

Chapitre 1

Approche énergétique

Savoirs et compétences :

- Mod2.C16 : torseur cinétique
- Mod2.C17 : torseur dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

1	Introduction	2
1.1	Objectif de la modélisation	2
2	Puissance	2
2.1	Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel	2
2.2	Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide	2
2.3	Puissance d'actions mutuelles entre deux solides	2
2.4	Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons	3
3	Travail	3
3.1	Définition	3
3.2	Travail conservatif	3
4	Énergie cinétique	4
4.1	Définition	4
4.2	Propriétés	4
4.3	Énergie cinétique équivalente	5
5	Théorème de l'énergie cinétique	5
5.1	Introduction	5
5.2	Énoncé pour un solide	5
5.3	Énoncé pour un ensemble de solides	5
6	Notion de rendement énergétique	5
6.1	Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle	5
6.2	Détermination d'une puissance dissipée	6

1 Introduction

1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible;
- déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système;
- estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

2 Puissance

2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

Définition **Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel** On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure** à un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un référentiel R subissant une densité d'effort $\vec{f}(M)$ (où M est un point courant de (E)) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overrightarrow{V(M, E/R)} dV.$$

R On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel (E) en mouvement dans un **référentiel galiléen** $R_g : \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$.

! Dimensions et homogénéité.

- Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en *Watt*.
- Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en Nms^{-1} .
- Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

Propriété **Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble E** On considère un ensemble matériel E composé de n solides S_i .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur E dans son mouvement par rapport à R il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les S_i venant de l'extérieur de E :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

Définition **Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide (S)** La **puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide (S) en mouvement dans un référentiel R peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit (S) et le torseur cinématique du mouvement de S dans le référentiel R .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

R ! On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

- Le comoment des torseurs est défini par $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \end{array} \right\}_P \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S/R)} \\ \overrightarrow{V(P, S/R)} \end{array} \right\}_P$
 $= \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- Lorsque le torseur cinématique de S/R est un couple (mouvement de translation) alors en tout point A la puissance est alors donnée par $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$.
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$.

2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

Définition Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

Soient deux solides (S_1) et (S_2) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R_g , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles** entre (S_1) et (S_2), dans leur mouvement par rapport au repère R , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_g).$$

La puissance des actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) **est indépendante du repère R** . Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

R

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble E , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble E :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

Définition Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons Si deux solides S_1 et S_2 sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de S_2 par rapport à S_1 autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

R

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide S_1 et S_2 . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

3 Travail

3.1 Définition

Définition Travail

Le travail entre deux instants t_1 et t_2 d'une action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel E dans son mouvement par rapport au repère R est donné par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

R

On peut également définir le travail élémentaire par :

$$dW(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

- Le travail est une grandeur scalaire.
- L'unité de travail est le **Joule**.
- Le travail est homogène au **produit entre une force et une distance**.

3.2 Travail conservatif

Définition Travail conservatif

On dit que le **travail est conservatif** (noté $W_c^{t_2}_{t_1}(\text{ext} \rightarrow E/R)$) s'il est indépendant du chemin suivi pour passer de l'état initial (instant t_1) à l'état final (instant t_2). Dans ce cas là il existe une grandeur appelée énergie potentielle de l'action mécanique extérieure à E dans son mouvement par rapport à R qui vérifie :

$$dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = -dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R) \quad \text{avec} \quad dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\frac{dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R)}{dt}.$$

(R)

- On dit que la puissance à travail conservatif dérive d'une énergie potentielle (au signe près).
- L'énergie potentielle est une primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près arbitraire.

3.2.1 Énergie potentielle de la pesanteur

Définition Énergie potentielle de la pesanteur

L'**énergie potentielle** associée à l'action de la pesanteur sur un ensemble matériel (E) de masse m dans son mouvement par rapport à R est donnée par :

$$E_p(g \rightarrow E/R) = m g z_G + k.$$

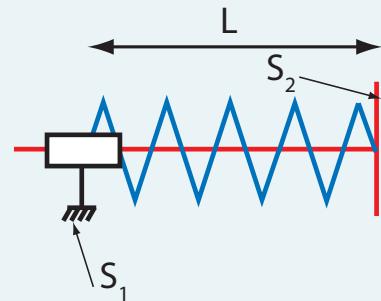
Où z_G correspond à la position du centre de gravité G de S suivant la verticale ascendante \vec{z} (colinéaire au champs de pesanteur \vec{g}) et k une constante.

3.2.2 Énergie potentielle associée à un ressort

Définition Énergie potentielle associée à un ressort

L'**énergie potentielle associée à l'action d'un ressort** r de raideur K et de longueur à vide L_0 situé entre deux solides S_1 et S_2 dans son mouvement par rapport à R est donnée par :

$$E_p(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \frac{K}{2}(L - L_0)^2 + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$



4 Énergie cinétique

4.1 Définition

Définition Énergie cinétique

On définit l'**énergie cinétique** E_c d'un système matériel S en mouvement dans un référentiel R comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant P de S pondéré de la masse élémentaire :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{V}(P/R))^2 dm.$$

4.2 Propriétés

Propriété Expression avec les comoments L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{C}(S/R)\}.$$

!

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

Propriété Cas particuliers

- Solide S de masse M de centre d'inertie G en mouvement de **translation** par rapport à R :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V(G, S/R)}^2.$$

- Solide S de moment d'inertie $I_{Oz}(S)$ en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe** (O, \vec{z}) par rapport à R :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/R)}^2.$$

4.3 Énergie cinétique équivalente

Définition Énergie cinétique équivalente

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble E composé de n solides S_i en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire $E_c(E/R)$

avec **son inertie équivalente** $J_{\text{eq}}(E)$ (en kg m^2) rapportée à un paramètre de rotation $\dot{\theta}(t)$:

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente** $M_{\text{eq}}(E)$ (en kg) rapportée à un paramètre de translation $\dot{x}(t)$:

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

5 Théorème de l'énergie cinétique

5.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

5.2 Énoncé pour un solide

Théorème Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_g est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

5.3 Énoncé pour un ensemble de solides

Théorème Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides Soit (E) un ensemble de n solide (S_1, S_2, \dots, S_n) en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c(E/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/R_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ la puissance intérieure à E qui est nulle si l'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites) ;
- $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$, la puissance galiléenne de E dans son mouvement par rapport à R_g .

(R)

- Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel E que l'on considère.
- Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- Pour obtenir une équation de mouvement (*ie* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

6 Notion de rendement énergétique

6.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- en **régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs ;

- en **régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

Définition Rendement d'une chaîne fonctionnelle Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- $\eta \in [0, 1]$;
- $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$ définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**;
- $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$ définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

Propriété Rendement global d'une chaîne d'énergie Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant n éléments de rendements η_i est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs η_i étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

6.2 Détermination d'une puissance dissipée

Propriété Estimation des dissipations

On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement η :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$

Références

[1] Émilien Durif, *Approche énergétique des systèmes, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.*

Activation 1 – Corrigé



Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Question 1 Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

Correction

Question 2 Déterminer l'expression de $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

Question 3 Calculer $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ en fonction des données du problème.

Correction On a :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

- $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{01} \cdot \vec{x}_0 \pm C_r \cdot \vec{y}_0 + N_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \pm C_r \cdot \dot{\theta}(t).$
Le signe de la composante suivant \vec{y}_0 dépendra du sens du mouvement de S_1/S_0 .
- $\mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = C_m \cdot \dot{\theta}(t).$
- $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{03} \cdot \vec{x}_0 \pm Y_{03} \cdot \vec{y}_0 + Z_{03} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{03} \cdot \vec{x}_0 + M_{03} \cdot \vec{y}_0 + N_{03} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{G_3} = \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t).$
- $\mathcal{P}(\text{Poids} \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -M_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{G_3} = 0.$

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

Question 4 Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble E : $\mathcal{P}_{int}(E)$.

Correction

- D'après le graphe des liaisons : $\mathcal{P}_{int}(E) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) + \mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3)$.
- Calcul de $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0 + Z_{12} \vec{z}_0 \\ L_{12} \vec{x}_0 + M_{12} \vec{y}_0 + N_{12} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} q_{21} \vec{y}_0 \\ v_{12} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_0} = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12}$. Or, $\begin{cases} M_{12} = -\frac{p}{2\pi} Y_{12} \\ v_{12} = \frac{p}{2\pi} q_{21} \end{cases}$. D'où : $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi} [Y_{12} \cdot q_{21} - q_{21} \cdot Y_{12}] = 0$.

- Calcul de $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3) = \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} A \\ X_{23} \vec{x}_0 + Y_{23} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} A \\ p_{32} \vec{x}_0 + q_{32} \vec{y}_0 + r_{32} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{w_{32}, \vec{z}_0}$
- On en déduit donc : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$.

Question 5 Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0

Correction

- Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à R_0 :

$$E_c(E/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

- Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} \{\mathcal{C}(1/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_0)\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} * \\ \bar{I}_{O_0}(S_1) \cdot \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_0} = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 \bar{I}_{O_0}(S_1) \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0] = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2.$
- Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \{\mathcal{C}(2/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_0)\} = 0$ car l'inertie de 2 est négligeable.
- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2} \{\mathcal{C}(3/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} - \\ M_3 \cdot \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} - \\ 0 \end{array} \right\}_{\dot{y}(t), \vec{y}_0} = \frac{1}{2} M_3 \cdot \dot{y}^2(t).$
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble E : $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)].$

Question 6 Déterminer la mobilité du système.

Correction

Ici la mobilité vaut 1.

Question 7 Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

Correction

Par une fermeture cinématique on pourrait montrer : $\dot{y}(t) = -\frac{p}{2\pi} \dot{\theta}(t)$.

Question 8 Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe (O_0, \vec{y}_0) et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.

Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) + M_3 \cdot (\frac{p}{2\pi})^2] \cdot \dot{\theta}^2(t) \text{ d'où, } J_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) + M_3 \cdot (\frac{p}{2\pi})^2.$$

Question 9 Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction \vec{y}_0 et du paramètre $\dot{y}(t)$.

Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot (\frac{2\pi}{p})^2 + M_3] \cdot \dot{y}^2(t) \text{ d'où, } M_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) \cdot (\frac{2\pi}{p})^2 + M_3.$$

Question 10 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E .

Correction

En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient : $M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t) + 0$.

On peut postuler un sens de déplacement : $\dot{y}(t) > 0$, ainsi $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p} \dot{y}(t) < 0$, $C_r > 0$, $Y_{03} < 0$: $M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = [-(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} + Y_{03}] \cdot \dot{y}(t)$

Question 11 Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équa-

tion de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.

Correction Il faut éliminer le paramètre Y_{03} . Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliquée à S_3 en projection selon $\vec{z}_0 : Z_{03} - M_3 \cdot g = 0$.

Or la loi de Coulomb donne (avec $Z_{03} > 0$ et $Y_{03} < 0$) : $Y_{03} = -\mu \cdot Z_{03} = -\mu \cdot M_3 \cdot g$.

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant $\dot{y}(t) \neq 0$) : $M_{eq} \cdot \ddot{y}(t) = -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} - \mu \cdot M_3 \cdot g$.

Question 12 Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

Correction

$$C_m = -\frac{p}{2\pi} [M_{eq} \ddot{y}_{max} + M_3 \cdot g \cdot \mu] - C_r = -\frac{p}{2\pi} M_3 (\ddot{y}_{max} + g \cdot \mu) - (I_m + I_v) \frac{2\pi}{p} \ddot{y}_{max} - C_r$$

L'application numérique donne : $C_m = -3,79 N \cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2 . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Question 13 En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.

Correction

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0)}{\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)}$$

Question 14 On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2 . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

Correction

- Expression de $\mathcal{P}(\text{dissipée})$: $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -(\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0))$;
- TEC appliqué à S_2/R_0 en régime permanent : $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) = -\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0)$;
- TEC appliqué à S_1/R_0 en régime permanent : $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0)$
- en combinant ces équations on obtient $\mathcal{P}(\text{dissipée})$: $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -(-\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0) - \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = (1 - \eta) \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)$.

On donne :

- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Question 15 Déterminer dans ces conditions les dissipations.

Correction $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = C_{max} \cdot \dot{\theta}_{max} \cdot (\eta - 1) = 21,2 \times 6000 \frac{2\pi}{60} \cdot (1 - \eta) = 2664 W$

Activation 2 – Corrigé



Télécabine à stabilité accrue : le funitel

Mines Ponts PSI – 2003

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Mise en situation

Objectif On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de $0,15 \text{ m s}^{-2}$. On se place à l'instant où la vitesse de $7,2 \text{ m s}^{-1}$ va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

Question 1 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{c_T} , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c , M_p , μ , L , V , D_p et I_M .

Correction

- Énergie cinétique des 4 brins de câbles : $\mathcal{E}_c(\text{cables}/0) = \frac{1}{2}4L\mu V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines montantes : $\mathcal{E}_c(C_m/0) = \frac{1}{2}8(M_c + M_p)V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines descendantes : $\mathcal{E}_c(C_d/0) = \frac{1}{2}8M_cV^2$.
- Énergie cinétique de la motorisation : $\mathcal{E}_c(M/0) = \frac{1}{2}I_M\omega_M^2$.

On a par ailleurs $V = \omega_M \cdot \frac{D_p}{2}$.

On a donc $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left(4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2$.

On a donc $M_{eq} = 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} = 4 \times 1669 \times 8,47 + 16 \times 2500 + 8 \times 2080 + 575 \times 10^3 \frac{4}{16} = 256936 \text{ kg}$
et $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = 6,7 \text{ MJ}$.

Question 2 Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p , V , h , g et L .

Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -(M_c + M_p)g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ = -8(M_c + M_p)g V \vec{z} \cdot \vec{i} = -8(M_c + M_p)g V \sin \alpha.$$

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d/0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_d)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_d/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -M_c g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8M_c g V \vec{z} \cdot \vec{i} \\ = 8M_c g V \sin \alpha.$$

Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = 8M_c g V \sin \alpha - 8(M_c + M_p)g V \sin \alpha = -8M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W.}$$

Question 3 Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée P_v , des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ , S_f , V , V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.

Correction Le vent va dans le sens de la descente. En montée, $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_m/0)} = -V_e \vec{i} - V \vec{i}$.

$$\text{En descente, } \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_d/0)} = -V_e \vec{i} + V \vec{i}.$$

$$\text{Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : } p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (-V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = -8S_f V \frac{1}{2} \rho (V + V_e)^2 \cos \alpha.$$

$$\text{Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : } p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8S_f V \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \cos \alpha.$$

$$\text{Au final, } \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = 8S_f V \frac{1}{2} \rho ((V - V_e)^2 - (V + V_e)^2) \cos \alpha = 8S_f V \frac{1}{2} \rho (-4VV_e) \cos \alpha = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha. \text{ On a donc } \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -218\,677 \text{ W}$$

Question 4 En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Correction On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(\Sigma/0)}{dt} = \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{frottement} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow \Sigma/0).$$

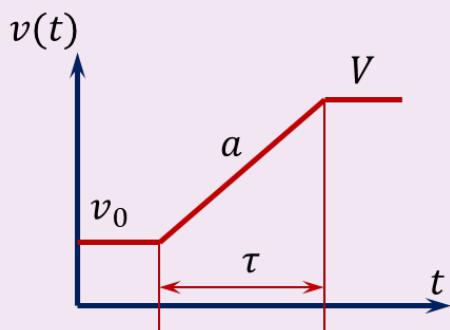
$$\text{On a donc, en régime permanent : } 0 = -229672 - 359289 - 400000 + P_T \quad P_T = 218677 + 359289 + 400000 = 977966 \text{ W} \simeq 1000 \text{ kW.}$$

$$\text{En tenant compte de l'accélération, on a } P_T = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} V \dot{V} = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} 7,2 \cdot 0,15 \simeq 1266 \text{ kW.}$$

Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

Question 5 Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a , v_0 , t et V . Pour que l'accélération de $1,3 \text{ m s}^{-2}$ permette le lancement des cabines de $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ à $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$, l'application numérique donne environ : $x = 20 \text{ m}$.

Correction



On a $v(t) = at + k$. Par ailleurs, $v(t_2) = V = at_2 + k$ et $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$. On a donc $V - v_0 = a\tau$ soit $\tau = \frac{V - v_0}{a} = \frac{6,9}{1,3} = 5,3 \text{ s}$.

La distance parcourue pendant la durée τ correspond à l'intégrale de la vitesse soit à l'aire sous la courbe. On a donc $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 5,3 \times 0,5 \times 7,5 = 19,875 \text{ m}$.

Application 1 – Corrigé

Application – Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs

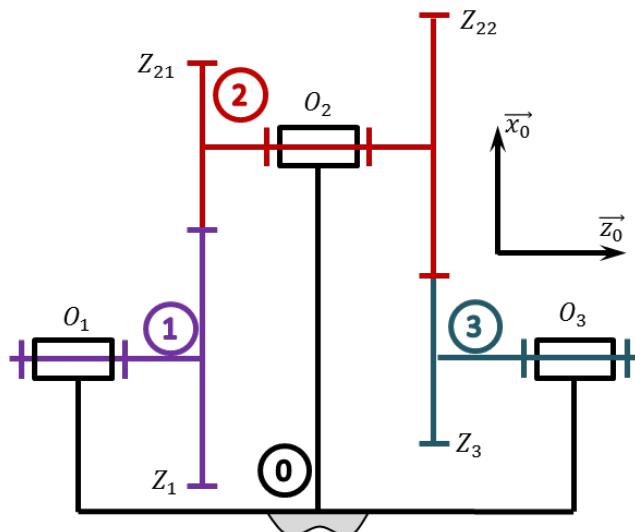
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec Z_1 , Z_{21} , Z_{23} et Z_3 le nombre de dents des roues dentées. On nomme k_1 le rapport du train de S_1 et S_2 avec $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$ et k_2 le rapport de S_2 et S_3 avec $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$.

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m \vec{z}_0$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r \vec{z}_0$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite $d = mz$ avec d le diamètre primitif, m le module, z le nombre de dents du pignon. $\omega(1/0)$, $\omega(2/0)$ et $\omega(3/0)$ sont les vitesses de rotation de S_1 , S_2 et S_3 autour des axes (O_1, \vec{x}_g) , (O_2, \vec{x}_g) et (O_3, \vec{x}_g) . Le repère galiléen \mathcal{R}_g est lié au solide S_0 . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse $G_1 = O_1$, $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$ associées aux solides S_1 , S_2 et S_3 sont de la

$$\text{forme : } I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i} .$$

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur C_m agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante C_r s'exerce sur l'arbre 3.

Question 1 Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

Question 2 Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.

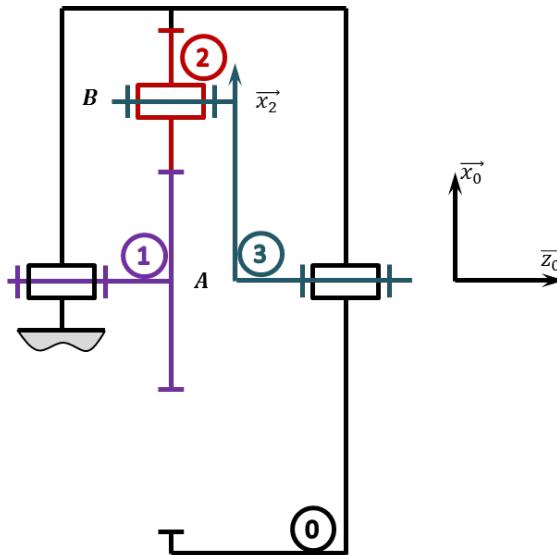
Question 3 Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\bar{\bar{I}}_A(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \bar{\bar{I}}_B(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

$$\bar{\bar{I}}_A(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m \vec{z}_0$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r \vec{z}_0$

Question 4 Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.

Méthode 1. Écrire le rapport de réduction recherché.

2. Refaire le schéma en fixant le porte satellite et en libérant le bâti. Le porte satellite devient donc le bâti et le train peut être considéré comme un train simple.
3. Déterminer le rapport de réduction du train simple (les taux de rotation seront donc exprimés en fonction du porte-satellite) en fonction du nombre de dents des roues dentées.
4. Introduire les fréquences de rotation exprimées au point 1.
5. Exprimer le rapport de réduction cherché en fonction du nombre de dents des solides.

On recherche $k = \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$.

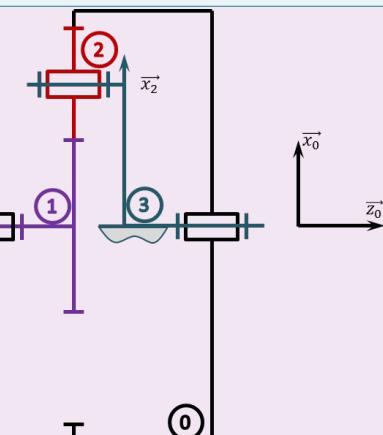
On bloque le porte satellite 3 et on libère la couronne 0.

On peut donc exprimer $\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)} = (-1)^1 \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_0} = -\frac{Z_1}{Z_0}$.

En décomposant le taux de rotation, on introduit $\omega(1/0)$ et $\omega(0/3)$:

$$\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)} = \frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0) - \omega(3/0)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow Z_0 \omega(3/0) = Z_1 (\omega(1/0) - \omega(3/0)) \Leftrightarrow \omega(3/0)(Z_0 + Z_1) = Z_1 \omega(1/0) \Leftrightarrow \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}.$$

$$\text{Au final, } k = \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}.$$



Question 5 Déterminer l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

Question 6 Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliquée un couple résistant.

Méthode 1. On calcule $T(1/0)$,

Calcul de l'énergie cinétique du planétaire : $T(1/0)$

Par définition, $2T(1/0) = \{\mathcal{V}(1/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(1/0)\}$ A étant un point fixe dans $\mathbf{0}$, on a :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_1 \overrightarrow{V(G, 1/0)} \\ \sigma(A \in 1/0) = \bar{I}(A, 0) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = C_1 \omega(1/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(1/0) = \frac{1}{2} C_1 \omega(1/0)^2$$

Correction Calcul de l'énergie cinétique du porte-satellite : $T(3/0)$

Par définition, $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$; on a :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega(3/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 3/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 \overrightarrow{V(G, 3/0)} \\ \sigma(A \in 3/0) = \bar{I}(A, 3) \overrightarrow{\Omega(3/0)} = C_3 \omega(3/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2} C_3 \omega(3/0)^2 = \frac{1}{2} k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

Correction Calcul de l'énergie cinétique d'un seul satellite : $T(2/0)$

Par définition, $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$ et le centre d'inertie d'un porte satellite est au point B on a donc :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, 2/0)} \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \overrightarrow{V(G, 2/0)} \\ \sigma(A \in 2/0) = \bar{I}(A, 2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} = C_2 \omega(2/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/3)} + \overrightarrow{V(B, 3/0)} = \vec{0} + \overrightarrow{V(A, 3/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = -R_3 \vec{x}_3 \wedge \omega(3/0) \vec{z}_0 = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3.$$



Le vecteur \overrightarrow{AB} est porté par le porte satellite. Par ailleurs, les points A, B ainsi que les points de contact dans les engrenages sont toujours suivant la direction du porte satellite. Enfin, $R_3 = R_1 + R_2$.

D'où :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, 2/0)} = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3 \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \overrightarrow{V(G, 2/0)} = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3 \\ \sigma(A \in 2/0) = C_2 \omega(2/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2} C_2 \omega(2/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 R_3^2 \omega(3/0)^2 = \frac{1}{2} C_2 \frac{r_1^2}{4r_2^2} \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 R_3^2 k^2 \omega(1/0)^2 = \frac{1}{2} C_2 \mu^2 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 R_3^2 \omega(3/0)^2$$

Correction Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble E : $T(E/0)$

Sans oublier qu'il y a 3 satellites (...), on a donc :

$$T(E/0) = T(1/0) + T(2/0) + T(3/0)$$

$$T(E/0) = \frac{3}{2} C_2 \frac{r_1^2}{4r_2^2} \omega(1/0)^2 + \frac{3}{2} M_2 R_3^2 k^2 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} C_1 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

D'où

$$T(E/0) = \frac{1}{2} (3C_2\mu^2 + 3M_2R_3^2k^2 + C_1 + k^2C_3) \omega(1/0)^2$$

On note donc $J_{eq} = 3C_2\mu^2 + 3M_2R_3^2k^2 + C_1 + k^2C_3$ l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

Méthode
Correction Calcul des puissances externes
Calcul des puissances dues aux actions de contact
Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 1 et 0 : $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1}$:

On a : $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1} = \{\mathcal{V}(1/0)\} \otimes \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}$

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(1 \rightarrow 0)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 0)} = L_{01} \vec{x}_0 + L_{01} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_A$$

On a donc : $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1} = 0$.

- **Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 2 et 0 : $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 2} = 0$**
- **Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 3 et 0 : $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 3} = 0$**
- **Puissance fournie à l'arbre 1 : $\mathcal{P}_{ext \rightarrow 1} = C_e \omega(1/0)$**
- **Puissance transmise par l'arbre 3 : $\mathcal{P}_{3 \rightarrow ext} = C_s \omega(3/0) = k C_s \omega(1/0)$**
- **Calcul des puissances dues aux actions à distance**
- **Puissance due à la pesanteur sur la pièce 1**
- **Puissance due à la pesanteur sur la pièce 3**
- **Puissance due à la pesanteur sur la pièce 2**
- **Calcul des puissances internes**
- **Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 1 et 2 : $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = 0$ (RSG)**
- **Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 2 et 3 : $\mathcal{P}_{3 \rightarrow 2} = 0$**

D'après le théorème de l'énergie puissance, on a :

$$\frac{dT(E/0)}{dt} = (C_e + k C_s) \omega(1/0) \Leftrightarrow J_{eq} \dot{\omega}(1/0) = (C_e + k C_s)$$

Application 1 – Corrigé



Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Objectif Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

Équation de mouvement

Travail demandé

Question 1 Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.

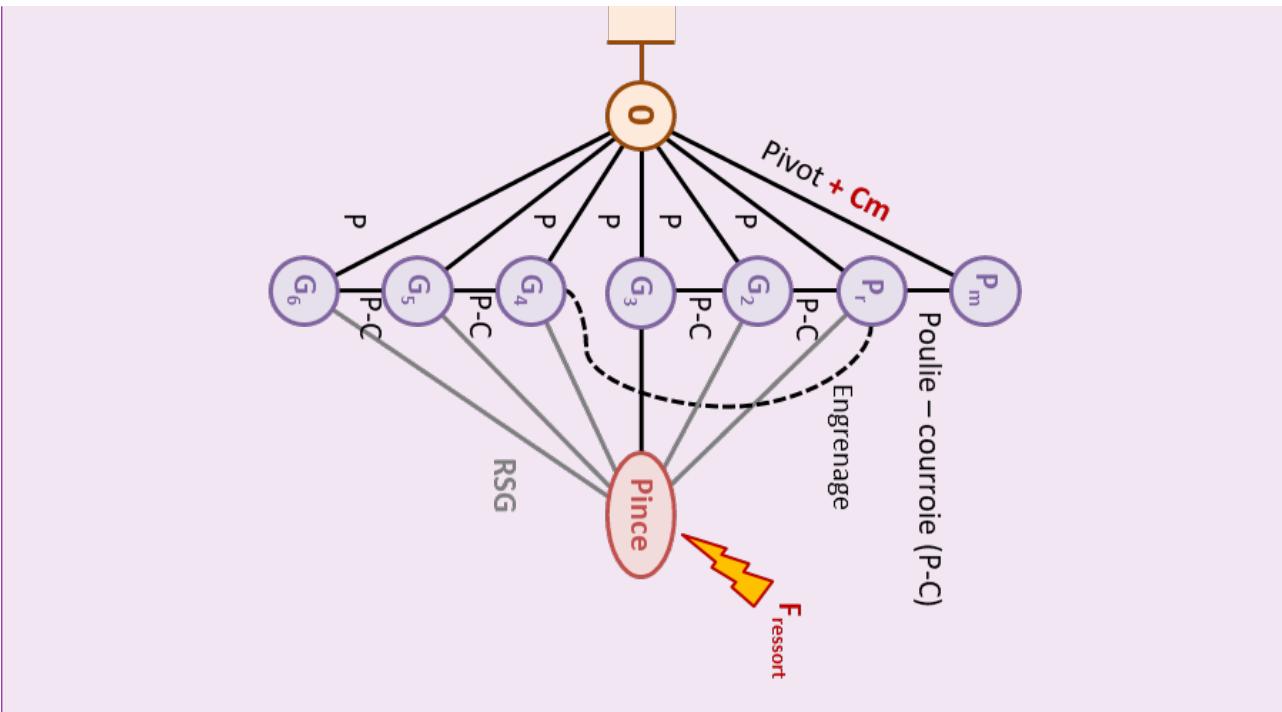
Correction

On a $\omega_i(t) = r\omega_m(t)$. De plus $\frac{\omega_e(t)}{\omega_i(t)} = \frac{R_i}{R_e} \iff \omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}\omega_i(t)$ et donc : $\omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}r\omega_m(t)$.

Enfin, $v(t) = R_g\omega_e(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e}\omega_m(t)$. Les conditions initiales étant nulles, $z(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e}\theta_m(t)$.

Question 2 Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

Correction



Question 3 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**. Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur $M4$ en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.

Correction

Tous les solides sont en mouvement « simples » par rapport au référentiel galiléen. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) &= \frac{1}{2}I_m\omega_m(t)^2 + \frac{1}{2}(I_r + I_i)\omega_i(t)^2 + \frac{1}{2}(I_e + 2I_p + 6I_g)\omega_e(t)^2 + \frac{1}{2}m_4v(t)^2 \\ \mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) &= \frac{1}{2}I_m\omega_m(t)^2 + \frac{1}{2}(I_r + I_i)(r\omega_m(t))^2 + \frac{1}{2}(I_e + 2I_p + 6I_g)\left(\frac{R_i}{R_e}r\omega_m(t)\right)^2 + \frac{1}{2}m_4\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\omega_m(t)\right)^2 \\ \mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) &= \frac{1}{2}\left(I_m + (I_r + I_i)r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g)\left(\frac{R_i}{R_e}r\right)^2 + m_4\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\right)^2\right)\omega_m(t)^2\end{aligned}$$

$$\text{On a donc } J = I_m + (I_r + I_i)r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g)\left(\frac{R_i}{R_e}r\right)^2 + m_4\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\right)^2.$$

Question 4 Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

Correction

On isole l'ensemble.

Bilan des puissances extérieures

- Action du ressort : $\mathcal{P}(\text{ressort} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = -kz(t)v(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t).$
- Action du moteur : $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = C_m \omega_m(t).$
- Action de la pesanteur : $\mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = 0$ (La pesanteur est compensée par un système de compensation).

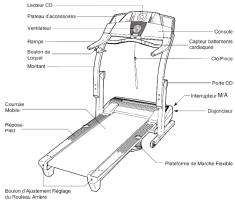
Bilan des puissances intérieures Toutes les liaisons étant supposées parfaites, $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$.

Question 5 Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**, déterminer l'expression du terme $C_e(t)$ en fonction des données du problème et de $\theta_m(t)$.

Correction

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on a : $J\dot{\omega}_m(t)\omega_m(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t) + C_m \omega_m(t) \Rightarrow J\dot{\omega}_m(t) = -k \left(R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t) + C_m$.

En utilisant l'équation différentielle du mouvement on a alors : $C_e(t) = k \left(R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t)$.

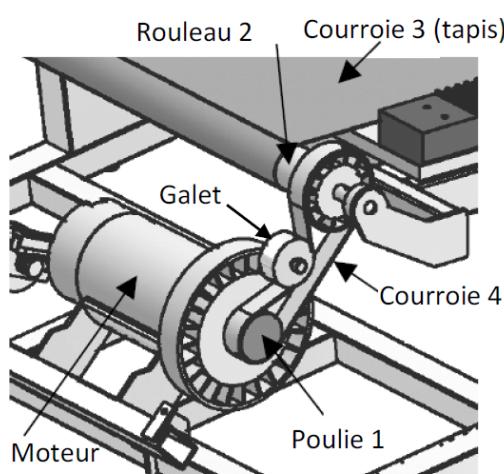
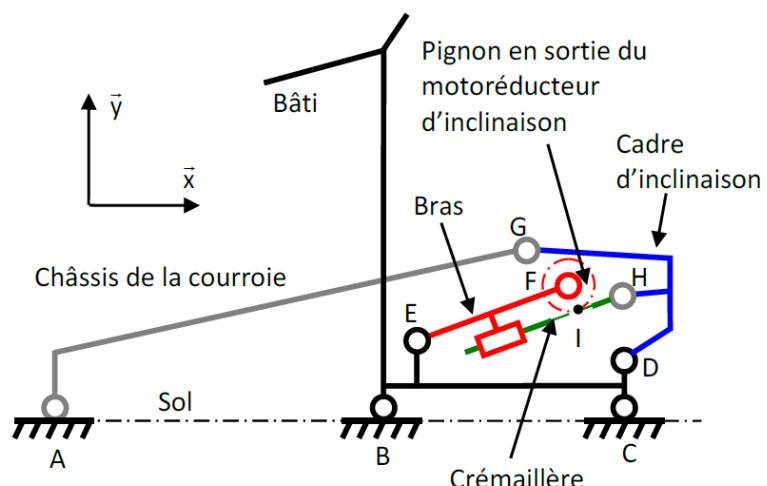
Application 2 – Corrigé**Application 02****Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie****Savoirs et compétences :**

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

On s'intéresse à un tapis de course dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'utilisateur court sur une courroie mobile qui est entraînée dans le sens inverse de la course. La vitesse de déplacement de la courroie mobile est réglable pour permettre au coureur de rester sur place. Le système propose un large choix de mode de fonctionnement cependant l'étude sera limitée à l'utilisation du programme de contrôle de la fréquence cardiaque. Avec ce programme, le système ajuste automatiquement la vitesse et l'inclinaison du tapis afin d'obtenir une fréquence cardiaque prérglée.

Le programme de contrôle de la fréquence cardiaque fonctionne de la façon suivante :

- dans un premier temps, le système commence par augmenter la vitesse de déplacement de la courroie mobile via la chaîne fonctionnelle 1 pour atteindre la fréquence cardiaque préréglée;
- si la vitesse maximale ne suffit pas, le tapis de course s'incline via la chaîne fonctionnelle 2 pour augmenter encore l'effort.

*Chaine fonctionnelle 1**Chaine fonctionnelle 2*

Extrait du cahier des charges :

Exigences	Critères	Niveaux
1.1. Le système doit permettre au coureur de courir avec une fréquence cardiaque prédéfinie	Vitesse de course Pente Masse utilisateur	De 0 à 19 Km/h par incrément de 0,1Km/h De 0% à 14% par incrément de 0,5% 115 Kg maxi

Hypothèses et données :

- on se place dans le cas où le tapis est réglé à l'horizontale;
- la courroie 3, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur le rouleau 2. Le rayon d'enroulement de la courroie 3 sur le rouleau 2 est $R_e = 24,5$ mm. La poulie 2 est liée au rouleau 2.
- la courroie 4, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur les poulies 1 et 2, ainsi que sur le galet. Les rayons primatifs de la poulie motrice 1 et de la poulie 2 sont respectivement $R_{p1} = 27$ mm et $R_{p2} = 44$ mm;
- une étude préliminaire a montré que la présence d'un coureur de 115 kg entraîne un effort résistant tangentiel $T_{coureur \rightarrow 3} = 230$ N sur la courroie 3;

- l'inertie équivalente des pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur est $I_{eq} = 0,1 \text{ kgm}^2$;
- le rendement global du système mécanique est $\eta = 0,9$.

Objectif Valider le choix de la motorisation de la chaîne fonctionnelle 1 vis-à-vis du cahier des charges.

Question 1 Déterminer la vitesse de rotation du moteur ω_m en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement V_{30} en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur $\omega_{m\ max}$ lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

Correction

Question 2 Déterminer l'expression du couple moteur C_m nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.

Correction

Question 3 Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h.

Correction

Le système possède un moteur courant continu ayant les caractéristiques ci-dessous.

Puissance nominale $P_n = 1840 \text{ W}$ Vitesse maximale Nmax 4000 tr/min	Tension nominale $U_n = 130 \text{ V}$ Constante de vitesse $K_E = 0,33 \text{ V/(rad.s}^{-1}\text{)}$ Courant nominal $I_n = 17,6 \text{ A}$ Constante de couple $K_T = 0,33 \text{ N.m/A}$ Résistance d'induit $R = 1,1 \text{ Ohm}$
--	--

Question 4 Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

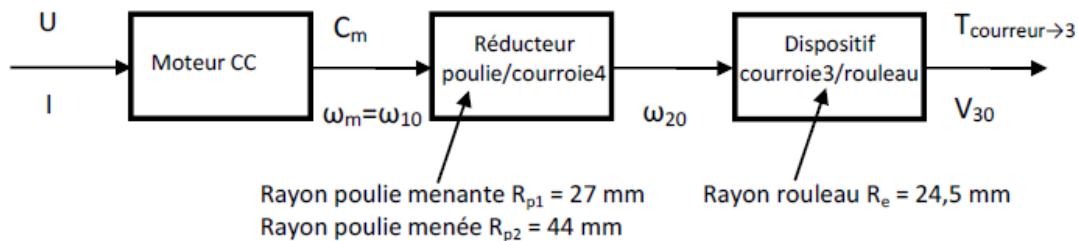
Correction

Éléments de correction

1. $\omega_m = \frac{R_{p2}}{R_{p1}} \frac{V_{30}}{R_e}$ et $\omega_{m\ max} = 351 \text{ rad s}^{-1}$.
2. $C_m = \frac{1}{\eta} \left(T_{coureur \rightarrow 3} R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right)$.
3. $P(0 \rightarrow 1/0) = \frac{1}{0,9} \left(T R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right) \omega_{max} = 1349 \text{ W}$.
4. ...

1. Déterminer la vitesse de rotation du moteur ω_m en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement V_{30} en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur $\omega_{m\max}$ lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

La chaîne d'énergie pour le déplacement du tapis peut être représentée de la façon suivante :



S'il y a roulement sans glissement de la courroie 3 sur le rouleau 2 alors $V_{30} = \omega_{20} \cdot R_e$

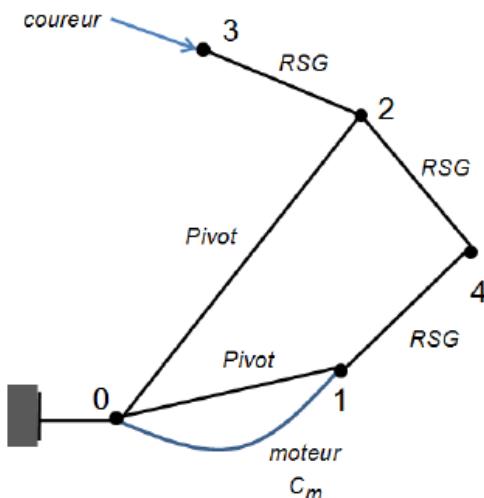
Le rapport de réduction au niveau du réducteur poulie/courroie 4 est $\frac{\omega_m}{\omega_{20}} = \frac{R_{p2}}{R_{p1}}$

$$\text{Donc } \boxed{\omega_m = \frac{R_{p2}}{R_{p1}} \cdot \frac{V_{30}}{R_e}}$$

Le cahier des charges indique que la vitesse maximale de déplacement de la courroie est : $V_{30\max} = \frac{19000}{3600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Cela impose une vitesse angulaire du moteur de : $\omega_{m\max} = \frac{44}{27} \cdot \frac{19000}{24,5 \times 10^{-3} \cdot 3600} \Rightarrow \boxed{\omega_{m\max} = 351 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$

2. Déterminer l'expression du couple moteur C_m nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $E = 1 + 2 + 3$ dans son mouvement par rapport bâti fixe noté 0.

$$\frac{dE_{cE/0}}{dt} = P_{\bar{E} \rightarrow 0} + P_{\text{inter-effort}}$$

Calcul de l'énergie cinétique :

$$E_{cE/bâti} = \frac{1}{2} \cdot I_{eq} \cdot \omega_m^2 \quad \text{avec } I_{eq}, \text{ l'inertie équivalente des pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur}$$

Puissance des actions mécaniques extérieures : $P_{\bar{E} \rightarrow E/0} = P_{0 \rightarrow m} + P_{0 \rightarrow 1/0} + P_{0 \rightarrow 2/0} + P_{\text{courroie} \rightarrow 3/0}$

Avec :

$$P_{0 \rightarrow m} = C \cdot \omega_m$$

$$P_{\text{courroie} \rightarrow 3/0} = \{T_{\text{courroie} \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{3/0}\} = \begin{Bmatrix} -T_{\text{courroie} \rightarrow 3} \cdot \bar{u} \\ 0 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{3/0} \end{Bmatrix} = -T_{\text{courroie} \rightarrow 3} \cdot V_{3/0} = -T_{\text{courroie} \rightarrow 3} \cdot R_e \cdot \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \cdot \omega_m$$

$P_{0 \rightarrow 1/0} \neq 0$ et $P_{0 \rightarrow 2/0} \neq 0$ ces puissances dissipées par frottement dans les liaisons sont intégrés dans la notion de rendement (voir ci-dessous).

Puissance des actions mécaniques intérieures : $P_{\text{int}} = \sum P_{i \leftarrow \underset{\text{liaisons}}{\text{liaisons}} j}$

$$P_{i \leftarrow \underset{\text{liaisons}}{\text{liaisons}} j} = 0 \text{ car RSG entre les solides } i \text{ et } j$$

Ainsi : $P_{\text{int}} = 0$

Puissance dissipée dans les liaisons en régime permanent : $P_d = P_{0 \rightarrow 1/0} + P_{0 \rightarrow 2/0}$

En tenant compte du rendement global du système mécanique, on peut alors évaluer la puissance dissipée par échauffement dans les liaisons : $P_d = P_{\text{entrée}} \cdot (\eta - 1) = -C \cdot \omega_m \cdot (\eta - 1)$

En régime permanent, on a $\omega_m = cte$, il n'y a donc pas de variation d'énergie cinétique.

On a donc, par application du théorème de l'énergie cinétique en régime permanent :

$$0 = C_m \cdot \omega_m - T_{coureur \rightarrow 3} \cdot R_e \cdot \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \cdot \omega_m + C_m \cdot \omega_m \cdot (\eta - 1)$$

Ce qui permet d'exprimer le couple moteur en régime établi :
$$C_m = \frac{1}{\eta} \cdot \left(T_{coureur \rightarrow 3} \cdot R_e \cdot \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right)$$

3. Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h.

En régime établi à 19 km/h, on a : $P_{0 \rightarrow 1/0} = C \cdot \omega_{max}$

Soit : $P_{0 \rightarrow 1/0} = \frac{1}{0,9} \cdot \left(T \cdot R_e \cdot \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right) \cdot \omega_{max} = 1349 \text{ W}$

4. Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

$$P_{moteur} = 1350 \text{ W} < 1840 \text{ W}$$

$$\omega_{max} = 351 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < 4000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = 420 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

D'après la documentation du constructeur, le moteur est capable de fournir la puissance et la vitesse nécessaire pour cette phase de fonctionnement.

Application 3 – Corrigé



Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Présentation

Le chariot élévateur, objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage;
- du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.



Phase de levage du bateau

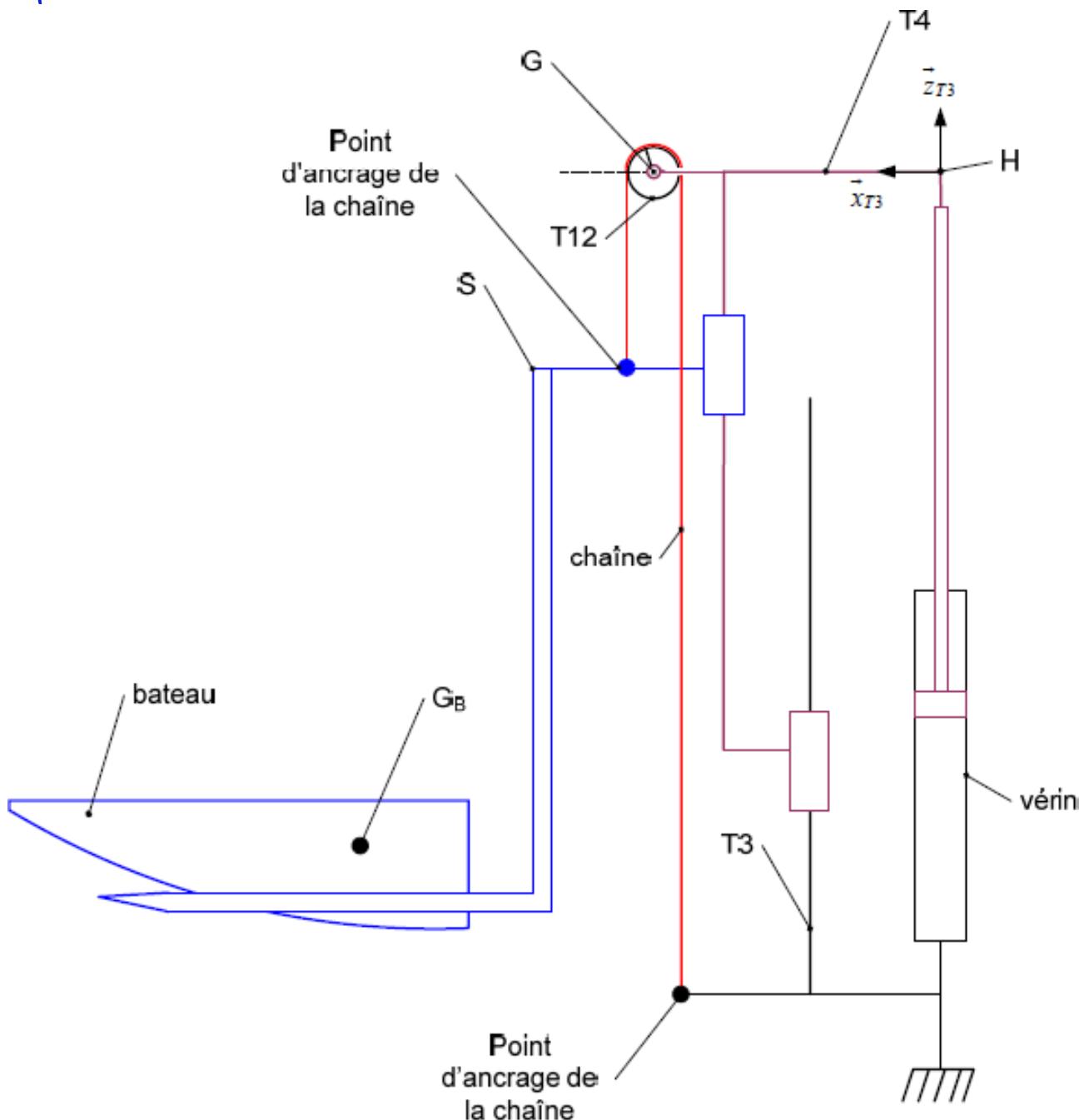
Objectif Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

- req 102 : vitesse de levage en charge : $0,33 \text{ m s}^{-1}$;
- req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la suivante. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble $S = \{T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}\}$ est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble S . Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon T_{12} qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est F_V (considéré comme constant). On note $I_{T_{12}}$ le moment d'inertie de la poulie T_{12} par rapport à son axe de rotation, $R_{T_{12}}$ son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Solide	Masse
Ensemble (S)	m_S
Bateau (B)	m_B
Mât inférieur (T_3)	m_{T_3}
Mât supérieur (T_4)	m_{T_4}
Chaîne (C)	négligée

Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère \mathcal{R}_3 peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes $\overrightarrow{z_{T_3}}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont confondus pour les conditions de l'étude.



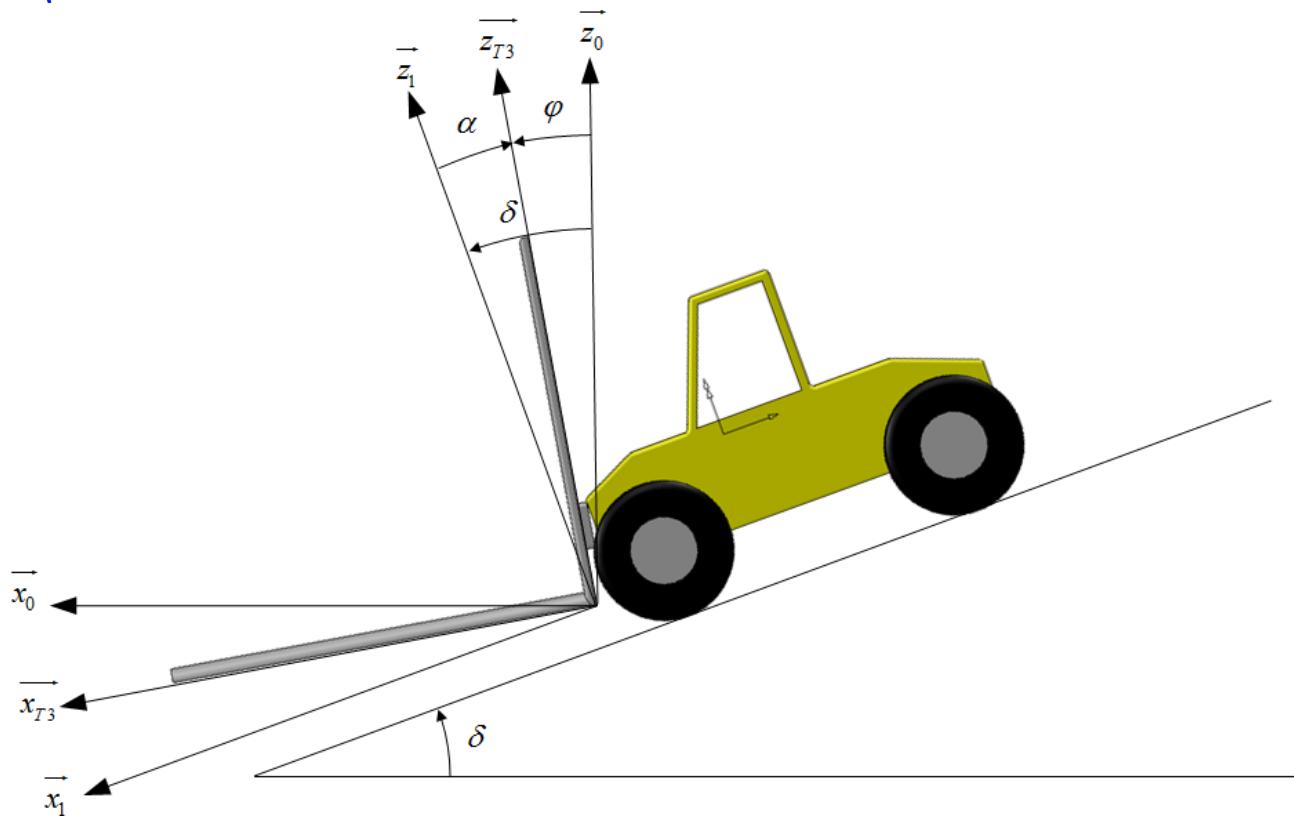
Question 1 Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

Correction

Phase de déplacement

La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T_1, T_2 et T_1', T_2' . Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

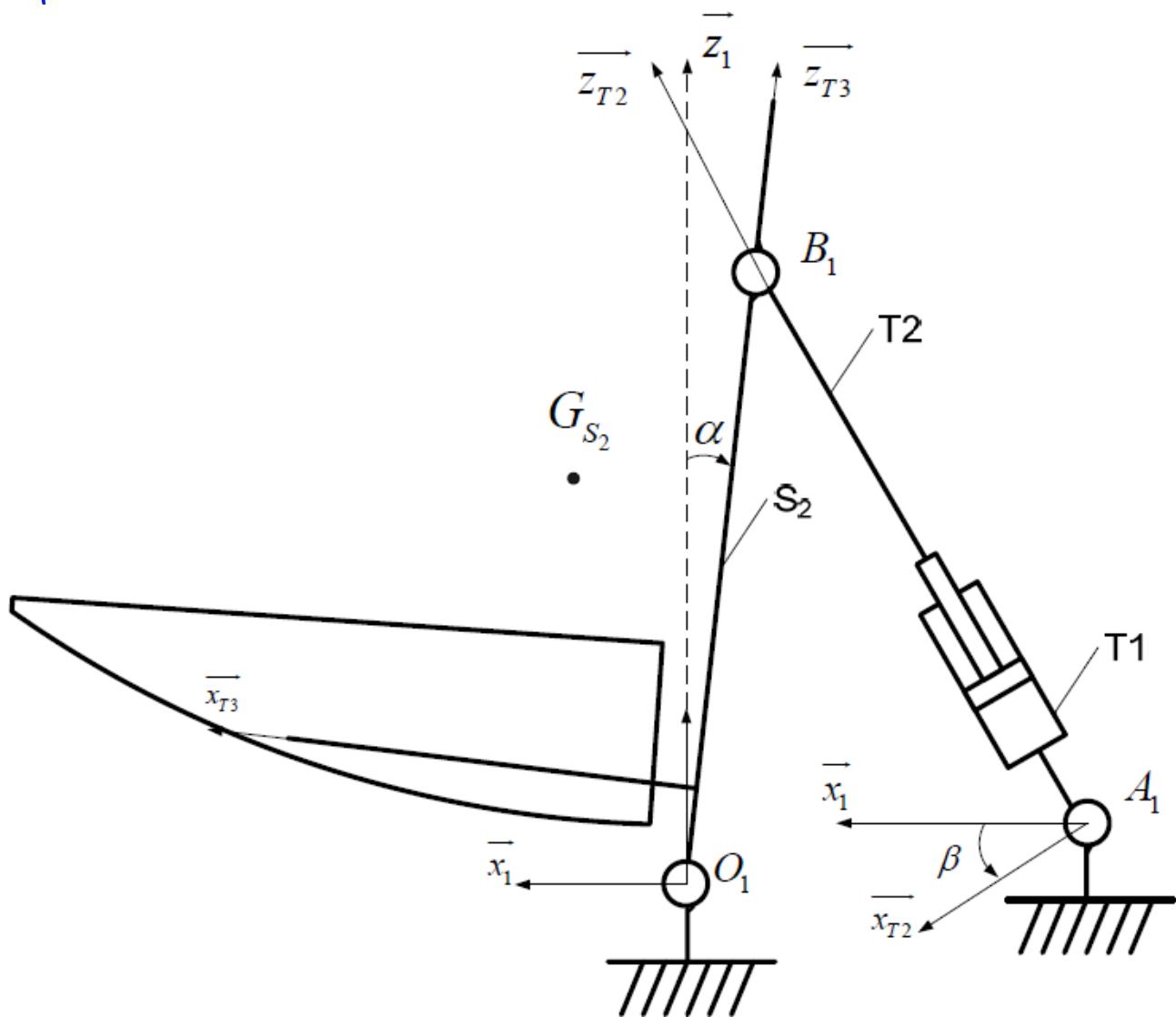
- l'angle de basculement $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$;
- l'angle de la pente $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$;
- l'angle à asservir $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$.



Question 2 Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle $\varphi(t)$ qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches? Justifier.

Correction

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.



Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- l'ensemble $S_2 = \{T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, B\}$ en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot 1 de centre de gravité G_{S_2} . Le moment d'inertie de l'ensemble S_2 par rapport à l'axe sera noté J_{S_2} et sa masse m_{S_2} . La liaison pivot entre l'ensemble S_2 et le chariot (bâti) génère un couple résistant $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{a} \vec{y}_0$ et $\overrightarrow{O_1 O_{S_2}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T_3}$;
- un vérin équivalent $V = \{T_1, T_2\}$ dont le corps est en liaison pivot d'axe (A_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot (bâti) et la tige en liaison pivot d'axe (B_1, \vec{y}_0) par rapport à l'ensemble S_2 . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté $\vec{F}_V = p(t) \vec{S} \vec{z}_{T_2}$ où $p(t)$ est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose $\vec{A}_1 \vec{B}_1 = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T_2}$. Le paramétrage est tel que si $\alpha = 0$ alors $\lambda = 0$.

Question 3 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq} .

Correction

Application 4 – Corrigé



Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric)

Centrale MP 2004

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

Mise en situation

Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Détermination de la motorisation

Objectif L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Question 1 Déterminer la fréquence de rotation du moteur ω en fonction de la vitesse de déplacement V de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum ω_{max} que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

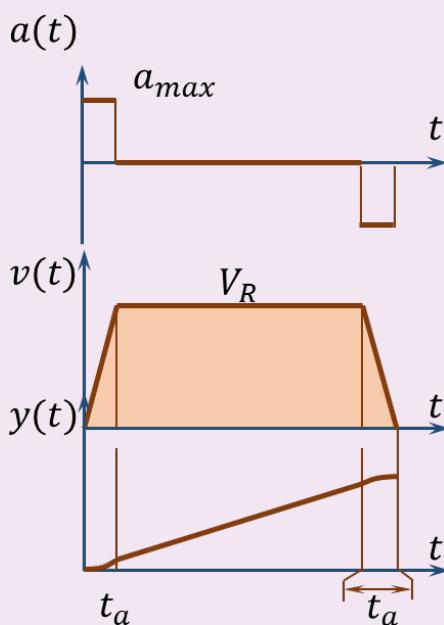
Correction

On a $V = \omega \frac{p_v}{2\pi}$ et donc $\omega_{max} = V_R \frac{2\pi}{p_v}$.

Application numérique : $\omega_{max} = 0,15 \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ rad s}^{-1} = 1500 \text{ tr min}^{-1}$.

Question 2 Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement y de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

Correction



L'accélération a_{\max} est donnée par $a_{\max} = \frac{V_R}{t_a} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375 \text{ m s}^{-2}$.

Les distances parcourues correspondent à l'aire sous la courbe du profil de vitesse. La distance d'accélération et de décélération sont données par $d_a = \frac{1}{2} V_R t_a = \frac{1}{2} 0,15 \times 0,4 = 0,03 \text{ m}$.

En conséquence, la distance à parcourir à vitesse constante est $d_c = 0,8 - 2 \times 0,03 = 0,74 \text{ m}$. Le temps pour parcourir cette distance est $t_c = \frac{d_c}{V_R} = \frac{0,74}{0,15} = 4,93 \text{ s}$.

Solution sans assistance

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$, du système isolé. Mettre $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ sous la forme : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$. Donner l'expression littérale de la masse équivalente M_e et faire l'application numérique.

Correction

Calcul de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} (J_R + J_V) \left(V \frac{2\pi}{p_v} \right)^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \left((J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M \right) V^2$.

$$\text{On a donc } M_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 130 = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 150 = 547 \text{ kg.}$$

Question 4 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Correction

- On isole Σ .
- Bilan des puissances intérieures : liaisons parfaites $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.
- Bilan des puissances extérieures :
 - $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \text{Asc./0}) = -MgV$;
 - $\mathcal{P}(\text{mot} \rightarrow \text{Asc./0}) = C\omega$.
- Calcul de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$

On applique le théorème de l'énergie cinétique : $M_e V \dot{V} = C \frac{V^2 \pi}{p_v} - MgV$ et donc $M_e \dot{V} = C \frac{2\pi}{p_v} - Mg$. Au final, $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg)$.

Question 5 En déduire la valeur du couple maximum C_{\max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire P_0 de ce moteur.

Correction

Le couple maximal est nécessaire en phase d'accélération.

$$C_{\max} = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg) \\ = \frac{6 \times 10^{-3}}{2\pi} (547 \times 0,15 + 130 \times 9,81) = 1,4 \text{ Nm.}$$

La puissance nécessaire est alors $P_0 = C_{\max} \cdot \omega_{\max} = 1,4 \times 157 = 222 \text{ W}$.

Question 6 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Correction

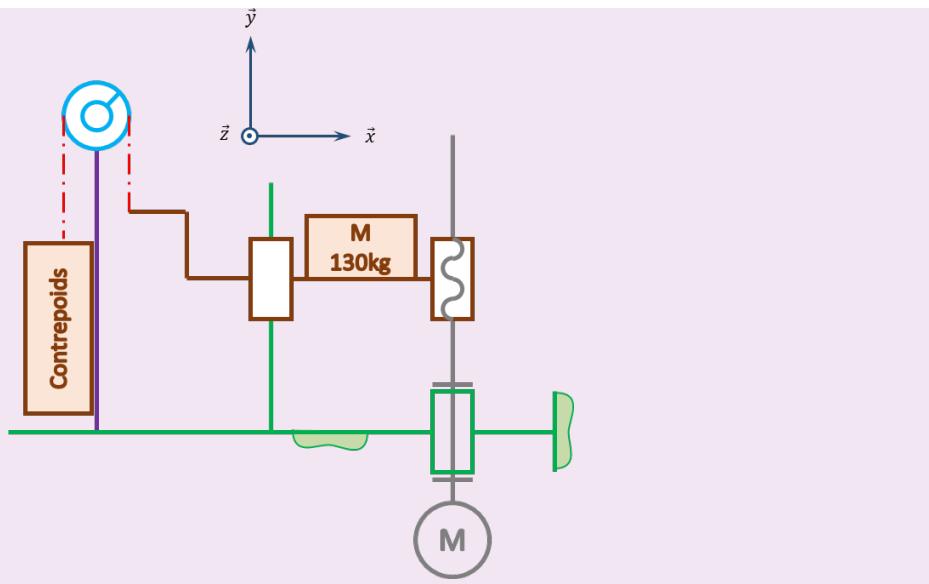
Le rendement n'a vraiment de sens qu'en régime permanent. Ici, le rendement va nous permettre de majorer la puissance motrice nécessaire.

$$\text{On a } P = \frac{222}{0,3} = 740 \text{ W.}$$

Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Question 7 Faire un schéma de principe de ce dispositif.

Correction



Question 8 Donner l'expression littérale de la masse équivalente M'_e et faire l'application numérique.

Correction

En prenant un contrepoids de même masse que l'ascenseur et en négligeant l'inertie de la poulie, le contrepoids se déplaçant à la même vitesse que l'ascenseur (mais dans un sens opposé), on a $M'_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + 2M$, soit $M'_e = 677\text{ kg}$

Question 9 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Correction

Par rapport au TEC effectué précédemment, il faut ajouter la puissance des actions de pesanteurs sur le contrepoids. Cette puissance est opposée à la puissance des actions de pesanteur sur l'ascenseur. $C = \frac{p_v}{2\pi} M'_e V$.

Question 10 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur.

Correction

$C_{Max} = 0,24\text{ Nm}$, $P_0 = 38\text{ W}$.

Question 11 En déduire la puissance nécessaire P du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Correction

Avec les mêmes précautions que précédemment, $P = 127\text{ W}$.

Question 12 Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$ et de hauteur $1,4 \text{ m}$. Cette solution est-elle envisageable ?

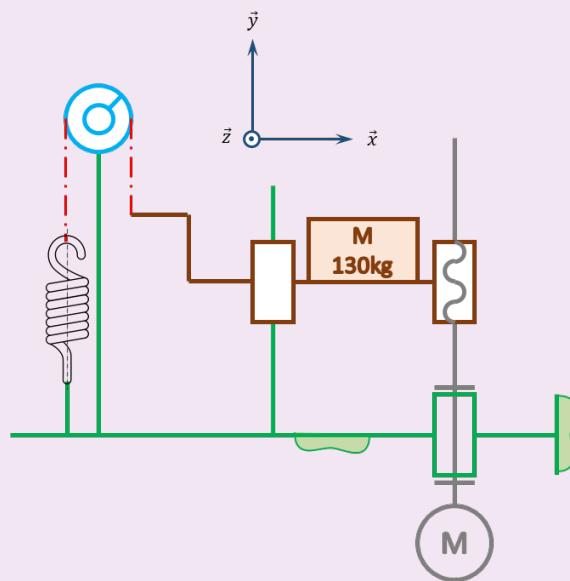
Correction

Au vu de la section disponible, la hauteur du contrepoids sera de $\frac{130}{0,1 \times 0,2 \times 9 \times 10^3} = 0,72 \text{ m}$. Le contrepoids doit pouvoir se déplacer de $0,8 \text{ m}$ soit un encombrement total de $1,52 \text{ m}$ supérieur à $1,4 \text{ m}$ disponible.

Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

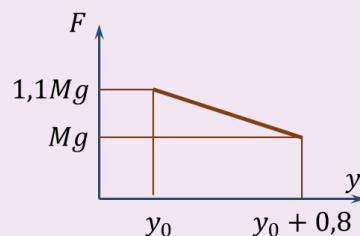
Question 13 Faire un schéma de principe du dispositif.

Correction


Question 14 L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum $F_{c \text{ maxi}}$ qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement y de l'ascenseur.

Correction

La course maximale est de 0,8 m. La charge à compenser correspond au poids de l'ascenseur soit Mg . Lorsque l'ascenseur sera en bas, y sera minimal et le ressort sera tendu. L'effort sera donc maximal, soit $1,1Mg$. Lorsque l'ascenseur sera en haut, y sera maximal et le ressort sera « au repos ». L'effort doit compenser le poids. La raideur doit être de la forme $k = \frac{1,1Mg - Mg}{0,8} = \frac{0,1 \times 130 \times 9,81}{0,8} \simeq 159,4 \text{ N m}^{-1}$.



Question 15 La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

Correction

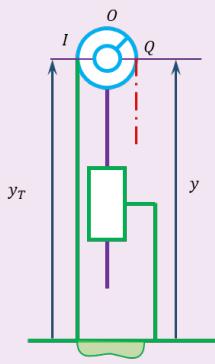
Dans les conditions proposées ci-dessus, on a $d = 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{1,1 \times Mg} = 0,011 \text{ m}$. Le nombre de spires serait alors $n = 872$. Si les spires sont jointives, on a une longueur de ressort minimale de $d n = 9,47 \text{ m}$ ce qui dépasse très largement les dimensions de la machine.

Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Question 16 Déterminer la relation existant entre le déplacement y de l'ascenseur et le déplacement y_T de la tige du vérin. En déduire la course Δy_T nécessaire de la tige du vérin à gaz.

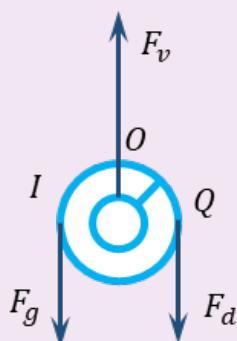
Correction

En utilisant le roulement sans glissement de la poulie par rapport à la courroie en I on montre que $y_T = \frac{1}{2}y$.



Question 17 Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté F_c . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existante entre l'effort F développé par le vérin et l'effort de compensation F_c . En déduire l'effort minimum F_{\min} développé par le vérin.

Correction



Si on néglige la masse de la poulie, on peut appliquer le PFS (à la place du PFD).

- On isole la poulie de rayon R .
- La poulie est soumise au brin de gauche, au brin de droite et à l'effort du vérin.
- TMS en O, centre de la pivot : $F_g R - RF_d = 0$ soit $F_g = F_d$.
- TRS : $2F_d + F_v = 0$.

En reprenant les notations de la question, on a $2F_c = F$. Comme au minimum, $F_c = Mg$, on a donc $F_{\min} = 2Mg = 2550,6\text{N}$.

Question 18 Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

Correction

Soit D le diamètre du vérin et d le diamètre de la tige.

Dans le premier cas, on a, dans la chambre droite, $F_d = +p\pi \frac{D^2 - d^2}{4}$ et $F_g = -p\pi \frac{D^2}{4}$. La résultante des forces est donc $F_g + F_d = -p\pi \frac{d^2}{4}$.

Dans le second cas, l'effort est $-p\pi \frac{d^2}{4}$. Les deux modèles sont donc équivalents.

Question 19 Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre $d = 15 \times 10^{-3}\text{ m}$. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée p_2 .

Correction

On a $p_2 = \frac{F_{\min}}{\frac{\pi d^2}{4}} = 14433443\text{ Pa}$ soient 144 bars.

Question 20 Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de F_1 , F_{\min} et Δy_T . Exprimer F_{\min} en fonction de p_2 et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer F_1 en fonction de p_1 et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur r de ce vérin à gaz en fonction de F_{\min} , d , D , L et Δy_T .

Correction

- $r = \frac{F_1 - F_{\min}}{\Delta y_T}$.
- $F_{\min} = p_2 \frac{\pi d^2}{4}, F_1 = p_1 \frac{\pi d^2}{4}$.
- On a $p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow F_{\min} V_1 = F_1 V_2 \Leftrightarrow F_{\min} \frac{V_1}{V_2} = F_1$. D'où $r = \frac{F_{\min} \frac{V_1}{V_2} - F_{\min}}{\Delta y_T} = F_{\min} \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\Delta y_T}$.
Par ailleurs, $V_1 - V_2 = \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$; donc $V_2 = L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$.
On a donc $r = F_{\min} \frac{\frac{V_1 - V_2}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\min} \frac{\frac{L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\min} \frac{\frac{\Delta y_T d^2}{L D^2 - \Delta y_T d^2}}{\Delta y_T} = F_{\min} \frac{d^2}{L D^2 - \Delta y_T d^2}$

Question 21 On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur L et calculer la raideur r .

Correction

Pour avoir la raideur la plus faible, il faut la longueur la plus grande soit 1 m. $r = F_{\min} \frac{d^2}{L D^2 - \Delta y_T d^2}$

On prendra $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$ pour la suite du problème.

Question 22 Déterminer l'effort maximal F_{\max} développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de F .

Correction

$F_{\max} = F_{\min} + r \Delta y_T = 2550 + 180,4 = 2622 \text{ N}$.
La variation d'effort est de $\frac{72}{2550} \simeq 3\%$.

Question 23 Déterminer la relation $F = F(y_T)$.

Correction

$F = 2622 - r y_T$.

On considérera dans cette question que l'effort de compensation F_c est constant.

Question 24 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de $a, M_e, F_c, M \dots$

Correction

En reprenant l'expression précédente et en ajoutant l'effort de la courroie F_c (de sens opposé au poids), on a $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg - F_c)$.

Question 25 Exprimer ensuite a en fonction de $C, M_e, F_c, M \dots$

Correction

On a $a = \dot{V}$ et $a = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\pi C}{p_v} + F_c - Mg \right)$.

Question 26 En déduire la valeur du couple maximum C_{\max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur (prendre $F_c = 1300 \text{ N}$).

Correction

On reprend l'expression de C et on a $C = 0,22 \text{ Nm}$. $P_0 = 34,4 \text{ W}$

Question 27 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Correction

$P = 115 \text{ W}$

Synthèse

Question 28 On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante?

Correction

Application 4 – Corrigé

Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

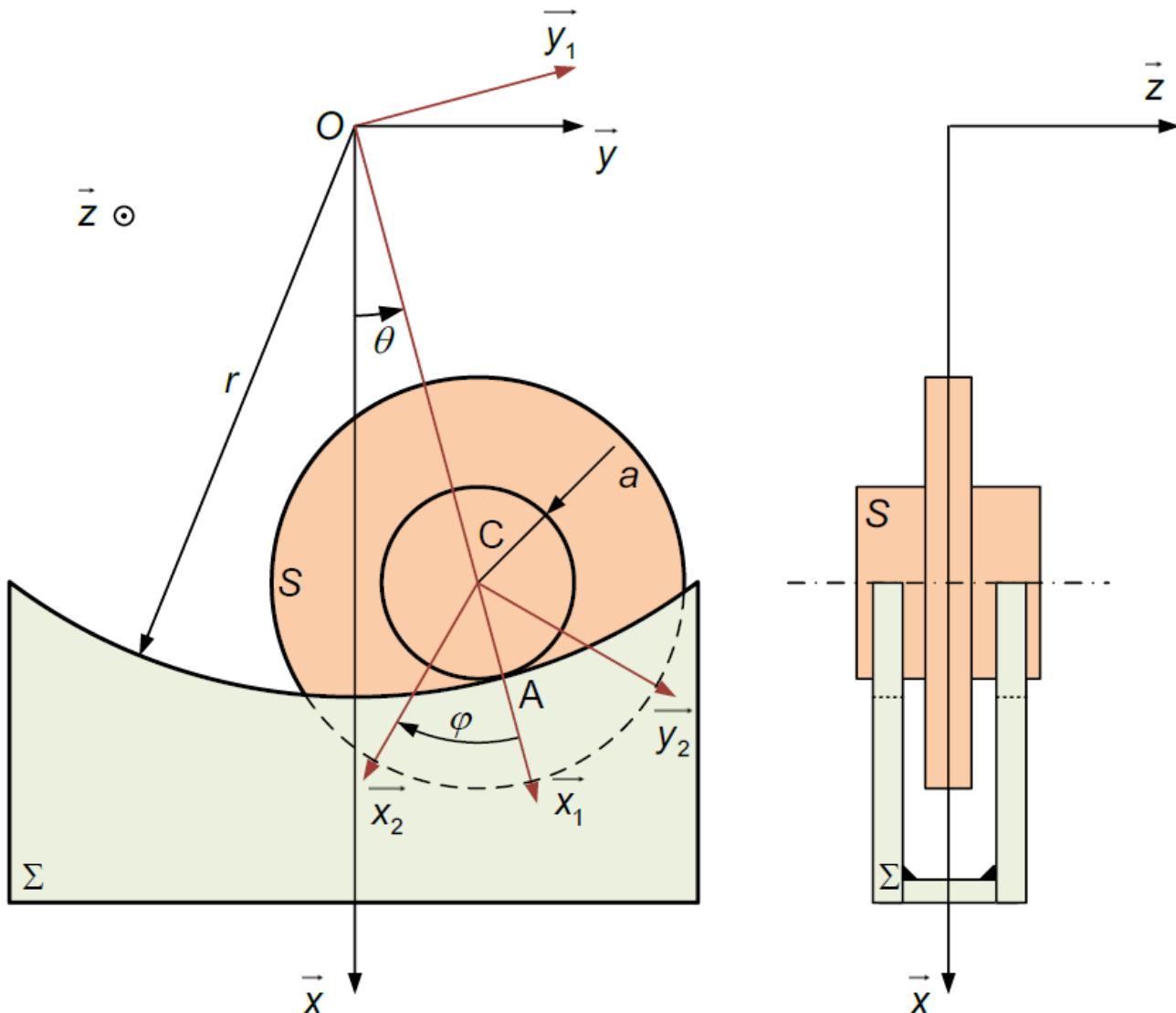
Sources multiples

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g \vec{z}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

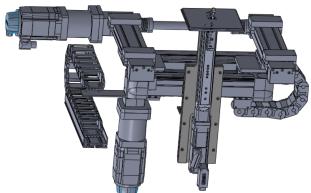
Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5 \text{ s}$.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{l}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .

TD 1 – Corrigé



Système de dépose de poudre

Concours Centrale Supelec – TSI 2016

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Mise en situation

Objectif L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système.

Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe \vec{x} soit de $V_{\max} = 0,45 \text{ m s}^{-1}$ et que l'accélération maximale du chariot soit de $\gamma_{\max} = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Travail demandé

Question 1 Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur Ω_{\max} . Faire l'application numérique.

Correction

On a $V_{\max} = \Omega_{\max} \cdot r \cdot \frac{\phi}{2}$. En conséquence $\Omega_{\max} = V_{\max} \frac{2}{r\phi}$.

Application numérique : $\Omega_{\max} = \frac{2 \cdot 0,45 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 314 \text{ rad s}^{-1} \simeq 3000 \text{ tr min}^{-1}$.

Question 2 Déterminer l'accélération maximale du moteur $\dot{\Omega}_{\max}$. Faire l'application numérique.

Correction

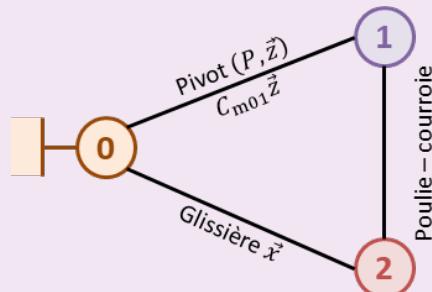
En suivant un raisonnement similaire : $\dot{\Omega}_{\max} = \gamma_{\max} \frac{2}{r\phi}$.

Application numérique : $\dot{\Omega}_{\max} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 6981 \text{ rad s}^{-2}$.

Question 3 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe \vec{x} par rapport au bâti notée $\mathcal{E}_c(\text{ensemble}/0)$. En déduire l'inertie équivalente J de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

Correction

Le système peut être modélisé ainsi :



$\mathcal{E}_c(\text{ensemble}/0) = \mathcal{E}_c(1/0) + \mathcal{E}_c(2/0)$. Le solide 1 et l'arbre moteur sont en rotation par rapport au bâti et le solide 2 est en translation par rapport au bâti, on a donc :

- $\mathcal{E}_c(1/0) = \frac{1}{2} (J_m \Omega^2 + J_1 (r\Omega)^2) = \frac{1}{2} (J_m + J_1 r^2) \Omega^2$
- $\mathcal{E}_c(2/0) = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M \Omega^2 \left(\frac{r\phi}{2} \right)^2$.

$$\mathcal{E}_c(\text{ensemble}/0) = \frac{1}{2} \left((J_m + J_1 r^2) + M \left(\frac{r\phi}{2} \right)^2 \right) \Omega^2.$$

Application numérique : $J_{eq} = (J_m + J_1 r^2) + M \left(\frac{r\phi}{2} \right)^2 = 5,9 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$.

Question 4 Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté C_{\max} . Faire l'application numérique.

Correction

Question 5 Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

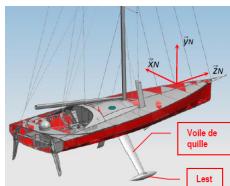
Correction

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de 3000 tr min^{-1} et de puissance utile $0,47 \text{ kW}$.

Question 6 Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

Correction

TD 2 – Corrigé



Quille pendulaire *

Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

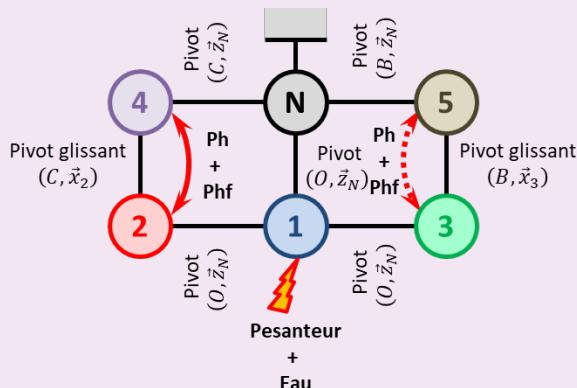
Mise en situation

Objectif L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Correction



Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

1. $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles;
2. $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles;
3. $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles;
4. $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Correction

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = \overrightarrow{V(O, 1/N)} + \overrightarrow{G_1} \hat{O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1 \overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}. \\
 2. \quad & \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R \overrightarrow{y_1} - L_2 \overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} - L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}. \\
 & \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(x_{24}(t) \overrightarrow{x_2} - L_2 \overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_N} = \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}. \\
 3. \quad & \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R \overrightarrow{y_1} + L_2 \overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} + L_2 \dot{\theta}_3 \overrightarrow{y_3}.
 \end{aligned}$$

On a aussi $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(-x_{35}(t)\overrightarrow{x_3} + L_2\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2)\overrightarrow{y_3}$.

4. $\overrightarrow{V(A, 2/4)} = \left[\frac{d\overrightarrow{CA}}{dt} \right]_{R_4} = \left[\frac{d(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}$.

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES;
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES.

Correction

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(1/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(1/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(1/N)}}{\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/N)}}{\sigma(G_1, 1/N)} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N}}{L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}}{\dot{\theta}_1 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N})} \right\}_{G_1} \\ & = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N})) \overrightarrow{z_N} + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 C_1 + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2). \\ 2. \quad & \mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(2/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(2/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/N)}}{\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/N)}}{\sigma(G_2, 2/N)} \right\}_{G_2} \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_N}}{\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 (\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2})}{\dot{\theta}_2 B_2 \overrightarrow{z_N}} \right\}_{G_1} \\ & = \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2})^2) = \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2)). \\ 3. \quad & \mathcal{E}_c(4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2. \end{aligned}$$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{Ph}} 2) = \{ \mathcal{T}(4 \rightarrow 2) \} \otimes \{ \mathcal{V}(2/4) \} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}}{\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 4 \rightarrow 2)}} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/4)}}{\overrightarrow{V(A, 2/4)}} \right\}_A = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\overrightarrow{V(A, 2/4)}} \right\}_A = \left\{ \frac{F_{h2} \overrightarrow{x_2}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2}} \right\}_A = F_{h2} \dot{x}_{24};$
- $\mathcal{P}(4 \xleftarrow{\text{Phf}} 2) = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\overrightarrow{V(A, 2/4)}} \right\}_A = \left\{ \frac{-k \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2}} \right\}_A = -k \dot{x}_{24}^2(t);$
- $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{Ph}} 5) = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\overrightarrow{V(A, 3/5)}} \right\}_A = \left\{ \frac{F_h \overrightarrow{x_3}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3}} \right\}_A = F_h \dot{x}_{35}(t);$
- $\mathcal{P}(3 \xleftarrow{\text{Phf}} 5) = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\overrightarrow{V(A, 3/5)}} \right\}_A = \left\{ \frac{-k \dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3}} \right\}_A = -k \dot{x}_{35}^2(t).$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = \{ \mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1) \} \otimes \{ \mathcal{V}(1/R_N) \} = \left\{ \frac{-M_1 g \overrightarrow{y_N}}{0} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N}}{\overrightarrow{V(G_1, 1/R_N)}} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}} \right\}_{G_1} = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \overrightarrow{y_N} = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = \{ \mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2) \} \otimes \{ \mathcal{V}(2/R_N) \} = \left\{ \frac{-M_2 g \overrightarrow{y_N}}{0} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N}}{\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}} \right\}_{G_1}$

$$\begin{aligned}
 &= -M_2 g \overrightarrow{y_N} (\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2; \\
 \bullet \quad &\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g \overrightarrow{y_N} (-\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2) \overrightarrow{y_3}) \\
 &= -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3); \\
 \bullet \quad &\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{array} \right\}_p \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ h \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_p \\
 &= F_t h \dot{\theta}_1;
 \end{aligned}$$

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

Correction On a : $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 3$ s et $t = 4$ s. Sur cet intervalle [0, 4 s], évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Correction D'après UPSTI. À 1 s, $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14500$ W à 3 s $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22500$ W Maximum à environ 22,5 kW. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur [5 s ; 8 s]).

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Correction D'après UPSTI. La différence est de 7,5 kW. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...

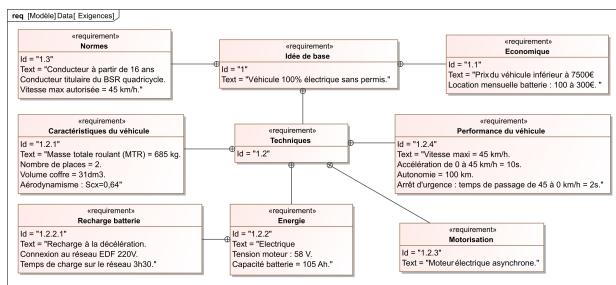
Eléments de correction :

1. .
2. (a) $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}$.
 (b) $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} - L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}$. On a aussi $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}$.
 (c) $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} + L_2 \dot{\theta}_3 \overrightarrow{y_3}$. On a aussi $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2) \overrightarrow{y_3}$.
 (d) $\overrightarrow{V(A, 2/4)} = \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2}$.
3. (a) $\mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2)$.
 (b) $\mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2))$.
 (c) $\mathcal{E}_c(4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2$.
4. • $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{ph}} 2) = F_{h2} \dot{x}_{24}$;
 • $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{phf}} 2) = -k \dot{x}_{24}^2(t)$;
 • $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{ph}} 5) = F_h \dot{x}_{35}(t)$;
 • $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{phf}} 5) = -k \dot{x}_{35}^2(t)$.
5. • la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
 • $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$;
 • $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2$;
 • $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3)$;
 • $\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = F_t h \dot{\theta}_1$.
6. $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$.

Activation 1 – Corrigé



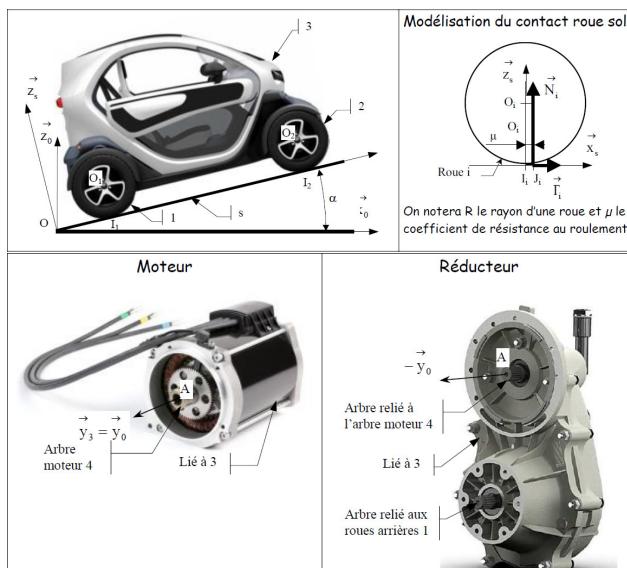
Mise en situation



Choix du motoréducteur

Objectif Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



Hypothèses générales :

- le vecteur \vec{z}_0 est vertical ascendant et on notera g l'accélération de la pesanteur;
- le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en I_i ;

Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

- le coefficient de résistance au roulement μ est identique pour tous les contacts roue – sol : $\mu = 3e - 3m$. On pose $\vec{I}_i \vec{J}_i = \mu \vec{x}_s$, avec $\mu > 0$ si le déplacement du véhicule est suivant \vec{x}_s ;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

Actions mécaniques Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est : $\{\mathcal{F}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_i \vec{x}_s + \vec{N}_i \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{J_i}$ avec $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ et $i = 1$ (roues arrières) ou 2 (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$.

Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe (A, \vec{y}_0) : $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe (O_i, \vec{y}_0) : $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$ (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge : $m = 685 \text{ kg}$;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté G ;
- les autres inerties seront négligées.

Grandeurs cinématiques : Soit ω_m la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3, ω_{13} la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et ω_{23} la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera r le rapport de transmission du réducteur tel que $\omega_m = r \omega_{13}$. On appellera $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = \nu \vec{x}_s$ la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon $R = 280 \text{ mm}$.

Choix de l'ensemble moto-réducteur

Équation de mouvement du véhicule

Objectif Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

Notations :

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide i sur le solide j dans le mouvement de i par rapport à 0 : $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide i et le solide j : $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$;
- énergie cinétique du solide i dans son mouvement par rapport à 0 : $\mathcal{E}_c(i/0)$.

Question 1 Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :

- écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- en déduire une équation faisant intervenir $C_m, N_1, N_2, \nu, \omega_m, \omega_{1/0}, \omega_{2/0}, \dots$;

- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

Correction

Question 2 À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer $(N_1 + N_2)$. Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

Correction

Question 3 Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre (v, ω_{10}) , (v, ω_{20}) et (ω_m, ω_{10}) . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme $\frac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$ avec $F_r(t)$ fonction de m , μ , g , R et a et M_{eq} fonction m , J_m , J_R , R et r .

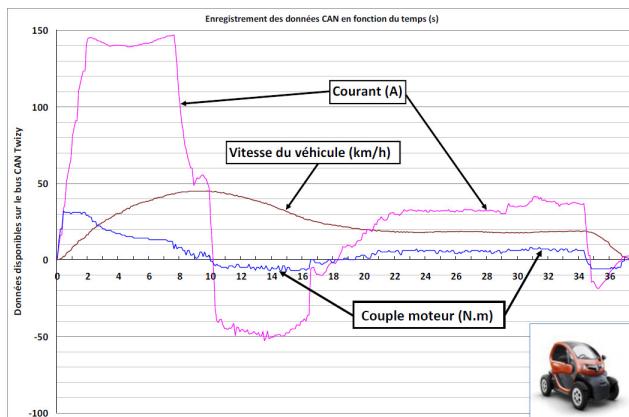
Correction

Détermination du coefficient de résistance au roulement μ

Objectif Déterminer le coefficient de résistance au roulement μ suite à une expérimentation.

Question 4 En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement μ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- justifier dans quelle phase se placer;
- définir la variable mesurée;
- définir les hypothèses nécessaires;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer μ .

Correction


Choix du moto-réducteur

Objectif Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale $\frac{dv(t)}{dt}$ du véhicule obtenue pour 3 moteurs préselectionnés en fonction du rapport de transmission r issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

Question 5 Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission r_{min} pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

Correction

Question 6 Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission r_{max} qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

Correction

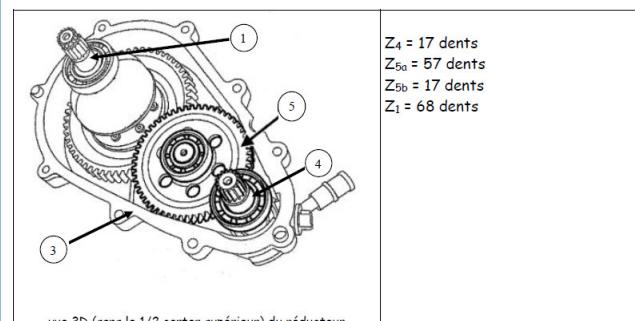
Question 7 À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

Correction

Validation du choix constructeur du moto-réducteur

Objectif Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

Question 8 À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$ et conclure.

Correction


TD 4 – Corrigé



Robot de dépose de fibres optiques

Savoirs et compétences – Mines Paris – 2004

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Présentation

Objectif En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14^\circ$ et $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$.

Hypothèses

Repères et paramétrage

Cahier des charges

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$.

Correction Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte. $2 E_c(\Sigma/R_0) = \{\mathcal{C}(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} m_1 \vec{V}(G_1, 1/0) \\ \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1} = m_1 \left(\vec{V}(G_1, 1/0) \right)^2 + \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{\Omega}(1/0).$

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 : $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\delta} \vec{z}_0$.
- Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 : $\vec{V}(G_1, 1/0) = \vec{V}(I, 1/0) + \vec{G}_1 \vec{I}_1 \wedge \vec{\Omega}(1/0) = -\left(R \vec{y}_0 + \frac{L_1}{2} \vec{x}_1 \right) \wedge \dot{\delta} \vec{z}_0 = -R \dot{\delta} \vec{x}_0 + \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \vec{y}_1$.
- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant \vec{x}_1 . Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant \vec{z}_0 est $C_1 = \frac{m_1 L_1^2}{12}$.
- Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 : $\vec{\sigma}(G_1, 1/0) = \vec{I}_{G_1}(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) = \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta} \vec{z}_0$.
- On en déduit $E_c(1/0)$: $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta}^2$
 $= \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right)$.

Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ .

Correction $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$

- Actions de la pesanteur :

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1}$$

$$= -m_1 g \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(G_1, 1/0) = -m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

- Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{04} \\ 0 \end{array} \right\}_I \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(4/0) \\ 0 \end{array} \right\}_I = 0.$$

- Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{02} \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_E \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(2/0) \\ \vec{V}(E, 2/0) \end{array} \right\}_E = R_{02} \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(E, 2/0) = 0.$$

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ .

Correction • Les liaisons sont supposées comme parfaites donc : $\mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Pivot}} 2\right) = \mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Pivot Gl.}} 3\right) = \mathcal{P}\left(3 \xrightarrow{\text{Pivot}} 2\right) = 0$.

- Action du vérin entre 1 et 3 :

$$\mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Vérin}} 3\right) = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ 0 \end{array} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(N, 3/1) \end{array} \right\}_N = F \vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1.$$

En considérant que \vec{MN} est porté par \vec{x}_1 (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1 &= \vec{V}(M, 3/1) \cdot \vec{x}_1 = \left(\vec{V}(M, 3/2) + \vec{V}(M, 2/1) \right) \cdot \vec{x}_1 = \left(\vec{0} + \vec{V}(B, 2/1) + \vec{MB} \wedge \vec{\Omega}(2/1) \right) \cdot \vec{x}_1 = (-b \vec{x}_2 \wedge (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_1 = \\ b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1 &= -b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta). \\ \text{On en déduit : } \mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Vérin}} 3\right) &= -F b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta). \end{aligned}$$

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F , δ , et β .

Correction On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma).$$

$$\text{Or, } \frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) \right] = m_1 \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right].$$

Ainsi on obtient, l'équation :

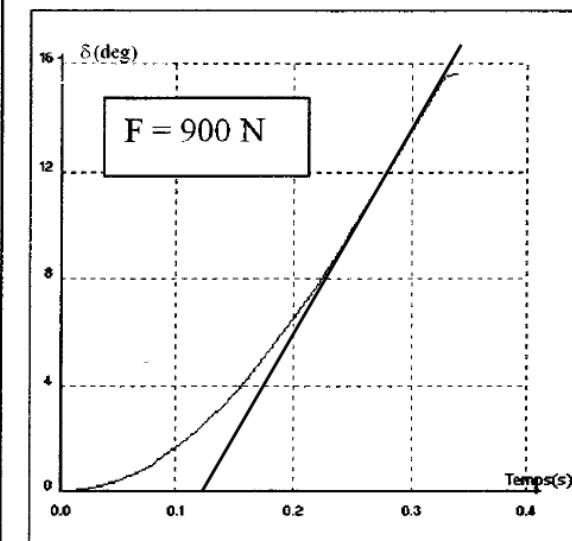
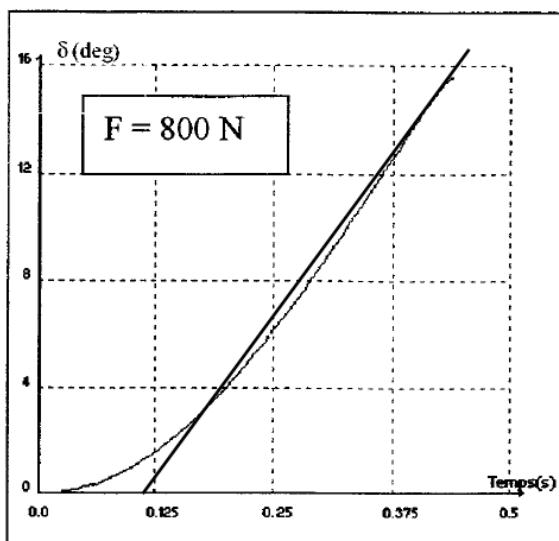
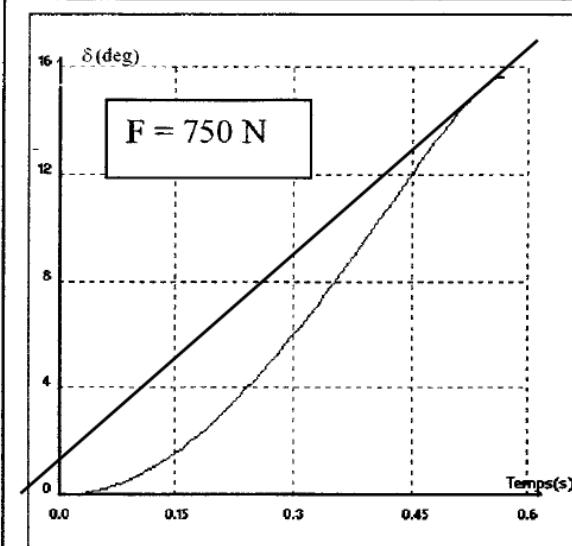
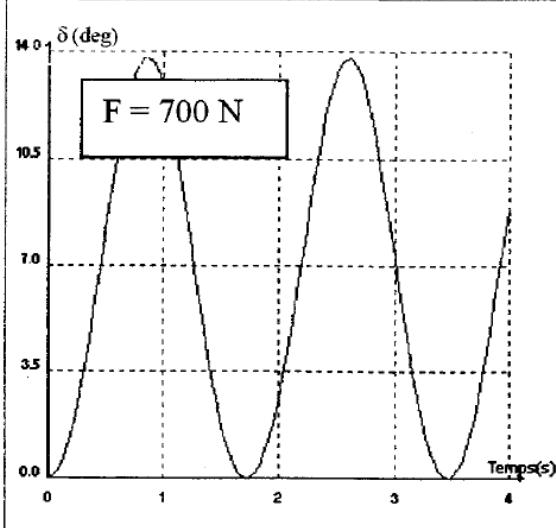
$$m_1 \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right] = -F b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

Correction

- $F = 700\text{ N}$: le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14° . Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement).
Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- $F = 750\text{ N}$: le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $37.5^\circ/\text{s}$ ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de 700 N étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de 750 N devienne insuffisant en réalité.
Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- $F = 800\text{ N}$: Le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $45^\circ/\text{s}$ ce qui est inférieur à la limite de $50^\circ/\text{s}$ imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.
Cette valeur est satisfaisante.
- $F = 950\text{ N}$: Le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $75^\circ/\text{s}$ ce qui est supérieur à la limite de $50^\circ/\text{s}$ imposée par le cahier des charges.
Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.



TD 5 – Corrigé



RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain*

Concours Commun Mines Ponts 2009

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Mise en situation

Question 6 Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble Σ au point C_1 dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Correction

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer la somme des efforts normaux $Z_{2d} + Z_{2g}$ s'exerçant sur les roues arrières. Isolons l'ensemble de la plate-forme PF, soit l'ensemble Σ , les roues centrales et les motoréducteurs. Plaçons-nous dans le plan médian $(C_1, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$ de la plate-forme PF. Nous définissons le projeté I_1 des points de contact I_{1d} et I_{1g} dans ce plan. I_1 est défini par le vecteur : $\vec{C_1 I_1} = -R \vec{z}_L$. D'autre part, nous avons $\vec{C_2 I_1} = b \vec{y}_L - R \vec{z}_L$ et $\vec{C_3 I_1} = -b \vec{y}_3 - R \vec{z}_L$. Nous ferons l'hypothèse que le moment dynamique $\vec{\delta}(I_1, PF/0) \cdot \vec{x}_L$ est négligeable devant les actions mécaniques.

Question 7 En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_0 en I_1 en projection sur \vec{x}_L , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact $Z_{2d} + Z_{2g}$, entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r)g$ avec $m_2 = 52\text{ kg}$ la masse du pod arrière 2.

Correction

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur C_m par une approche énergétique.

Question 8 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme $\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$ où J est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

Correction

Question 9 Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme $C_m = k_2 (J \ddot{\varphi} + k_1 (T_{2d} + T_{2g}))$ où k_1 et k_2 sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.

Correction

Pour la question suivante, vous prendrez $J = 34\text{ kg m}^2$, $k_1 = 0,65\text{ m}$ et $k_2 = 1,3 \times 10^{-2}$ sans unité.

Question 10 Calculer le couple moteur maximal : C_m maxi. À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

Correction

