

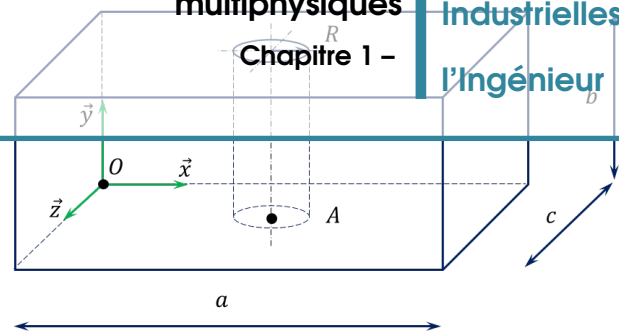
La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec  $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}$ ,

$$B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



$$\text{On pose } \vec{OA} = \frac{a}{2} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}.$$

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

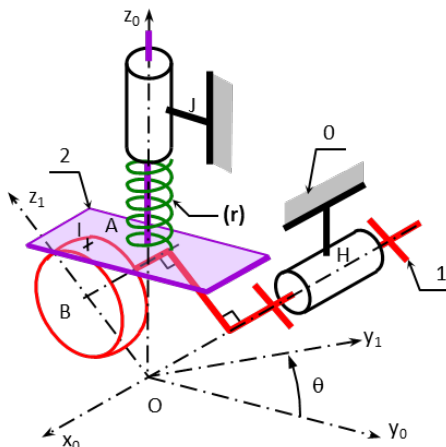
**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

Corrigé voir 1.

## Application 1



Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

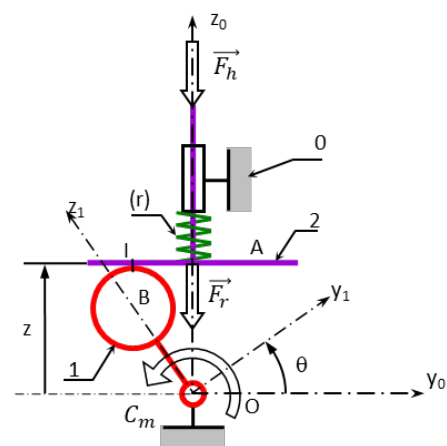


### Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

#### Savoirs et compétences :

- C1-05 : Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- C2-08 : Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
- C2-09 : Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.



L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en  $I$  avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

## Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$  ;
- $\vec{OB} = e \vec{z}_1, \vec{BI} = R \vec{z}_0, \vec{OA} = z \vec{z}_0$ .

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort ( $r$ ), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$ . Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$ .

## Résolution cinématique

**Question 1** En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la expression  $z$  en fonction de  $\theta$  et de constantes du problème. Déterminer alors  $V(A, 2/0)$  et  $\Gamma(A, 2/0)$ .

## Résolution dynamique

**Question 2** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le PFD.

**Question 3** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

## Résolution énergétique – Pour plus tard...

**Question 4** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

**Question 5** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

## Pour aller plus loin...

**Question 6** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

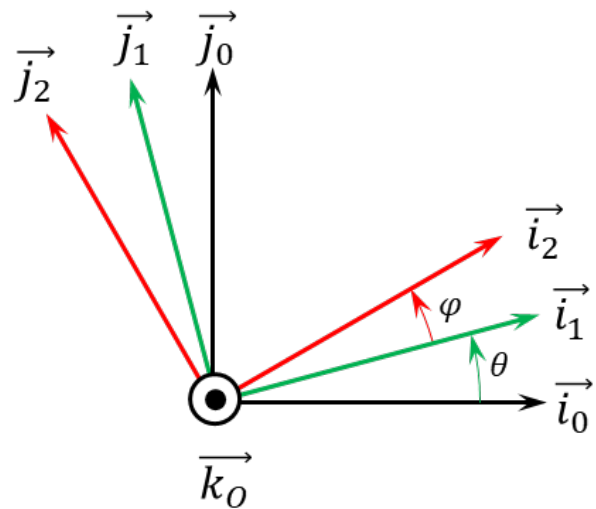
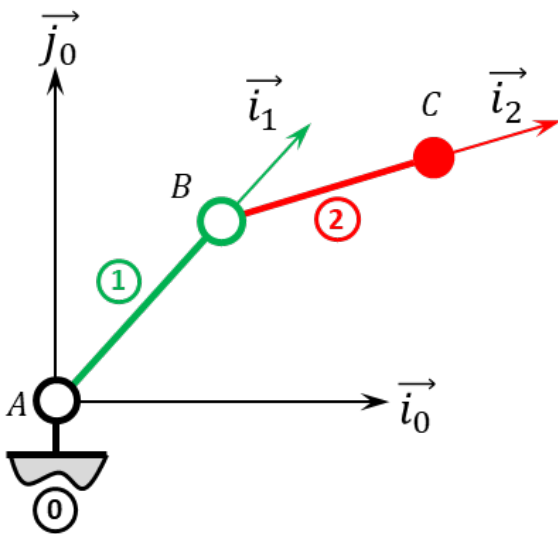
## Exercice 2 – Mouvement RR \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$  et  $\vec{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 et  $\vec{AG}_1 = \frac{1}{2} R \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $\vec{BG}_2 = \frac{1}{2} L \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en A.

**Question 2** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 1 + 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Corrigé voir ??.

## Exercice 3 – Parallélépipède percé\*

B2-10

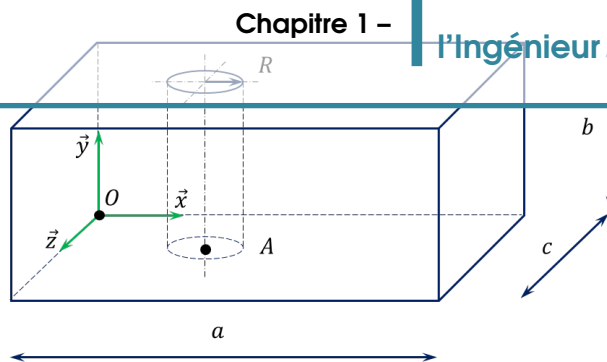
La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \frac{b^2 + c^2}{12}, B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



On pose  $\vec{OA} = \frac{a}{3} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ .

Corrigé voir 2.

## TD 1



## Véhicule TIM

Florestan Mathurin

## Savoirs et compétences :

- ☐ C1-05 : Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- ☐ C2-08 : Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
- ☐ C2-09 : Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertiels étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

## Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues les-

tées peut être assimilé au solide 1 représenté sur la figure 1, de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de masse  $G$ .

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  tel que  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ .

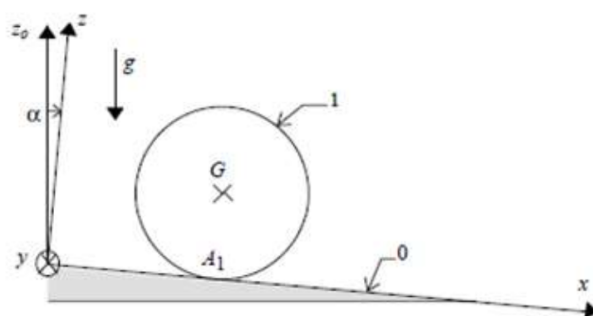


Figure 1

L'action de contact entre l'ensemble des roues 1 et le plan 0, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

Cette action de contact peut s'écrire :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_{01} \vec{x} + N_{01} \vec{z} \\ -C_r \vec{y} \end{matrix} \right\}_{A_1}$  où  $C_r$  représente le couple de ré-

sistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que :  $|C_r| = r|N_{01}|$  à la limite de l'équilibre et  $|C_r| < r|N_{01}|$  à l'équilibre.

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{lim}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Pour une masse du solide 1  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{lim}$  tel que  $\tan \alpha_{lim} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

### Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle  $\alpha$ , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

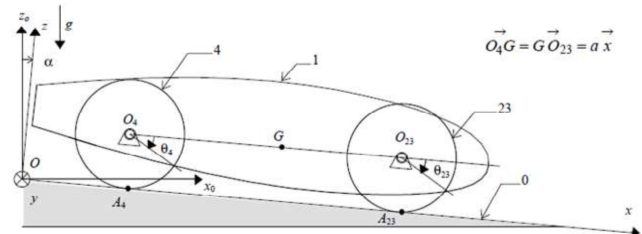
L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  telle que  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ . Le modèle est donné figure suivante. On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

- d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie G, de masse M en translation par rapport au repère galiléen R avec  $\vec{OG} = x \vec{x} + R \vec{z}$  ;
- de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie  $O_{23}$ , de masse  $2m$ , de rayon R, dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  sera noté  $2I$ . Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_{23}$  ;
- d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie  $O_4$ , de masse  $m$ , de rayon R, dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_4, \vec{y})$  sera noté  $I$ . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_4, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_4$  ;
- un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté  $C_m \vec{y}$ .

Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i} \vec{x} + N_{0i} \vec{z} \\ -N_{0i} r \vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$  avec  $i = 4$  ou  $23$ .

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aé-

rodynamique qui peut être modélisée par le torseur  $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ -\frac{2}{\rho S C_x \dot{x}^2} \end{array} \right\}_{O_{23}}$  avec  $\rho$  masse volumique du véhicule, S surface alaire,  $C_x$  coefficient de traînée du véhicule,  $\dot{x}$  vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.



**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

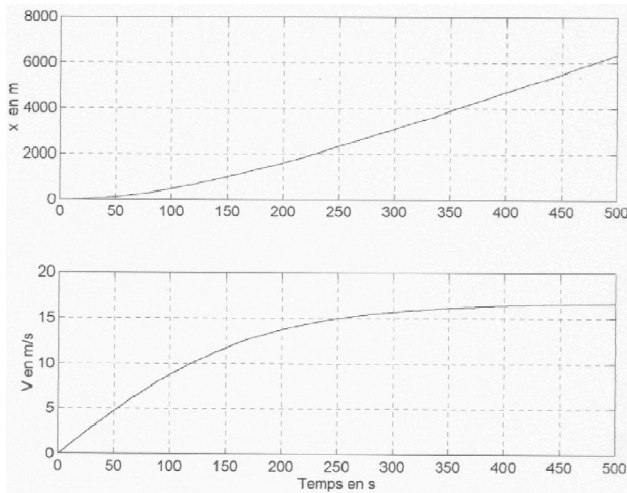
**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :  $C_m = (M + 3m)g \cos \alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2} R \rho S C_x \dot{x}^2$ .

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante V sur une piste horizontale.

On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple  $C_m$  constant. Les données véhicules sont :  $M = 70 \text{ kg}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $R = 0,25 \text{ m}$ ,  $C_m = 3,245 \text{ mN}$ ,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ . L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-dessous.



**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2} \rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

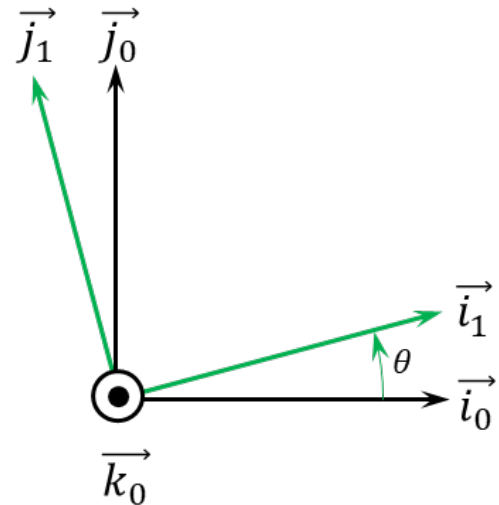
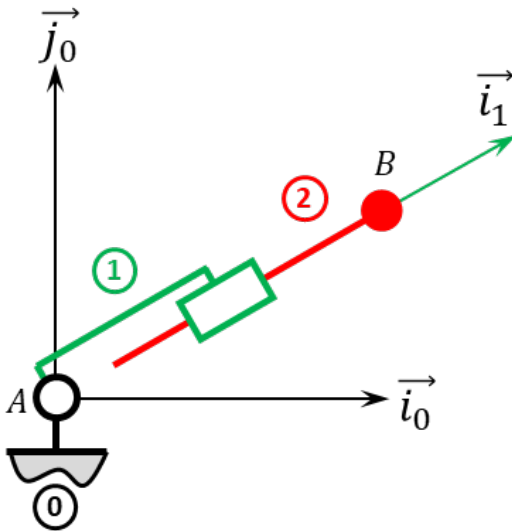
#### Exercice 4 – Mouvement RT \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** et  $\overrightarrow{AG_1} = L_1 \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1** et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  la masse de **2** et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



Par ailleurs, on donne  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{matrix} \right\}_B$  et  $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = (\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2) \vec{i}_1 + (\dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) + \lambda(t) \ddot{\theta}(t)) \vec{j}_1$ .

**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en A.

Calculons  $\overrightarrow{R_d(1/0)}$   
 $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)}$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Corrigé voir ??.



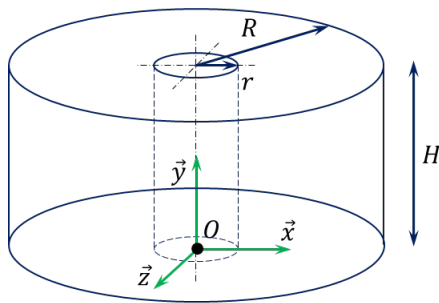
### Exercice 5 – Cylindre percé \*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

Soit la pièce suivante.



On pose  $\vec{OA} = -\frac{R}{2} \vec{x}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

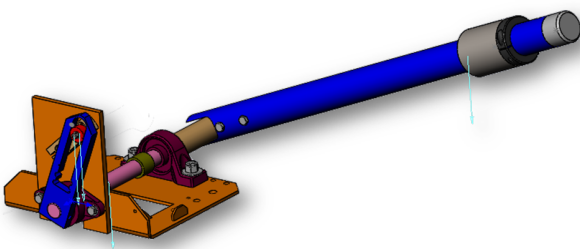
**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

Corrigé voir 3.

### Exercice 6 – Barrière Sympact \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

La barrière Sympact permet d'ouvrir ou de fermer l'accès à un parking.



L'angle d'ouverture est de  $\alpha = 90^\circ$ . La durée d'ouverture et de fermeture doit être  $T = 1$  s au maximum. L'accélération maximale est de  $\ddot{\theta}_{\max} = 30 \text{ rad s}^{-2}$ . La loi d'évolution est un trapèze de vitesse. On note  $t_a$  le temps d'accélération (égal au temps de décélération) et  $T$  le temps passé à vitesse constante. On note  $\dot{\theta}_{\max}$  la vitesse angulaire maximale.

**Question 1** Donner l'allure des lois d'accélération, vitesse et position angulaires. Vous indiquerez toutes les valeurs utiles (sous forme littérale).

**Question 2** Donner l'expression littérale du temps total.

**Question 3** Donner l'expression littérale de la vitesse angulaire en fin de phase d'accélération.

**Question 4** Donner l'expression littérale de l'angle total parcouru.

**Question 5** Déterminer la durée de l'accélération ainsi que la vitesse angulaire maximale atteinte.

Corrigé voir 4.

### Exercice 7 – Mouvement TR \*

**C2-08**

**C2-09**

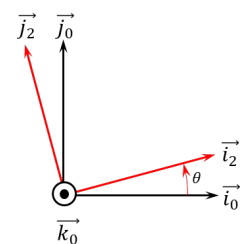
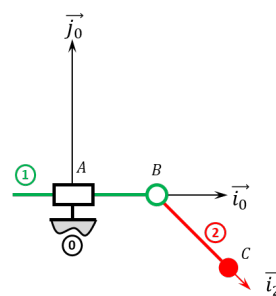
Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\vec{BC} = R \vec{i}_2$  avec  $R = 30 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de **1**, on note  $m_1$

la masse de **1** et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;

- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$

la masse de **2** et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en  $B$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0$

Corrigé voir ??.

## Exercice 8 – Cylindre percé \*

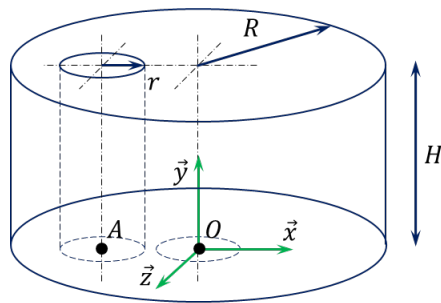
### B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

Soit la pièce suivante constituée d'un grand cylindre noté 1 de rayon  $R$ . 1 est percé d'un cylindre de diamètre de rayon  $r$ . On considère que 1 est constitué d'un matériau homogène de masse volumique  $\rho$ .

On note  $\vec{OA} = -\frac{R}{2} \vec{x}$ .



**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

Corrigé voir 5.

## Exercice 9 – Automate d'exploration de l'hémistase \*

### C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Afin de valider le choix des moteurs, on étudie le déplacement sur l'axe  $\vec{x}$ . On note  $V_x$  la vitesse selon cet axe. On rappelle que la distance maximum à parcourir est  $x_M^{\max} = 550 \text{ mm}$  en 1 seconde. La loi de commande sur chaque axe est définie par un trapèze de vitesse (Figure 2) avec les temps d'accélération et de décélération ( $T_a$ ) identiques. De plus, les moteurs se mettent en route et s'arrêtent en même temps.  $T$  est la durée totale du déplacement. Nous allons chercher à optimiser cette loi de commande de sorte que le moteur fournisse une puissance instantanée minimale.

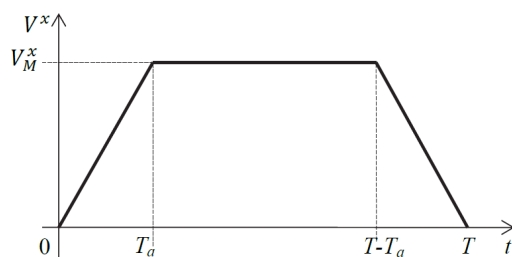


FIGURE 1 – Loi de commande de vitesse en trapèze

Le modèle de calcul pour cette commande d'axe est le suivant :

- le mouvement de rotation du moteur (vitesse  $\omega_m^x$ ) est transformé en mouvement de translation (vitesse  $V^x$ );
- le rapport de transmission de la chaîne cinématique est  $\lambda = \frac{V^x}{\omega_m^x}$ ;
- la distance à parcourir est  $x_M^{\max}$ ;
- l'inertie équivalente de l'ensemble des pièces en mouvement ramenée à l'arbre moteur est  $J_e$ ;
- les frottements et la pesanteur sont négligés, il n'y a donc pas de couple résistant.

**Question 1** Exprimer la vitesse maximale  $V_M^x$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $T$  et  $T_a$ .

**Question 2** Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur  $C_m$  en fonction de  $V_x$ ,  $T_a$ ,  $J_e$  et  $\lambda$  durant les trois phases du mouvement.

**Question 3** Préciser à quel(s) instant(s)  $t$  la puissance fournie par le moteur est maximale ( $P_{\max}$ ).

**Question 4** Exprimer cette puissance  $P_{\max}$  en fonction de  $V_M^x$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

**Question 5** Donner alors l'expression de  $P_{\max}$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

**Question 6** À partir de cette expression, montrer que  $P_{\max}$  est minimale pour un réglage du temps d'accélération  $T_a$  tel que  $T_a = \frac{T}{3}$ .

Pour cette nouvelle commande avec  $T_a = \frac{T}{3}$ , on cherche à valider le choix du moteur en étudiant le déplacement maximum suivant  $\vec{x}$ . Les caractéristiques de la chaîne cinématique sont :

- vitesse maximale du moteur :  $N_{\max}^{\text{mot}} = 4150 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- rapport de réduction du réducteur  $k = \frac{1}{10}$ ;
- rayon de poulie  $R_p = 20 \text{ mm}$ .

**Question 7** Déterminer la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}^x$  que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé?

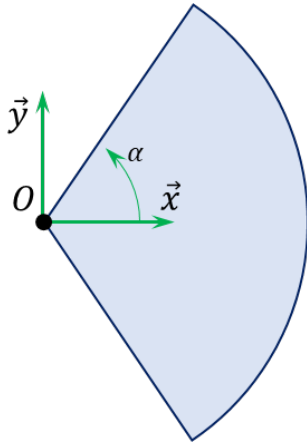
Corrigé voir 6.



## Exercice 10 – Disque \*\*

### B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit un secteur de disque de rayon  $R$ , d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\mu$ .



**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

Corrigé voir 7.

## Exercice 11 – Automate d'exploration de l'hémostasie \*

### C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (Figure 2).

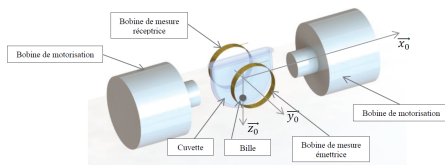


FIGURE 2 – Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoidal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie. Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

Le schéma de calcul est donné Figure 3.

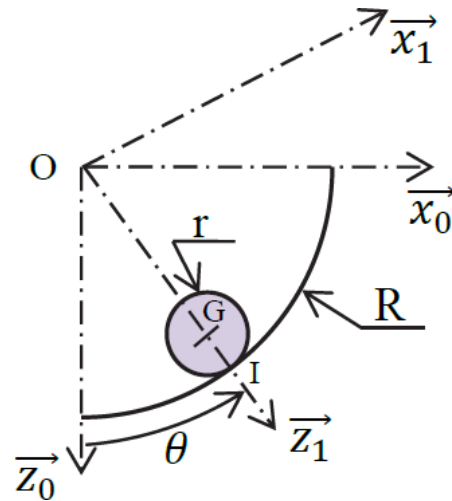


FIGURE 3 – Bille en contact avec le rail de la cuvette

Hypothèses :

- la bille de masse  $m$ , de centre de masse  $G$ , de rayon  $r$ , roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon  $R$  dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ;
- $I$  est le point de contact entre la bille et le rail circulaire;
- la position de la bille sur le rail est repérée par :  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

On note :

- $\{\mathcal{T}(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_I$ , le torseur associé à l'action mécanique du rail sur la bille;
- $f$  le coefficient d'adhérence au contact bille/cuvette :  $f = 0, 1$ ;
- $\{\mathcal{T}(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t) \vec{x}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_G$ , le torseur associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec  $F(t) = F_0 \sin(\omega_{\text{bob}}(t))$ ;
- $\{\mathcal{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -f_v \overrightarrow{V(G, \text{bille}/0)} \\ 0 \end{matrix} \right\}_G$

le torseur associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité. On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors  $f_v = 6\pi r \eta$  où  $\eta$  est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation;

- $\{\mathcal{T}(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} m g \vec{z}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_G$ , le torseur associé à l'action de la pesanteur sur la bille;
- $\{\mathcal{V}(\text{bille}/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega(\text{bille}/0)} = \omega_b \vec{y}_0 \\ \overrightarrow{V(G, \text{bille}/0)} = v \vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_G$ , le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0;
- $J = \frac{2}{5} m r^2$ , le moment d'inertie de la bille autour de l'axe  $(G, \vec{y}_0)$ ;
- $R = \|\vec{OI}\|$ , le rayon du rail,  $r = \|\vec{GI}\|$ , le rayon de la bille.

On notera  $F(p)$  la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  où  $p$  représente la variable de Laplace.

**Question 1** En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer  $\omega_b$  et  $v$ , les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $r$  et  $R$ .

**Question 2** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal  $N_I$  et tangentiel  $T_I$  du rail sur la bille sont liés à l'angle  $\theta$  par les équations suivantes :

$$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 \text{ et } T_I = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}.$$

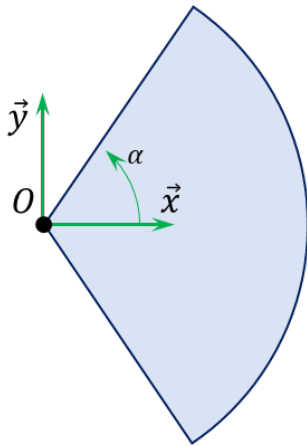
**Question 3** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que  $\frac{7}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg \sin \theta = F(t) \cos \theta$ .

Corrigé voir 8.

## Exercice 12 – Disque \*\*

### B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit un secteur de disque de rayon  $R$ , d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\mu$ .



**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

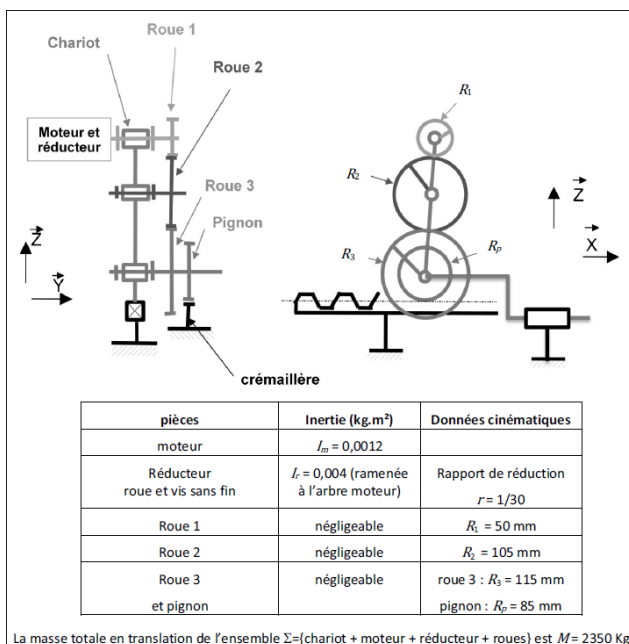
**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

Corrigé voir 7.

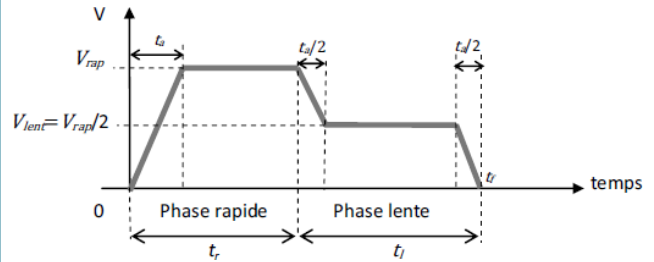
## Exercice 13 – Banc d'épreuve hydraulique \*

### C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Un schéma cinématique simplifié du chariot arrière, ainsi que les grandeurs cinématiques et cinétiques, sont donnés figure suivante. La chaîne de puissance comporte un moteur hydraulique, un réducteur roue et vis sans fin, un réducteur à engrenages parallèles et un système pignon-crémaillère. Le guidage du chariot est modélisé par une glissière.



On note  $C_m$  le couple moteur,  $\omega_m$  sa vitesse de rotation par rapport au bâti, et  $V$  la vitesse du chariot. La loi de vitesse du chariot pendant la totalité du trajet est présentée ci-dessous.



- On note  $t_r$  la durée de la phase de déplacement rapide,  $t_l$  la durée de la phase lente,  $t_f$  la durée totale,  $t_a$  la durée de la phase d'accélération. Chacune des 2 phases de décélération dure  $t_a/2$ .
- La course pendant la phase de déplacement en vitesse rapide (de 0 à  $t_r$ ) est au maximum de  $c_{rap} = 6,24$  m (pour le tube le plus court que peut tester le banc) et pendant la phase en vitesse lente (de  $t_r$  à  $t_f$ )  $c_{lent} = 1,56$  m.
- La durée maximale du déplacement total (phase rapide + phase lente) est limitée à 20 s.
- La vitesse du chariot, lors de la phase rapide,  $V_{rap}$  est limitée à 0,5 m/s.
- On considérera que le module de l'accélération  $a$  du chariot est identique pendant toutes les phases d'accélération et de décélération.

**Question 1** Exprimer  $c_{lent}$  et  $c_{rap}$  en fonction de  $t_a$ ,  $t_l$  et  $t_r$ .

**Question 2** En déduire les valeurs numériques de  $t_r$  et de  $t_a$ . En déduire l'accélération  $a$  du chariot.

**Question 3** Déterminer  $\omega_m$  en fonction de  $V$  et des données cinématiques utiles.

**Question 4** En déduire les valeurs numériques de la vitesse maximale du moteur  $\omega_m$  et de l'accélération angulaire  $\dot{\omega}_m$  pendant les phases d'accélération et de décélération.

**Question 5** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma$  par rapport au référentiel galiléen bâti.

**Question 6** En déduire l'expression de l'inertie équivalente de cet ensemble ramenée à l'axe de sortie du moteur, notée  $J_{eq}$  en fonction de  $M$ ,  $I_m$ ,  $I_r$  et des données cinématiques utiles. Application numérique.

- Les efforts résistants sur le chariot sont modélisés par un glisseur  $F$  d'amplitude 500 N.
- Le rendement de l'ensemble du mécanisme (réducteur roue et vis sans fin, réducteur à axes parallèles) est  $\eta = 0,3$ .

- On prendra une accélération angulaire maximale du moteur  $\dot{\omega}_m$  égale à  $250 \text{ rad s}^{-2}$  et une inertie totale équivalente ramenée à l'arbre moteur  $J_{eq}$  égale à  $0,01 \text{ kg m}^2$ .

On se propose de déterminer le couple nécessaire du moteur.

**Question 7** Déterminer l'expression du couple  $C_m$  à fournir par le moteur en fonction de  $\dot{\omega}_m$ ,  $J_{eq}$  et  $F$ . Calculer  $C_m$ .

$$1. \quad c_{lent} = \frac{V_{rap}}{2} t_l \text{ et } c_{rap} = V_{rap} \left( t_r - \frac{1}{2} t_a \right).$$

$$2. \quad t_a = 2,56 \text{ s}, t_l = 6,24 \text{ s}, t_r = 13,76 \text{ s et } a = 0,19 \text{ m s}^{-2}.$$

$$3. \quad \omega_M = -\frac{V R_3}{r R_1 R_p}.$$

$$4. \quad \omega_m = -406 \text{ rad s}^{-1} \text{ et } \dot{\omega}_m = -158 \text{ rad s}^{-2}.$$

$$5. \quad \mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} (I_M + I_r) \omega_m^2.$$

$$6. \quad J_{eq} = I_M + I_r + M \left( \frac{r R_1 R_p}{R_3} \right)^2 = 0,00877 \text{ kg m}^2.$$

$$7. \quad C_M \frac{J_{eq} \dot{\omega}_m + F \frac{r R_1 R_p}{R_3}}{\eta} = 10,4 \text{ Nm (rendement à voir...)}$$

Corrigé voir ??.