

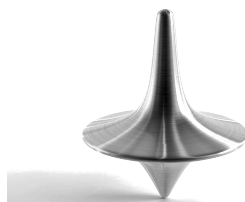
Cours

Chapitre 3

Caractérisation inertielle des solides

Savoirs et compétences :

- B2-10 : Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.



Toupie



Volants d'inertie d'un vibrequin

1	Masse et centre de masse (centre d'inertie)	2
1.1	Définitions	2
1.2	Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux	2
1.3	Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)	2
2	Matrice d'inertie d'un solide	3
2.1	Opérateur et matrice d'inertie	3
2.2	Déplacement d'une matrice d'inertie	3
2.3	Changement de base de la matrice d'inertie	4
2.4	Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)	4
2.5	Matrice d'inertie de solides usuels (3)	5

1 Masse et centre de masse (centre d'inertie)

1.1 Définitions

Définition Masse d'un solide indéformable On peut définir la masse totale d'un solide S par : $M = \int_{P \in S} dm$. Si de plus l'ensemble est fait d'un matériau homogène de masse volumique μ , on a $M = \mu \int_{P \in S} dV$.

Définition Centre d'inertie d'un solide La position du centre d'inertie G d'un solide S est définie par $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \overrightarrow{0}$.

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide S , on passe généralement par l'origine du repère associé à S . On a alors $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \int_{P \in S} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \int_{P \in S} \overrightarrow{OG} dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm \Leftrightarrow M \overrightarrow{OG} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm$.

Méthode Pour déterminer les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre d'inertie G du solide S dans la base $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on a donc :

$$\begin{cases} M x_G = \mu \int_{P \in S} x_P dV \\ M y_G = \mu \int_{P \in S} y_P dV \\ M z_G = \mu \int_{P \in S} z_P dV \end{cases} \quad \text{avec } dV \text{ volume élémentaire du solide } S.$$

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

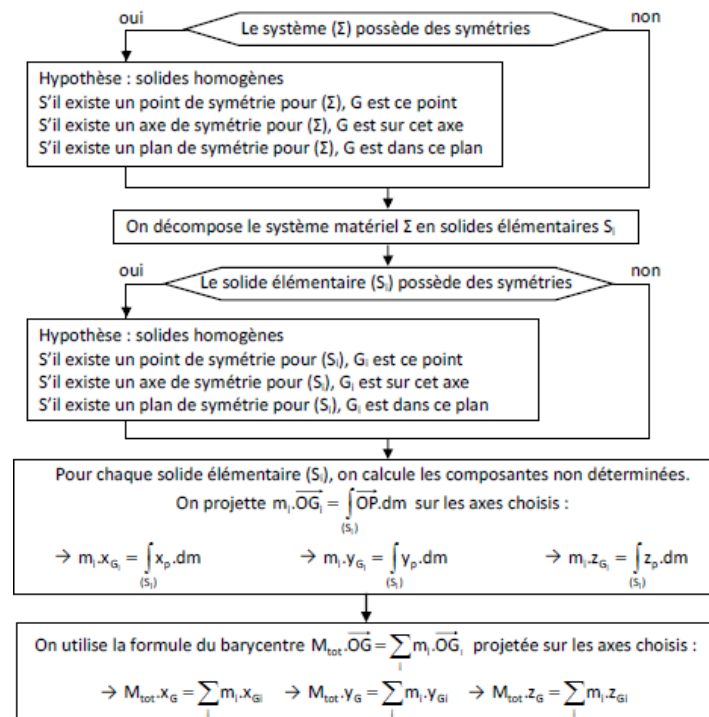
R Centre d'inertie et centre de gravité sont confondus lorsque le champ de pesanteur est considéré comme uniforme en tout point de l'espace.

1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux

Méthode Soit un solide composé de n solides élémentaires dont la position des centres d'inertie G_i et les masses M_i sont connues. On note $M = \sum_{i=1}^n M_i$. La position du centre d'inertie G de l'ensemble S est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

1.3 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)



2 Matrice d'inertie d'un solide

2.1 Opérateur et matrice d'inertie

Définition S oient :

un solide S de masse m en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$;

- $\mathcal{R}_S = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère lié au solide S ;
- P un point de S tel que $\vec{OP} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}$;
- \vec{u} un vecteur unitaire lié au solide S tel que $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$.

On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\vec{u} \rightarrow \overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = \int_S \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

On appelle matrice d'inertie du solide S en O , $I_O(S)$, l'image de cette application linéaire : $\overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = I_O(S) \vec{u}$.

Définition Matrice d'inertie La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S (y_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S x_p y_p dm & -\int_S x_p z_p dm \\ -\int_S x_p y_p dm & \int_S (x_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S y_p z_p dm \\ -\int_S x_p z_p dm & -\int_S y_p z_p dm & \int_S (x_p^2 + y_p^2) dm \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) les termes A , B et C .

On appelle produit d'inerties par rapport aux axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) , (O, \vec{x}) et (O, \vec{z}) , (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) les termes D , E et F .

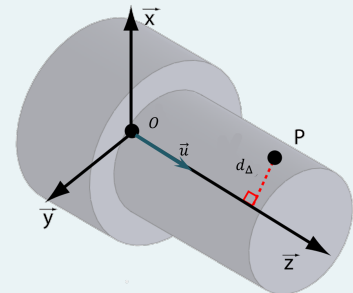
Propriété

- La matrice d'inertie est une matrice symétrique. Il existe une base dans laquelle elle est diagonalisable. Cette base est appelée base principale d'inertie.
- Si (O, \vec{x}, \vec{y}) est un plan de symétrie du solide, D et E sont nuls.
- Si (O, \vec{z}, \vec{x}) est un plan de symétrie du solide, D et F sont nuls.
- Si (O, \vec{y}, \vec{z}) est un plan de symétrie du solide, E et F sont nuls.
- Si un solide admet 2 plans de symétrie, alors D , E et F sont nuls.

Définition Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie caractérise la répartition de masse d'un solide autour d'un axe $\Delta(O, \vec{u})$. Plus la valeur de l'inertie est grande plus il sera difficile de mettre en mouvement de rotation ce solide autour de l'axe Δ . On note $I_\Delta(S)$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe Δ . Son unité est en kg.m^2 . On a alors :

$$I_\Delta(S) = \int_S d_\Delta^2 dm \quad \text{où } d_\Delta \text{ est la distance entre le point courant } P \text{ et l'axe } \Delta.$$



R Si on connaît $I_O(S)$, alors $I_\Delta(S) = \vec{u}^\top I_O(S) \vec{u}$ avec \vec{u} vecteur unitaire.

2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie – Théorème de Huygens

Théorème Théorème de Huygens Soit S un solide de centre d'inertie G , de masse m , d'inertie $I_G(S)$ et d'inertie $I_O(S)$ avec $\vec{OG} = a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z}$. Les matrices $I_G(S)$ et $I_O(S)$ exprimées dans la base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont liées par :

$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Si le solide est modélisé par une masse ponctuelle m en G et si on souhaite connaître le moment d'inertie pour un point situé à une distance d de G , on a $I = md^2$.

2.3 Changement de base de la matrice d'inertie

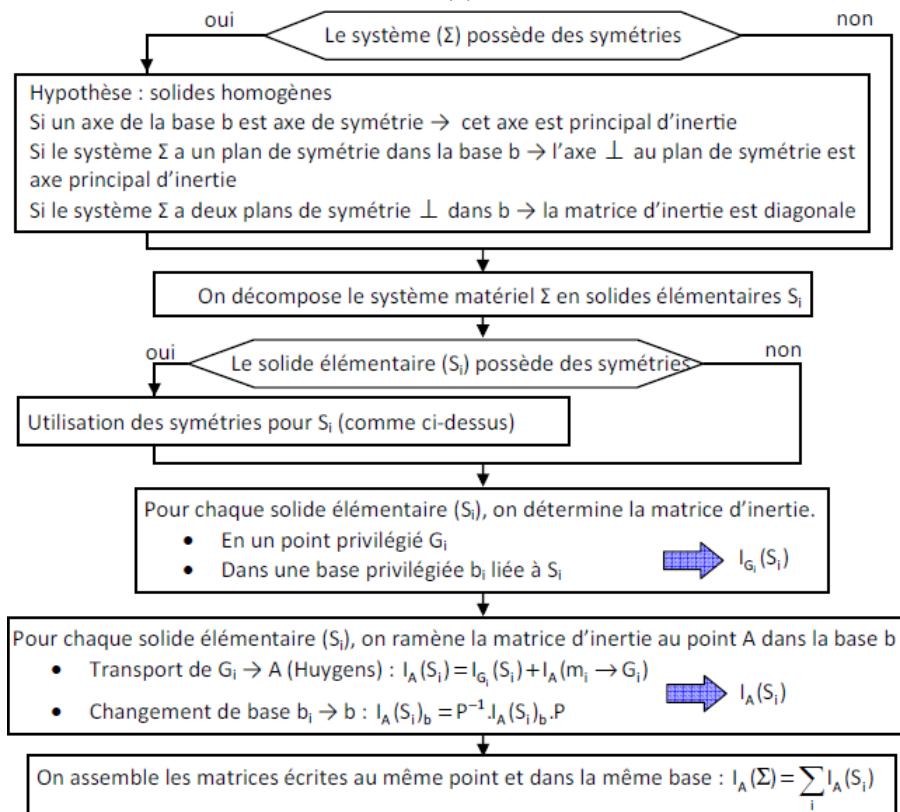
Définition Matrice de Passage On appelle P_{12} la matrice de passage permettant de passer de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2 . Cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la base \mathcal{B}_2 écrits dans la base d'origine \mathcal{B}_1 . On l'appelle aussi matrice de changement de base. Cette matrice est inversible.

Dans le cas des matrices de rotation, $P_{12}^{-1} = P_{12}^T$.

■ **Exemple** Soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ et $\mathcal{R}_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ avec $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On a alors $\vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1$ et $\vec{y}_2 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \vec{x}_1$. En conséquences, $P_{12} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

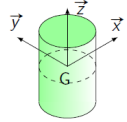
Résultat Pour passer $I_A(S)_{\mathcal{B}_1}$ de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de la on a $I_A(S)_{\mathcal{B}_2} = P_{12}^{-1} I_A(S)_{\mathcal{B}_1} P_{12}$.

2.4 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)



2.5 Matrice d'inertie de solides usuels (3)

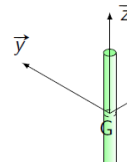
Cylindre d'axe (G, \vec{z}) de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant \vec{z}

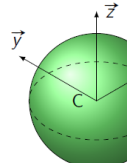
Tige cylindrique (G, \vec{z}) de rayon négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant \vec{z} .

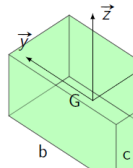
Sphère pleine de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{C(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

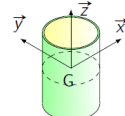
Parallélépipède de cotés a , b et c



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans la base B parallèle aux arêtes du parallélépipède

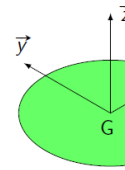
Tube d'axe (G, \vec{z}) de rayon R et de hauteur H (épaisseur négligeable)



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant \vec{z} .

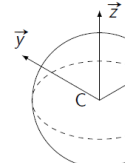
Disque d'axe (G, \vec{z}) d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant \vec{z} .

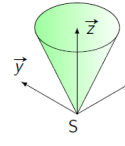
Sphère creuse de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{C(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

Cône (S, \vec{z}) de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{S(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

au sommet S dans toute base contenant \vec{z} .

Références

- [1] Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.
- [3] Robert Papanicola, *Opérateurs d'inertie*, Lycée Charlemagne, Paris, <http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/>.

Activation 1



Barrière sur la tamise – Matrices d'inertie

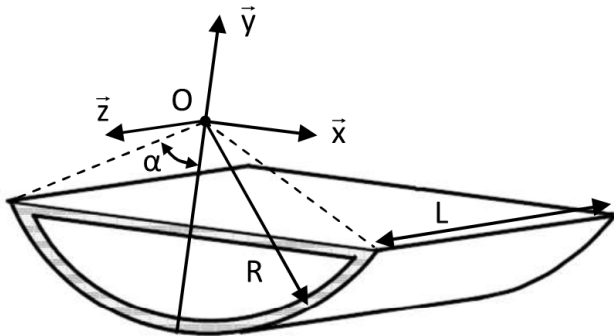
Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- B2-10 : Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.

Barrière sur la Tamise

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constitué de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58 \text{ m}$ la longueur de la porte;
- $R = 12,4 \text{ m}$ le rayon de la porte;
- $e = 0,05 \text{ m}$ l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant R ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$;

• $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Question 1 Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_P de la plaque;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_C de la portion cylindrique;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G de la porte.

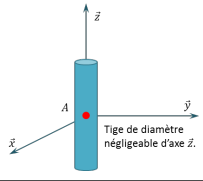
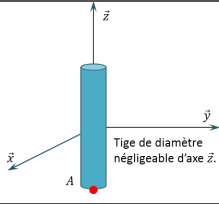
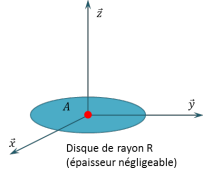
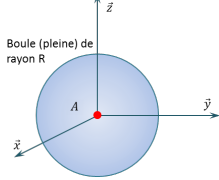
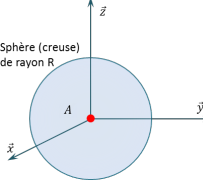
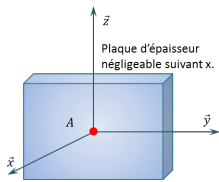
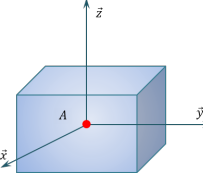
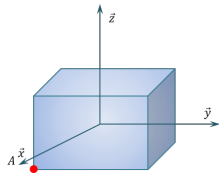
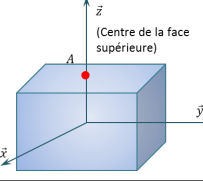
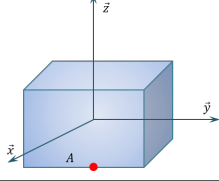
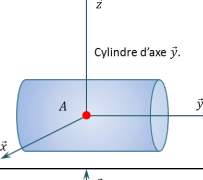
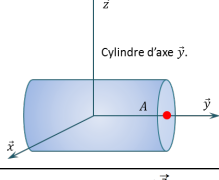
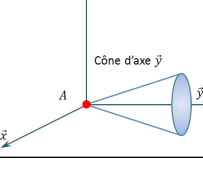
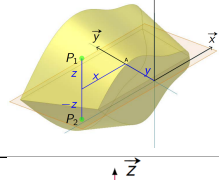
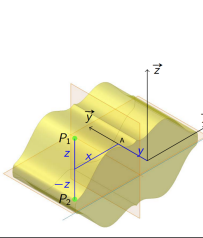
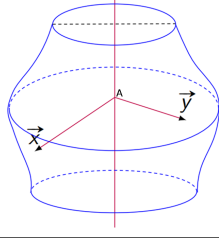
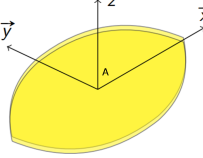
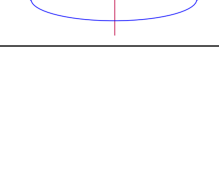
Question 2 Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque P en G_P ;
2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre C en G_C ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte P en G .

Question 3 Déterminer la moment d'inertie de la porte par rapport à (O, \vec{z}) .

Matrices d'inertie

Donner les formes des matrices d'inertie suivantes.

Application 1



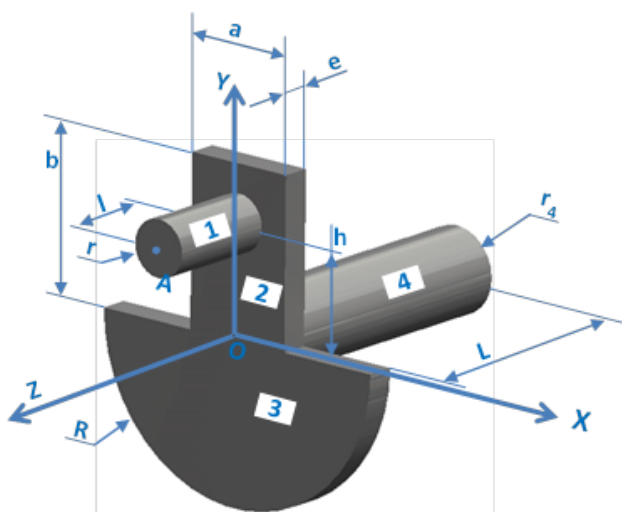
Application – Vilebrequin de moteur

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- B2-10 : Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.

Un vilebrequin est réalisé en mécanosoudage pour faire fonctionner un prototype de moteur. Les géométries sont par conséquent simples : assemblage de tôles ou cylindres en acier.



L'origine O repère \mathcal{R} est située dans le plan de contact du cylindre 1 et du parallélépipède 2.

On note $\rho = 7200 \text{ kgm}^{-3}$ la masse volumique du matériau et on donne :

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| • $a = 20 \text{ mm}$; | • $r = 5 \text{ mm}$; |
| • $b = 30 \text{ mm}$; | • $L = 50 \text{ mm}$; |
| • $e = 5 \text{ mm}$; | • $r_4 = 7,5 \text{ mm}$; |
| • $l = 20 \text{ mm}$; | • $h = 20 \text{ mm}$. |

Question 1 Calculer les masses des différentes pièces : m_1 , m_2 , m_3 et m_4 .

Question 2 Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

Question 3 Déterminer la valeur de R afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

Question 4 Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Question 5 Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

Question 6 Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe \vec{OA} .