

Application 3 – Corrigé



Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

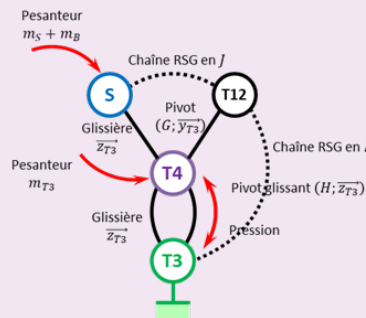
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Présentation

Question 1 Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

Correction On isole l'ensemble : {bateau ; S ; chaîne ; T12 ; T4}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$.



Relation cinématique :

- $\vec{V}(G, S/T_3) = V_B \vec{z}$ et $\vec{V}(G, T_4/T_3) = V_V \vec{z}$
- $\vec{V}(G, S/T_3) = \vec{V}(G, S/T_{12}) + \vec{V}(G, T_{12}/T_4) + \vec{V}(G, T_4/T_3)$
 - $\vec{V}(G, S/T_{12}) = \vec{V}(J, S/T_{12}) + \vec{G} \vec{I} \wedge \vec{\Omega}(S/T_{12}) = R \vec{x} \wedge \omega(T_4/T_{12}) \vec{y} = R \omega(T_4/T_{12}) \vec{z}$
 - $V_B = R \omega(T_4/T_{12}) + V_V$
- $\vec{V}(G, S/T_3) = \vec{V}(G, S/T_{12}) + \vec{V}(G, T_{12}/T_3)$
 - $\vec{V}(G, T_{12}/T_3) = \vec{V}(I, T_{12}/T_3) + \vec{G} \vec{I} \wedge \vec{\Omega}(T_{12}/T_3) = -R \vec{x} \wedge \omega(T_{12}/T_4) \vec{y} = R \omega(T_4/T_{12}) \vec{z}$
 - $V_B = R \omega(T_4/T_{12}) + R \omega(T_4/T_{12}) = 2R \omega(T_4/T_{12})$
- $V_B = V_B/2 + V_V \iff V_B = 2V_V$ et $\omega(T_4/T_{12}) = -\frac{V_B}{2R}$.

(Remarque : erreur de signe éventuelle sur $\omega(T_{12}/T_4)$, non pénalisante pour la suite...)

Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{matrix} -(m_S + m_B)g \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{G_B} \otimes \left\{ \begin{matrix} 0 \\ V_B \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G_B} = -(m_S + m_B)g V_B$;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{matrix} -m_T 4g \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{G_{T_4}} \otimes \left\{ \begin{matrix} 0 \\ V_V \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G_{T_4}} = -m_T 4g V_V = -\frac{1}{2} m_T 4g V_B$;
- $\mathcal{P}(\text{pre} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{matrix} F_V \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_H \otimes \left\{ \begin{matrix} 0 \\ V_V \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G_B} = F_V V_V = \frac{1}{2} F_V V_B$.
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = 0$: glissière et pivot glissant sans frottement
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow 12/\mathcal{R}_g) = 0$: roulement sans glissement.

- $\mathcal{P}(\overline{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = V_B \left(\frac{1}{2} F_V - \frac{1}{2} m_T 4g - (m_S + m_B)g \right)$

Bilan des puissances intérieures :

- $\mathcal{P}(E \xleftrightarrow{0})$.

Calcul de l'énergie cinétique :

- $\mathcal{E}_c(S/3) = \frac{1}{2} (m_S + m_B) V_B^2$ (mouvement de translation du bateau par rapport au référentiel galiléen) ;
- $\mathcal{E}_c(T_4/3) = \frac{1}{2} m_T 4 V_V^2 = \frac{1}{8} m_T 4 V_B^2$ (mouvement de translation du vérin par rapport au référentiel galiléen) ;
- $\mathcal{E}_c(T_{12}/3) = \frac{1}{2} J \omega(T_{12}/3)^2 = \frac{1}{2} \frac{J V_B^2}{4 R^2}$ (mouvement de rotation et translation du solide 12 – masse négligeable)
(Remarque : le terme $1/4$ n'apparaît pas sur le corrigé initial).
- $\mathcal{E}_c(E/3) = \frac{1}{2} (m_S + m_B + 1/4 m_T 4 + J/(4 R^2)) V_B^2$
- $\frac{d}{dt} [E_c(t)] = \left(m_S + m_B + \frac{1}{4} m_T 4 + \frac{J}{4 R^2} \right) V_B \gamma$ et $\gamma = \frac{d}{dt} [V_B(t)]$.

Au final : $\left(m_S + m_B + \frac{1}{4} m_T 4 + \frac{J}{4 R^2} \right) V_B \gamma = V_B \left(\frac{1}{2} F_V - \frac{1}{2} m_T 4g - (m_S + m_B)g \right)$ et $\gamma = \frac{\frac{1}{2} F_V - \frac{1}{2} m_T 4g - (m_S + m_B)g}{m_S + m_B + 1/4 m_T 4 + \frac{J}{4 R^2}}$

Cette valeur permet de valider l'exigence 1.1.3 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère 1.1.2) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire ($t = \frac{V_{\text{levage}}}{\gamma}$).

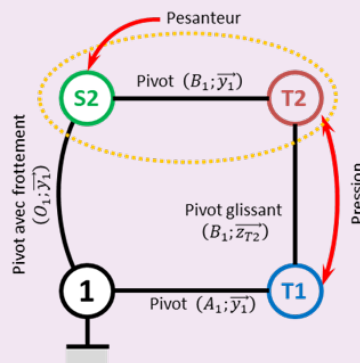
Phase de déplacement

Question 2 Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle $\varphi(t)$ qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches? Justifier.

Correction Quand le chariot avance à vitesse constante ($\varphi_{dec} = 0$), il faut que l'angle $\varphi(t)$ soit nul. Il faut donc envoyer une consigne $\varphi_c = -\delta$.

Question 3 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq} .

Correction On isole l'ensemble $E = \{S_2; T_2\}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen : $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\overline{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$



Calcul des puissances externes :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{matrix} -m_{S_2} g \vec{z}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{G_{S_2}} \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega(S_2/1)} = \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3} \end{matrix} \right\}_{G_{S_2}} = (-m_{S_2} g \vec{z}_1) \cdot (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3})$
- $\overrightarrow{z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}} = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha)$
- $\overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/1)} - (x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T_3}) \wedge \dot{\alpha} \vec{y}_1 = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}$

- $\mathcal{P}(1 \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{matrix} - \\ L_{12} \vec{x}_1 - \mu \dot{\alpha} \vec{y}_1 + N_{12} \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_{O_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_1} = -\mu \dot{\alpha}^2$
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{pivot glissant}} = 0$ (pivot glissant sans frottement)
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{vérin}} = \left\{ \begin{matrix} p(t) S \vec{z}_{T_2} \\ - \end{matrix} \right\}_{B_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \end{matrix} \right\}_{B_1} = p(t) S \dot{\lambda} = p(t) S \frac{\dot{\alpha}}{k}$
- $\mathcal{P}(\overline{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha) - \mu \dot{\alpha}^2 + p(t) S \dot{\alpha} / k.$

Calcul des puissances internes $\mathcal{P}(E \overset{0}{\longleftrightarrow})$ pas de frottement dans la liaison pivot.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S2 sont à prendre en compte (elles sont négligeables pour T2).

$$\mathcal{E}_c(S_2/1) = \frac{1}{2} J_{S_2} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{S_2} \overline{V(G_{S_2}, S_2/1)}^2 = \frac{1}{2} (J_{S_2} + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)) \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\alpha}^2 \text{ avec } J_{eq} = J_{S_2} + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2).$$

On trouve donc, au final :

$$J_{eq} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} = \frac{p(t) S}{k} + m_{S_2} g (x_{G_{S_2}} \cos \alpha - z_{G_{S_2}} \sin \alpha).$$

Si on suppose l'angle α nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.

Application 3



Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Présentation

Le chariot élévateur, objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.



Phase de levage du bateau

Objectif Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

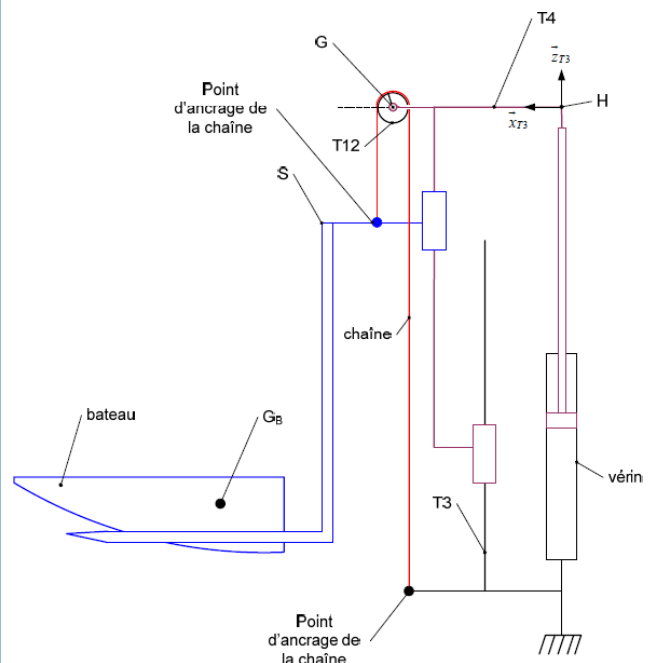
- req 102 : vitesse de levage en charge : $0,33 \text{ m s}^{-1}$;
- req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la suivante. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble $S = \{T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11\}$ est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble S. Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon T_{12} qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est F_V (considéré comme constant). On note $I_{T_{12}}$ le moment d'inertie de la poulie T_{12} par rapport à son axe

de rotation, $R_{T_{12}}$ son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Solide	Masse
Ensemble (S)	m_S
Bateau (B)	m_B
Mât inférieur (T3)	m_{T3}
Mât supérieur (T4)	m_{T4}
Chaîne (C)	négligée

Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère \mathcal{R}_3 peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes \vec{z}_{T3} et \vec{z}_0 sont confondus pour les conditions de l'étude.

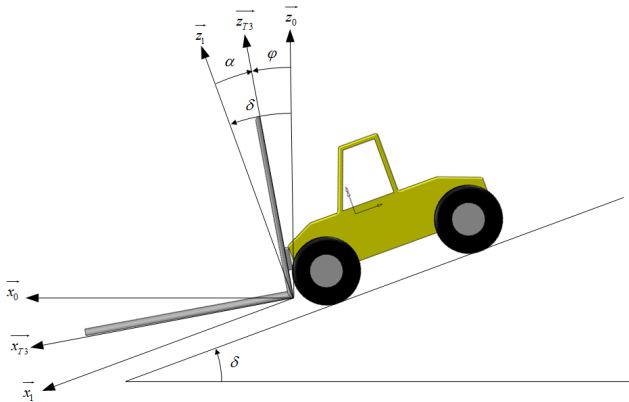


Question 1 Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

Phase de déplacement

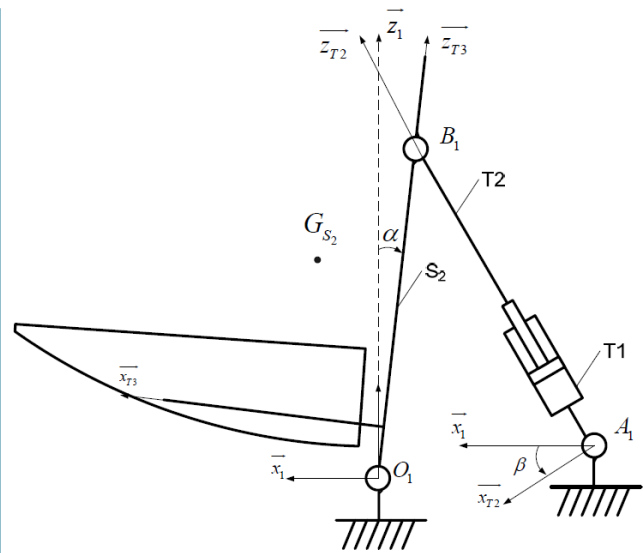
La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1, T2 et T1', T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

- l'angle de basculement $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$;
- l'angle de la pente $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$;
- l'angle à asservir $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$.



Question 2 Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle $\varphi(t)$ qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.



Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- l'ensemble $S_2 = \{T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, B\}$ en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot 1 de centre de gravité G_{S_2} . Le moment d'inertie de l'ensemble S_2 par rapport à l'axe sera noté J_{S_2} et sa masse m_{S_2} . La liaison pivot entre l'ensemble S_2 et le chariot (bâti) génère un couple résistant $\vec{C}_\mu = -\mu \vec{a} \vec{y}_0$ et $\vec{O}_1 \vec{O}_{G_{S_2}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T3}$;
- un vérin équivalent $V = \{T1, T2\}$ dont le corps est en liaison pivot d'axe (A_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot (bâti) et la tige en liaison pivot d'axe (B_1, \vec{y}_0) par rapport à l'ensemble S_2 . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T2}$ où $p(t)$ est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose $\vec{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$. Le paramétrage est tel que si $\alpha = 0$ alors $\lambda = 0$.

Question 3 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq} .