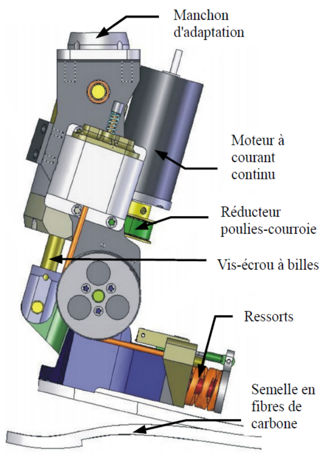
DDS 3

Les ptits devoirs du soir
Xavier Pessoles

Exercice 137 – Prothèse active transtibiale⋆
B2-07

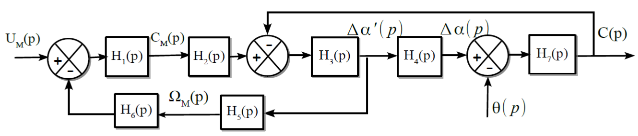
Présentation

Des ingénieurs du M.I.T. ont mis au point une prothèse active transtibiale capable de proposer un comportement similaire à celui des membres non amputés. On étudie dans ce sujet le prototype initial qui a permis de valider la pertinence d'une telle prothèse active.



L'actionneur de la prothèse est un moteur à courant continu alimenté par une batterie rechargeable de 16 Volts. L'énergie mécanique est transmise par un réducteur de type poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou qui adapte cette énergie mécanique pour la prothèse (ensemble de liaisons entre le pied artificiel constitué d'une semelle en fibres de carbone et le manchon ou tibia artificiel). Des ressorts permettent d'ajuster également l'énergie mécanique fournie au pied artificiel. L'effort exercé par les ressorts est directement relié au couple exercé par l'actionneur.

On peut modéliser la chaîne d'énergie de la façon suivante :



Les grandeurs temporelles sont les suivantes :

- u_M tension d'alimentation du moteur (V) ;
- C_M couple exercé par le moteur (Nm) ;
- ω_M vitesse angulaire du moteur (rad s^{-1}) ;
- α angle de rotation du basculeur (rad) tel que $\alpha = \alpha_r + \Delta\alpha$ où α_r est la position repos et $\Delta\alpha$ est la variation angulaire autour de la position repos. On a alors : $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t}$. On note $\Delta\alpha'(p)$ la transformée de Laplace de $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t}$;
- θ angle de rotation du pied (rad) tel que $\theta = 0\,\text{rad}$ pour la position repos ;
- C couple exercé par le pied (Nm).

On note en majuscule, lorsque cela est possible, les variables associées aux grandeurs temporelles dans le domaine symbolique.

Comportement dynamique de la prothèse

Objectif L'objectif de cette partie est d'établir les équations de comportement dynamique de la prothèse autour de la position de repos lors des phases d'appui et oscillante. Ces équations permettront de compléter le schéma-blocs de la chaîne d'énergie.

On donne l'équation différentielle linéarisée suivante qui caractérise le comportement dynamique de la prothèse : $J_M \dfrac{\mathrm{d}^2\Delta\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + \mu_m \dfrac{\mathrm{d}\Delta\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = C_M(t)R_T - C(t)R_T^2$ avec $R_T = \dfrac{1}{145}$.

Le moteur électrique est régi par les équations électriques et de couplage électromécanique :

- $u_M(t) = Ri(t) + e(t)$ avec $i(t)$ courant moteur et $e(t)$ fcem ;
- $e(t) = k_c\,\omega_M(t)$ avec $\omega_M(t)$ vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator ;
- $C_M(t) = k_c\,i(t)$.

Question 1 *À partir des équations caractérisant le système, déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_6(p)$.*

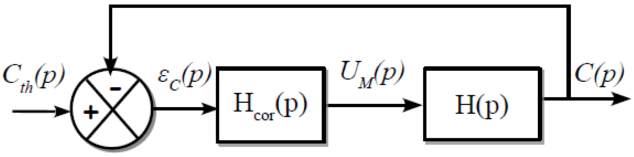
On a par ailleurs $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$, $H_5(p) = \dfrac{1}{R_T}$ et $H_7(p) = k_{RS}d_0^2$ ($k_{RS} = 1200 \times 10^3\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$ raideur équivalente du ressort et $d_0 = 0{,}035\,\text{m}$).

On considère que $\theta(p) = 0$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en* *boucle fermée* $FTBF(p) = \dfrac{C(p)}{U_M(p)}$.

Analyse des performances de l'asservissement en couple

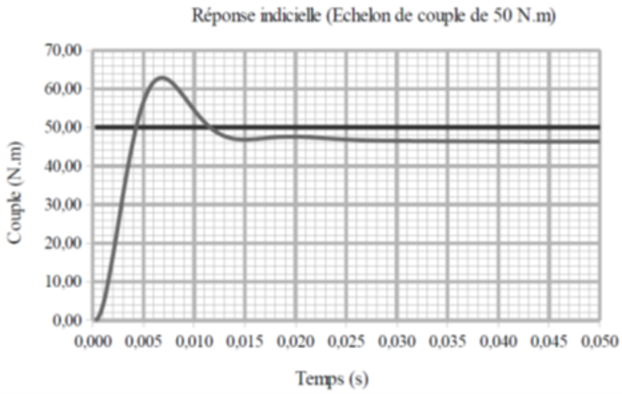
Le schéma-blocs de l'asservissement en couple peut être simplifié par le schéma-blocs suivant avec $H(p) = \dfrac{a_0}{1+a_1 p + a_2 p^2}$ où $a_0 = 2{,}9\,\text{NmV}^{-1}$, $a_1 = \dfrac{26}{4356}\,\text{s}$ et $a_2 = \dfrac{1}{4356}\,\text{s}^2$ et $H_{\text{cor}}(p) = H_c(p) K_{\text{amp}} K_A$.



Objectif L'objectif est de déterminer si la correction $H_{\text{cor}}(p)$ permet de respecter le cahier des charges rappelé ci-après.

Critères	Valeur
Rapidité (temps de réponse à 5%)	$t_{r5\%} < 0{,}1\,\text{s}$
Précision pour une entrée en échelon (écart normalisé par la valeur de l'échelon)	10 % maxi

Question 3 *À l'aide des courbes, valider l'ensemble des critères du cahier des charges en justifiant clairement vos réponses.*



1. $H_1(p) = \dfrac{k_c}{R}$, $H_2(p) = R_T$, $H_3(p) = \dfrac{R_T^2}{J_M p + \mu_m}$ et $H_6(p) = k_c$.
2. $\text{FTBF}(p) = \dfrac{k_c R_T^3}{J_M R p^2 + p\left(\mu_m R + k_c k_c R_T^2\right) + R_T R^2 k_{RS} d_0^2}\, k_{RS} d_0^2$
3. .

Corrigé voir 137.

Exercice 137 – Prothèse active transtibiale★

B2-07

Présentation

Comportement dynamique de la prothèse

Question 1 *À partir des équations caractérisant le système, déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_6(p)$.*

Correction On a d'une part, $C_M(p)=H_1(p)\left(U_M(p)-\Omega_M(p)\right)$.

D'autre part, en utilisant les deux équations du moteur électrique, on a $U_M(p)=RI(p)+E(p)$ et $E(p)=k_c\Omega_M(p)$ soit $U_M(p)=RI(p)+k_c\Omega_M(p)$. De plus $C_M(p)=k_cI(p)$; donc $U_M(p)=R\dfrac{C_M(p)}{k_c}+k_c\Omega_M(p)$. Par suite, $C_M(p)=\dfrac{k_c}{R}\left(U_M(p)-k_c\Omega_M(p)\right)$.

En identifiant, on a donc $H_1(p)=\dfrac{k_c}{R}$ et $H_6(p)=k_c$.

D'après le schéma-blocs,

$\Delta\alpha(p)=\left(C(p)-C_M(p)H_2(p)\right)H_3(p)H_4(p)$ soit

En utilisant l'équation différentielle caractéristique du comportement de la prothèse, on a : $J_Mp^2\Delta\alpha(p)+\mu_m p\Delta\alpha(p)=C_M(p)R_T-C(p)R_T^2 \Leftrightarrow \Delta\alpha(p)\left(J_Mp^2+\mu_m p\right)=C_M(p)R_T-C(p)R_T^2$

$\Leftrightarrow \Delta\alpha(p)=\dfrac{R_T^2}{J_Mp^2+\mu_m p}\left(\dfrac{C_M(p)}{R_T}-C(p)\right)$.

Or, $\Delta\alpha(p)=\dfrac{1}{p}\Delta\alpha'(p)$; donc $H_4(p)=\dfrac{1}{p}$.

Au final, $H_3(p)=\dfrac{R_T^2}{J_Mp+\mu_m}$ et $H_2(p)=R_T$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée FTBF$(p)=\dfrac{C(p)}{U_M(p)}$.*

Correction On déplace le dernier point de prélèvement avant H_4. On ajoute donc $H_4(p)H_7(p)$ dans la retour.

On a alors $F(p)=\dfrac{\Delta\alpha'(p)}{-}=\dfrac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)H_7(p)}$. $\text{FTBF}(p)=\dfrac{H_1(p)H_2(p)F(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_5(p)H_6(p)F(p)}H_4(p)H_7(p)$.

$$\text{Soit FTBF}(p)=\dfrac{H_1(p)H_2(p)\dfrac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)H_7(p)}}{1+H_1(p)H_2(p)H_5(p)H_6(p)\dfrac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)H_7(p)}}H_4(p)H_7(p)$$

$$=\dfrac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)H_7(p)+H_1(p)H_2(p)H_5(p)H_6(p)H_3(p)}H_4(p)H_7(p)$$

$$=\dfrac{\dfrac{k_c}{R}R_T\dfrac{R_T^2}{J_Mp+\mu_m}}{1+\dfrac{R_T^2}{J_Mp+\mu_m}\dfrac{k_{RS}d_0^2}{p}+\dfrac{k_c}{R}R_T\dfrac{1}{R_T}k_c\dfrac{R_T^2}{J_Mp+\mu_m}}\dfrac{k_{RS}d_0^2}{p}$$

$$=\dfrac{\dfrac{k_c}{1}R_T^3}{J_MRp^2+\mu_mRp+R_TR^2k_{RS}d_0^2+pk_ck_cR_T^2}k_{RS}d_0^2$$

$$=\dfrac{k_cR_T^3}{J_MRp^2+p\left(\mu_mR+k_ck_cR_T^2\right)+R_TR^2k_{RS}d_0^2}k_{RS}d_0^2.$$

Analyse des performances de l'asservissement en couple

Question 3 *À l'aide des courbes, valider l'ensemble des critères du cahier des charges en justifiant clairement vos réponses.*

Correction
- Le régime permanent semble atteint autour de 0,03 s; donc les critère de rapidité est respécté.

- En régime permanent, le couple atteint est de 46 Nm pour une consigne de 50 Nm. Un écart de 10 % correspondrait à un couple atteint de 45 Nm. Le critère de précision est respecté.