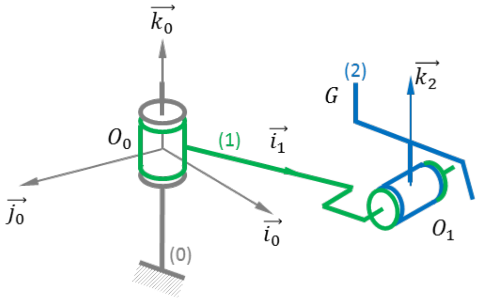
TD 01

Centrifugeuse humaine

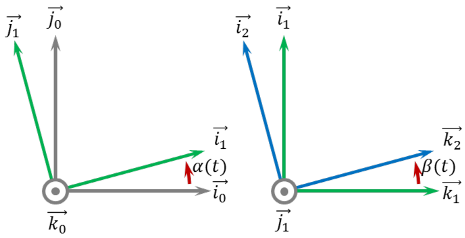
Xavier Pessoles

Savoirs et compétences :

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :
- $\overrightarrow{O_0O_1} = a\,\overrightarrow{i_1}$;
- $\overrightarrow{O_1G} = b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$.

Trajectographie

Question 1 *Donner la trajectoire du point G dans le repère $\mathcal{R}_0$.*

Correction La trajectoire du point G dans le repère $\mathcal{R}_0$ est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a\,\overrightarrow{i_1} + b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0G}(t) &= a\left(\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\,\overrightarrow{i_1} - \sin\beta(t)\,\overrightarrow{k_1}\right) + c\left(\cos\beta(t)\,\overrightarrow{k_1} + \sin\beta(t)\,\overrightarrow{i_1}\right)\\
&= a\left(\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}\right) - \sin\beta(t)\,\overrightarrow{k_0}\right)\\
&\quad + c\left(\cos\beta(t)\,\overrightarrow{k_0} + \sin\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}\right)\right)\\
&= \begin{bmatrix} a\cos\alpha(t) + b\cos\beta(t)\cos\alpha(t) + c\sin\beta(t)\cos\alpha(t)\\ a\sin\alpha(t) + b\cos\beta(t)\sin\alpha(t) + c\sin\beta(t)\sin\alpha(t)\\ -b\sin\beta(t) + c\cos\beta(t)\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

Question 2 *Calculer* $\overrightarrow{V(G,S_2/S_0)}$.

Accélération

Question 3 *Calculer* $\overrightarrow{\Gamma(G,S_2/S_0)}$.

Correction **Méthode 1 – PAS RECOMMANDE** Par définition,

$$\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(a\,\overrightarrow{i_1}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=a\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned}\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0}+\sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}+\left[\dfrac{\mathrm{d}\sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}\\ &= \dfrac{\mathrm{d}\cos\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i_0}+\cos\alpha(t)\underbrace{\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}+\dfrac{\mathrm{d}\sin\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i_0}+\sin(t)\underbrace{\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{j_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}\\ &= -\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0}+\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}=\dot{\alpha}(t)\,\overrightarrow{j_1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}=\begin{bmatrix}-a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\\ a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\\ 0\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}=\begin{bmatrix}0\\ a\dot{\alpha}(t)\\ 0\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Dans les deux cas, $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ est dérivé par rapport $\mathcal{R}_0$ mais il s'exprime différemment dans $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$:

- $\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}=-a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\,\overrightarrow{i_0}+a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\,\overrightarrow{j_0}$: ici la base de **projection** et de **dérivation** est la base $\mathcal{B}_0$;
- $\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}(t)\,\overrightarrow{j_1}$: ici la base de dérivation est la base $\mathcal{B}_0$ et la base de projection est $\mathcal{B}_1$.

Méthode 2 – Utilisation de la dérivation vectorielle.
Calcul de $\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}$.
On rappelle que :

$$\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}=a\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Le calcul de $\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$ peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=\underbrace{\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_1}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{i_1}=\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1}=\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

Méthode 3 – Calcul de $\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}$.
S_1 et S_0 sont en liaison pivot de centre O_0, on a donc : $\overrightarrow{V(O_0,S_1/S_0)}=\overrightarrow{0}$.
En conséquence,

$$\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}=\overrightarrow{V(O_0,S_1/S_0)}+\overrightarrow{O_1O_0}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\overrightarrow{0}-a\,\overrightarrow{i_1}\wedge\left(\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\right)=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

Correction Calcul de $\overrightarrow{V(G,S_2/S_0)}$.

On a :

$$\overrightarrow{V(G,S_2/S_0)}=\overrightarrow{V(G,S_2/S_1)}+\overrightarrow{V(G,S_1/S_0)}$$

Calculons $\overrightarrow{V(G,S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(G,S_1/S_0)}=\overrightarrow{V(O_1,S_1/S_0)}+\overrightarrow{GO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}-\left(b\overrightarrow{i_2}+c\overrightarrow{k_2}\right)\wedge\left(\dot{\alpha}\overrightarrow{k_0}\right)$$

$$\overrightarrow{V(G,S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}+b\dot{\alpha}\sin(\beta+\pi/2)\overrightarrow{j_1}+c\dot{\alpha}\sin\beta\,\overrightarrow{j_1}=\dot{\alpha}\left(a+b\cos\beta+c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}$$

Par ailleurs calculons $\overrightarrow{V(G,S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{V(G,S_2/S_1)}=\overrightarrow{V(O_1,S_2/S_1)}+\overrightarrow{GO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=-\left(b\overrightarrow{i_2}+c\overrightarrow{k_2}\right)\wedge\left(\dot{\beta}\overrightarrow{j_1}\right)=-\dot{\beta}\left(b\overrightarrow{k_2}-c\overrightarrow{i_2}\right)$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(G,S_2/S_0)}=\dot{\alpha}\left(a+b\cos\beta+c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}-\dot{\beta}\left(b\overrightarrow{k_2}-c\overrightarrow{i_2}\right)$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V(G,S_2/S_0)}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V(G,S_2/S_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0G}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Exercice 1 – Parallélépipède⋆

B2-10

Question 1 *Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.*

Pour des raisons de symétrie, on a directement $\overrightarrow{OG}=\frac{a}{2}\overrightarrow{x}+\frac{b}{2}\overrightarrow{y}+\frac{c}{2}\overrightarrow{z}$.

Question 2 *Déterminer la matrice d'inertie du solide en G, en A puis O.*

Notons (1) le parallélépipède rectangle et (2) le cylindre (plein). On note $\mathscr{B}_0=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ On a $I_G(1)=\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&B_1&0\\0&0&C_1\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0}$ et $I_G(2)=\begin{pmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&0\\0&0&A_2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0}$ (attention l'axe du cylindre est $\overrightarrow{y}$).

On a donc $I_G(S)=\begin{pmatrix}A_1-A_2&0&0\\0&B_1-B_2&0\\0&0&C_1-A_2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0}$.

Par ailleurs, $m=m_1-m_2$ et $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{2}\overrightarrow{y}$; donc $I_A(S)=\begin{pmatrix}A_1-A_2+m\frac{b^2}{4}&0&0\\0&B_1-B_2&0\\0&0&C_1-A_2+m\frac{b^2}{4}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0}$.

Enfin, $\overrightarrow{OG}=\frac{a}{2}\overrightarrow{x}+\frac{b}{2}\overrightarrow{y}+\frac{c}{2}\overrightarrow{z}$; donc $I_O(S)=\begin{pmatrix}A_1-A_2&0&0\\0&B_1-B_2&0\\0&0&C_1-A_2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0}+m\begin{pmatrix}\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}&-\frac{ab}{4}&-\frac{ac}{4}\\-\frac{ab}{4}&\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}&-\frac{bc}{4}\\-\frac{ac}{4}&-\frac{bc}{4}&\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0}$

Exercice 2 – Parallélépipède percé⋆

B2-10

Question 1 *Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.*

On note m_C la masse du cylindre (plein) et m_P la masse du parallélépipède. On a alors $m = m_P - m_C$. De plus, $\overrightarrow{OG_P} = \dfrac{a}{2}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{OG_C} = \dfrac{a}{3}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$.

On a alors $m\overrightarrow{OG} = m_P\overrightarrow{OG_P} - m_C\overrightarrow{OG_C} = m_P\left(\dfrac{a}{2}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}\right) - m_C\left(\dfrac{a}{3}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}\right)$.

Par suite, $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$.

Question 2 *Déterminer la matrice d'inertie du solide en G.*

Les plans $(G, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ et $(G, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x})$ sont des plans de symétrie. On a donc $I_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

On déplace la matrice du parallélépipède rectangle en G.

On a $I_{G_P}(P) = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et

$$\overrightarrow{G_PG} = \overrightarrow{G_PO} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) - \dfrac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Ainsi, $I_G(P) = I_{G_P}(P) + m_P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P\Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P\Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

On déplace la matrice du cylindre en G.

De même $I_{G_C}(C) = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C & 0 \\ 0 & 0 & A_C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et

$$\overrightarrow{G_CG} = \overrightarrow{G_CO} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{3} \\ -\dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) - \dfrac{a}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \Delta'_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Ainsi, $I_G(C) = I_{G_C}(C) + m_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C + m_C\Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_C + m_C\Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Bilan.

Au final, $I_G(E) = I_G(P) - I_G(C)$ et

$$I_G(E) = \begin{pmatrix} A_P - A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P\Delta_x^2 - B_C - m_C\Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P\Delta_x^2 - A_C - m_C\Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

TD 03

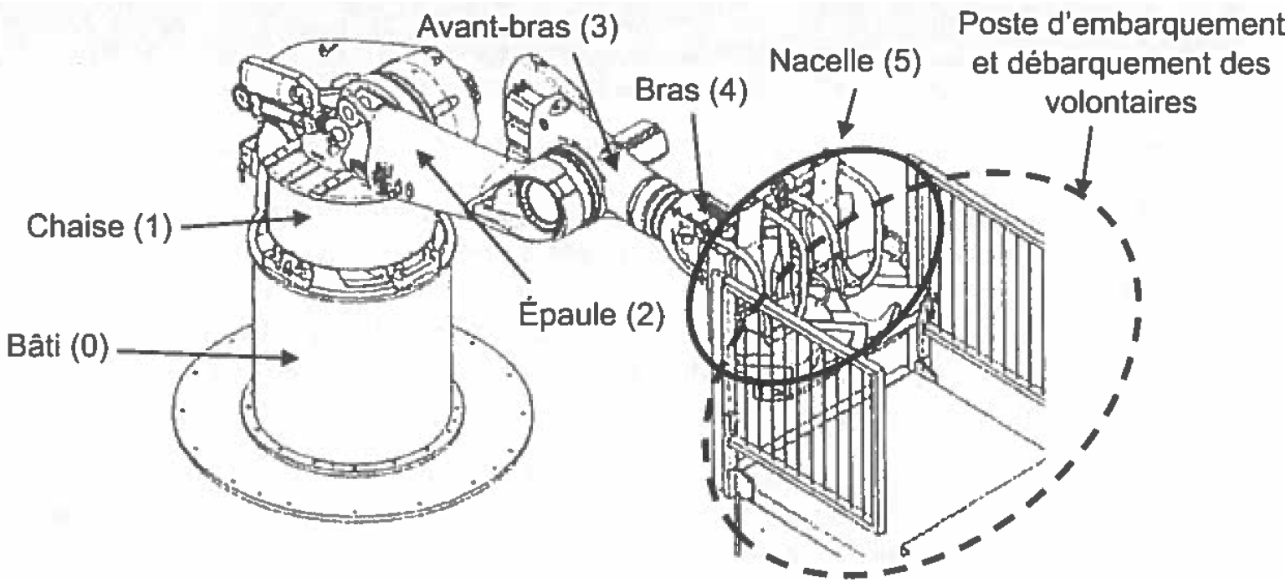
Danse avec les robots

ICNA 2017

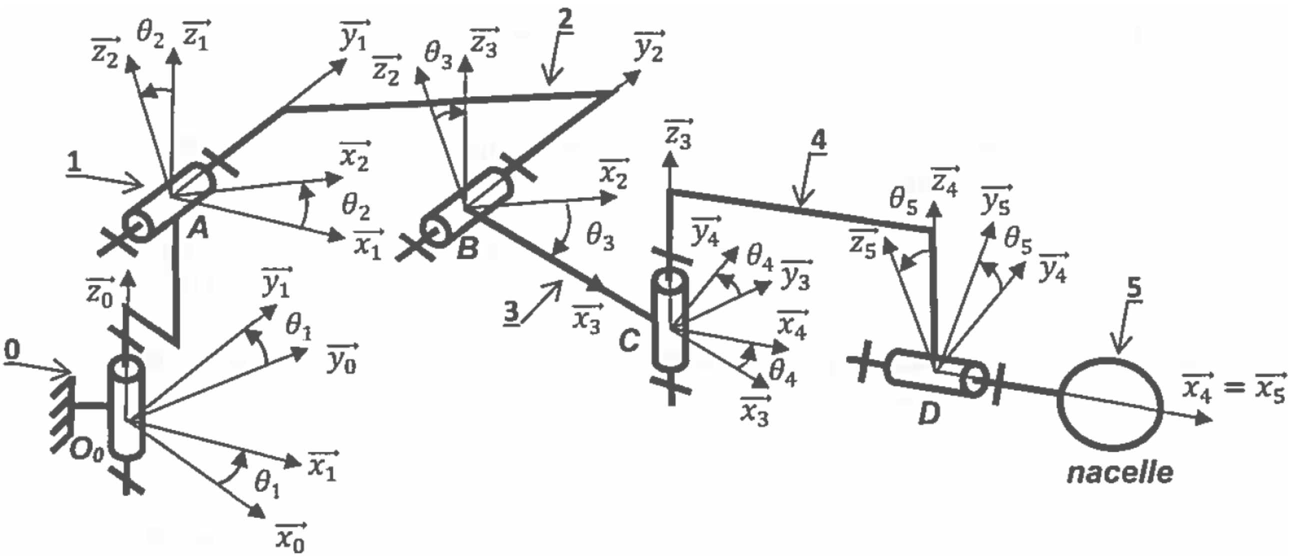
Savoirs et compétences :

« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remués au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.



On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

- On note $\mathscr{R}_0 = \left(O_0; \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$ le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti **0**.

- On note $\mathscr{R}_1 = \left(O_0; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ le repère associé à la chaise **1** et $\theta_1 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right)$ l'angle de rotation de la chaise **1** par rapport au bâti **0**.
- On note $\mathscr{R}_2 = \left(A; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ le repère associé à l'épaule **2**, $\overrightarrow{O_0A} = a\overrightarrow{z_0} + b\overrightarrow{x_1}$ et $\theta_2 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}\right)$ l'angle de rotation de l'épaule **2** par rapport à la chaise **1**.
- On note $\mathscr{R}_3 = \left(B; \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}\right)$ le repère associé à l'avant-bras **3**, $\overrightarrow{AB} = c\overrightarrow{x_2}$ et $\theta_3 = \left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\right) = \left(\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3}\right)$ l'angle de rotation de l'avant-bras **3** par rapport à l'épaule **2**.
- On note $\mathscr{R}_4 = \left(C; \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4}\right)$ le repère associé au bras **4**, $\overrightarrow{BC} = d\overrightarrow{x_3}$ et $\theta_4 = \left(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_4}\right) = \left(\overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{y_4}\right)$ l'angle de rotation du bras **4** par rapport à l'avant-bras **3**.
- On note $\mathscr{R}_5 = \left(D; \overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{y_5}, \overrightarrow{z_5}\right)$ le repère associé à la nacelle **5**, $\overrightarrow{CD} = e\overrightarrow{x_4}$ et $\theta_5 = \left(\overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{y_5}\right) = \left(\overrightarrow{z_4}, \overrightarrow{z_5}\right)$ l'angle de rotation de la nacelle **5** par rapport au bras **4**.

Le centre de gravité de la nacelle **5** (siège + volontaire + harnais) est tel que $\overrightarrow{DG} = f\overrightarrow{x_4} + h\overrightarrow{z_5}$.

On définit la position du point G dans la base $\mathscr{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ telle que $\overrightarrow{O_0G} = x\overrightarrow{x_0} + y\overrightarrow{y_0} + z\overrightarrow{z_0}$.

Question 1 *Tracer les figures planes de changement de repère.*

Correction

Question 2 *Exprimer la position du point G suivant $\overrightarrow{x_0}$.*

Correction

Objectif Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

Question 3 *Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à **0**, notée $\overrightarrow{V(G,5/0)}$.*

Correction

On limite désormais l'étude dans au cas où $\dot{\theta}_2 = 1{,}45\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$.

Question 4 *Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{\Gamma(G,5/0)}$.*

Correction

Question 5 *Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.*

Correction

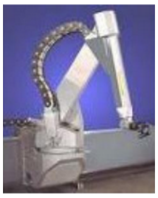
Exercice 3 – Cylindre percé ⋆

B2-10 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.*

Question 2 *Déterminer la matrice d'inertie du solide en G puis en O.*

TD 04



Robot de peinture ★

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie

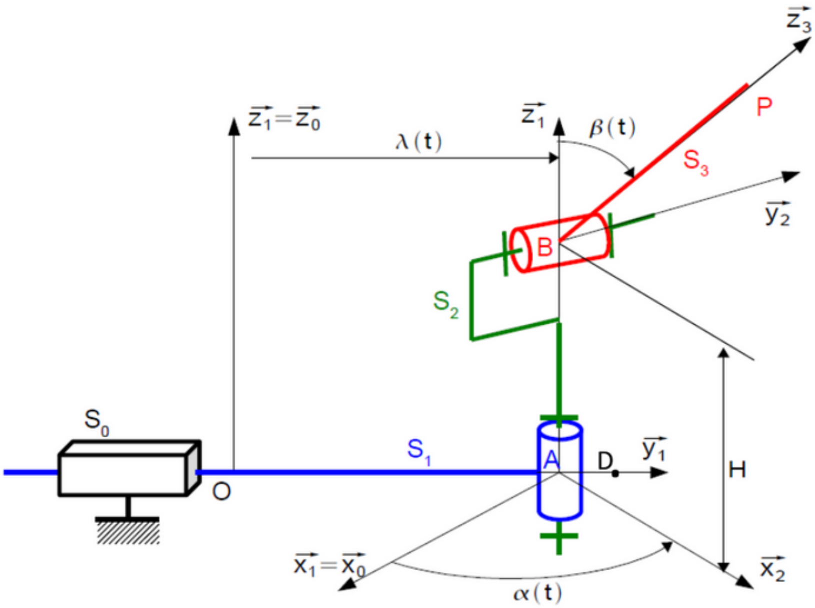
Savoirs et compétences :

Robot de peinture

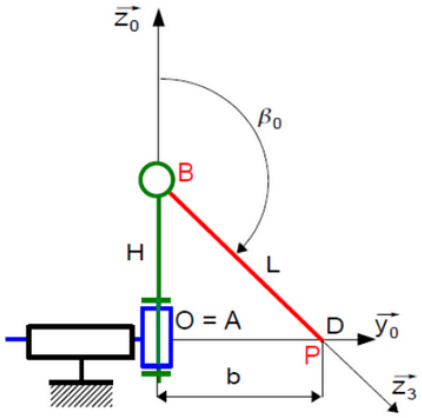
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.

Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante

La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Shéma cinématique du robot



Position médiane (P est en D)
(et A en O)

Le chariot S_1, auquel on associe le repère $\mathscr{R}_1\left(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ est en mouvement de translation de direction $\overrightarrow{y_0}$ par rapport au bâti S_0 de repère $\mathscr{R}_0\left(A, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$.

Le corps S_2, auquel on associe le repère $\mathscr{R}_2\left(A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$ avec le chariot S_1.

Le bras S_3, auquel on associe le repère $\mathscr{R}_3\left(B, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}\right)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe $(B, \overrightarrow{y_2})$ avec le corps S_2.

On a $\overrightarrow{OD} = b\overrightarrow{y_0}$ avec $b = \sqrt{L^2 - H^2}$.

Question 1 *Construire les figures planes de repérage/paramétrage puis exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation* $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$.

On désire que P décrive la droite $(D, \overrightarrow{x_0})$ à vitesse constante V, conformément au cahier des charges.

Question 4 *Représenter sur une figure dans le plan* $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$, *puis sur une figure dans le plan* $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$, *les positions des points* O, D, A, B *et* P *du robot lorsque celui-ci est en position extrême (*A *est en* D*).*

Question 5 *Traduire, à l'aide de l'expression de* $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ *le fait que* P *se déplace à la vitesse* V *selon* $\overrightarrow{x_0}$. *En déduire* $\dot{\beta}$.

Question 6 *Exprimer alors* $\dot{\lambda}$ *et* $\dot{\alpha}$ *en fonction de* L, V, α *et* β_0.

Question 7 *A l'aide de la figure précédente, exprimer* β_0 *en fonction de* b *et* L.

Question 8 *Exprimer* $\dot{\lambda}$ *et* $\dot{\alpha}$ *en fonction de* V, b *et* α.

Exercice 4 – Cylindre percé ⋆

B2-10 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Déterminer la position du centre d'inertie* G *du solide.*

Question 2 *Déterminer la matrice d'inertie du solide en* G *puis en* O.

TD 05

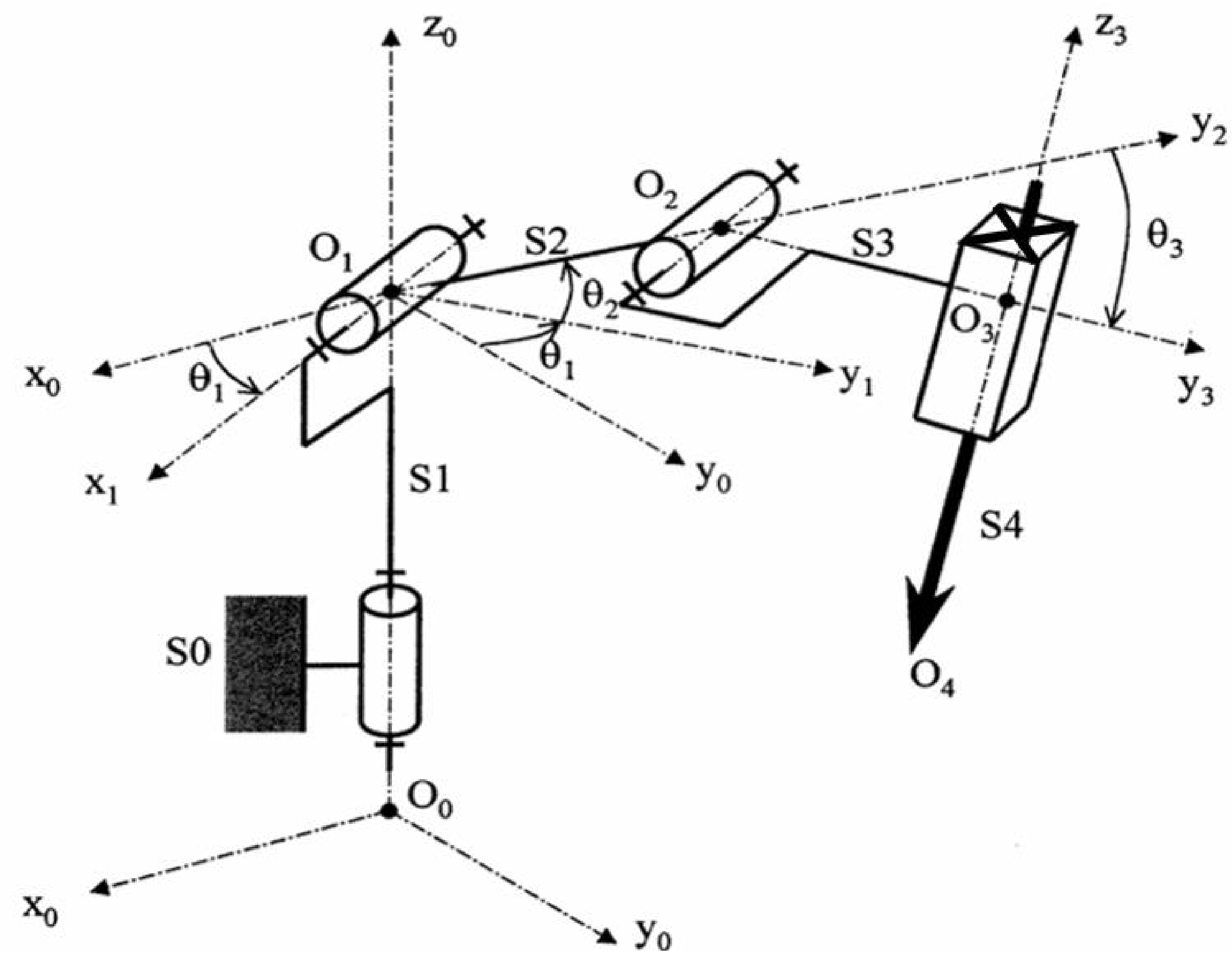
Robot de peinture ⋆

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie

Savoirs et compétences :

Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



Ce robot est constitué de cinq solides :

- le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé $\mathscr{R}_0 = \left(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ tel que $\overrightarrow{z_0}$ vertical ascendant;
- le fût 1, de repère associé $\mathscr{R}_1 = \left(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ tel que $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_0}$;
- le bras 2, de repère associé $\mathscr{R}_2 = \left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ tel que $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$;
- l'avant-bras 3, de repère associé $\mathscr{R}_3 = \left(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}\right)$ tel que $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_3}$;
- la buse 4, de repère associé $\mathscr{R}_4 = \left(O_4, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4}\right)$ tel que $\mathscr{B}_4 = \mathscr{B}_3$.

Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

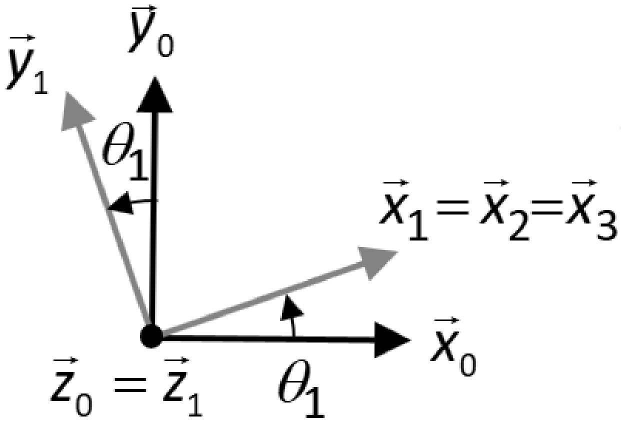
Paramètres du mouvement :

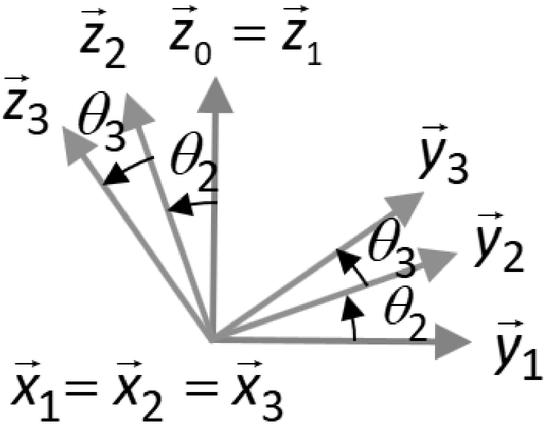
- $\theta_1 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$;
- $\theta_2 = \left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right)$;
- $\theta_3 = \left(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_3}\right)$;
- $\overrightarrow{O_3 O_4} = \lambda \overrightarrow{z_3}$.

Caractéristiques géométriques :

- $\overrightarrow{O_0 O_1} = L_1 \overrightarrow{z_0}$;
- $\overrightarrow{O_1 O_2} = L_2 \overrightarrow{y_2}$;
- $\overrightarrow{O_2 O_3} = L_3 \overrightarrow{y_3}$.

Les figures de changement de base sont donnés ci-dessous.





On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre O_0 et de rayon R.
- exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite $\left(O_0, \overrightarrow{y_0}\right)$: réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant $\overrightarrow{y_0}$ soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante : V.

Objectif Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

Question 1 *Préciser une condition sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.*

Question 2 *Préciser deux conditions sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.*

Question 3 *Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point O_4 puis calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_4, 4/0)}$.*

Question 4 *Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{impose}$ qui traduit l'exigence Ex3.*

Question 5 *On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position $\theta_1 = 0$, traduire alors la condition $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{impose}$ en deux relations vectorielles.*

Question 6 *En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.*

Exercice 5 – Disque ⋆⋆

B2-10 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.*

Question 2 *Déterminer la matrice d'inertie du solide en O.*