égale à  $C_{ro}$ , d'après la question précédente on peut écrire :  $Z(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} C_r(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \frac{C_{ro}}{p}$ .

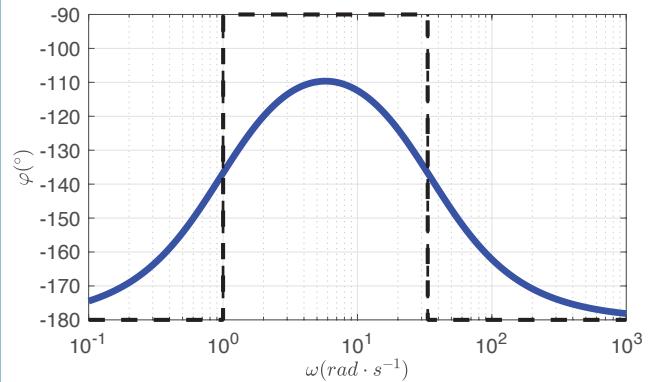
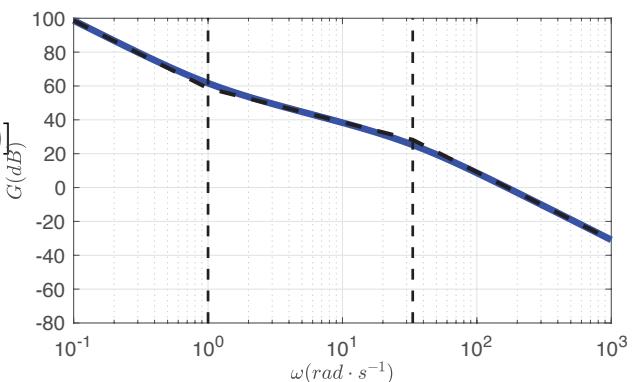
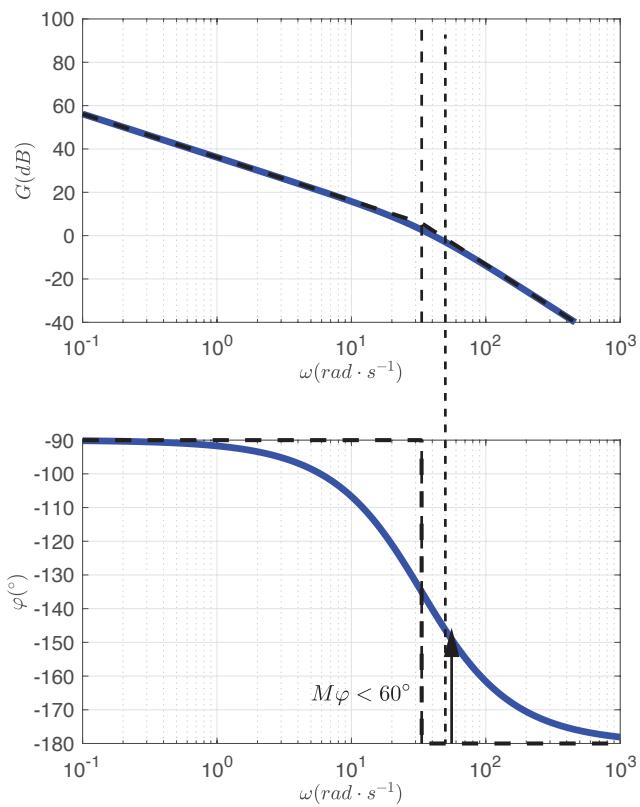
En utilisant la propriété du gain statique, on en déduit  $z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$ , l'erreur vaut donc  $\varepsilon = -z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$ .

Pour répondre à l'exigence de précision, on doit avoir  $\varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 1 \text{ mm}$ .

On en déduit  $\varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 10^{-3} \text{ m}$   
 $\Leftrightarrow K_p > \frac{K_2 C_{ro}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > 0,075$ .

**Question 10**

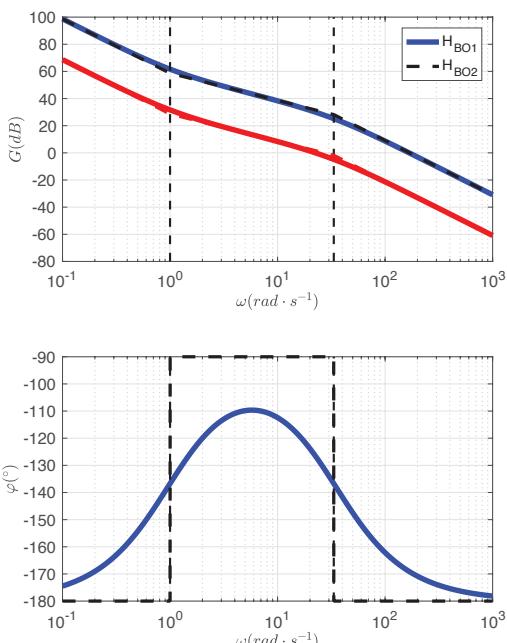
Avec  $K_p = 0,075$ , on obtient une marge de phase de  $35^\circ < 60^\circ$ , le critère de stabilité n'est donc pas vérifié.


**Question 11**

On note qu'en la pulsation donnant une phase à  $-120^\circ$ , le gain en décibel est à peu près égal à  $-30 \text{ dB}$ . On règle donc  $K_p$  tel que :

$$K_p = 10^{-30/20} = 0,032.$$

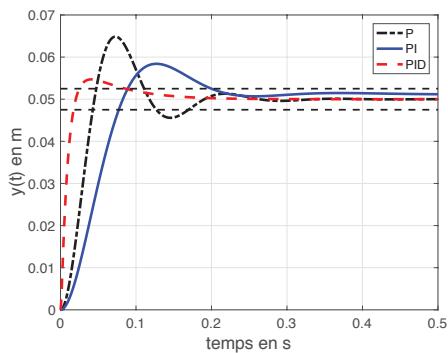
On obtient alors le deuxième tracé.


**Question 12**

- La valeur en régime permanent vaut  $50mm$  pour les trois réponses, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté pour les trois réglages.
- Temps de réponse à 5% et dépassement :

Type de correcteur	P	PI	PID
$t_{r5\%}$	0,17s	0,2s	0,08
Dépassement	29,72%	16,8%	9,4%

- Seul le PID vérifie le critère sur le premier dépassement car  $D_{1\%} = 9,4\% < 10\%$ . Le critère d'amortissement est donc respecté.



### Question 13

On trouve une marge de phase supérieure à  $60^\circ$  et une bande passante à  $0dB$  égale à  $100rad/s$  supérieure aux réglages précédents ce qui donne une réponse plus rapide et plus stable.

## TD 7 – Corrigé



## La robotique au service du handicap

Centrale Supélec – PSI 2010

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation

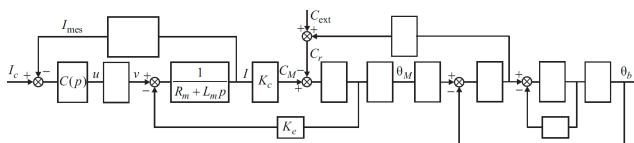
On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

## Objectif

- Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple :  $t \leq 2\text{ ms}$ .
- Erreur statique pour un couple de référence constant  $C_{\text{ref}0}$  :  $|\varepsilon_0| \leq 0,05C_{\text{ref}0}$ .
- Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation  $C_{\text{max}} = 50\text{ Nm}$ .

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :  $C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ . On adopte sans aucune justification que  $T_i = 0,3\text{ ms}$ . Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left( 1 + \frac{2 \times 0,08}{463} p + \frac{p^2}{463^2} \right)}{\left( 1 + \frac{p}{122} \right) \left( 1 + \frac{2 \times 0,09}{464} p + \frac{p^2}{464^2} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^3} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^4} \right)}$$

est donné en fin de document.  $i_{\text{mes}}(t)$  est la mesure du courant du moteur et  $u(t)$  la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

## Syntèse du régulateur PI de la boucle de courant

**Question 1** Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction  $H(p)$ .

## Correction

**Question 2** En adoptant  $K = 1$ , tracer le diagramme de Bode (module et phase) de  $C(p)$  : diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

## Correction

**Question 3** En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation  $\omega_1$  telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à  $-135^\circ$  et la valeur numérique du gain statique.

## Correction

**Question 4** Déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer une marge de phase de  $45^\circ$ .

## Correction

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur  $C(p)$  qui vient d'être déterminé.

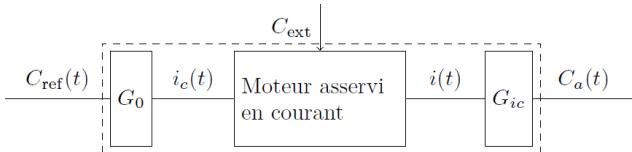
**Question 5** Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

## Correction

**Question 6** Déterminer l'écart statique  $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$  en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne  $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$  d'amplitude  $I_0$  et l'exprimer sous la forme  $\Delta i_0 = k I_0$  en précisant la valeur numérique de  $k$ .

## Correction

La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) :  $i_c$  et  $i$  sont respectivement la consigne et le courant moteur,  $C_{ref}$  est le couple de référence souhaité,  $C_a$  est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et  $G_{ic}$  est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple  $C_a$ . On suppose pour toute cette question que le couple de référence  $C_{ref}(t)$  est constant d'amplitude  $C_{ref} = C_{ref0}$ .



**Question 7** Exprimer  $G_{ic}$  en fonction de  $K_c$  et de  $N$ .

**Correction**

**Question 8** En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle  $\Delta i_0 = 0$ , donner la valeur du gain  $G_0$  permettant d'assurer l'égalité des couples de référence  $C_{ref0}$  et appliqué  $C_a$ .

**Correction**

**Question 9** En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur  $\Delta C = C_{ref} - C_a$  entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est  $\Delta C = k_1 C_{ref0}$ . Déterminer  $k_1$  en fonction de  $k$ .

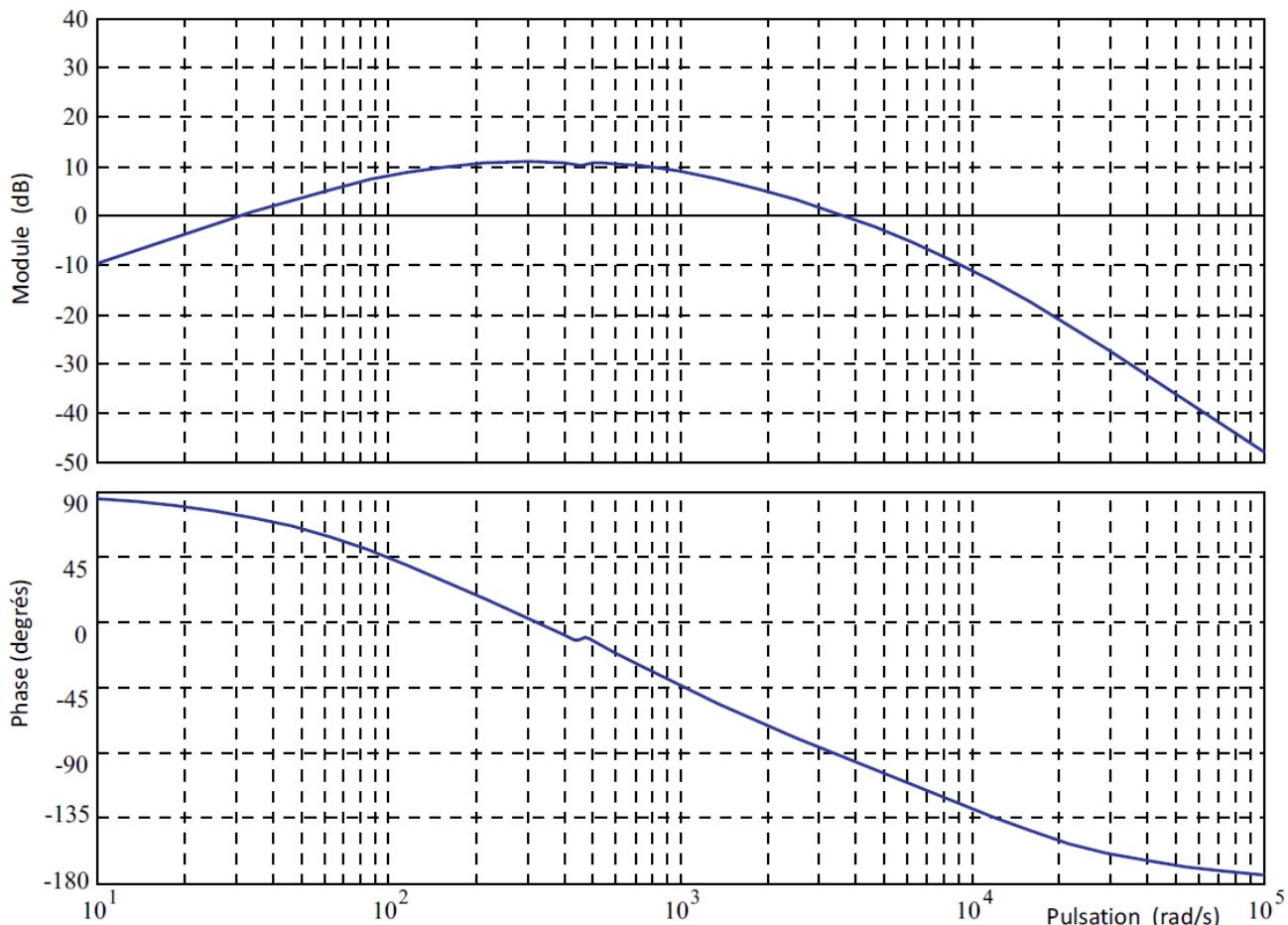
**Correction**

**Question 10** Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

**Correction**

On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative  $\omega_c Tr \simeq 3$ .

1. .
2. .
3.  $\omega_1 = 3300 \text{ rad s}^{-1}$  et gain statique de 1,4.
4.  $K = 0,7$ .
5. Marge de gain infinie, marge de phase positive.
6.  $\Delta i_0 = \frac{1}{1 + K_{bo}} I_0$ .
7.  $G_{ic} = K_c N$ .
8.  $G_0 = \frac{1}{G_{ic}}$ .
9.  $k_1 = k$ .
10. OK.



## TD 8 – Corrigé



## Avance de Phase – Train d'atterrissement d'hélicoptère \*

Banque PT – SIA 2014

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Mise en situation

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

**Correction**

$$\begin{aligned} H_F(p) &= \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}} = \\ &= \frac{\frac{K_Z p^2}{p \left(1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}\right) + \lambda_a K_Z p^2}}{\frac{K_Z p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z\right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}}. \end{aligned}$$

**Question 2** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

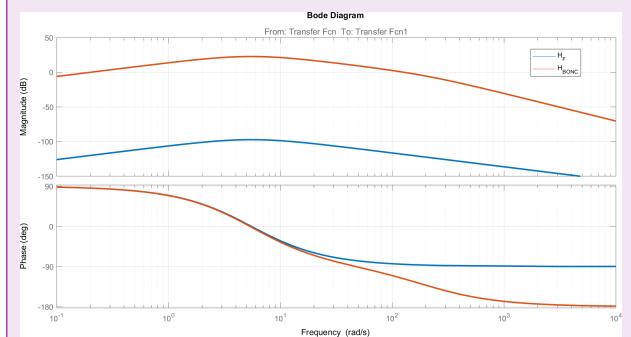
**Correction**  $H_{BONC}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z\right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}$ .

**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver

sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20\log K_S \approx 100 \text{ dB}$ .

**Correction**  $H_F$  est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement  $\xi_F$  et de pulsation propre  $\omega_Z$ . Ne pouvant pas calculer  $\xi_F$ , l'allure du diagramme de Bode suggère que  $\xi_F < 1$  car il y a une seule rupture de pente à  $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour  $\omega < \omega_Z <$  l'asymptote du second ordre à un gain de 0 dB. Seul le déivateur est influent. En conséquence, pour  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a donc  $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20\log K_Z = -106$ . On a donc  $K_Z = 5 \times 10^{-6}$ .



## Choix et réglage de la correction

**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

**Correction** Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés

en début de partie ? Justifier la réponse

**Correction** La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 85°.

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de  $6 \text{ rad s}^{-1}$ , il faut relever le gain de 20 dB soit  $K_p = 10$ . Dans ces conditions, la marge de phase est de  $-15^\circ$  et la marge de gain est  $-2 \text{ dB}$ .

En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Correction** L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

**Correction** Cas 1 : on conserve  $K_p = 10$ . Le correcteur doit ajouter  $60^\circ$  de phase pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc  $\mu = 14$ .

Cas 2 : on reprend  $K_p = 1$ . Dans ce cas, on souhaite que lorsque  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi$  soit égal à  $45^\circ$ . Il faut donc ajouter  $65^\circ$  de phase à cette pulsation. Dans ces conditions,  $\mu = 20$ .

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision

est-il validé ?

**Correction** Dans le cas 1 :  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$ . Le gain  $K_p$  déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à  $\omega_0 \text{ dB}$ .

Il faut donc que  $\frac{1}{2}(20\log(\mu K'_p) + 20\log K'_p) = 0 \Rightarrow \log(\mu K'^2_p) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_p = 1 \Rightarrow K'_p = \sqrt{1/\mu} = 0,267$ .

Dans le cas 2 :  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$ .

Actuellement, le gain est de  $-20 \text{ dB}$  pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc augmenter le gain de  $20 \text{ dB}$  pour la pulsation  $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$ . Ceci revient donc à résoudre  $20\log K_p + \frac{1}{2}(20\log \mu K_p - 20\log K_p) = 20 \Rightarrow \log K_p + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_p \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_p = 10/\sqrt{20} = 2,6$ .

**Remarque :** dans le cas 1 le gain du correcteur est  $K_p \times K'_p = 2,6$ . Dans le cas 2  $K_p = 2,6$ .

## Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

**Correction** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ ms}^{-1}$  l'accélération reste bien inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

## TD 9 – Corrigé



## Quille pendulaire \*

Concours Commun Mines Ponts 2014

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Mise en situation

**Objectif** L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

## Modélisation du vérin

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

**Correction** D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ .  
 En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ .  
 Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ .  
 On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ .  
 Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .

**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

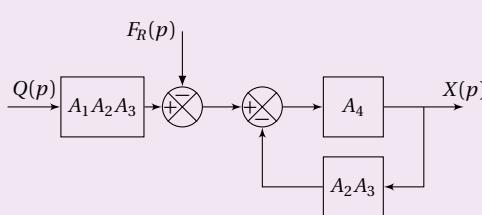
**Correction Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$ .

Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1A_2A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S^2 B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) = \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}.$$

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

**Correction** Dans ce cas,  $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .

### Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{SV}$ ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

**Correction** En début de simulation, il y a une saturation du débit à  $20 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ . La tension de commande en régime saturé étant de 10 V, on a  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$ .

Jusqu'à 1,9 seconde, le retour n'a aucune influence sur la commande. On est donc en BO. Au delà, la régulation entre en jeu. On est donc en BF.

**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

#### Correction

Exigences	Niveau	Simulation	Validation
Stabilité : C11 : Marge de gain C12 : Dépassement vis-à-vis d'une entrée en échelon	10 dB Aucun	– Dépassement faible	– NON
Rapidité : C21 : Temps de réponse à 5 % C22 : Vitesse angulaire de rotation de la quille	4 s maxi 8°/s maxi	≈ 2,5 s ≈ 20 °s <sup>-1</sup>	OUI NON
Précision C3 : Erreur statique vis-à-vis d'une entrée en échelon	Nulle	Difficile à mesurer	–

### Comportement pour une commande de faible amplitude

**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Correction** En BO, on va avoir  $v(0^+) = 5 \cdot K'_C = 5,5 \text{ V}$ .  
 $v(0^+) < 10 \text{ V}$ . On est ici en BO. La tension ne peut donc pas dépasser la tension de saturation.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

**Correction** Pour de telles tension, on est donc en régime **linéaire**.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Correction** On a :  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1+0,12p+0,04p^2)}$ . En conséquences,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$  et  $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$ .

On a donc une asymptote de  $-20 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $-60 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$ .

De plus, pour  $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$ .

**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Correction** On a  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1-2 \times 0,3^2} \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

**Correction** L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) :  $\Delta K = 20 \log \left( \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{2 \times 0,3 \sqrt{1-0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB}$ .

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Correction** On a  $b > 1$  donc  $T < bT$  et  $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$ .

Pour  $\omega < \frac{1}{bT}$  on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour  $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente  $-20 \text{ dB/decade}$  et un déphasage de  $-180^\circ$ .

Pour  $\omega > \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente  $0 \text{ dB/decade}$  et un déphasage de  $0^\circ$ .

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

$$\text{Correction } |C(j\omega^*)|_{dB} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1+b}{1+b} = -10 \log b.$$

**Question 13** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

- calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

**Correction** D'une part, on veut que  $|C(j\omega^*)|_{dB} = -4,8$  soit  $10 \log b = 4,8$  et  $b = 3,02$ . D'autre part,  $\omega^* = \omega_r$  et  $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127 \text{ s}$ .

Par ailleurs, on a donc  $\phi(\omega^*) = \arcsin \left( \frac{1-b}{1+b} \right) = \arcsin \left( \frac{1-3,02}{1+3,02} \right) \simeq -28,79^\circ$ .

## Validation du cahier des charges

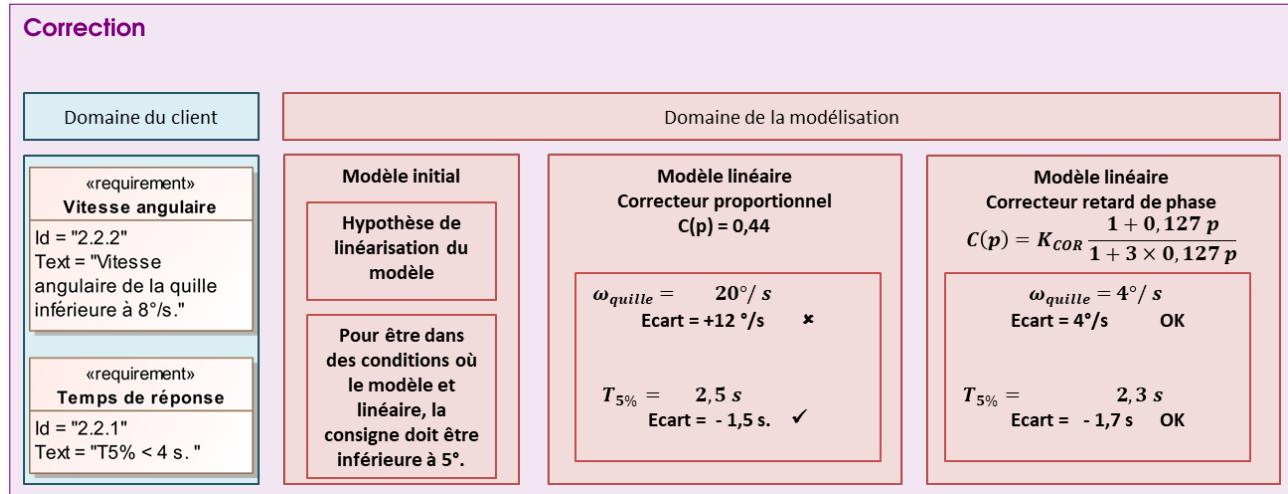
**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Correction** En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement  $2/0,5 \approx 4^\circ/s$ .

$$t_5\% \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s} \quad 4^\circ/s < 8^\circ/s.$$

CDCF validé.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



## TD 10 – Corrigé



### La robotique au service du handicap

Centrale Supélec – PSI 2010

#### Savoirs et compétences :

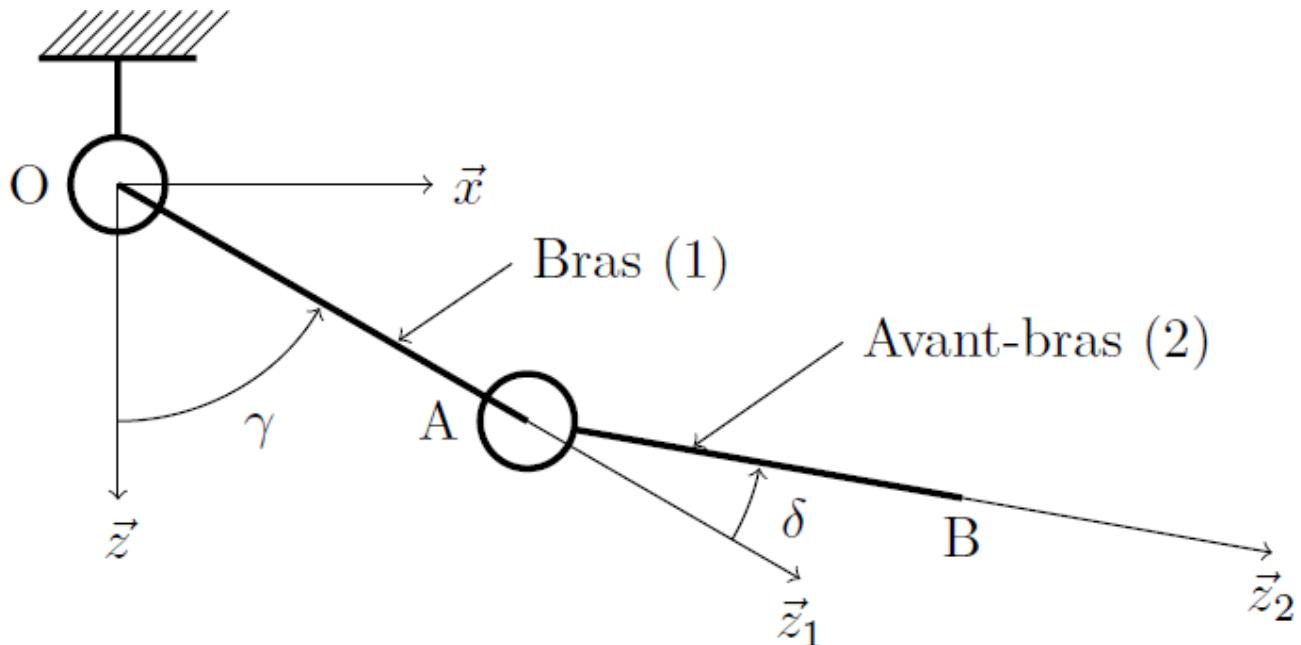
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

**Objectif** L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion. La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Le cahier des charges est rappelé partiellement par les exigences données dans le tableau suivant. Les actionneurs peuvent fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent.

La structure des axes étudiés est donnée dans la figure suivante.

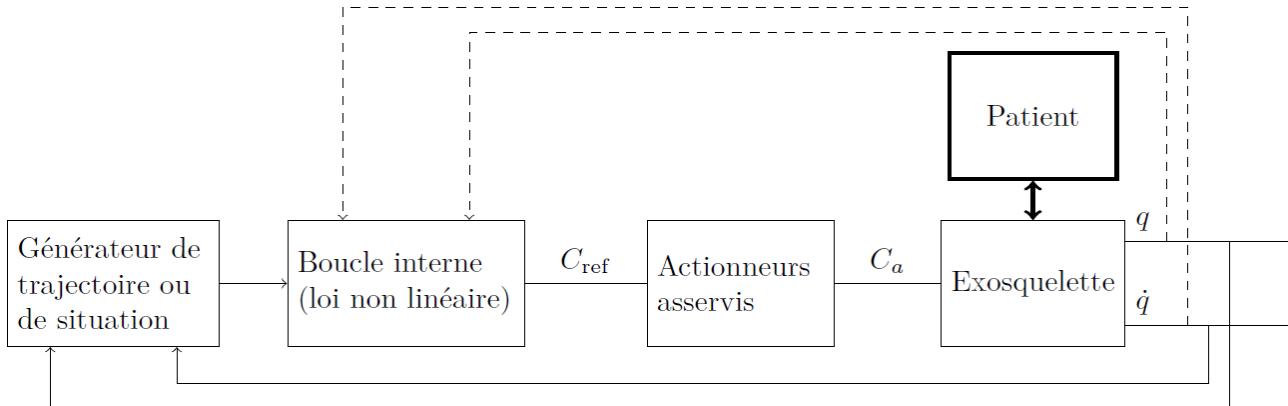


On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras  $\dot{t}(\gamma, \delta)$  et de la variation de force  $Z_F$  exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée)	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations;
- une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{\text{ref}}$ .



## Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

**Objectif** Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

L'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_B$ . L'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps. Les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps.

En utilisant le PFD on peut établir les lois de commandes suivantes pour piloter chacun des deux axes :

$$C_1(t) = (B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\gamma} + (B_2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\delta} + m_2 l_1 (\lambda_2 (2\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \ddot{\delta})^2) \sin \delta) + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin (\gamma + \delta)) - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos (\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 \sin (\gamma + \delta))$$

$$C_2(t) = -l_2 X_F \cos (\gamma + \delta) + l_2 Z_F \sin (\gamma + \delta) + \lambda_2 m_2 g \sin (\gamma + \delta) + \dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta$$

Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie $G_1$ tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1$ , $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_1 = 2,3 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_1 = 2,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie $G_2$ tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$ , $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_2 = 4,3 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**0.0.0.0.2** Montrer que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Z_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A$ ,  $B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement ( $\gamma, \delta$ ) et de leurs dérivées premières ( $\dot{\gamma}, \dot{\delta}$ ).

### Correction

**Question 1** Calculer les couples ( $C_1, C_2$ ) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de

la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

### Correction

**Question 2** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

### Correction

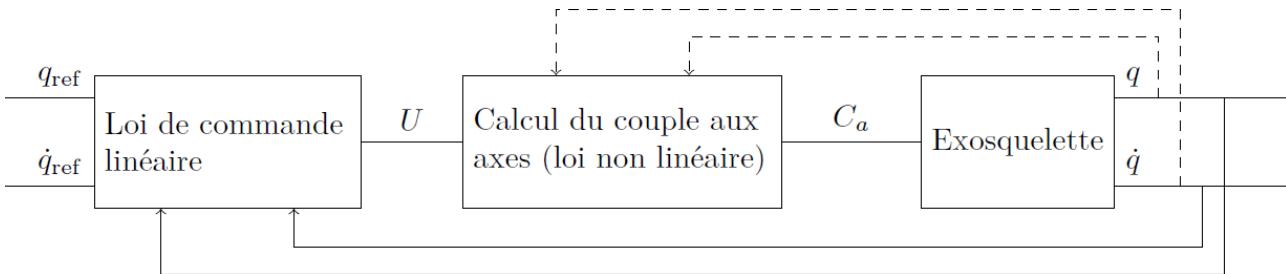
#### Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

**Objectif** L'objectif de cette partie est de déterminer une loi de commande afin que la relation entre les variations des positions  ${}^t(\gamma, \delta)$  du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $Z_F$  exercée par le patient soit celle d'une raideur en torsion de valeurs ( $K_1; K_2$ ) données dans le cahier des charges. La raideur comparativement à la force  $X_F$  ne sera pas à vérifier dans ce cas d'étude.

L'équation dynamique décrivant le comportement de l'exosquelette est de la forme  $A(q, \dot{q})\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + Q(q, \dot{q})F = C_a$  où  $C_a = {}^t(C_1 \quad C_2)$ ,  $q = {}^t(\gamma \quad \delta)$  et  $F = {}^t(X_F \quad Z_F)$ . On note sous forme vectorielle  $q_{ref} = {}^t(\gamma_{ref} \quad \delta_{ref})$  les consignes de positions angulaires. La loi de commande adoptée est organisée selon deux boucles :

- une boucle externe linéaire ;
  - une boucle interne non linéaire qui détermine le couple  $C_a$  par la relation  $C_a = B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + A(q, \dot{q})U$ .
- où  $U = {}^t(U_1 \quad U_2)$  sont les deux nouvelles commandes issues du correcteur linéaire de la boucle externe.

Le principe de cette loi de commande est donné par la structure représentée par le schéma suivant.



**Question 3** Donner au moins un argument, en particulier vis-à-vis du cahier des charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

Pour la synthèse de la loi de commande, il est nécessaire de linéariser le modèle dynamique autour d'un point de fonctionnement défini par les positions articulaires  ${}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$  et les forces  ${}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ . On note autour de ce point de fonctionnement :

- $u = {}^t(u_1 \quad u_2)$  les variations des grandeurs de commande autour de  $U_0 = {}^t(U_{10} \quad U_{20})$ ;
- $q_1 = {}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  les variations des positions angulaires des deux articulations autour de  $q_0 = {}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$ ;
- $f = {}^t(x_F \quad z_F)$  les variations des efforts exercés par le patient autour de  $F_0 = {}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ .

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme  $\ddot{q} = U + N(q, \dot{q}, F)$ , où  $N(q, \dot{q}, F) = M(q, \dot{q})F$ .

**Question 4** Préciser l'expression de la matrice  $M$  en fonction de  $A$  et de  $Q$ .

### Correction

**Question 5** Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme  $\ddot{q}_1 = \tilde{A}q_1 + \tilde{B}\dot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f$  où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

### Correction

Indication : la démarche de linéarisation fait intervenir  $\frac{\partial N}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial N}{\partial F}$ ; l'expression explicite du modèle linéarisé en fonction de  $M$  n'est pas demandée.

On admet pour la suite que le modèle linéarisé, décrivant les variations des positions  ${}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  du bras, autour du point de fonctionnement  $q_0 = {}^t(0, 60, 7)$  rad et  $F_0 = {}^t(0 \quad -5)$  N, est représenté par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1 \\ \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18,4 & -33 \\ 4 & -56,5 \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,9 \\ -45,4 \end{pmatrix} z_F.$$

On note  $q_{1\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}} \quad \delta_{\text{ref}})$  les variations de consignes de position. L'objectif des questions suivantes est la synthèse d'une loi de commande linéaire en vue d'assurer la raideur souhaitée entre les variations des positions  ${}^t(\gamma_1, \delta_1)$  des deux articulations et la variation de l'effort  $z_F$  exercé par le patient. L'adaptation de la loi de commande au point de fonctionnement ne fait pas partie du cadre de cette étude.

**Question 6** En justifiant la réponse, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

### Correction

**Question 7** En utilisant un raisonnement qualitatif (sans calcul), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :  $\frac{U_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right)$  et  $\frac{U_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p}\right)$  où  $\varepsilon_1(p) = \gamma_{1\text{ref}} - \gamma_1$  et  $\varepsilon_2(p) = \delta_{1\text{ref}} - \delta_1$  sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions  $\gamma_1$  et  $\delta_1$ , du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $z_F$  exercée par le patient.

### Correction

Pour la suite, on adopte la loi de commande  $u(t) = K_p (q_{1\text{ref}} - q_1) + K_v (\dot{q}_{1\text{ref}} - \dot{q}_1)$  avec :

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_v = \begin{pmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v22} \end{pmatrix}.$$

Par souci de simplicité, on pourra utiliser  $q_{1\text{ref}} = 0$  et  $\dot{q}_{1\text{ref}} = 0$ .

**Question 8** Déterminer les coefficients des matrices  $K_p$  et  $K_v$  afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :  $\frac{\gamma_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_1} p + \frac{p^2}{\omega_1^2}}$  et  $\frac{\delta_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_2} p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$  permettant d'obtenir les valeurs des raideurs souhaitées et caractérisées par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,7$ . Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

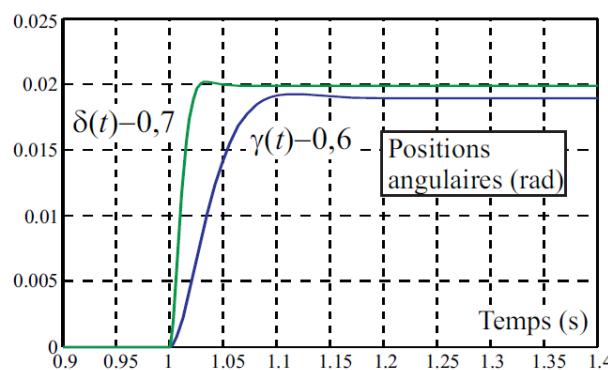
### Correction

Les figures suivantes montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

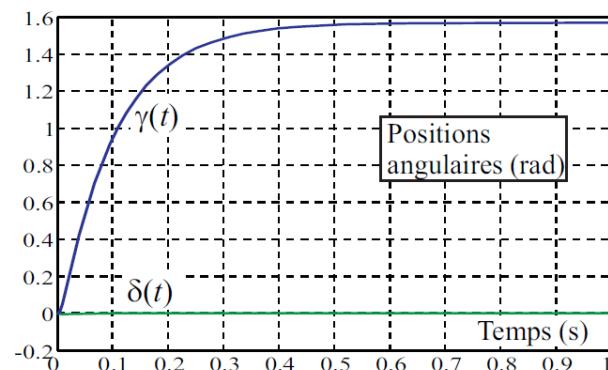
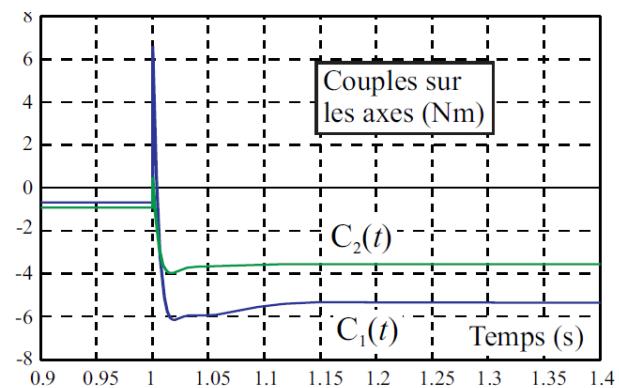
- pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question précédente, la première figure suivante montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement  ${}^t(0, 6 \quad 0, 7)$  rad) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à  $t_0 = 1$  s de la force  $z_F = \Delta Z_F = -1$  N ;
- la seconde figure montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants,  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N en partant de conditions initiales nulles.

**Question 9** Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.

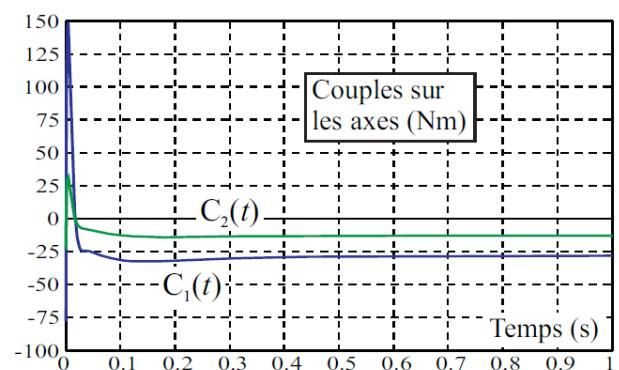
### Correction



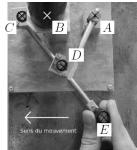
Réponses temporelles (angles des articulations et couples sur les axes) pour une variation de force  $z_F = -1$  N



Ralliemment à une position de référence  
avec des efforts constants  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N



## TD 11 – Corrigé



### Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

CCP – PSI 2015

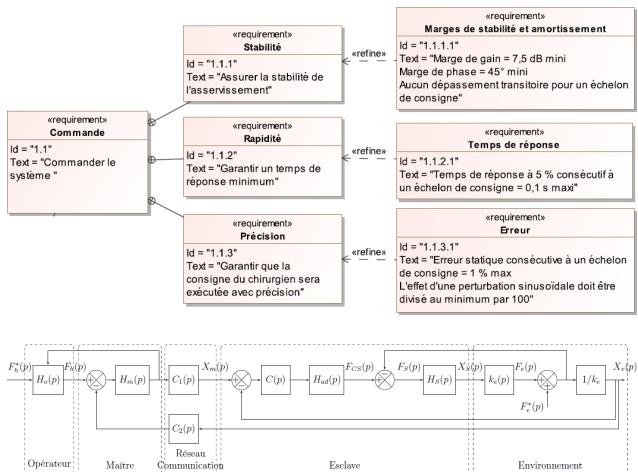
#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Présentation

#### Réalisation de la commande de l'esclave

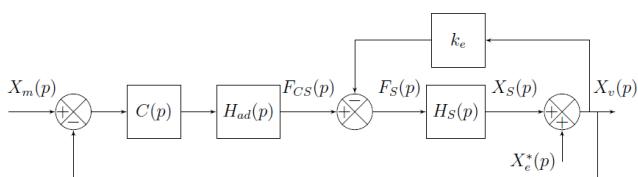
**Objectif** Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).



#### Modélisation et étude des performances du système sans correction

**Objectif** Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

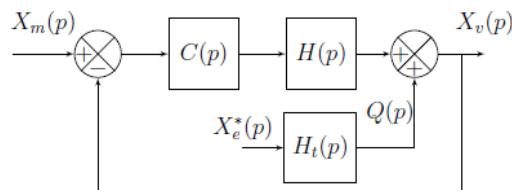
La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_S}{p(m_S + b_S)}$  avec  $k_S = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_S = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_S = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_S(p)$ .

#### Correction



Pour la suite du problème, on prendra :  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

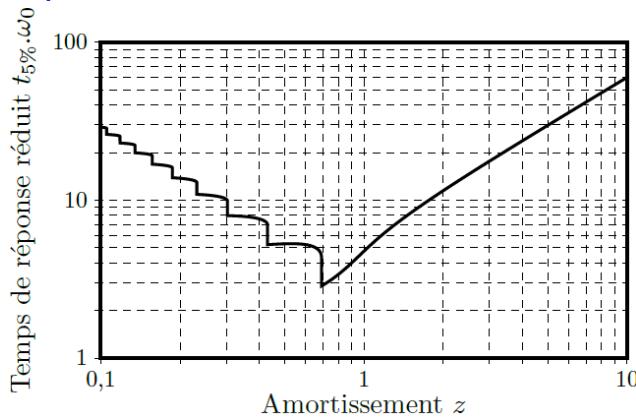
**Vérification des exigences sans correction :**  $C(p) = 1$

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  $F_{BFI}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amortissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

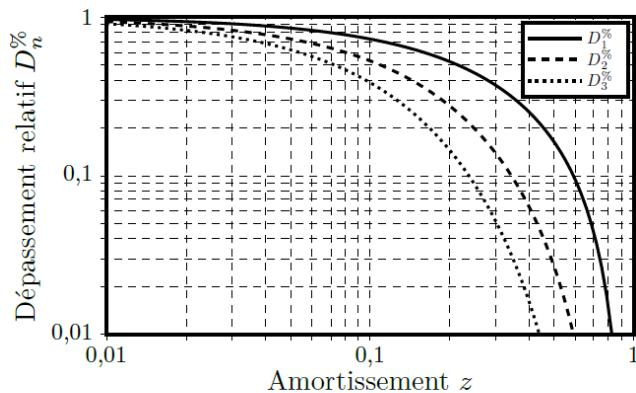
#### Correction

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

#### Correction



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassemens relatifs

**Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale :**  $C(p) = \frac{K_i}{p}$

**Objectif** Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

**Correction**

**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

**Correction**

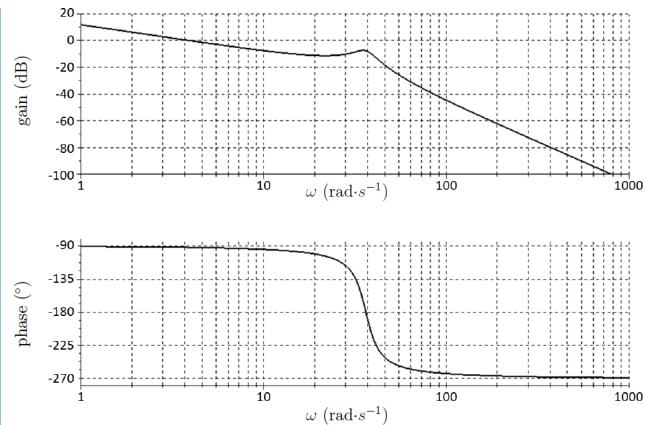
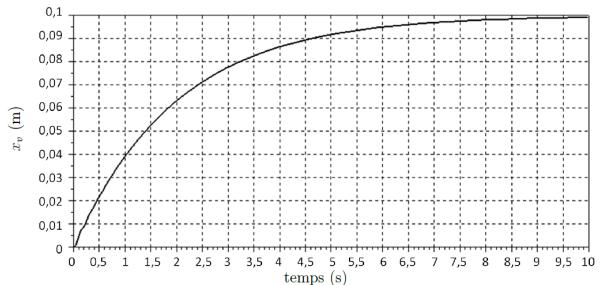


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $K_i = 100$



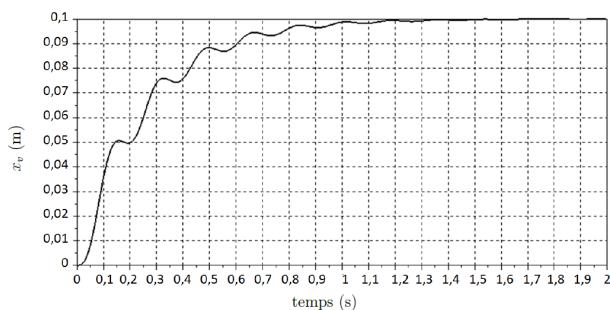
Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et  $K_i = 100$

**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{imax}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

**Correction**

**Question 7** En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».

**Correction**

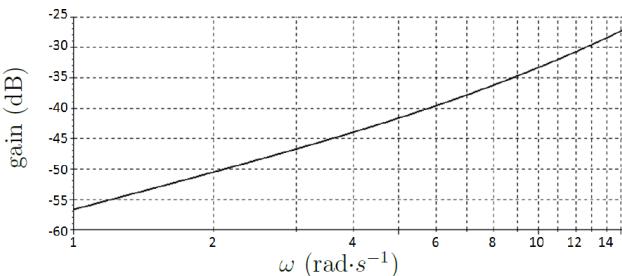


Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm avec le réglage  $K_{imax}$

**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$  pour  $K_i = K_{imax}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{BF2}(j\omega)|_{min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad.s}^{-1}; 12,5 \text{ rad.s}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

**Correction** En  $1,25 \text{ rad s}^{-1}$  l'atténuation est de  $-55 \text{ dB}$ . On a  $20 \log K = -55$  soit  $K = 0,002$  (inférieur à 1%). En  $12,5 \text{ rad s}^{-1}$  l'atténuation est de  $-30 \text{ dB}$ . On a  $20 \log K = -30$  soit  $K = 0,03$  (supérieur à 1%).

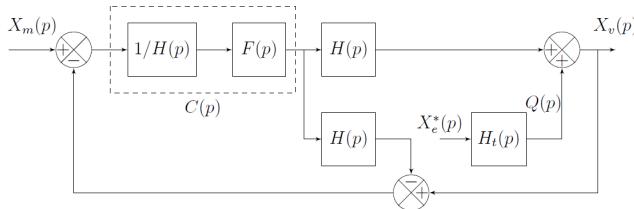
Le critère d'atténuation n'est pas vérifié sur l'ensemble de l'intervalle.



### Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

**Objectif** Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.



Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

**Correction** En utilisant la formulation proposée, on a  $X_v(p) = A(p)X_m(p) = \frac{X_m(p)}{(1+Tp)^2}$ .

Pour améliorer le temps de réponse du système, il faut diminuer  $T$ .

**Justification** On a  $G(p) = \frac{1}{1+T^2p^2+2Tp}$ . On a

$$\text{donc } \frac{1}{\omega_0^2} = T^2 \text{ et } \frac{2\xi}{\omega_0} = 2T. \text{ On a donc } \omega_0 = \frac{1}{T} \text{ et } \xi = 1.$$

Pour  $\xi = 1$ ,  $t_{5\%}\omega_0 = 5$ . Ainsi pour réduire le temps de réponse à 5% il faut augmenter  $\omega_0$  et donc diminuer  $T$ .

Pour un temps de réponse à 5% de 0,1 s, il faut  $\omega_0 = \frac{5}{0,1} = 50 \text{ rad s}^{-1}$  et  $T = 0,02 \text{ s}$  (valeur maximale).

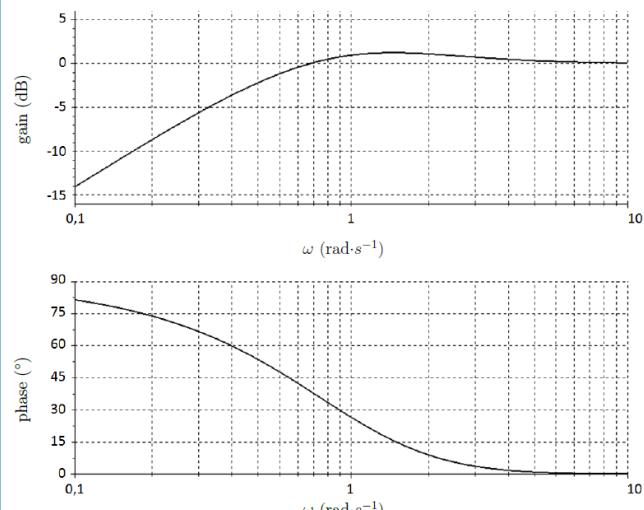
**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$  pour  $T = 1 \text{ s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.

**Correction** On a  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

Pour minimiser l'effet de la perturbation, il faut que décaler la cassure vers la droite. D'après le cahier des charges, l'effet de la perturbation doit être divisé par 100. L'atténuation en dB doit donc être de  $20 \log \frac{1}{100} = -40 \text{ dB}$ .

Il faut donc chercher  $T$  pour lequel le gain est de  $-40 \text{ dB}$ . En passant  $B(p)$  sous forme canonique et en se plaçant en basse fréquence, on a  $B(p) \approx 2Tp$ . On a donc  $B_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(2T\omega)$ .

On veut  $B_{\text{dB}}(12,5) = 20 \log(2T \times 12,5) < -40$  soit  $\log(2T \times 12,5) < -2 \Rightarrow 2T \times 12,5 < e^{-2} \Rightarrow T < e^{-2}/25$  et  $T < 0,005 \text{ s}$ .



$$1. \quad H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)} \text{ et } H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}.$$

2.  $K = \frac{1}{1+k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1+k_e}{m_s}}$ ,  $\xi = \frac{b_s}{2\sqrt{m_s(1+k_e)}}$ .

3. .

4. .

5. .

6.  $K_{i\max} = 133$ .
7.  $G_{\text{dB max}} = -30 \text{ dB}$ .
8.  $T \leq 0,02 \text{ s}$ .
9.  $T \leq 0,4 \text{ ms}$ .