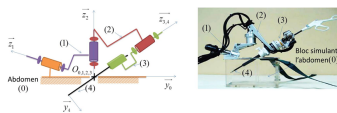


Colle 01 –
Corrigé

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique

Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

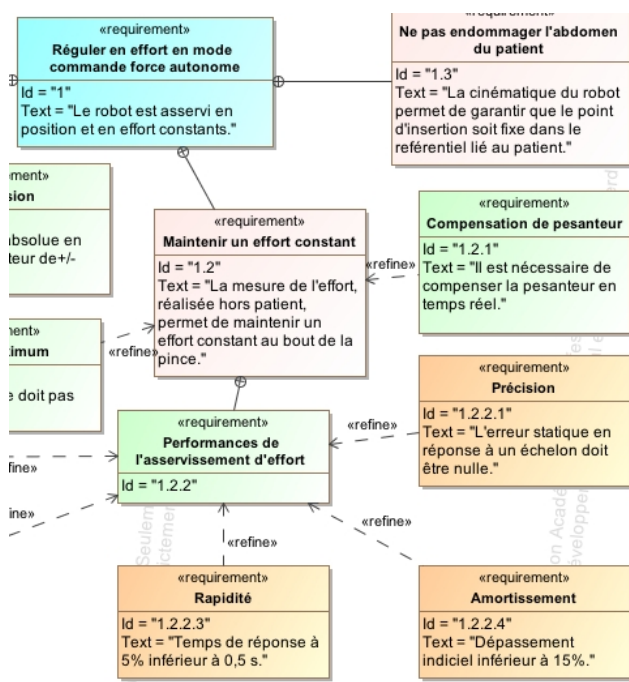
- B2-04 : Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.

1 Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

1.1 Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC²E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure suivante décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC²E.



1.2 Validation des performances de l'asservissement d'effort

Modèle de connaissance de l'asservissement

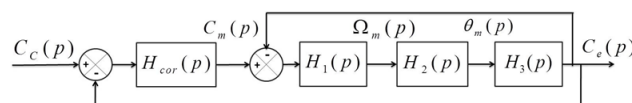
Objectif Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;

- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta} \theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E;
- $C_c(p)$, couple de consigne;
- $C_m(p)$, couple moteur;
- $H_{cor}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

Dans un premier temps, on prendra $H_{cor}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Correction $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$, $H_2(p) = \frac{1}{p}$ et $H_3(p) = K_{C\theta}$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Correction Calculons $F(p) = \frac{C_e(p)}{C_m(p)} =$

$$\frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{K_{C\theta} \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}}{1 + K_{C\theta} \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}$$

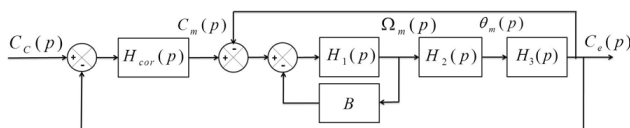
Par suite $H_{BF}(p) = \frac{F(p)H_{cor}(p)}{1 + F(p)H_{cor}(p)}$ soit $H_{BF}(p) =$

$$\frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta} + K_{C\theta}} = \frac{1/2}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2 + 1}$$

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Correction Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude $C_0/2$. Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



Régulation avec retour tachymétrique

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Correction D'une part, $F_1(p) = \frac{1}{\frac{Jp}{B} + 1} =$

$$\frac{1}{Jp + B}$$

Par suite $FTBO(p) = \frac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + F_1(p)H_2(p)H_3(p)}$

$$= \frac{\frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}}{1 + \frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p(Jp + B) + K_{C\theta}} =$$

$$\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}$$

Par ailleurs, $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + 2\tau p + \tau^2 p^2}$.

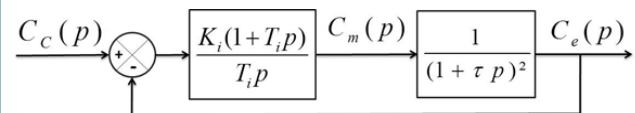
On a donc $\frac{B}{K_{C\theta}} = 2\tau \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \tau$. D'autre part,

$$\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$$

Au final, $B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \frac{B}{2K_{C\theta}} = \frac{2\sqrt{JK_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



Régulation avec correcteur PI.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction • Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.

Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

On a $\varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p^2)}}$

$$= C_0 \frac{1}{p + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i(1 + \tau p^2)}}$$

Par suite, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

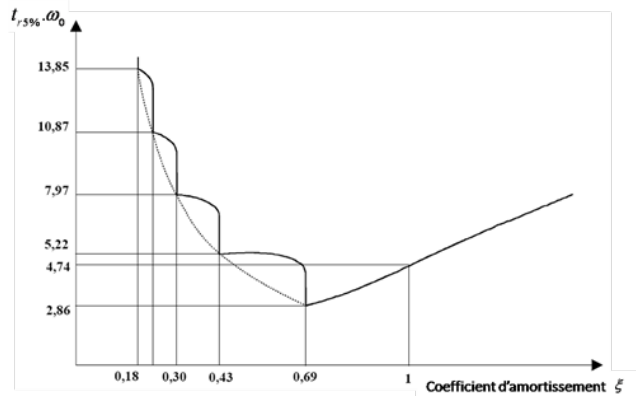
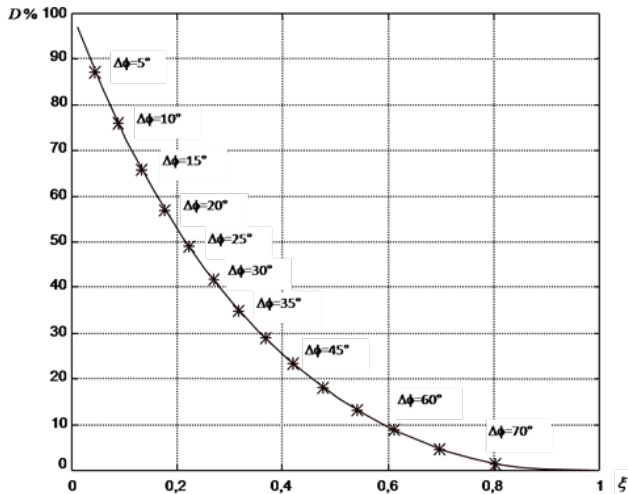
Correction Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.

En choisissant $T_i = \tau$ (compensation du pôle double du système), on a alors $FTBO(p) = \frac{K_i(1+\tau p)}{\tau p(1+\tau p)^2} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}$.

$$\text{On a alors } FTBF(p) = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}$$

$$= \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p) + K_i}$$

Question 7 À partir des courbes suivantes, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.



On donne $K_i = 1$.

Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Correction

Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0,01$ s et $\tau = 0,5$ s.

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p^2)}$.

Question 2.

D'après l'équation de mouvement, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$. On a donc $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$.
On a $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$; donc $H_2(p) = \frac{1}{p}$.
Enfin, $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$ et donc $H_3(p) = K_{C\theta}$.

Question 3.

On a dans un premier temps $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp^2}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp^2}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.
Dans un second temps, $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$.
Avec $H_{cor}(p) = 1$: $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$.

Question 4.

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a : $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$. Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude C_0 est une sinusoïde (d'amplitude C_0 et de moyenne $\frac{C_0}{2}$).
Un mouvement sinusoïdal est surement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical.

Question 5.

On a $H_{BO}(p) = \frac{H_{cor}(p)\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{Jp^2}{K_{C\theta}}+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$.
Par ailleurs, $(1+\tau p)^2 = 1+\tau^2 p^2+2\tau p$.
En identifiant, $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$ et $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$. On a donc $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$.

Question 6.

On a : $\varepsilon(p) = \frac{C_e(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}}$. En conséquences, $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}} = \lim_{p \rightarrow 0} C_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}} = 0 \text{ Nm}$.
L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée.

Question 7.

On a $\frac{\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}} = \frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2+K_i(1+T_i p)}$. Avec $T_i = \tau$, on a $\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i}$. La FTBF est bien d'ordre 2.

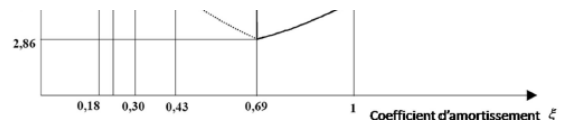


Pour avoir $D\% \leq 15\%$ il faut $\xi \geq 0,5$

Cependant, on trouve sur ce diagramme qu'il faut avoir $\xi \geq 0,8$ pour avoir une marge de phase de 70° .

Si on souhaite obtenir le temps de réponse à 5% le plus rapide, comme $\xi \geq 0,8 > 0,7$, il faut prendre ξ le plus faible possible. Cela impose $\xi = 0,8$ et comme $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$ on a

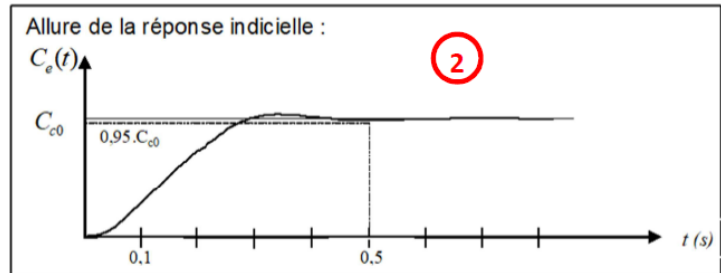
alors $K_i = \frac{1}{4\xi^2} = 0,4$.



Pour $\xi = 0,8$, la lecture de l'abaque donne donc $t_{R5\%} \cdot \omega_0 \geq 3,5$ et avec $t_{R5\%} \leq 0,5s$ on a $\omega_0 \geq 7 \text{ rad/s}$

Question 9.

Critère	Valeur
Dépassement	2% 1
Tr5%	<0,5 s 1
Erreur statique en réponse à un échelon	0 1



Colle 02 –
Corrigé

Cisaille à découpe au vol

D'après P. Dubois, C. Gamelon.

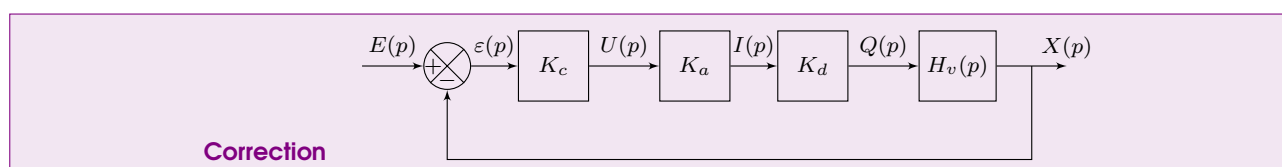
Savoirs et compétences :

- ☐ B2-04 : Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert ;
- ☐ B2-06 : Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.

Mise en situation

Schéma-bloc du système

Question 1 Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.



Fonction de transfert de l'ensemble vérin et charge

Équation de comportement dynamique

Fonction de transfert du vérin

Question 2 Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert : $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$, que l'on mettra sous la forme : $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$.

Correction

$$\text{D'une part, } mp^2 X(p) = S \Delta P(p) - f p X(p) \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) = \Delta P(p).$$

$$\text{D'autre part : } Q(p) = S p X(p) + \frac{V}{2B} p \Delta P(p) \Leftrightarrow 2B \frac{Q(p) - S p X(p)}{V p} = \Delta P(p).$$

$$\text{On a donc : } \frac{p(mp + f)}{S} X(p) = 2B \frac{Q(p) - S p X(p)}{V p} \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) + \frac{2B S p X(p)}{V p} = \frac{2B Q(p)}{V p}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p(mp + f)}{S} + \frac{2B S p}{V p} \right) \frac{V p}{2B} = \frac{Q(p)}{X(p)} \Leftrightarrow \left(\frac{p(mp + f)}{S} \frac{V p}{2B} + S p \right) = \frac{Q(p)}{X(p)}.$$

$$\text{On a donc, } H_v(p) = \frac{1}{p \left(\frac{(mp + f) V p}{S} \frac{1}{2B} + S \right)} = \frac{1}{p \left(\frac{V m}{2B S} p^2 + \frac{f V}{2B S} p + S \right)} = \frac{1/Q}{p \left(\frac{V m}{2B S^2} p^2 + \frac{f V}{2B S^2} p + 1 \right)}.$$

$$\text{Au final, } k = \frac{1}{S}, a = \frac{V m}{2B S^2} \text{ et } b = \frac{f V}{2B S^2}.$$

Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

Question 3 Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction des notations K_v , ω_0 et ξ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de $H_v(j\omega)$). Quelle est sa valeur pour $\omega = \omega_0$?

Correction $H_v(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$

En conséquence, $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \right| = 20 \log K_v - 20 \log |j\omega| - 20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|$

$= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right|$

Au final, $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi$.

Question 4 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers 0. Quelle est sa pente? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB?

Correction On a $G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right|$.

Lorsque ω tend vers 0, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$. La pente est donc de -20 dB/decade. Elle coupe l'horizontale à 0 dB en $\omega = K_v$.

Question 5 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers $l'\infty$. Quelle est sa pente? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'asymptote précédente?

Correction On a $G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right|$.

Lorsque ω tend vers l'infini, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$, G_{dB} tend vers $= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$
 $= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 + 20 \log \omega_0^2 = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega$.

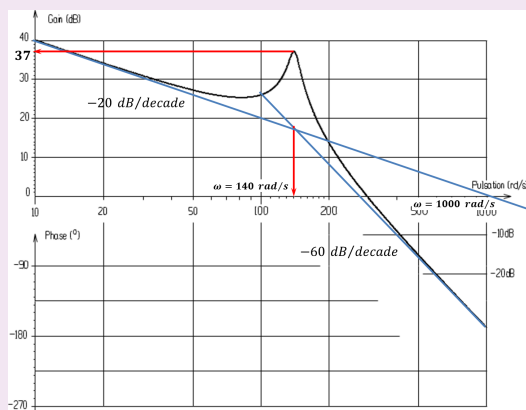
La pente est donc de -60 dB/decade.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand

$20 \log K_v - 20 \log \omega = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega \Leftrightarrow \log \omega = \log \omega_0$. Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en $\omega = \omega_0$.

Question 6 Dédire des résultats précédents et du diagramme de Bode de $H_v(p)$ donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres K_v , ω_0 et ξ (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

Correction



Par lecture du graphe, on obtient $\omega_0 = 140$ rad/s et $K_v = 1000$ s m⁻².

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 20 \log 1000 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 60 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow \frac{37 - 60 + 20 \log 140}{-20} = \log 2\xi \Leftrightarrow \xi \simeq 0,05.$$

Question 7 Donner l'expression littérale de la phase $\varphi(\omega)$ en fonction des notations ω_0 et ξ . Déterminer ses

limites lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre ω_0 puis pour 100 et 200 rad s^{-1} . Tracer la courbe de phase.

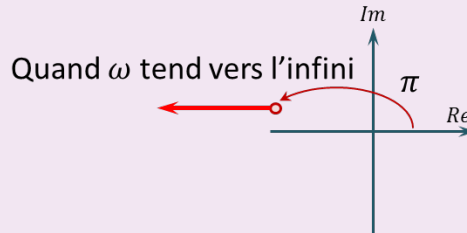
Correction

$$\varphi(\omega) = \arg K_v - \arg(j\omega) - \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$$

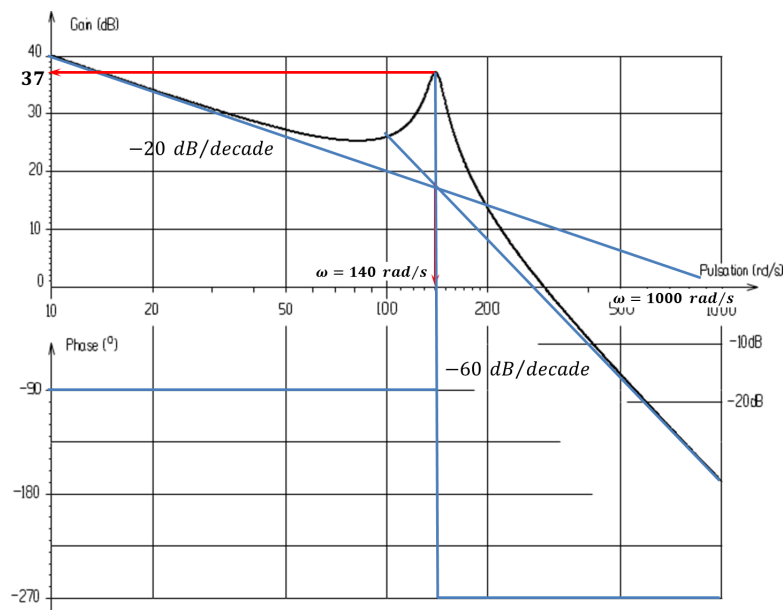
Lorsque ω tend vers 0, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

Lorsque ω tend vers l'infini, $-\arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$ tend vers π donc $-\arg(\dots)$ tend vers $-\pi$.

Explication graphique de prof de SII...



Au final, lorsque ω tend vers l'infini, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{3\pi}{2}$.



Détermination des gains K_c , K_a et K_d

Question 8 Quelle valeur K doit-on donner au produit des gains $K_c K_a K_d$ (préciser les unités). On note K_0 le produit $K K_v$ (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de K_0 ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue ?

Correction Étant donné l'exigence demandée, le gain de la FTBO doit être de -6 dB lorsque la phase vaut -180° . On a déjà vu que pour cette phase, le gain décibel de H_v vaut 37 dB. Le gain dB vaut $20 \log K + 20 \log |H_v|$. On cherche donc K tel que $20 \log K + 20 \log |H_v| = -6$. Au final, $K = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Par suite, $K_0 = 7 \text{ s}^{-1}$.

Erreur de traînage

Question 9 Donner l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H(p)$. La tôle se déplace à vitesse constante v , quelle est la transformée $E(p)$ de $e(t)$? Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de v et des paramètres canoniques.

Correction On peut redémontrer le résultat suivant : $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$.

Exprimons $\varepsilon(p)$: $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - H(p)\varepsilon(p)$; donc $\varepsilon(p)(1 + H(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$.

Le consigne étant une vitesse, on a donc $E(p) = \frac{v}{p^2}$. On a donc : $\varepsilon(p) = \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}}$.

Question 10 On appelle erreur de traînage ε_t la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de ε_t . Faire l'application numérique avec $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ et $K_0 = 7$ (unité SI).

Correction L'entrée en vitesse précédente correspondant à une entrée en rampe, on a donc $\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{v}{p + \frac{K_v K_c K_a K_d}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}} = \frac{v}{K_v K_c K_a K_d} = \frac{1}{7} \simeq 0,14 \text{ m}$. Pour compenser cette erreur, il suffit de régler la butée de la tôle à découper.

Identification temporelle

Question 11 Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante : $v = 1 \text{ m s}^{-1}$).

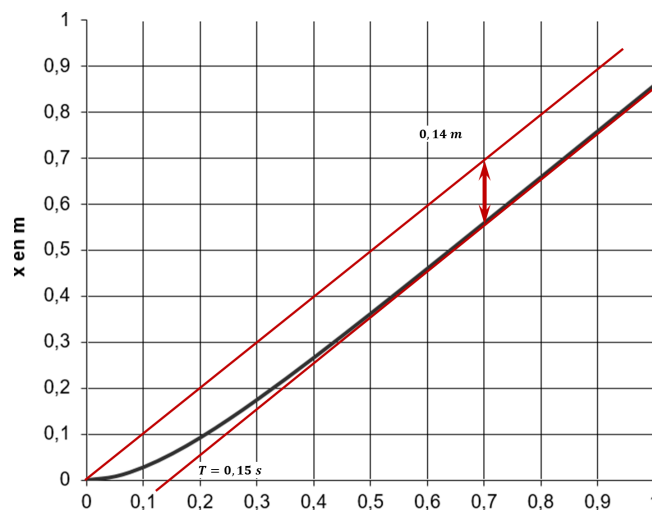
Question 12 Déterminer les valeurs numériques de K_f et T à l'aide de relevés sur la courbe.

Correction Première solution : cf cours pour un système du premier ordre soumis à une rampe.

Seconde solution : se raccrocher à ce que l'on sait (peut-être) pour un premier ordre soumis à un échelon... en effet, la rampe peut être assimilée à un premier ordre intégré. Ainsi, pour un système du premier ordre soumis à un échelon d'amplitude v , la valeur finale est $v K_f$. Ainsi, en intégrant, la pente en régime permanent sera de $v K_f$.

La pente étant de 1 on a $K_f = 1$.

Reste à savoir que l'asymptote coupe l'axe des abscisses en T . Après lecture, $T = 0,15 \text{ s}$.

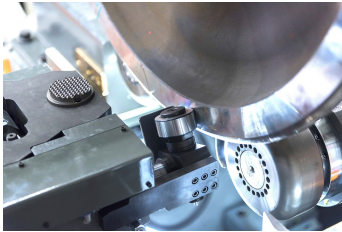


Question 13 Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

Correction Même erreur que précédemment.

Question 14 Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur?

Correction Il est possible de décaler la butée de 14 cm et ainsi supprimer l'écart de trainage.

Colle 03 –
Corrigé

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil

Concours Centrale Supélec – PSI 2018

Savoirs et compétences :

- B2-07 : Modéliser un système par schéma-blocs ;
- C2-02 : Déterminer la réponse fréquentielle.

Modélisation du mouvement pour la commande

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Correction D'après le schéma-blocs $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$. D'après la première équation différentielle, on a : $m_1 p^2 Z_1(p) + \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) = \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1 p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$. On a donc par identification $H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$ et $H_1(p) = \lambda p + K$.

D'après le schéma-blocs $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$. D'après la seconde équation différentielle, $m_2 p^2 Z_2(p) + \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) = \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2 p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p)}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$. On a donc par identification $H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$ et $H_3(p) = \lambda p + K$.
Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$$

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Correction En utilisant le premier modèle, on avait : $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } Z_1(p) &= H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)))) \\ &= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p) \\ &\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p)). \end{aligned}$$

En utilisant le schéma-blocs, $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$. Par identification, on obtient $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$ et $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$. Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .

Correction

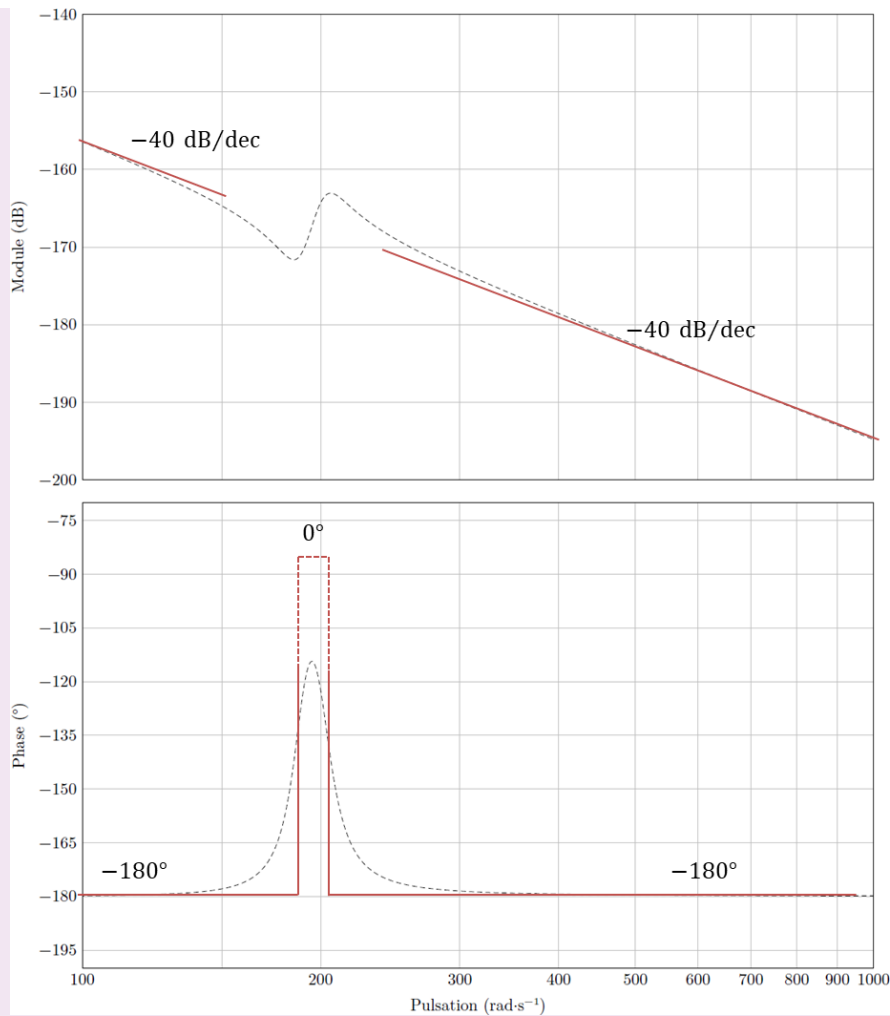
$$\begin{aligned} N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\ &= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \\
 &= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))} \\
 &= \frac{m_2 \left(p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left(p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)} \\
 \text{Par identification, on a : } A &= \frac{1}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, 2\xi_1 \omega_1 = \frac{\lambda}{m_2} \text{ et } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} =, \omega_2^2 = K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \\
 2\xi_2 \omega_2 &= \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 K}}. \\
 \text{On a donc } \xi_1 &= \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.
 \end{aligned}$$

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Correction D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement $\omega_1 < \omega_2$. On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert $N_2(p)$.

	ω_1		
	ω_1	ω_1	ω_1
$\frac{A}{p^2}$	-40 dB/dec	-40 dB/dec	-40 dB/dec
$p^2 + 2\xi_1 \omega_1 p + \omega_1^2$	0 dB/dec	40 dB/dec	40 dB/dec
$\frac{1}{p^2 + 2\xi_2 \omega_2 p + \omega_2^2}$	0 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$20 \log N_2(p) $	-40 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$\text{Arg}(N_2(p))$	-180°	0°	-180°



Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2app}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2app}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Correction Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad.s^{-1} , on peut modéliser $N_2(p)$ par un double intégrateur. Le gain dB est donc $20\log A - 20\log \omega^2$. Pour $\omega = 500 \text{ rad.s}^{-1}$ on a $20\log A - 20\log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20\log 500^2 - 182,5}{20}$ et $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$.

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la ??.

Correction Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1** : $M\varphi = 60^\circ$: impossible à respecter la phase sera toujours de -180° .
- **req 1.2** : $\omega_{0\text{dB}} = 200 \text{ rad.s}^{-1}$: critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4** : erreur en régime permanent : $\Delta c < 40 \mu\text{m}$ pour un échelon d'amplitude $f_{c0} = 1 \text{ kN}$: critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5** : défaut de la roue $\Delta u < 30 \mu\text{m}$ lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

D'un point de vue numérique, $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$ et $\tau = 1 \text{ s}$.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Correction D'après le schéma-blocs, $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$. D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$. En conséquence, $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$.

Le schéma-blocs retenu est le suivant.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la?? en analysant les « zéros de transmission ».

Correction $FTBO(p) = b K_f S(p) H_r(p) = \frac{b K_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p)$.

On a $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$.

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

- pour $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty$;
- pour $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2$.

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$.

Pour la phase, $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j \sin(-\tau\omega))$. Or $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$. On a donc $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$.

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal $\frac{2\pi}{\tau}$ périodique.

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

Correction Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire b' tel que $20 \log b' = 45$ soit $b' = 10^{45/20} = 177$. Au bilan, on aurait donc $b_{\lim} = b' b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$.

Il faudrait déterminer si une augmentation de b réduit l'amortissement de l'asservissement.

Colle 04 –
Corrigé

Gyropode à usage professionnel HUBLEX

Concours CCINP – MP 2020

Savoirs et compétences :

- B2-04 : Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert ;
- C3-03 : Déterminer la réponse fréquentielle.

Présentation

Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

Modélisation du moteur

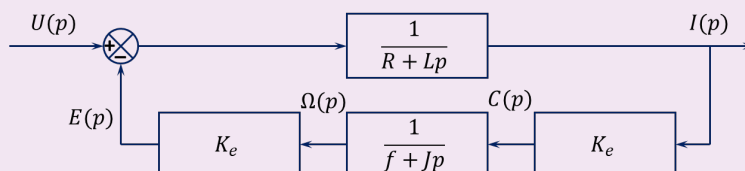
Question 1 Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

Correction • $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$;

- $E(p) = K_e \Omega_m(p)$;
- $C_m(p) = K_e I(p)$;
- $J_{eq} p \Omega_m(p) = C_m(p) - f \Omega_m(p)$.

Question 2 Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans ?? . On précisera la grandeur associée à chaque lien.

Correction



Question 3 Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$. Mettre cette fonction de transfert

sous la forme $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$.

Correction En utilisant la formule de Black, on a $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{R + Lp}}{1 + K_e^2 \frac{1}{R + Lp} \frac{1}{f + Jp}} = \frac{1}{(R + Lp) + K_e^2 \frac{1}{f + Jp}}$

$$= \frac{f + Jp}{(R + Lp)(f + Jp) + K_e^2}$$

$$= \frac{f + Jp}{Rf + (Lf + RJ)p + LJp^2 + K_e^2} = \frac{f}{Rf + K_e^2} \frac{1 + \frac{J}{f}p}{(Lf + RJ) \frac{p}{Rf + K_e^2} + \frac{LJp^2}{Rf + K_e^2} + 1}$$

On a donc $K_m = \frac{f}{Rf + K_e^2}$, $\tau_m = \frac{J}{f}$, $\frac{1}{\omega_{0m}^2} = \frac{LJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow \omega_{0m} = \sqrt{\frac{Rf + K_e^2}{LJ}}$ et $\frac{2z_m}{\omega_{0m}} = \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m =$

$$\frac{\omega_{0m}}{2} \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{Lf + RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K_e^2}}.$$

Asservissement du moteur en intensité

Question 4 Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à K_{iu} , caractéristique du convertisseur IU.

Correction Pour avoir $\varepsilon = 0$ lorsque $I_c(p) = I(p)$, il faut nécessairement $K_{capt} = K_{IU}$.

Question 5 Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée μ_s , pour une entrée indicielle (i.e. $I_c(p)$ est un échelon unitaire), en fonction de K_{iu} , K_p et K_m .

Correction $K_{capt} = K_{IU}$, il est donc possible de positionner K_{capt} en amont de la chaîne directe, de supprimer K_{IU} et de se ramener à un schéma-blocs à retour unitaire.

$$\text{On a alors } FTBO(p) = K_{Capt} C(p) H_m(p) \text{ et } \varepsilon(p) = \frac{I_c(p)}{1 + FTBO(p)}.$$

$$\text{On a alors } \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{1}{p} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{1}{1 + K_m K_p K_{Capt}}.$$

Question 6 Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1 » avec ce type de correcteur.

Correction Avec ce correcteur, l'exigence de précision nulle ne pourra pas être satisfaite.

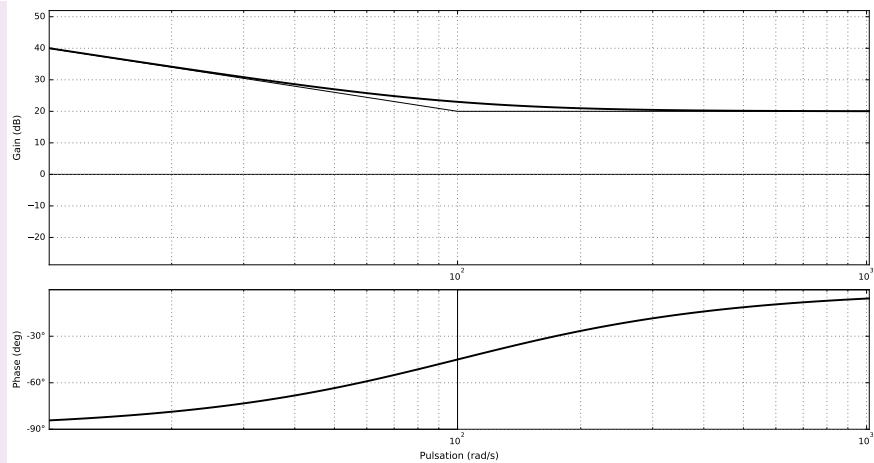
Question 7 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour $K_p = 10$ et $K_i = 1000$. On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

Correction $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p p + K_i}{p} = K_i \frac{\frac{K_p}{K_i} p + 1}{p} = \frac{1000}{p} \left(\frac{1}{100} p + 1 \right).$

On peut donc dresser le tableau de variation asymptotique.

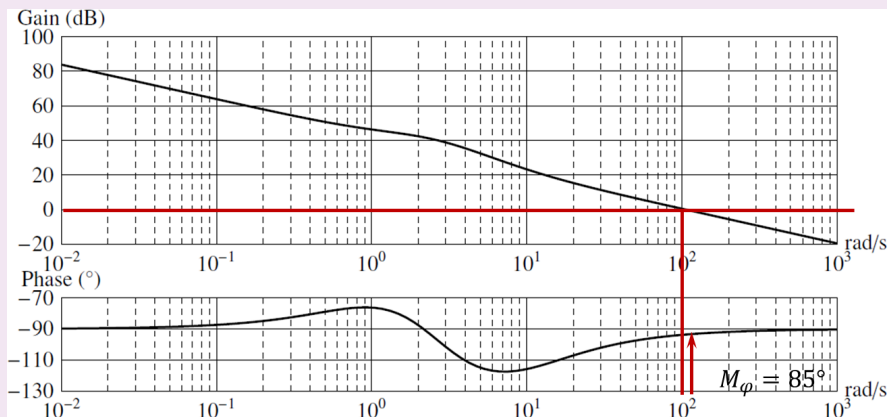
	$\omega \rightarrow 0$	$\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$	$\omega \rightarrow \infty$
$H_1(p) = \frac{K_i}{p} = \frac{1000}{p}$	-20 dB/décade -90°		-20 dB/décade -90°
$H_2(p) = 1 + \frac{p}{100}$		0 dB/décade 0°	20 dB/décade 90°
$C(p)$	-20 dB/décade -90°		0 dB/décade 0°

L'asymptote du gain décibel de « $H_1(p)$ » coupe l'axe des abscisses en 1000.



Question 8 Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi, à partir des exigences du D6, cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système.

Correction La marge de phase est respectée. Cependant la tension atteinte demandée par la commande (120 V) est peut être trop élevée pour le moteur.



Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. ?? présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité $i_c(t)$ de 2A.

Question 9 Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

Correction Le constructeur a ajouté une saturation de ± 60 V.