DDS 3

Les ptits devoirs du soir
Xavier Pessoles

Exercice 137 – Prothèse active transtibiale⋆

B2-07

Présentation

Comportement dynamique de la prothèse

Question 1 *À partir des équations caractérisant le système, déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_6(p)$.*

Correction On a d'une part, $C_M(p) = H_1(p)\left(U_M(p) - \Omega_M(p)\right)$.

D'autre part, en utilisant les deux équations du moteur électrique, on a $U_M(p) = RI(p) + E(p)$ et $E(p) = k_c\Omega_M(p)$ soit $U_M(p) = RI(p) + k_c\Omega_M(p)$. De plus $C_M(p) = k_c I(p)$; donc $U_M(p) = R\dfrac{C_M(p)}{k_c} + k_c\Omega_M(p)$. Par suite, $C_M(p) = \dfrac{k_c}{R}\left(U_M(p) - k_c\Omega_M(p)\right)$.

En identifiant, on a donc $H_1(p) = \dfrac{k_c}{R}$ et $H_6(p) = k_c$.

D'après le schéma-blocs,

$\Delta\alpha(p) = \left(C(p) - C_M(p)H_2(p)\right)H_3(p)H_4(p)$ soit

En utilisant l'équation différentielle caractéristique du comportement de la prothèse, on a : $J_M p^2\Delta\alpha(p) + \mu_m p\Delta\alpha(p) = C_M(p)R_T - C(p)R_T^2 \Leftrightarrow \Delta\alpha(p)\left(J_M p^2 + \mu_m p\right) = C_M(p)R_T - C(p)R_T^2$

$\Leftrightarrow \Delta\alpha(p) = \dfrac{R_T^2}{J_M p^2 + \mu_m p}\left(\dfrac{C_M(p)}{R_T} - C(p)\right)$.

Or, $\Delta\alpha(p) = \dfrac{1}{p}\Delta\alpha'(p)$; donc $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$.

Au final, $H_3(p) = \dfrac{R_T^2}{J_M p + \mu_m}$ et $H_2(p) = R_T$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p) = \dfrac{C(p)}{U_M(p)}$.*

Correction On déplace le dernier point de prélèvement avant H_4. On ajoute donc $H_4(p)H_7(p)$ dans la retour.

On a alors $F(p) = \dfrac{\Delta\alpha'(p)}{-} = \dfrac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)H_7(p)}$. $\text{FTBF}(p) = \dfrac{H_1(p)H_2(p)F(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_5(p)H_6(p)F(p)}H_4(p)H_7(p)$.

$$\text{Soit FTBF}(p) = \dfrac{H_1(p)H_2(p)\dfrac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)H_7(p)}}{1 + H_1(p)H_2(p)H_5(p)H_6(p)\dfrac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)H_7(p)}}H_4(p)H_7(p)$$

$$= \dfrac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)H_7(p) + H_1(p)H_2(p)H_5(p)H_6(p)H_3(p)}H_4(p)H_7(p)$$

$$= \dfrac{\dfrac{k_c}{R}R_T\dfrac{R_T^2}{J_M p + \mu_m}}{1 + \dfrac{R_T^2}{J_M p + \mu_m}\dfrac{k_{RS}d_0^2}{p} + \dfrac{k_c}{R}R_T\dfrac{1}{R_T}k_c\dfrac{R_T^2}{J_M p + \mu_m}}\dfrac{k_{RS}d_0^2}{p}$$

$$= \frac{\frac{k_c}{1} R_T^3}{J_M R p^2 + \mu_m R p + R_T R^2 k_{RS} d_0^2 + p k_c k_c R_T^2} k_{RS} d_0^2$$
$$= \frac{k_c R_T^3}{J_M R p^2 + p\left(\mu_m R + k_c k_c R_T^2\right) + R_T R^2 k_{RS} d_0^2} k_{RS} d_0^2.$$

Analyse des performances de l'asservissement en couple

Question 3 *À l'aide des courbes, valider l'ensemble des critères du cahier des charges en justifiant clairement vos réponses.*

Correction
- Le régime permanent semble atteint autour de 0,03 s ; donc les critère de rapidité est respécté.
- En régime permanent, le couple atteint est de 46 Nm pour une consigne de 50 Nm. Un écart de 10 % correspondrait à un couple atteint de 45 Nm. Le critère de précision est respecté.

Exercice 136 – Mouvement RT ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}.$$

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par composition.*

$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

$\forall P$, $\overrightarrow{V(P,2/1)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}$.

Par ailleurs $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -\lambda(t)\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} = \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} \end{array}\right\}_B .$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

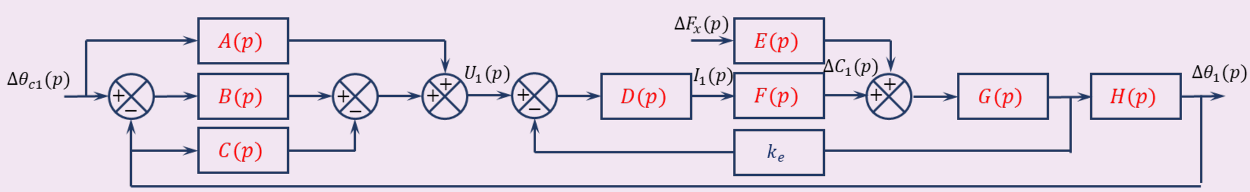
$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\overrightarrow{i_1} = \left(\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\overrightarrow{i_1} + \left(\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t) + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{j_1}.$$

Exercice 135 – Conception de la commande d'un robot chirurgical⋆

B2-07

Question 1 *Compléter le schéma-blocs.*

Correction



En utilisant l'équation électrique du MCC, on a $U_1(p) = \left(Lp+R\right)I_1(p) + E_1(p)$. En utilisant le schéma-blocs : $I_1(p) = \left(U_1(p) - E(p)\right)D(p)$. On a donc $I_1(p) = \dfrac{U_1(p) - E(p)}{R + Lp}$ et $D(p) = \dfrac{1}{R+Lp}$.

En utilisant la première relation de comportement du MCC, on a $E_1(p)$ en sortie du bloc k_e et $p\Delta_1(p)$ en entrée ; donc $H(p) = \dfrac{1}{p}$.

En utilisant la seconde relation, on a $F(p) = k_t$.

En utilisant l'équation de mouvement de l'axe 1, on a : $\Delta C_1(p) = Jp^2\Delta\theta_1(p) - k_1\dfrac{r_9'}{r_0}h_2\Delta F_x(p)$.

D'après le schéma-blocs, on a $\Delta\theta_1(p) = \left(\Delta C_1(p) + \Delta F_x(p)E(p)\right)G(p)H(p)$.

En réageançant l'équation, on a $Jp^2\Delta\theta_1(p) = \Delta C_1(p) + k_1\dfrac{r_9'}{r_0}h_2\Delta F_x(p) \Leftrightarrow \Delta\theta_1(p) = \left(\Delta C_1(p) + k_1\dfrac{r_9'}{r_0}h_2\Delta F_x(p)\right)\dfrac{1}{Jp^2}$.

On a donc $E(p) = k_1\dfrac{r_9'}{r_0}h_2$.

De plus $G(p)H(p) = \dfrac{1}{Jp^2}$ et $H(p) = \dfrac{1}{p}$; donc $G(p) = \dfrac{1}{Jp}$.

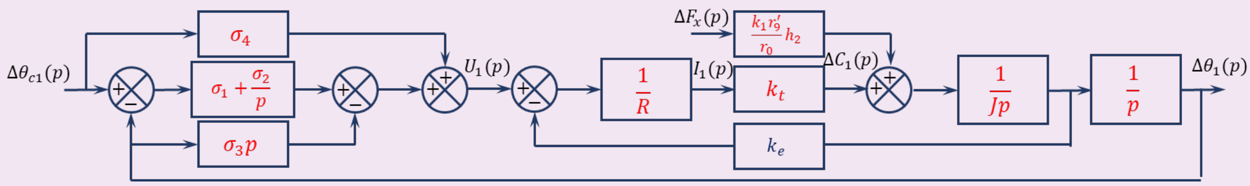
En utilisant l'équation électrique du MCC, on a $U_1(p) = \left(Lp + R\right)I_1(p) + E_1(p)$. En utilisant le schéma-blocs : $I_1(p) = \left(U_1(p) - E(p)\right)D(p)$. On a donc $I_1(p) = \dfrac{U_1(p) - E(p)}{R + Lp}$ et $D(p) = \dfrac{1}{R + Lp}$.

En utilisant l'équation du PID, on a $U_1(p) = \left(\Delta\theta_{c1}(p) - \Delta\theta_1(p)\right)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p}\right) - \sigma_3 p\Delta\theta_1(p) + \sigma_4\Delta\theta_{c1}(p)$ soit $U_1(p) = \left(\Delta\theta_{c1}(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p}\right) - \Delta\theta_1(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p}\right)\right) - \sigma_3 p\Delta\theta_1(p) + \sigma_4\Delta\theta_{c1}(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $U_1(p) = \Delta_{c1}(p)A(p) + \left(\Delta_{c1}(p) - \Delta\theta_1(p)\right)B(p) - \Delta\theta_1(p)C(p) = \Delta_{c1}(p)\left(A(p) + B(p)\right) - \Delta\theta_1(p)\left(B(p) + C(p)\right)$.

Par suite, $U_1(p) = \Delta\theta_{c1}(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_4\right) - \Delta\theta_1(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_3 p\right)$.

On aura donc $B(p) = \sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p}$, $C(p) = \sigma_3 p$ et $A(p) = \sigma_4$.



Question 2 *À partir de ce schéma-blocs, en notant* $H_{processus}(p) = \dfrac{\Delta\theta_1(p)}{U_1(p)} = \dfrac{K}{p(1+\tau p)}$, *exprimer* K *et* τ *en fonction des données de l'énoncé.*

Correction On a $H_{\text{processus}}(p) = \dfrac{D(p)F(p)G(p)}{1 + D(p)F(p)G(p)k_e}H(p)$ soit $H_{\text{processus}}(p) = \dfrac{\dfrac{1}{R+Lp}k_t\dfrac{1}{Jp}}{1 + \dfrac{1}{R+Lp}k_t\dfrac{1}{Jp}k_e}\dfrac{1}{p}$. Avec $L = 0$,

$H_{\text{processus}}(p) = \dfrac{k_t}{RJp + k_t k_e}\dfrac{1}{p} = \dfrac{\dfrac{1}{k_e}}{\dfrac{RJ}{k_t k_e}p + 1}\dfrac{1}{p}$ soit $K = \dfrac{1}{k_e}$ et $\tau = \dfrac{RJ}{k_t k_e}$.

Question 3 *Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée, sous sa forme canonique, notée* $B_F(p) = \dfrac{\Delta\theta_1(p)}{\Delta\theta_{c1}(p)}$ *en fonction de* K, τ, σ_1, σ_2, σ_3 *et* σ_4.

Correction On a vu que $U_1(p) = \Delta\theta_{c1}(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_4\right) - \Delta\theta_1(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_3 p\right)$ et que $\dfrac{\Delta\theta_1(p)}{U_1(p)} = \dfrac{K}{p(1+\tau p)}$.

On a donc $\Delta\theta_1(p)\dfrac{p(1+\tau p)}{K} = \Delta\theta_{c1}(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_4\right) - \Delta\theta_1(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_3 p\right)$

$\Leftrightarrow \Delta\theta_1(p)\left(\dfrac{p(1+\tau p)}{K} + \sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_3 p\right) = \Delta\theta_{c1}(p)\left(\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_4\right)$ et

$$B_F(p) = \dfrac{\sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_4}{\dfrac{p(1+\tau p)}{K} + \sigma_1 + \dfrac{\sigma_2}{p} + \sigma_3 p} = \dfrac{\sigma_1 p + \sigma_2 + \sigma_4 p}{\dfrac{p^2(1+\tau p)}{K} + \sigma_1 p + \sigma_2 + \sigma_3 p^2} = K\dfrac{\sigma_1 p + \sigma_2 + \sigma_4 p}{p^2(1+\tau p) + \sigma_1 K p + \sigma_2 K + \sigma_3 K p^2}$$
$$= K\dfrac{(\sigma_1+\sigma_4)p + \sigma_2}{\tau p^3 + p^2(1+\sigma_3) + \sigma_1 K p + \sigma_2 K}.$$

Exercice 134 – ⋆

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique.*

Question 2 *En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique, déterminer l'expression de la boucle ouverte $H_{BO}(p)$.*

Question 3 *Déterminer l'expression de $G_r(p)$, transmittance en boucle fermée du système avec retard de* 0,2 s.
Le système est soumise à une rampe de 0,1 rad s^{-1}.

Question 4 *Donner la valeur de l'erreur de traînage correspondant à cette entrée, en négligeant le retard.*

Question 5 *Donner la valeur de l'écart statique du système avec retard.*

Question 6 *Donner la valeur de l'erreur de traînage du système avec retard.*

Exercice 133 – Mouvement RR 3D ⋆⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.*
Ça ressemble à un tore, mais c'est pas vraiment un tore :) (aussi bien l'intérieur que l'extérieur...)...

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = R\,\overrightarrow{i_1} + \ell\,\overrightarrow{i_2} + r\,\overrightarrow{j_2}$. Soit $\overrightarrow{AC} = (R+\ell)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{j_0}\right) + r\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{j_1} + \sin\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right) = (R+\ell)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{j_0}\right) + r\left(\cos\varphi\left(\cos\theta\,\overrightarrow{j_0} - \sin\theta\,\overrightarrow{i_0}\right) + \sin\varphi\,\overrightarrow{k_0}\right)$.

On a donc : $\begin{cases} x_C(t) = (R+\ell)\cos\theta - r\cos\varphi\sin\theta \\ y_C(t) = (R+\ell)\sin\theta + r\cos\varphi\cos\theta \\ z_C(t) = r\sin\varphi \end{cases}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Exercice 132 – Mouvement RR 3D ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\,\overrightarrow{i_1} + \ell\,\overrightarrow{i_2} + r\,\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot\theta\,\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$ ($\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{i_2}$).
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = \left(\dot\theta\,\overrightarrow{k_0} + \dot\varphi\,\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot\theta\,\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot\varphi\,\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = -\dot\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + \dot\varphi\,\overrightarrow{k_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = (R+\ell)\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} - r\dot\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + r\dot\varphi\,\overrightarrow{k_2}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*

On a $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$.

- $\overrightarrow{V(C,2/1)}$: on passe par B car B est le centre de la pivot entre 2 et 1 et que $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0}$. $\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \left(-\ell\,\overrightarrow{i_2} - r\,\overrightarrow{j_2}\right) \wedge \dot\varphi\,\overrightarrow{i_1}$
$= -\ell\,\overrightarrow{i_2} \wedge \dot\varphi\,\overrightarrow{i_1} - r\,\overrightarrow{j_2} \wedge \dot\varphi\,\overrightarrow{i_1}$.

$= r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.

- $\overrightarrow{V(C,1/0)}$: on passe par A car A est le centre de la pivot entre 1 et 0 et que $\overrightarrow{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0}$ est nul. $\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)}$
$= \left(-r\overrightarrow{j_2} - \ell\overrightarrow{i_2} - R\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \dot{\theta}\overrightarrow{k_1}$
$= -r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + \ell\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$

Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + \ell\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_1} \\ (R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} \end{array} \right\}_C$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{k_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{k_2} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2} \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R+\ell)\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - (R+\ell)\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1} - r\ddot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - r\dot{\theta}^2\cos\varphi\overrightarrow{j_1} + r\ddot{\varphi}\overrightarrow{k_2} + r\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.

Exercice 131 – ⋆

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Déterminer les expressions littérales de l'erreur statique E_S (consigne : échelon d'amplitude V_0) et de l'erreur de trainage E_T (consigne : rampe de pente γ_0) de cet asservissement corrigé avec $C_1(p)$ en fonction de la consigne, du gain K_N et des paramètres du correcteur et C et T_m.*

Question 2 *En déduire la condition (notée C_ε) sur le gain C du correcteur permettant de satisfaire l'exigence 1.2.3 du cahier des charges.*

On choisit finalement un correcteur PID : $C_2(p) = C\left(1 + \dfrac{1}{T_i p} + T_d p\right)$ avec $T_i = 2T_e$ et $T_d = \dfrac{T_e}{2}$.

Question 3 *Montrer qu'on peut mettre ce correcteur sous la forme $C_2(p) = \dfrac{K}{p}\left(1 + Tp\right)^2$ et donner les expressions de K et de T en fonction de C et T_e.*

Question 4 *Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé.*

Question 5 *Déterminer les expressions littérales de l'erreur statique E_S (consigne : échelon d'amplitude V_0) et de l'erreur de trainage E_T (consigne : rampe de pente γ_0) de cet asservissement corrigé.*

Question 6 *En déduire la condition sur la valeur du gain K du correcteur permettant de satisfaire l'exigence 1.2.3 du cahier des charges.*

Exercice 130 – Mouvement RR 3D ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1} + L\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_0}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{0}$;

DDS

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_1} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = \left(\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2}\right) \wedge \overrightarrow{i_2} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_2} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2} \wedge \overrightarrow{i_2} = -\dot{\theta}\cos\varphi\,\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2}$.

On a donc $\overrightarrow{V(C,2/0)} = -R\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1} + L\left(-\dot{\theta}\cos\varphi\,\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2}\right)$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition du vecteur vitesse.*

$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$.

- Pour calculer $\overrightarrow{V(C,2/1)}$, passons par B car $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -L\,\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2} = L\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2}$.
- Pour calculer $\overrightarrow{V(C,1/0)}$, passons par A car $\overrightarrow{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -\left(H\,\overrightarrow{j_1} + R\,\overrightarrow{i_1} + L\,\overrightarrow{i_2}\right) \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\left(R\,\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{j_1} + L\,\overrightarrow{i_2} \wedge \overrightarrow{j_1}\right) = -\dot{\theta}\left(R\,\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\,\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right)$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_0} \\ L\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\,\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right) \end{array}\right\}_C .$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\,\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}.$$

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = \left(\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1}\right) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\sin\varphi\,\overrightarrow{k_1} - \dot{\theta}\,\overrightarrow{i_2}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = L\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2} + L\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\,\overrightarrow{k_1} - \dot{\theta}\,\overrightarrow{i_2}\right) - \ddot{\theta}\left(R\,\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right) - \dot{\theta}\left(R\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1} + L\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1} - L\dot{\varphi}\sin\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right)$.

Exercice 129 – Tuyère à ouverture variable★

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

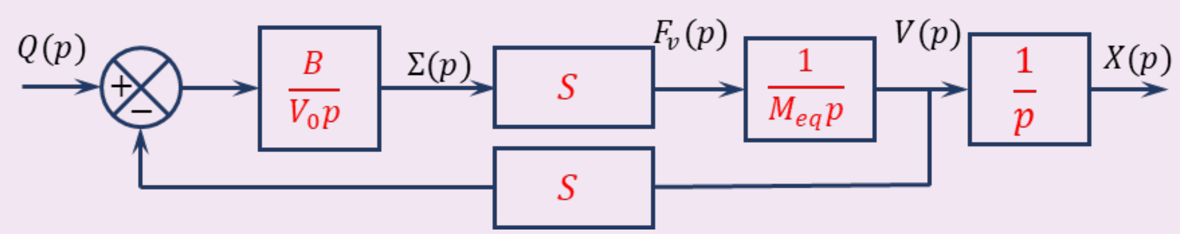
Présentation du système

Objectif On souhaite vérifier que le système permet de respecter le cahier des charges suivant :
- temps de réponse à 5% : 4 s au maximum;
- précision : l'erreur statique doit être nulle;
- précision : l'erreur de traînage doit être inférieure à 1 mm pour une consigne de 25 mm s^{-1}.

Modélisation du comportement du vérin – hypothèse fluide compressible

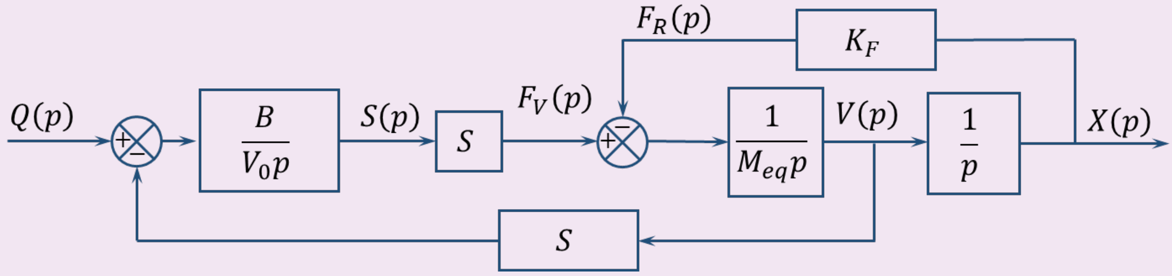
Question 1 *À partir des équations, compléter le schéma-blocs en indiquant les fonctions de transferts de chaque bloc.*

Correction



Question 2 *Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer l'effort résistant.*

Correction



Question 3 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_V(p)=\dfrac{X(p)}{Q(p)}$. On donnera le résultat sous la forme $H_V(p)=\dfrac{K_V}{p\left(1+a_2p^2\right)}$ en précisant les expression de K_V et a_2.*

Correction

$$H_{BI}(p)=\frac{\dfrac{1}{M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{K_F}{M_{éq}p^2}}=\frac{1}{K_F+M_{éq}p^2}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{B}{V_0p}S\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0p}S^2\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}p}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{B}{V_0p}S\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0p}S^2\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}p}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{B}{V_0p}S\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0}S^2\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{B}{V_0p}S\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0}S^2\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{BS}{V_0p}}{K_F+M_{éq}p^2+\dfrac{BS^2}{V_0}}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{\dfrac{BS}{V_0}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}}{p\left(1+\dfrac{M_{éq}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}p^2\right)}$$

$$Kv=\frac{\dfrac{BS}{V_0}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}$$

$$a_2=\frac{M_{éq}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}$$

Validation du comportement du vérin

Question 4 *Donner l'expression de la forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)=\dfrac{X(p)}{X_{ref}(p)}$. On donnera le résultat en fonction de K_C, K_U, K_D, K_p, K_V et a_2.*

Correction

DDS

$$H_{BF}(p)=\frac{X(p)}{X_{ref}(p)}=\frac{K_cK_pK_uK_D\dfrac{K_V}{p\left(1+a_2p^2\right)}}{1+K_cK_pK_uK_D\dfrac{K_V}{p\left(1+a_2p^2\right)}}$$

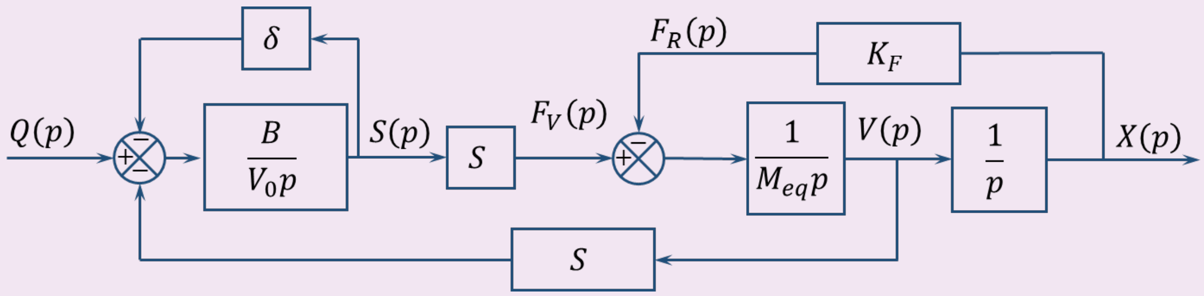
$$H_{BF}(p)=\frac{1}{1+\dfrac{p\left(1+a_2p^2\right)}{K_cK_pK_uK_DK_V}}$$

$$H_{BF}(p)=\frac{1}{1+\dfrac{p}{K_cK_pK_uK_DK_V}+\dfrac{a_2}{K_cK_pK_uK_DK_V}p^3}$$

Prise en compte du débit de fuite

Question 5 *Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer le débit de fuite.*

Correction



Question 6 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin* $H_V(p)=\dfrac{X(p)}{Q(p)}$. *On donnera le résultat sous la forme* $H_V(p)=\dfrac{K_V}{p\left(1+a_1 p+a_2 p^2+a_3 p^3\right)}$ *en précisant les expression de* K_V, a_1, a_2 *et* a_3.

Correction

$$H_{B1}(p)=\frac{\frac{B}{V_0 p}}{1+\frac{\delta B}{V_0 p}}=\frac{\frac{1}{\delta}}{1+\frac{V_0}{\delta B}p}$$

$$H_v(p)=\frac{\frac{B}{\delta B+V_0 p}S\frac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\frac{B}{\delta B+V_0 p}S^2\frac{1}{K_F+M_{éq}p^2}p}$$

$$H_v(p)=\frac{BS}{(\delta B+V_0 p)(K_F+M_{éq}p^2)+BS^2 p}$$

$$H_v(p)=\frac{BS}{\delta BK_F+K_F V_0 p+\delta BM_{éq}p^2+V_0 M_{éq}p^3+BS^2 p}$$

$$H_v(p)=\frac{\frac{S}{\delta K_F}}{1+\frac{K_F V_0+BS^2}{\delta BK_F}p+\frac{M_{éq}}{K_F}p^2+\frac{V_0 M_{éq}}{\delta BK_F}p^3}$$

$$K_v=\frac{S}{\delta K_F}$$

$$a_1=\frac{K_F V_0+BS^2}{\delta BK_F}$$

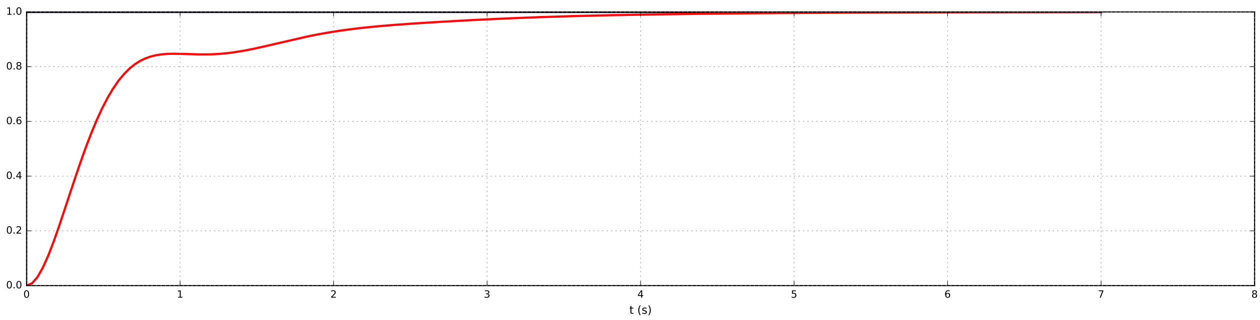
$$a_2=\frac{M_{éq}}{K_F}$$

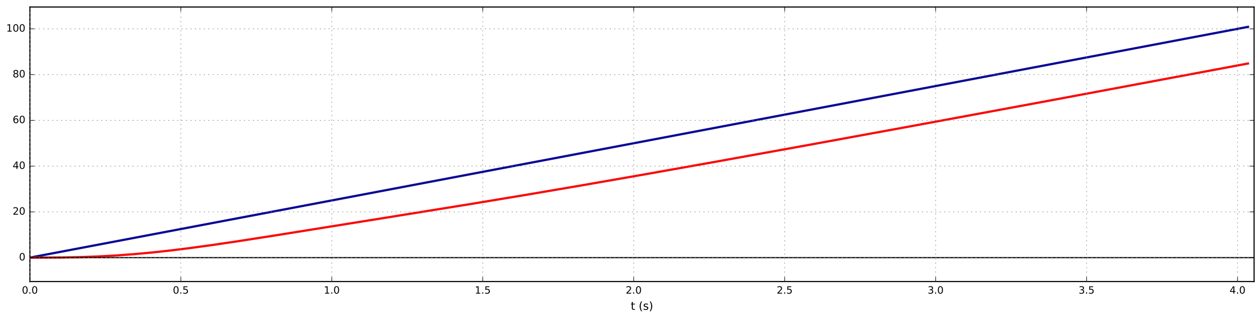
$$a_3=\frac{V_0 M_{éq}}{\delta BK_F}$$

Retour sur le cahier des charges

On donne la réponse à un échelon et à une rampe de pente $25\,\text{mm}\,\text{s}^{-1}$.

Question 7 *Le cahier des charges est-il vérifié ?*





Exercice 128 – Robovolc⋆

B2-16

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Réaliser le graphe de liaisons.*

Question 2 *Calculer le degré d'hyperstatisme.*

Question 3 *Si le modèle est hyperstatique, modifier le modèle pour le rendre isostatique.*

Exercice 127 – Hemostase – Stabilité⋆

C2-03

Question 1 *Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\varepsilon(p)}\right)_{C_r(p)=0}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Z_c=0}$.*

$$H_{\text{bo}}(p) = H_{\text{cor}}(p)\frac{K_1}{p\left(1+T_m p\right)} = \frac{K_1 K_p}{p\left(1+T_m p\right)}.$$

$$H_{\text{cr}}(p) = -K_2 \frac{\dfrac{K_1}{p\left(1+T_m p\right)}}{1+H_{\text{cor}}(p)\dfrac{K_1}{p\left(1+T_m p\right)}} = -K_2\frac{K_1}{p\left(1+T_m p\right)+H_{\text{cor}}(p)K_1} = -\frac{K_1 K_2}{p\left(1+T_m p\right)+K_p K_1}$$

Question 2 *Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0}, dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.*

Exprimons $\varepsilon(p)$ en fonction de $Z_c(p)$ et $C_r(p)$:

$$\varepsilon(p) = Z_c(p) - Z(p) = Z_c(p) - \left(\varepsilon(p)H_{\text{cor}}(p) - K_2 C_r(p)\right)\frac{K_1}{p\left(1+T_m p\right)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1+H_{\text{cor}}(p)\frac{K_1}{p\left(1+T_m p\right)}\right) = Z_c(p) + K_2 C_r(p)\frac{K_1}{p\left(1+T_m p\right)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = Z_c(p)\frac{1}{1+H_{\text{cor}}(p)\frac{K_1}{p(1+T_m p)}} + K_2 C_r(p)\frac{K_1}{p(1+T_m p)}\frac{1}{1+H_{\text{cor}}(p)\frac{K_1}{p(1+T_m p)}}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = Z_c(p)\frac{p(1+T_m p)}{p(1+T_m p)+H_{\text{cor}}(p)K_1} + K_2 C_r(p)\frac{K_1}{p(1+T_m p)+H_{\text{cor}}(p)K_1}$$

En prenant une entrée échelon et une perturbation échelons, on a $Z_c(p) = \dfrac{Z_{c0}}{p}$ et $C_r(p) = \dfrac{C_{r0}}{p}$.

On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} Z_{c0}\dfrac{p(1+T_m p)}{p(1+T_m p)+H_{\text{cor}}(p)K_1} + K_2 C_{r0}\dfrac{K_1}{p(1+T_m p)+H_{\text{cor}}(p)K_1} = \dfrac{K_2 C_{r0}}{K_p}$.

AN : $\varepsilon_s < 1\,\text{mm} \Leftrightarrow \dfrac{K_2 C_{r0}}{K_p} < 1\,\text{mm} \Leftrightarrow 2,78\cdot 10^{-2} \times 2,7\cdot 10^{-3} \times 10^3 < K_p$ soit $K_p > 0,08$.

Question 3 *Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.*

En ajoutant le gain de 0,08, il faut translater la courbe de gain vers le bas de 22 dB.

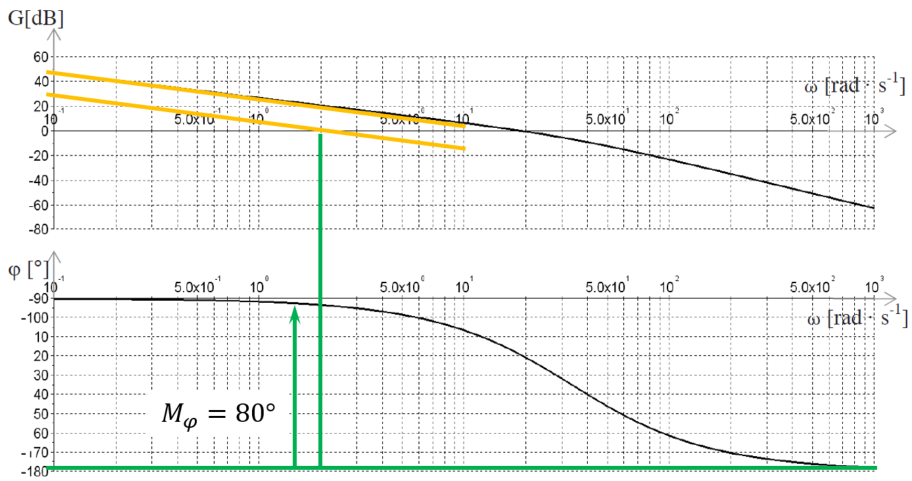


Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ pour $K_p = 1$

La marge de phase est supérieure à 60°.

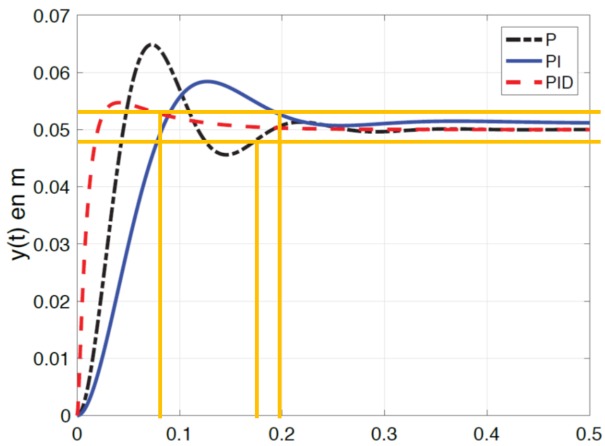
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{\text{cor}}(p) = \frac{K_p(1+T_i\cdot p)}{T_i\cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1\,\text{s}$.

Question 4 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1\,\text{s}$.*

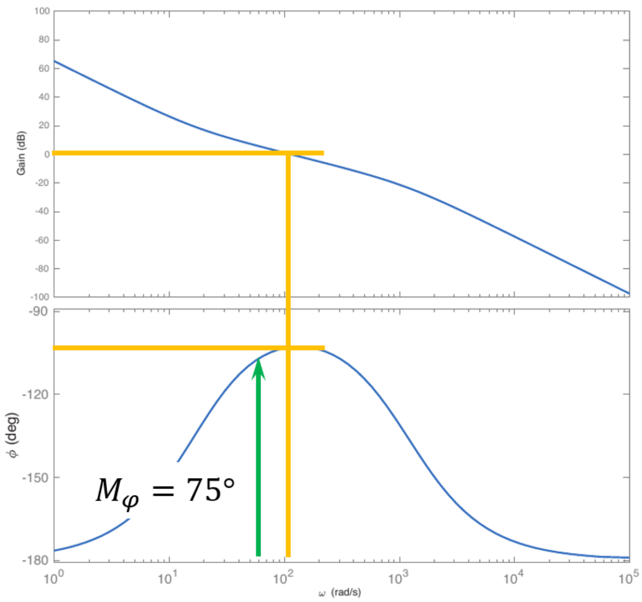
Question 5 *On souhaite une marge de phase d'au moins 60°. Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges.*

Question 6 *La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.*

	P	PI	PID
Temps de réponse < à 5 % < 0,2 s	Ok	Ok	Ok
Précision < 1 mm	Ok (?)	Ok	Ok
Dépassement < à 10 % < 0,2 s	Pas Ok	Pas Ok	Ok



Question 7 *Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.*



La marge de phase est supérieure à 60°.

Exercice 126 – Mouvement RR 3D ★★

C2-05

B2-13

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.*

Le point C peut décrire un tore de grand rayon R et de petit rayon L (surface torique uniquement, pas l'intérieur du tore).

Question 2 *Donner l'équation de mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC} = H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1} + L\overrightarrow{i_2} = H\overrightarrow{j_0} + R\cos\theta\overrightarrow{i_0} - R\sin\theta\overrightarrow{k_0} + L\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + L\sin\varphi\overrightarrow{j_1} = H\overrightarrow{j_0} + R\cos\theta\overrightarrow{i_0} - R\sin\theta\overrightarrow{k_0} + L\cos\varphi\left(\cos\theta\overrightarrow{i_0} - \sin\theta\overrightarrow{k_0}\right) + L\sin\varphi\overrightarrow{j_0}$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} x_C(t) = R\cos\theta + L\cos\varphi\cos\theta \\ y_C(t) = H + L\sin\varphi \\ z_C(t) = -R\sin\theta - L\cos\varphi\sin\theta \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Exercice 125 – Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(2/0)\}$ en B.*

Par définition, $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B,2/0)} \end{array}\right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(2/0)}$: $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)} = m_2\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$

Calcul de $\overrightarrow{V(C,2/0)}$:

$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_1}+L\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_0}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{0}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{i_1} = \dot\theta\overrightarrow{j_1}\wedge\overrightarrow{i_1} = -\dot\theta\overrightarrow{k_1}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{i_2} = \left(\dot\theta\overrightarrow{j_1}+\dot\varphi\overrightarrow{k_2}\right)\wedge\overrightarrow{i_2} = \dot\theta\overrightarrow{j_1}\wedge\overrightarrow{i_2}+\dot\varphi\overrightarrow{k_2}\wedge\overrightarrow{i_2} = -\dot\theta\cos\varphi\overrightarrow{k_1}+\dot\varphi\overrightarrow{j_2}$.

On a donc $\overrightarrow{V(C,2/0)} = -R\dot\theta\overrightarrow{k_1}+L\left(-\dot\theta\cos\varphi\overrightarrow{k_1}+\dot\varphi\overrightarrow{j_2}\right)$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$:

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$

$= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\dot\varphi\overrightarrow{j_2}-\dot\theta\left(R\overrightarrow{k_1}+L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right)\right]_{\mathcal{R}_0}$.

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{j_2} = \left(\dot\theta\overrightarrow{j_1}+\dot\varphi\overrightarrow{k_1}\right)\wedge\overrightarrow{j_2} = \dot\theta\overrightarrow{j_1}\wedge\overrightarrow{j_2}+\dot\varphi\overrightarrow{k_1}\wedge\overrightarrow{j_2} = \dot\theta\sin\varphi\overrightarrow{k_1}-\dot\varphi\overrightarrow{i_2}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot\theta\overrightarrow{i_1}$.

Avec les hypothèses, on a $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = L\dot\varphi\left(\dot\theta\sin\varphi\overrightarrow{k_1}-\dot\varphi\overrightarrow{i_2}\right)-\dot\theta\left(R\dot\theta\overrightarrow{i_1}+L\cos\varphi\dot\theta\overrightarrow{i_1}-L\dot\varphi\sin\varphi\overrightarrow{k_1}\right)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(C,2/0)}$

C est le centre d'inertie du solide 2 ; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(C,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(C,2/0)} = I_C(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}$.

Or $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot\theta\overrightarrow{j_1}+\dot\varphi\overrightarrow{k_2} = \dot\theta\left(\cos\varphi\overrightarrow{j_2}+\sin\varphi\overrightarrow{i_2}\right)+\dot\varphi\overrightarrow{k_2}$.

$$\overrightarrow{\sigma(C,2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} \dot\theta\sin\varphi \\ \dot\theta\cos\varphi \\ \dot\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \dot\theta A_2\sin\varphi \\ \dot\theta B_2\cos\varphi \\ C_2\dot\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

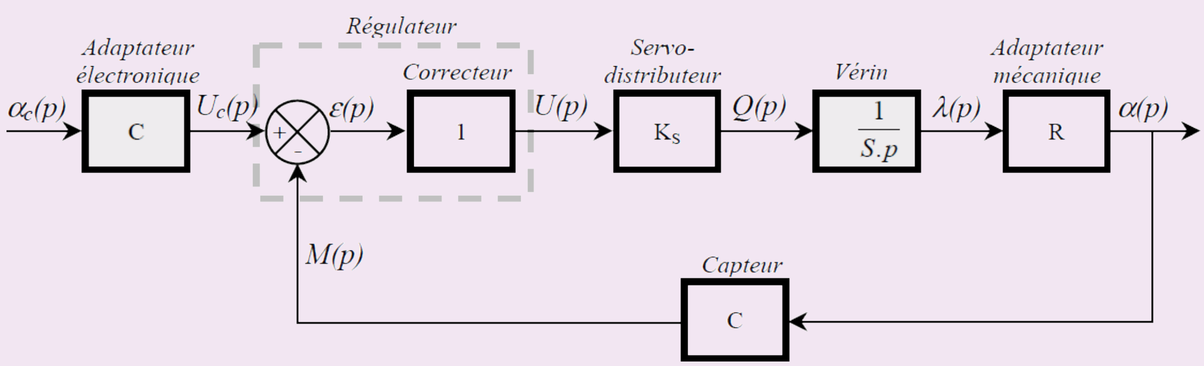
Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{j_0}$

Exercice 124 – Véhicule à trois roues Clever⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_{V1}(p)$ (telle que $\lambda(p) = H_{V1}(p)Q(p)$) et compléter le schéma-bloc associé à la modélisation actuelle du système.*

Correction



Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF_1$ (telle que $\alpha(p) = FTBF_1(p)\alpha_c(p)$) du système bouclé. Mettre $FTBF_1(p)$ sous la forme $\dfrac{K_1}{1+\tau_1 p}$ en précisant les expressions de K_1 et de τ_1.*

Correction

$$FTBF_1(p) = \frac{C\frac{K_S.R}{S.p}}{1+C\frac{K_S.R}{S.p}} = \frac{C.K_S.R}{S.p+C.K_S.R} = \frac{1}{1+\frac{S}{C.K_S.R}.p}$$

Question 3 *À partir du critère de temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) du système, déterminer l'expression puis la valeur numérique minimale du gain du servo-distributeur.*

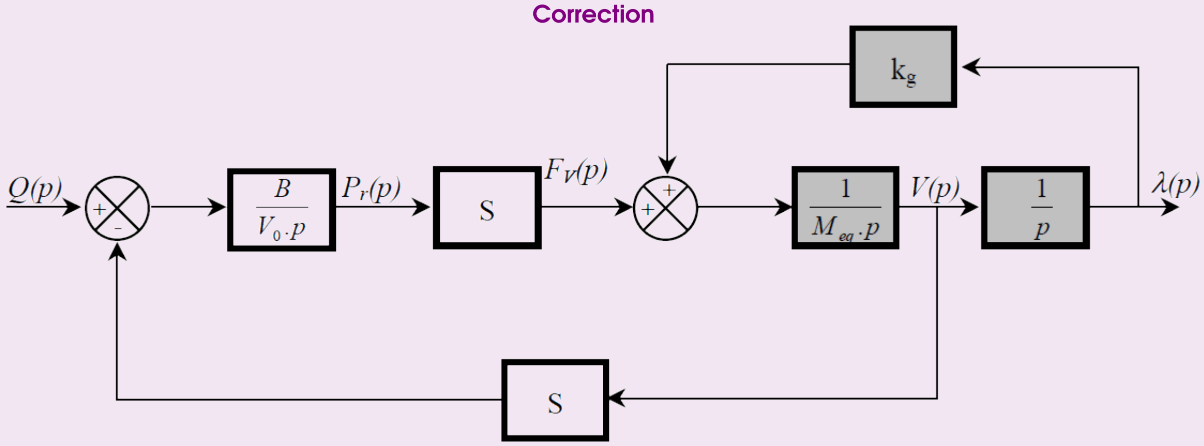
Correction

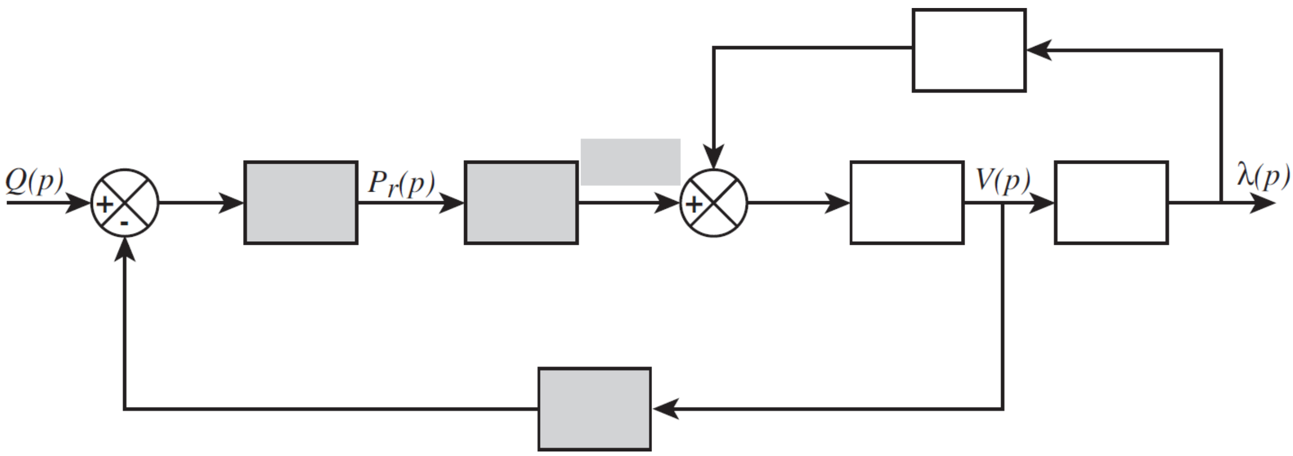
$t_{R5\%} = \frac{3.S}{C.K_S.R}$ soit pour avoir $t_{R5\%} \leq 0{,}1\ s = t_0$ il faut que :

$$K_S > \frac{3.S}{C.R.t_0} = \frac{3\times\pi\times16^2\times10^{-6}}{1\times\frac{\pi}{180}\times400\times0{,}1} = 3\times18\times4\times16\times10^{-6} = 3{,}456.10^{-3}\ m^3s^{-1}V^{-1}$$

Question 4 *Appliquer la transformation de Laplace aux équations précédentes et compléter le schéma-blocs.*

Correction





Question 5 *Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée du vérin H_{V2} (telle que $\lambda(p)=H_{V2}Q(p)$) et préciser les expressions des coefficients K_V et ω_V de sa forme canonique :* $H_{V2}(p)=\dfrac{K_V}{p\left(1+\dfrac{p^2}{\omega_V^2}\right)}$.

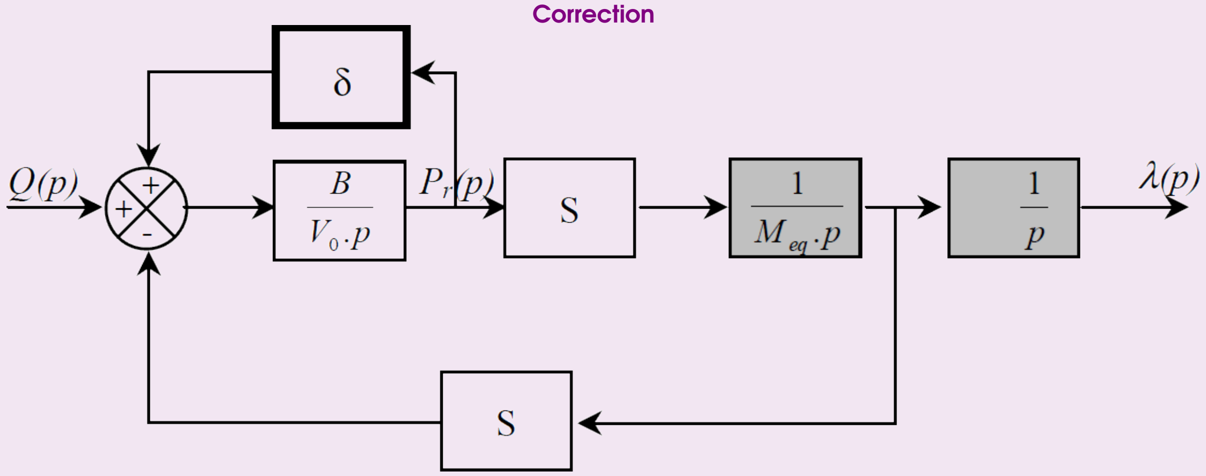
Correction

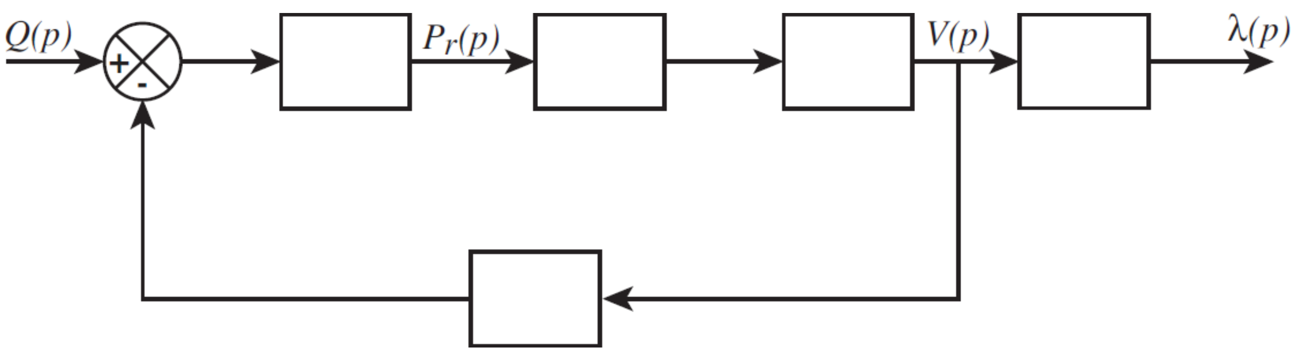
$$H_{V2}(p)=\frac{\dfrac{BS}{V_0.p}\,\dfrac{\dfrac{1}{M_{eq}.p^2}}{1-k_g.\dfrac{1}{M_{eq}.p^2}}}{1+\dfrac{BS^2}{V_0}\,\dfrac{1}{M_{eq}.p^2-k_g}}=\frac{BS}{V_0.p.\left(M_{eq}.p^2-k_g\right)+BS^2.p}=\frac{\dfrac{BS}{BS^2-k_g.V_0}}{p.\left(1+\dfrac{V_0.M_{eq}}{BS^2-V_0.k_g}.p^2\right)}$$

$$\boxed{H_{V2}(p)=\frac{\dfrac{BS}{BS^2-k_g.V_0}}{p.\left(1+\dfrac{V_0.M_{eq}}{BS^2-V_0.k_g}.p^2\right)}}\qquad \boxed{K_V=\frac{BS}{BS^2-k_g.V_0}}\qquad \boxed{\omega_V=\left(\frac{BS^2-V_0.k_g}{V_0.M_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Question 6 *Proposer une modification du schéma-bloc donné afin de prendre en compte le débit de fuite.*

Correction





Question 7 *Déterminer l'expression de la fonction de transfert H_{V3} (telle que $\lambda(p)=H_{V3}Q(p)$) associée au comportement dynamique du vérin ainsi modélisé. On donnera le résultat sous la forme suivante :* $H_{V3}(p)=\dfrac{K_V}{p\left(1+a_1p+\dfrac{p^2}{\omega_V^2}\right)}$.

Donner l'expression de a_1 en fonction de M_{eq}, δ et S et déterminer l'expression du coefficient d'amortissement ξ_V du *second ordre en fonction de M_{eq}, δ, S, B et V_0.*

Correction

$$Q(p) = S\lambda .p + \frac{V_0}{B} p.P_r(p) - \delta .P_r(p)$$

$$H_{V2}(p) = \frac{\dfrac{\dfrac{B}{V_0.p}}{1-\dfrac{B\delta}{V_0.p}} \dfrac{S}{M_{eq}.p} \dfrac{1}{p}}{1+\dfrac{\dfrac{B}{V_0.p}}{1-\dfrac{B\delta}{V_0.p}} \dfrac{S^2}{M_{eq}.p}} = \frac{BS}{(V_0.p - B\delta).M_{eq}.p^2 + BS^2.p} = \frac{\dfrac{1}{S}}{p\left(1-\dfrac{\delta .M_{eq}}{S^2}.p + \dfrac{V_0.M_{eq}}{BS^2}.p^2\right)}$$

$$\frac{2\xi_V}{\omega_V} = -\frac{\delta .M_{eq}}{S^2} \text{ et } \omega_V = \left(\frac{BS^2}{V_0.M_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ soit } \xi_V = -\frac{1}{2}\frac{\delta .M_{eq}}{S^2}\left(\frac{BS^2}{V_0.M_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\delta\left(\frac{BM_{eq}}{V_0.S^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Question 8 *Quels sont les critères du cahier des charges validés?*

Correction

- Ecart de traînage = 0 $\Rightarrow$ validé
- Ecart dynamique (dépassement pour entrée en trapèze) = 0,8° $\Rightarrow$ validé
- *Temps de réponse lié à la bande passante et l'amortissement $\Rightarrow$ validé (ne peut pas être lu sur une entrée en trapèze).*

Exercice 123 – ⋆

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $H_{BO}(p)$ pour des pulsations comprises entre* 0,5 rad s^{-1} *et* 50 rad s^{-1}.

Question 2 *Tracer le diagramme de Bode du retard pour des pulsations comprises entre* 0,5 rad s^{-1} *et* 50 rad s^{-1}.

Question 3 *Déterminer le gain K_c qui donne une marge de phase de 50°.*

Question 4 *La constante T_c qui laisse subsister une marge de phase d'environ 45°.*

Question 5 *Quelle est l'erreur de traînage du système corrigé pour l'entrée en rampe considérée (en négligeant le retard).*

Exercice 122 – Mouvement RR 3D ⋆⋆

C2-08

C2-09

Question 1 *Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(1/0)\}$ en B.*

Par définition, $\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B,1/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$

$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1,1/0)} = m_1\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$

Calcul de $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ **:** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\,\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$ **:** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}$.

Au final, $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1\left(R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}\right)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(B,1/0)}$ B est le centre d'inertie du solide 1 ; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(B,1/0)} = I_B(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} = C_1\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0}$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(B,1/0)} = C_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{k_0}$.

Au final, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{l} m_1\left(R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}\right) \\ C_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_B$.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$

Tout d'abord, $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)} = \overrightarrow{\delta(A,1/0)} + \overrightarrow{\delta(A,2/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$ **– Méthode 1**

$\overrightarrow{\delta(A,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(\overrightarrow{\delta(B,1/0)} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_d(1/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(C_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} + R\,\overrightarrow{i_1}\wedge m_1\left(R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$ **– Méthode 1**

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}\cdot\overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}\right]_{\mathcal{R}_0} - \underbrace{\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_0}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}$.

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(I_A(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

$I_A(2) = I_{G_2}(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_2} = \dot{\theta}\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j_2}\right) + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_2}$.

On a donc $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2m_2R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi\left(B_2 + m_2R^2\right) \\ \dot{\theta}\cos\varphi\left(C_2 + m_2R^2\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

De plus $\overrightarrow{k_1} = \cos\varphi\,\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j_2}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}\sin^2\varphi\left(B_2 + m_2R^2\right) + \dot{\theta}\cos^2\varphi\left(C_2 + m_2R^2\right)$.

Enfin, $\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(B_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right)$.

Conclusion

$\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta} + \left(B_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right)$.

Exercice 121 – Scooter Piaggio ⋆

B2-16

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Réaliser le graphe de liaisons du système de direction. On considèrera le sol comme une classe d'équivalence.*

Question 2 *Calculer le degré d'hyperstatisme.*

Question 3 *Si le modèle est hyperstatique, modifier le modèle pour le rendre isostatique.*

Exercice 120 – Mouvement RR – RSG ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse : $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

- **Calcul de** $\overrightarrow{V(B,2/1)}$ **:** $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{V(A,2/1)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)}$. 2 et 1 étant en pivot d'axe $\left(A,\overrightarrow{k_0}\right)$, on a $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0} - L\,\overrightarrow{i_2}\wedge\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} = L\dot{\varphi}(t)\,\overrightarrow{j_2}$.

- **Calcul de $\overrightarrow{V(B,1/0)}$:** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - L\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0}$. En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement : $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \left(-L\overrightarrow{i_1} - R\overrightarrow{j_0}\right) \wedge \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)} = L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \left(\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{k_0} \\ L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right) \end{array} \right\}_B.$$

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}$$
$$= L\ddot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} - L\dot{\varphi}(t)\left(\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{i_2} + \ddot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right) - L\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}.$$

Exercice 119 – Mouvement RR – RSG ⋆⋆

C2-08

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\delta(I, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$*