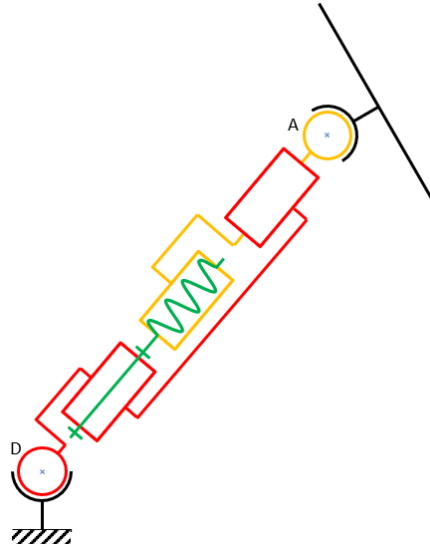


Q1.



Q2.

La liaison équivalente entre $\{10 + 13\}$ et $\{7 + 5\}$ est obtenue par l'association de deux liaisons en parallèle, l'une étant une liaison glissière (L1) et l'autre (L2) étant l'association en série d'une liaison pivot et d'une liaison hélicoïdale de même axe.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_{L1}\} &= \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{1x} \cdot \vec{x}_1 \end{Bmatrix} \\ \{\mathcal{V}_{L2}\} &= \begin{Bmatrix} \omega_1 \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_2 \cdot \vec{x}_1 \\ \pm \frac{p}{2\pi} \cdot \omega_2 \cdot \vec{x}_1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Donc, le torseur cinématique de L2 est de la forme :

$$\{\mathcal{V}_{L2}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x}_1 \\ V_{2x} \cdot \vec{x}_1 \end{Bmatrix}$$

L'égalité des deux torseurs en A nous amène à montrer que ω_x est nul. Le seul degré de liberté est donc celui en translation suivant \vec{x}_1 , la liaison équivalente est donc une glissière de direction \vec{x}_1 .

Q3.

$$\begin{aligned} \vec{V}(A, 7/S_0) &= \vec{V}(A, 7/13) + \vec{V}(A, 13/S_0) \\ &= \dot{L}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{V}(D, 13/S_0) + \vec{AD} \wedge \vec{\Omega}(13/S_0) \\ &= \dot{L}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{0} - L_1 \cdot \vec{x}_1 \wedge (\omega_x \cdot \vec{x}_1 + \omega_y \cdot \vec{y}_1 + \omega_z \cdot \vec{z}_1) \\ \boxed{\vec{V}(A, 7/S_0) &= \dot{L}_1 \cdot \vec{x}_1 - L_1 \omega_y \cdot \vec{z}_1 + L_1 \omega_z \cdot \vec{y}_1} \end{aligned}$$

Il faut 3 paramètres pour positionner un point dans un référentiel 3D.

Q4. Pour chaque centre, il faut 3 paramètres de mouvement pour les positionner, ce qui donne au total 9 paramètres. En revanche, la distance entre chaque centre de rotule est fixe, cela fait donc 3 contraintes et diminue donc à 6 le nombre de paramètres indépendants pour positionner les 3 centres. La plateforme possède donc 6 degrés de liberté.

Q5.

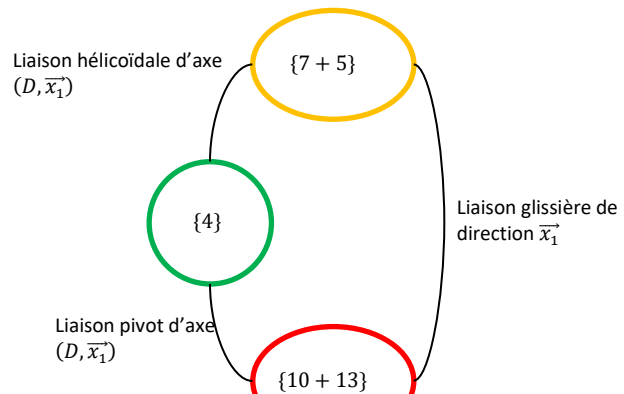
$$\begin{aligned} \vec{GM} \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \\ &= (x - x_G) \times (\sin \theta \sin \psi) + (y - y_G) \times (-\sin \theta \cos \psi) + (z - z_G) \times \cos \theta \end{aligned}$$

L'appartenance des points M au plan recherché implique que le produit scalaire calculé précédemment soit nul.

Ce qui permet d'obtenir l'équation cartésienne du plan sous la forme : $z = ax + by + c$

L'angle de rotation ϕ n'intervient pas car cet angle définit une rotation propre autour de la normale du plan recherché, ce qui laisse invariant l'équation cartésienne du plan.

Q6.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{R}{2} \cdot \overrightarrow{y_0} + z_G \cdot \overrightarrow{z_0} + R \cdot \overrightarrow{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{y} &= \overrightarrow{w} \\ &= \cos \theta \cdot \overrightarrow{v} + \sin \theta \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &= \cos \theta \cos \psi \cdot \overrightarrow{y_0} - \cos \theta \sin \psi \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin \theta \cdot \overrightarrow{z_0}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} R \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \sin \psi \right) \\ R \times \left(\frac{1}{2} + \cos \theta \cos \psi \right) \\ z_G + R \sin \theta \end{pmatrix}_{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}}$$

$$L_1 = \|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{R^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \sin \psi \right)^2 + R^2 \times \left(\frac{1}{2} + \cos \theta \cos \psi \right)^2 + (z_G + R \sin \theta)^2}$$

Q7. Si chaque vérin a une longueur identique, étant données les géométries du support et de la plateforme, la plateforme S se trouvera parallèle au support S_0 . Ainsi on a directement : $\psi = 0$ et $\theta = 0$

Et donc : $\forall i, L_i = \sqrt{\frac{3}{4} R^2 + \frac{1}{4} R^2 + z_G^2}$

D'où : $z_G = \sqrt{L^2 - R^2}$

A.N. : $z_G(L = L_{min}) = 0,374 \text{ m}$ $z_G(L = L_{max}) = 1,35 \text{ m}$

L'amplitude est donc de : $\Delta z_G = 0,978 \text{ m}$

Ce qui reste inférieur à 1 m comme exigé dans le cahier des charges (id 1.1.1), l'exigence est donc vérifiée.

Q8. L'information de la roue codeuse est codée sur 15 bits, la résolution angulaire est donc de : $r_{ang} = \frac{2\pi}{2^{15}} \text{ rad}$

En prenant en compte la transmission, la résolution théorique en translation d'un axe motorisée est donc :

$$r_{tra} = r_{ang} \times 10 \times \frac{pas}{2\pi} = \frac{10 \times pas}{2^{15}} \approx 1,53 \times 10^{-6} \text{ m} = 1,53 \text{ } \mu\text{m}$$

On précise dans le cahier des charges un écart maximal de $2 \text{ } \mu\text{m}$ (id 2.1.1) pour la précision d'un axe, la résolution de mesure est donc suffisante.

Q9. En isolant l'ensemble de l'axe motorisé, on remarque qu'il est soumis uniquement aux actions mécaniques de liaisons des 2 rotules en extrémité d'axe. Ces actions mécaniques sont modélisables par 2 torseurs glisseurs. Le support de leur résultante est donc identique suivant la droite (AB) :

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{u}_1(t) \text{ et } \vec{F}_1^0 = F_1^0 \cdot \vec{u}_1(t) \text{ avec } F_1 = -F_1^0$$

Q10. On isole la plateforme S . Le bilan des actions mécaniques extérieures est le suivant :

- *pesanteur* $\rightarrow S$
- *colonne vertébrale* $\rightarrow S$
- *axe i* $\rightarrow S$ avec $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

En écrivant le principe fondamental de la statique au point G , on a donc :

Pour le théorème de la résultante :

$$\vec{P} + \vec{F} - \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad \sum_i \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{F}$$

Pour le théorème du moment (K_i , représentant l'extrémité d'un axe) :

$$\vec{0} + \vec{C} - \sum_i \overrightarrow{GK_i} \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad \sum_i \overrightarrow{GK_i} \wedge \vec{F}_i = \vec{C}$$

En projetant ces deux équations vectorielles dans le repère R_0 , on obtient le système matriciel voulu avec notamment :

$$\begin{aligned}M_{11} &= \vec{u}_1(t) \cdot \vec{x}_0 \\ M_{21} &= \vec{u}_1(t) \cdot \vec{y}_0 \\ M_{31} &= \vec{u}_1(t) \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{41} &= (\overrightarrow{GA} \wedge \vec{u}_1(t)) \cdot \vec{x}_0 \\ M_{51} &= (\overrightarrow{GA} \wedge \vec{u}_1(t)) \cdot \vec{y}_0 \\ M_{61} &= (\overrightarrow{GA} \wedge \vec{u}_1(t)) \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

Q11.

Si on identifie l'ensemble des inconnues statiques, il y en a 3 pour chaque liaison sphérique et 5 pour chaque liaison glissière. Avec 6 axes motorisés cela donne :

$$I_s = 6 \times (3 + 5 + 3)$$

$$I_s = 66$$

Le nombre de solide est de 13 : 1 pour la plateforme, 2 solides par axe, on ne compte pas le support solidaire au bâti).
Le nombre d'équations statiques est donc de :

$$E_s = 6 \times 13$$

$$E_s = 78$$

Il y a 6 mobilités utiles correspondant aux mobilités de chaque actionneur et 6 mobilités internes correspondant aux rotations propres de chaque axe motorisé suivant leur axe de direction \vec{u}_i .

D'où :

$$H = I_s - E_s + m_u + m_i$$

$$H = 66 - 78 + 6 + 6$$

$$H = 0$$

Le degré d'hyperstatisme est donc de 0, il est possible de déterminer tous les efforts de liaison.

Q12.

$$K_g = \frac{F_a}{\Delta L_a} \Rightarrow K_g = \frac{F_a}{\Delta L_e + \Delta L_v + \Delta L_b} \Rightarrow K_g = \frac{F_a}{F_a \times \left(\frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_b} \right)} \Rightarrow K_g = \frac{K_e K_v K_b}{K_e K_v + K_v K_b + K_b K_e}$$

Q13. Si il n'y a pas de précontrainte, il y a un effet de seuil du au jeu axiale. Sans effort, on a un débattement au niveau de la liaison correspondant à la valeur du jeu, ce qui nuira à la précision en position de l'axe motorisé. Avec la précontrainte, l'effet du jeu est annulé.

$$Q14. K_g = \frac{K_e K_v K_b}{K_e + K_v + K_b} = \frac{1}{\frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_b}} = \frac{1}{\frac{1}{K_e} + \frac{L_v}{E_v A_v} + \frac{1}{K_b}}$$

$$K_g \text{ sera maximum si } L_v \text{ est minimum. } K_{gmax} = \frac{1}{\frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_b}} = \frac{K_e K_b}{K_e + K_b} \approx 4,18 \times 10^8 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$K_g \text{ sera minimum si } L_v \text{ est maximum. } K_{gmin} = \frac{1}{\frac{1}{K_e} + \frac{L_{vmax}}{E_v A_v} + \frac{1}{K_b}} \approx 8,94 \times 10^5 \text{ N.m}^{-1}.$$

Q15.

$$\Delta L = \frac{F_a}{K_{gmin}} - \frac{F_a}{K_{gmax}}$$

$$\Delta L = 1,12 \times 10^{-3} - 2,39 \times 10^{-6} \approx 1,12 \text{ mm}$$

Cette variation est beaucoup trop grande vis-à-vis de l'écart maximum souhaitée de 2 μm car cette variation n'est pas détectable par la roue codeuse. Il faut donc envisager un autre moyen permettant de prendre en considération cette variation.

Q16. En supposant que les axes motorisés ont tous le même comportement on a : $\Delta x_G = \Delta y_G = \Delta \psi = \Delta \theta = \Delta \phi = 0$

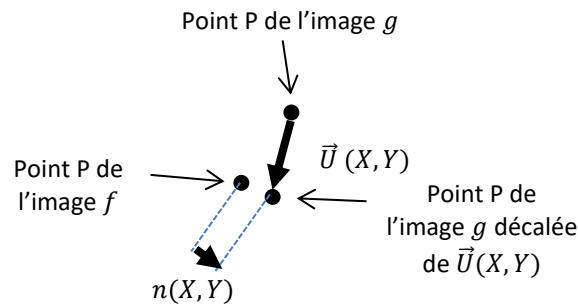
$$\text{Rappel : } z_G = \sqrt{L^2 - R^2}$$

$$\text{Donc : } \Delta Z_G(L_v = L_{vmin}) = \sqrt{L^2 - R^2} - \sqrt{\left(L - \frac{F_a}{K_{gmax}} \right)^2 - R^2} \text{ et } \Delta Z_G(L_v = L_{vmin}) = 4,79 \mu\text{m}$$

$$\text{De même : } \Delta Z_G(L_v = L_{vmax}) = \sqrt{L^2 - R^2} - \sqrt{\left(L - \frac{F_a}{K_{gmin}} \right)^2 - R^2} \text{ et } \Delta Z_G(L_v = L_{vmax}) = 1,24 \text{ mm}$$

L'erreur maximale du cahier des charges sur le positionnement de G est de 4,8 μm (id 1.2.1), ce qui peut être respecté en position basse mais pas du tout pour la position haute quand la vis de chaque axe est sortie au maximum.

Q17. Ce principe de minimisation se base sur la méthode des moindres carrés. $n(X, Y)$ correspond finalement à l'écart entre un point de l'image g décalée de $\vec{U}(X, Y)$ et le point correspondant de l'image de référence f



Q18. Le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction g donne :

$$g(X + U_X(X, Y), Y + U_Y(X, Y)) = g(X, Y) + \vec{U}(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) + o(\vec{U}(X, Y)^2)$$

En introduisant cette expression dans la fonction coût J , on a :

$$\begin{aligned} J(U_X(X, Y), U_Y(X, Y)) &= \iint \left(g(X, Y) + \vec{U}(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) - f(X, Y) \right)^2 dXdY \\ &= \iint \left(g(X, Y) - f(X, Y) + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) \right)^2 dXdY \\ &= \iint \left(g(X, Y) - f(X, Y) \right)^2 + 2(g(X, Y) - f(X, Y)) \sum_{i=1}^6 \alpha_i \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^6 \alpha_i \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) \right)^2 dXdY \end{aligned}$$

Q19. Il faut dériver l'expression de J par α_i , ce qui donne 6 équations : $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0$

Avec : $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \iint 2(g(X, Y) - f(X, Y)) \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) + 2 \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) \sum_{i=1}^6 \alpha_i \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) dXdY$

Q20. L'expression de chaque équation permet d'écrire après simplification par 2 :

$$\iint \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) \sum_{i=1}^6 \alpha_i \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) dXdY = \iint (f(X, Y) - g(X, Y)) \vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) dXdY$$

Ce qui permet d'écrire le problème sous la forme matricielle attendue avec :

$$R_{ij} = \iint \left(\vec{\varphi}_i(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) \right) \left(\vec{\varphi}_j(X, Y) \cdot \vec{\nabla} g(X, Y) \right) dXdY$$

Q21.

$$\vec{\nabla} g(X, Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(X, Y)}{\partial X} \\ \frac{\partial g(X, Y)}{\partial Y} \end{pmatrix}$$

On peut approximer l'expression du gradient sous la forme suivante avec h étant le pas de discrétisation :

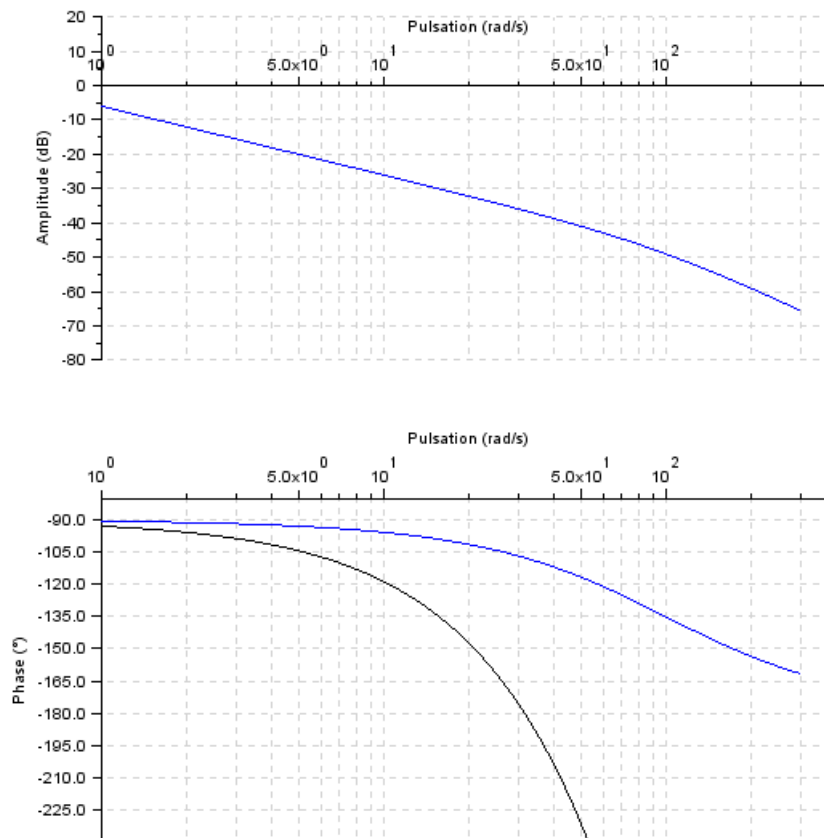
$$\frac{\partial g(X, Y)}{\partial X} = \frac{g(X + h, Y) - g(X, Y)}{h} \text{ et } \frac{\partial g(X, Y)}{\partial Y} = \frac{g(X, Y + h) - g(X, Y)}{h}$$

Q22.

$$FTBO(p) = H(p)e^{-\tau p}$$

Le diagramme de gain de la fonction de transfert en boucle ouverte est identique à celui de H , le module du terme correspondant au retard pur étant de 1. En revanche, la présence du retard pur diminue la phase :

$$\varphi_{FTBO}(\omega) = \varphi_H(\omega) - \tau \omega$$



Q23. On souhaite :

$$\omega_c = 60 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } \Delta\phi \geq 45^\circ$$

$$C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p} \right) = \frac{K_1(1 + T_{i1}p)}{T_{i1}p}$$

On a pour la boucle ouverte à $\omega = 60 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$:

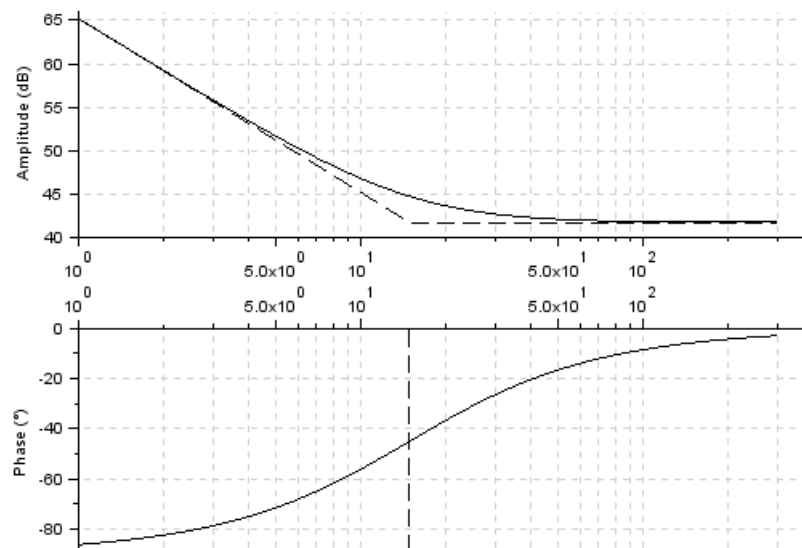
	Sans retard	Avec retard
Gain	-43 dB	-43 dB
Phase	-121°	-258°

On veut donc concernant le gain pour les deux cas :

$$20 \log|C(j60)| = 43 \text{ dB}$$

Sans retard : $\arg(C(j60)) \geq -14^\circ$

Avec retard : $\arg(C(j60)) \geq 123^\circ$



Un correcteur proportionnel intégral ajoute forcément du déphasage. Etant donné que l'on voulait $\arg(C(j60)) \geq 123^\circ$ en présence du retard, il est impossible d'atteindre les performances exigées. Par contre, il reste possible de les atteindre s'il n'y a pas de retard.

Q24.

A partir du schéma réel :

$$\frac{L^d(p)}{L^*(p)} = \frac{\frac{C(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p})H(p)C(p)} \times H(p)}{1 + \left(\frac{C(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p})H(p)C(p)} \times H(p) \right) e^{-\tau p}} = \frac{C(p)H(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p})H(p)C(p) + C(p)H(p)e^{-\tau p}}$$

$$= \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)}$$

Ce qu'on retrouve avec le schéma fictif.

Q25.

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = \frac{K(1 + T_i p)}{T_i p}$$

La condition de phase est la même que pour la question 23 en l'absence de retard, soit :

$$\arg(C(j60)) \geq -14^\circ$$

$$-90 + \text{atan } T_i 60 \geq -14^\circ$$

$$T_i \geq 6,68 \times 10^{-2} \text{ s}$$

On retient donc $T_i = 6,68 \times 10^{-2} \text{ s}$

De même pour la condition sur le gain :

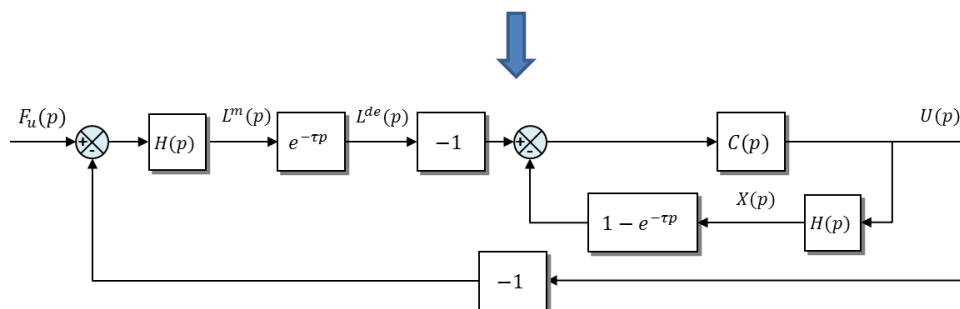
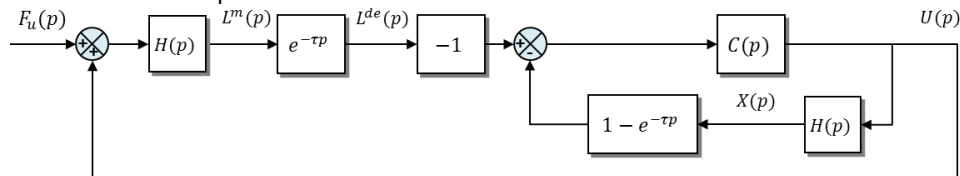
$$20 \log \left(\frac{K}{T_i \times 60} \sqrt{1 + T_i^2 \times 60^2} \right) = 43$$

$$K = 10^{\frac{43}{20}} \times \frac{T_i \times 60}{\sqrt{1 + T_i^2 \times 60^2}} = 137$$

Q26. $F_u(p)$ représente l'image sous forme de tension de l'effort sur l'axe. En régime permanent, la commande doit compenser cet effort. Il serait donc logique de trouver :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -F_0$$

Par le calcul en détaillant les manipulations :



$$\frac{U(p)}{F_u(p)} = \frac{H(p) \times (-e^{-\tau p}) \times \frac{C(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p})H(p)C(p)}}{1 - H(p) \times (-e^{-\tau p}) \times \frac{C(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p})H(p)C(p)}} = \frac{-H(p)C(p)e^{-\tau p}}{1 + (1 - e^{-\tau p})H(p)C(p) + H(p)C(p)e^{-\tau p}}$$

$$= -\frac{H(p)C(p)e^{-\tau p}}{1 + H(p)C(p)} = -\frac{\frac{0,5}{p(1 + 0,01p)} \times \frac{K(1 + T_i p)}{T_i p} \times e^{-\tau p}}{1 + \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)} \times \frac{K(1 + T_i p)}{T_i p}}$$

$$= -\frac{0,5 K(1 + T_i p)e^{-\tau p}}{p(1 + 0,01p)T_i p + 0,5 K(1 + T_i p)}$$

$$U(p) = - \frac{0,5 K(1 + T_i p) e^{-\tau p}}{p(1 + 0,01p)T_i p + 0,5 K(1 + T_i p)} \times \frac{F_0}{p}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pU(p) = -F_0$

Etant donné la présence d'un intégrateur dans $H(p)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$

Au cours du fonctionnement, cette grandeur interne va donc diverger et rendre la commande instable.

Q27.

Même raisonnement qu'à la question 26 :

$$\begin{aligned} \frac{L^{m*}(p)}{D(p)} &= \frac{(-e^{-\tau p}) \times \frac{C_2(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p})T(p)C_2(p)}}{1 - (-e^{-\tau p}) \times \frac{C_2(p)}{1 + (1 - e^{-\tau p})T(p)C_2(p)} \times T(p)} = \frac{-C_2(p)e^{-\tau p}}{1 + (1 - e^{-\tau p})T(p)C_2(p) + C_2(p)T(p)e^{-\tau p}} \\ &= -\frac{C_2(p)e^{-\tau p}}{1 + T(p)C_2(p)} = -\frac{\frac{1}{(1 + 0,005p)^2} \times \frac{K_2(1 + T_{i2}p)}{T_{i2}p} \times e^{-\tau p}}{1 + \frac{1}{(1 + 0,005p)^2} \times \frac{K_2(1 + T_{i2}p)}{T_{i2}p}} \\ &= -\frac{K_2(1 + T_{i2}p)e^{-\tau p}}{(1 + 0,005p)^2 T_{i2}p + K_2(1 + T_{i2}p)} \end{aligned}$$

$$L^{m*}(p) = - \frac{K_2(1 + T_{i2}p)e^{-\tau p}}{(1 + 0,005p)^2 T_{i2}p + K_2(1 + T_{i2}p)} \times \frac{D_0}{p}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pL^{m*}(p) = -D_0$

Par contre étant donné la forme de $T(p)$ qui est un second ordre classique de gain statique 1. Cette fois-ci, la grandeur X ne va plus diverger : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t) = -D_0$

Q28. La première réponse à l'échelon de consigne permet de vérifier le temps de réponse vis-à-vis de la consigne (id 2.2.1) qui doit être inférieur à 50 ms. Le temps de réponse à 5% est inférieur à 40 ms sur la courbe.

La précision vis-à-vis d'un échelon est assurée étant donnée la classe de la FTBO qui est de 1 (en faisant référence au schéma fictif).

Au niveau de la perturbation, on estime le temps de réponse sur la courbe à 75 ms ce qui reste inférieur à 100 ms comme demandé dans le cahier des charges (id 2.2.2.). On retrouve bien d'ailleurs au début le retard pur de 0.04 s du traitement de corrélation d'image. Enfin, on voit bien que la perturbation est totalement rejetée en régime permanent, ce qui s'explique par l'intégrateur situé en amont de la perturbation.

Cette étude a montré tout d'abord les limites d'un asservissement simple qui ne pouvait prendre en compte les déformations au niveau des axes. L'évaluation des écarts par corrélation d'image permet de prendre en compte ces déformations, mais le temps de traitement impose un retard pur dans la commande, ce qui a tendance à déstabiliser le système. La régulation proposée par prédictor de Smith accouplée à une boucle interne permet de répondre au cahier des charges.