DDS 1

Les ptits devoirs du soir – Corrigés

Du 2 septembre au 20 octobre 2022

Exercice 218 – Moteur à courant continu★

B2-04

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert $H(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.*

En passant les équations dans le domaine de Laplace, on a :

- $U(p)=E(p)+RI(p)+LpI(p)$;
- $E(p)=K_m\Omega(p)$;
- $C(p)=K_m I(p)$;
- $C(p)-f\Omega(p)=Jp\Omega(p)\Leftrightarrow C(p)=\Omega(p)\left(Jp+f\right)$.

Vous devez savoir qu'un moteur à courant continu est piloté en tension ($U(p)$) et qu'en sortie on observe le taux de rotation ($\Omega(p)$).

En ne conservant que $U(p)$ et $\Omega(p)$, on a donc $U(p)=E(p)+RI(p)+LpI(p)\Leftrightarrow U(p)=K_m\Omega(p)+\left(R+Lp\right)\dfrac{C(p)}{K_m}\Leftrightarrow$ $U(p)=K_m\Omega(p)+\left(R+Lp\right)\dfrac{\Omega(p)\left(Jp+f\right)}{K_m}\Leftrightarrow U(p)=\left(K_m+\left(R+Lp\right)\dfrac{\left(Jp+f\right)}{K_m}\right)\Omega(p)\Leftrightarrow U(p)=\dfrac{K_m^2+\left(R+Lp\right)\left(Jp+f\right)}{K_m}\Omega(p)$.

On a donc $H(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}=\dfrac{K}{K^2+\left(R+Lp\right)\left(Jp+f\right)}$.

Question 2 *Préciser l'ordre et la classe de H.*

H est d'ordre 2 et de classe 0 car on ne peut pas mettre de p en facteur. Le terme de plus haut degré du dénominateur est de degré 2.

Question 3 *Mettre $H(p)$ sous forme canonique.*

$$H(p)=\frac{K_m}{K_m^2+Rf+\left(RJ+Lf\right)p+LJp^2}\Leftrightarrow H(p)=\frac{\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}}{1+\dfrac{\left(RJ+Lf\right)}{K_m^2+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_m^2+Rf}p^2}.$$

Question 4 *Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.*

En identifiant avec la forme canonique standard, $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ soit $K=\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}$, $\dfrac{2\xi}{\omega_0}=\dfrac{\left(RJ+Lf\right)}{K_m^2+Rf}$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2}=\dfrac{LJ}{K_m^2+Rf}$.

Au final, $K=\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{K_m^2+Rf}{LJ}}$, $\xi=\dfrac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJ\left(K_m^2+Rf\right)}}$.

Question 5 *Vérifier l'homgénéité des différentes constantes.*

Le gain doit être en $\mathrm{rad\,s^{-1}V^{-1}}$.

D'une part, $[K_m]=\mathrm{N\,m\,A^{-1}}$. D'autre part, $[K_m]=\mathrm{V\,rad^{-1}\,s}$. On a donc $\mathrm{V\,rad^{-1}\,s}=\mathrm{N\,m\,A^{-1}}$. (On pourrait aussi le montrer par une analyse dimensionnelle...)

De plus $[R]=\Omega=\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$ et $[f]=\mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s}$.

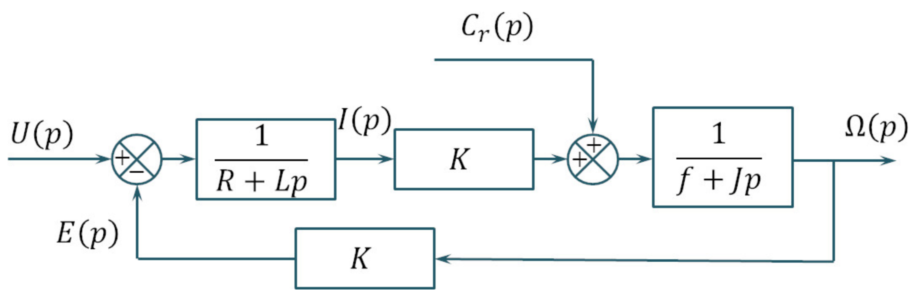
On a donc $[K]=\dfrac{\mathrm{N\,m\,A^{-1}}}{(\mathrm{N\,m\,A^{-1}})^2+\mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s}\times\mathrm{V\,A^{-1}}}=\dfrac{1}{\mathrm{N\,m\,A^{-1}}+\mathrm{rad^{-1}\,s\,V}}=\dfrac{1}{\mathrm{rad^{-1}\,s\,V}}=\mathrm{rad\,s^{-1}\,V^{-1}}$.

La pulsation propre doit être en s^{-1} ou $rad\,s^{-1}$.
On a vu que $[K_m^2] = [Rf]$. De plus $[L] = H = V\,s\,A^{-1}$ et $[J] = N\,m\,rad^{-1}s^2$ (PFD).
$[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{N^2\,m^2\,A^{-2}}{V\,s\,A^{-1} \times N\,m\,rad^{-1}s^2}} = \sqrt{\dfrac{N\,m\,rad}{V\,s\,A\,s^2}}$. Or, $W = N\,m\,rad\,s^{-1} = VA$.
On a alors $[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{N\,m\,rad\,s^{-1}}{V\,s^2\,A}} = \sqrt{\dfrac{1}{s^2}} = s^{-1}$.
Enfin, ξ est sans unité... à vérifier :)

Exercice 217 – Moteur à courant continu⋆

B2-07

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*



Question 2 *Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.*

En utilisant le schéma-blocs proposé, on a $\Omega(p) = \left(C_r(p)A(p) + U(p)B(p)\right)C(p)$.

D'autre part, $\Omega(p) = \left(C_r(p) + \dfrac{K}{R+Lp}\left(U(p) - K\Omega(p)\right)\right)\dfrac{1}{f+Jp}$.

On a donc $\left(f+Jp\right)\Omega(p) = C_r(p) + U(p)\dfrac{K}{R+Lp}$

$$\Leftrightarrow \left(f+Jp\right)\Omega(p) + \frac{K^2}{R+Lp}\Omega(p) = C_r(p) + U(p)\frac{K}{R+Lp}$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(f+Jp\right) + \frac{K^2}{R+Lp}\right)\Omega(p) = C_r(p) + U(p)\frac{K}{R+Lp}$$
$$\Leftrightarrow \frac{K^2 + \left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}{R+Lp}\Omega(p) = C_r(p) + U(p)\frac{K}{R+Lp}$$
$$\Leftrightarrow \Omega(p) = \left(C_r(p) + U(p)\frac{K}{R+Lp}\right)\frac{R+Lp}{K^2 + \left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}.$$

Dés lors plusieurs schéma-blocs peuvent répondre à la question. Par exemple, $A(p) = 1$, $B(p) = \dfrac{K}{R+Lp}$,

$$C(p) = \frac{R+Lp}{K^2 + \left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}.$$

En poursuivant, on a aussi : $\Omega(p) = \left(C_r(p)(R+Lp) + U(p)K\right)\dfrac{1}{K^2 + \left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}$.

On a donc aussi, $A(p) = R+Lp$, $B(p) = K$, $C(p) = \dfrac{1}{K^2 + \left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}$

Exercice 216 – Valeur finale⋆

C2-03

Question 1 *Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude E_0.*

On a $H(p) = \dfrac{\dfrac{K}{p\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right)}}{1 + \dfrac{CK}{p\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right)}} = \dfrac{K}{p\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right) + CK}$. En conséquence, $S(p) = E(p)\dfrac{K}{p\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right) + CK}$.

$s_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = \lim\limits_{p\to 0} pS(p) = \lim\limits_{p\to 0} pE(p)H(p)$. Dans le cas où $E(p)$ est un échelon, on a $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$ et donc $s_\infty = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{E_0}{p}\dfrac{K}{p\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right) + CK} = \dfrac{E_0}{C}$.

Question 2 *En déduire la valeur de l'erreur statique.*

L'erreur statique est donnée par $\lim\limits_{t\to+\infty}(e(t)-s(t)) = E_0 - \dfrac{E_0}{C}$.

Question 3 *Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est une rampe de pente k.*

On a maintenant $E(p) = \dfrac{k}{p^2}$. On a donc et donc $s_\infty = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{k}{p^2}\dfrac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK}$ et $s_\infty = \infty$.

Question 4 *En déduire la valeur de l'erreur de traînage.*

$$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty}(e(t)-s(t)) = \lim_{p\to 0} p\left(\frac{k}{p^2} - \frac{k}{p^2}\frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK}\right)$$
$$= \lim_{p\to 0}\frac{k}{p}\left(1-\frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK}\right) = \lim_{p\to 0}\frac{k}{p}\frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK-K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK} = +\infty$$

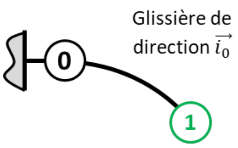
Question 5 *Qu'en est-il si $C=1$?.*

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0}\frac{k}{p}\frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK-K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK} = \lim_{p\to 0}\frac{k}{p}\frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+K} = \lim_{p\to 0} k\frac{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+K} = \frac{k}{K}.$$

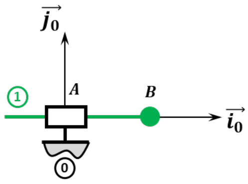
Exercice 215 – Mouvement T – ⋆

B2-12

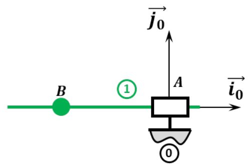
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 10\,\text{mm}$.*



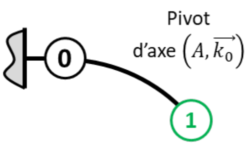
Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = -20\,\text{mm}$.*



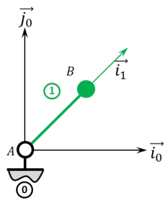
Exercice 214 – Mouvement R ⋆

B2-12

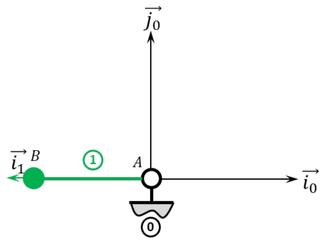
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad.*



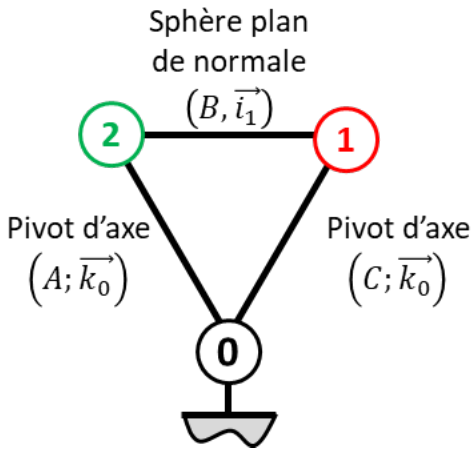
Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \pi$ rad.*



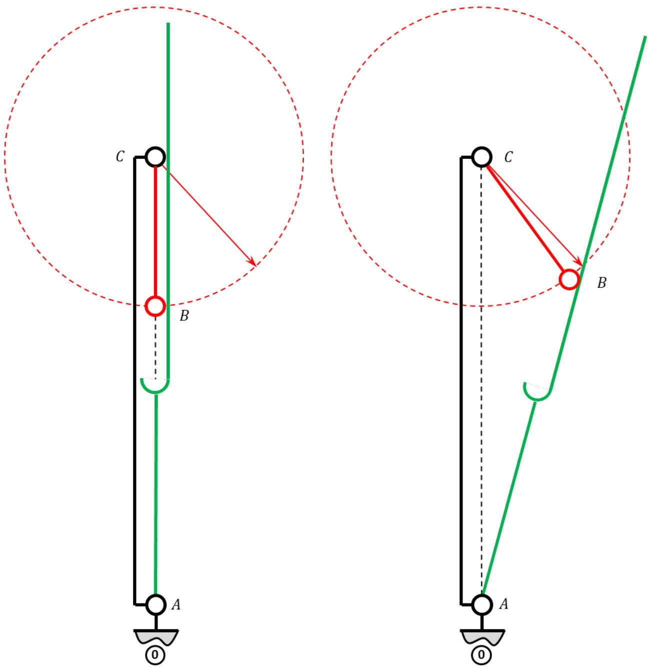
Exercice 213 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-12

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \dfrac{\pi}{2}$ rad.*



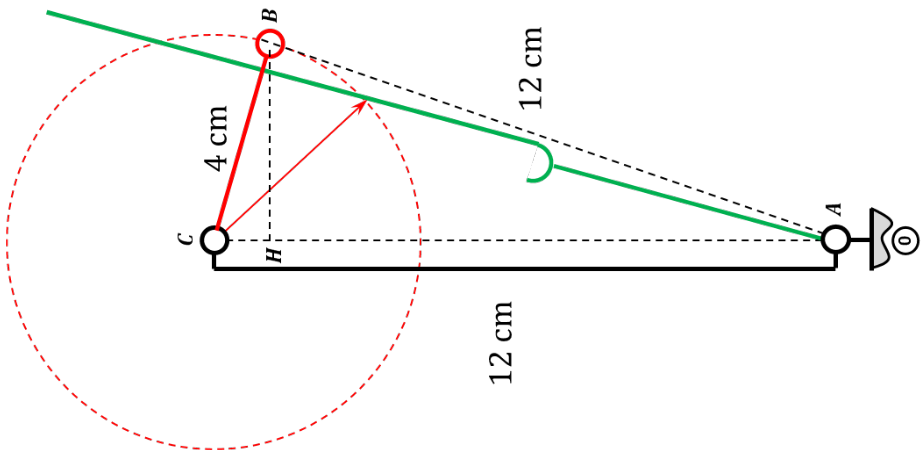
Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 75\,°$.*

Question 4 *Dans l'hypothèse où la pièce **1** peut faire des tours complets, quelle doit être la longueur minimale de la pièce **2**.*

Dans cas, dans le pire des cas, A, B et C sont alignés (avec B au-dessus de C). Il faut donc $AB = AC + CB = 160\,\text{mm}$.

Question 5 *Dans l'hypothèse où la pièce **2** fait 12 cm, quel sera le débattement maximal de la pièce **1**.*

Comme je suis paresseux, j'ai réalisé la construction avec geogebra. On mesure 160,8 °.



Exercice 212 – Mouvement T – ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en translation de direction $\overrightarrow{i_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t)=\lambda(t)\\ y_B(t)=0\\ z_B(t)=0\end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 211 – Mouvement R ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en rotation de centre A et d'axe $\overrightarrow{k_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Quelle est la trajectoire du point B appartenant à **1** par rapport à **0**.*

B est est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre A et de rayon R).

Question 3 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB}=R\,\overrightarrow{i_1}=R\cos\theta\,\overrightarrow{i_0}+R\sin\theta\,\overrightarrow{j_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t)=R\cos\theta(t)\\ y_B(t)=R\sin\theta(t)\\ z_B(t)=0\end{array}\right.$

dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 210 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Calculer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$?*

$\overrightarrow{V(B,1/0)}=\overrightarrow{V(C,1/0)}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\overrightarrow{0}-R\,\overrightarrow{i_1}\wedge\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0}=R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.

(Possibilité d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 2 *Calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$?*

$\overrightarrow{V(B,2/0)}=\overrightarrow{V(A,2/0)}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\overrightarrow{0}-\lambda\,\overrightarrow{i_2}\wedge\dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_0}=\lambda\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2}$.

(**Impossibilité** d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 3 *Justifier que $\overrightarrow{V(B,2/1)}\cdot\overrightarrow{j_2}=0$.*

La liaison entre **2** et **1** est une liaison ponctuelle de normale $\overrightarrow{j_2}$. Il n'y a donc pas de vitesse sur cette direction (ce qui de plus provoquerait une rupture de contact en B).

Question 4 *En déduire une relation cinématique entre les différentes grandeurs.*

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse, on a $\overrightarrow{V(B,2/1)}\cdot\overrightarrow{j_2}=\left(\overrightarrow{V(B,2/0)}-\overrightarrow{V(B,1/0)}\right)\cdot\overrightarrow{j_2}\Leftrightarrow 0=\left(\lambda\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2}-R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}\right)\cdot$

DDS

$\overrightarrow{j_2} \Leftrightarrow 0=\lambda\dot{\varphi}-R\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)$

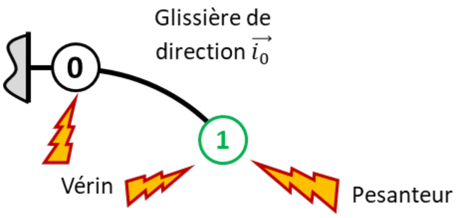
Exercice 209 – Mouvement T – ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

$$\{\mathscr{F}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{j_1}+Z_{01}\overrightarrow{k_1} \\ L_{01}\overrightarrow{i_1}+M_{01}\overrightarrow{j_1}+N_{01}\overrightarrow{k_1}\end{array}\right\}_A$$
$$\{\mathscr{F}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$$
$$\{\mathscr{F}(\text{ver}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} F_v\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$$

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

$$\{\mathscr{F}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{j_1} \\ N_{01}\overrightarrow{k_1}\end{array}\right\}_A,\ \{\mathscr{F}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G,\ \{\mathscr{F}(\text{ver}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} F_v\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G.$$

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le vérin pour maintenir **1** en équilibre.*

Mouvement de translation. On isole **1** et on applique le théorème de la résultante statique en projection suivant $\overrightarrow{i_0}$.

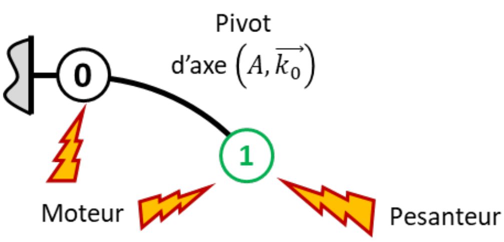
Exercice 208 – Mouvement R ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

$$\{\mathscr{F}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{i_1}+Y_{01}\overrightarrow{j_1}+Z_{01}\overrightarrow{k_1} \\ L_{01}\overrightarrow{i_1}+M_{01}\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_A,\ \{\mathscr{F}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B,\ \{\mathscr{F}(\text{Mot}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_A.$$

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

$$\{\mathscr{F}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{i_1}+Y_{01}\overrightarrow{j_1} \\ M_{01}\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_A,\ \{\mathscr{F}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B,\ \{\mathscr{F}(\text{Mot}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_A.$$

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le moteur pour maintenir **1** en équilibre.*

On isole 1 et on réalise un théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$.

Exercice 207 – Barrière Sympact ⋆⋆

C1-05

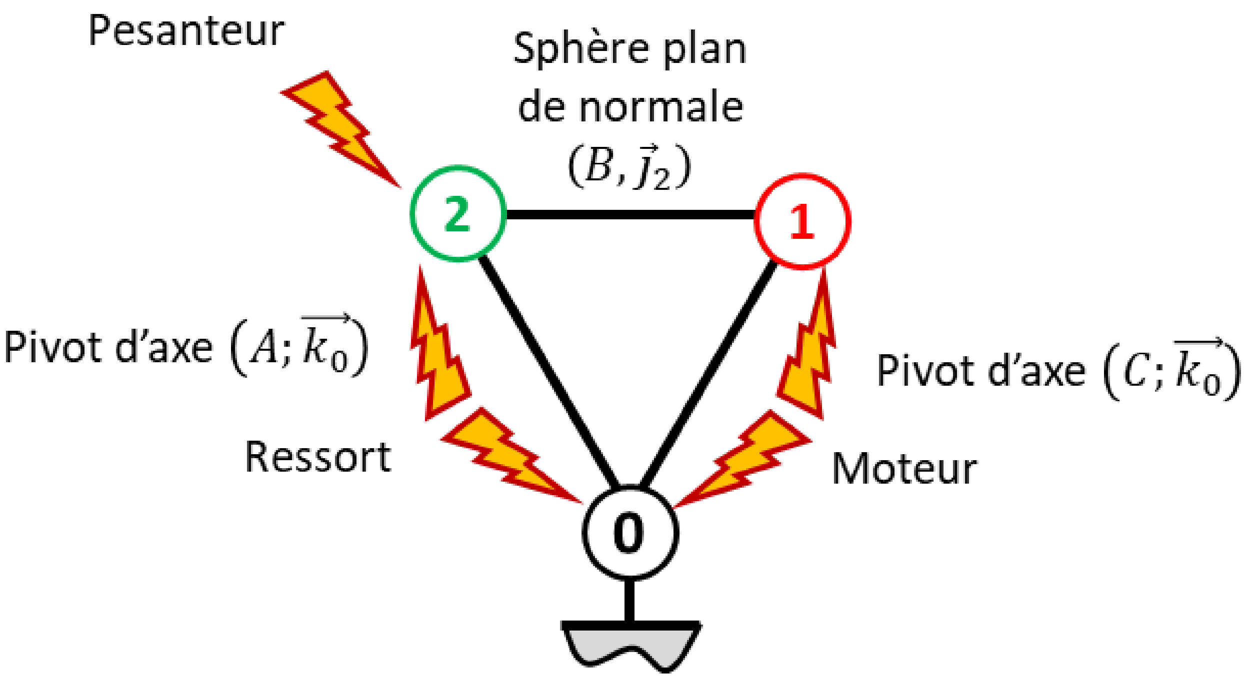
On néglige la pesanteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Moteur} \to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Ressort} \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce **2**. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100°. On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ($\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$). Il est au maximum lorsque $\varphi_f = 0$.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Pes} \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*



Question 2 *Expliciter C_r en fonction des différents constantes $(k, \varphi_o, \varphi_f)$ et celles qui vous sembleraient utile.*

Exprimons le couple du ressort par $C_r(\varphi) = a\varphi + b$. On a d'une part, $C_r(\varphi_0) = 0$. D'autre part, on a une raideur k de 45 Nm pour un angle de rotation 100°soit $k = \dfrac{45}{100\dfrac{\pi}{180}} = 26\,\text{Nm}\,\text{rad}^{-1}$. On a donc $C_r(\varphi_f) = k\dfrac{\pi}{2}$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} a\varphi_0 + b = 0 \\ a\varphi_f + b = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -a\varphi_0 \\ a\varphi_f - a\varphi_0 = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -a\varphi_0 \\ a\left(\varphi_f - \varphi_0\right) = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -a\varphi_0 \\ a = k\dfrac{\pi}{2\left(\varphi_f - \varphi_0\right)} \end{array}\right.$

On a donc $C_r(\varphi) = k\dfrac{\pi}{2\left(\varphi_f - \varphi_0\right)}\varphi - k\dfrac{\pi\varphi_0}{2\left(\varphi_f - \varphi_0\right)}$.

Avec $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi_f = 0$, on a $C_r(\varphi) = -k\varphi + k\dfrac{\pi}{2}$.

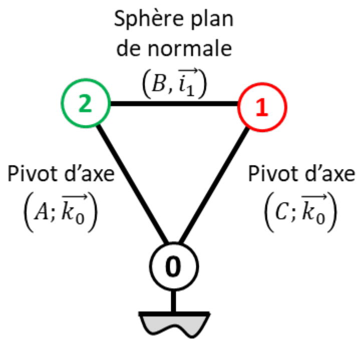
Question 3 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

Exercice 206 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$ soit $\lambda(t)\overrightarrow{i_2}-R\overrightarrow{i_1}-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a $\lambda(t)\left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\varphi(t)\overrightarrow{j_0}\right)-R\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0}\right)-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

On a alors $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)-R\cos\theta(t)=0\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)-R\sin\theta(t)-h=0\end{array}\right.$

soit $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)=R\cos\theta(t)\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)=R\sin\theta(t)+h\end{array}\right.$.

En faisant le rapport des équations, on a donc : $\tan\varphi(t)=\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$ (pour $\theta(t)\neq\dfrac{\pi}{2}\, mod \pi$).

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

On a : $\varphi(t)=\arctan\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)$.

Pour commencer, $(R\sin\theta(t)+h)'=R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$ et $(R\cos\theta(t))'=-R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$.

De plus, $\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)'$

$=\dfrac{R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)R\cos\theta(t)+R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$

$=\dfrac{R^2\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t)+R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$

$=\dfrac{R\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t)+R\sin^2\theta(t)\dot{\theta}(t)+h\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$

$=\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$.

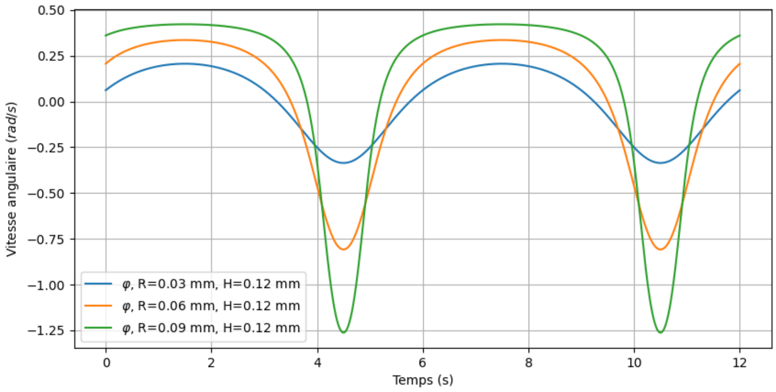
Au final,

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)^2}\quad\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}.$$

$$\dot{\varphi}(t)=R^2\cos^2\theta(t)\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{R^2\cos^2\theta(t)+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)+h)^2}.$$

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+R^2\sin^2\theta(t)+h^2+2Rh\sin\theta(t)}=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}.$$

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*




```python
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position angulaire ($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()


def plot_phip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phip = calc_phip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse angulaire ($rad/s$)")
```

```
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phip,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phip()
```

Exercice 205 – Ecart⋆

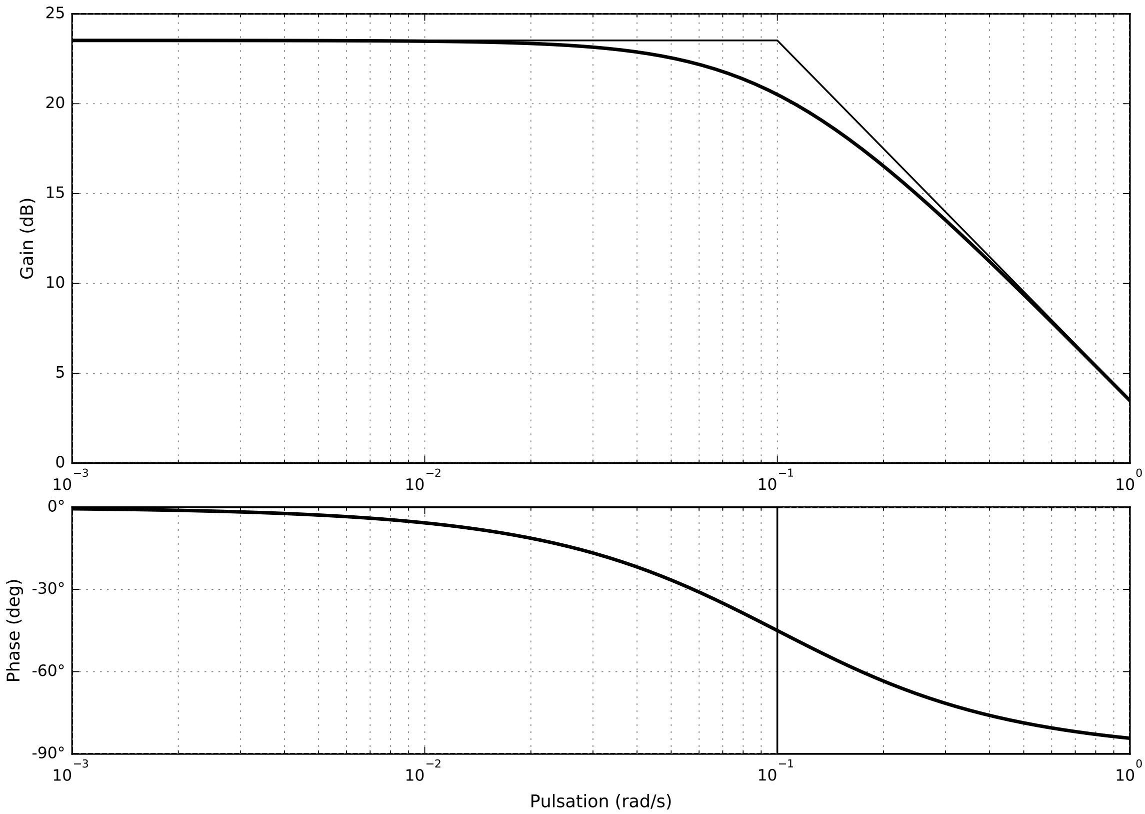
C2-02

Question 1 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_1(p) = \dfrac{15}{1+10p}$.

Tracer asymptotique

	$\omega \to 0$	$\omega = \dfrac{1}{10}\,\text{rad/s}$	$\omega \to \infty$
$H(p) = \dfrac{15}{1+10\text{p}}$	0 dB/décade 0°		−20 dB/décade −90°

Positionnement du diagramme de gain Lorsque que ω tend vers 0, le gain tend vers $20\log 15 = 23{,}5\,\text{dB}$.



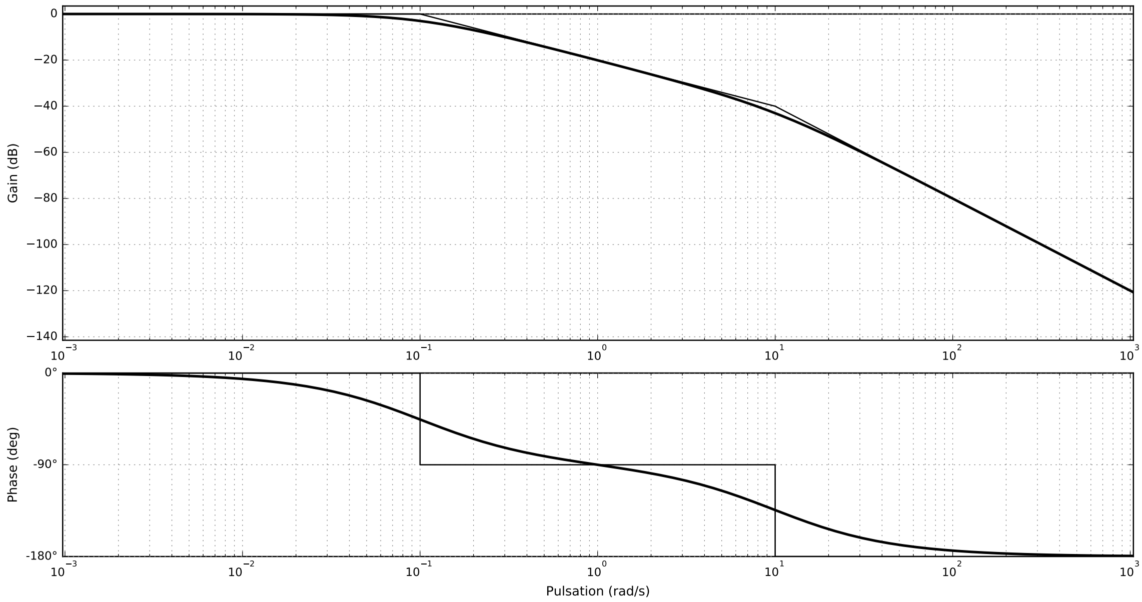
Question 2 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_2(p) = \dfrac{10}{(1+10p)(10+p)}$.

Tracer asymptotique

$$F_2(p) = \dfrac{1}{(1+10p)\left(1+\dfrac{p}{10}\right)}$$

	$\omega \to 0$	$\omega_1 = \dfrac{1}{10}$ rad/s	$\omega_2 = 10$ rad/s	$\omega \to \infty$
$H_1(p) = \dfrac{1}{1+10p}$	0 dB/décade 0°	−20 dB/décade −90°	−20 dB/décade −90°	
$H_2(p) = \dfrac{1}{1+\frac{p}{10}}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	−20 dB/décade −90°	
$F_2(p)$	0 dB/décade 0°	−20 dB/décade −90°	−40 dB/décade −180°	

Positionnement du diagramme de gain Lorsque que ω tend vers 0, le gain tend vers $20\log 1 = 0\,\text{dB}$.

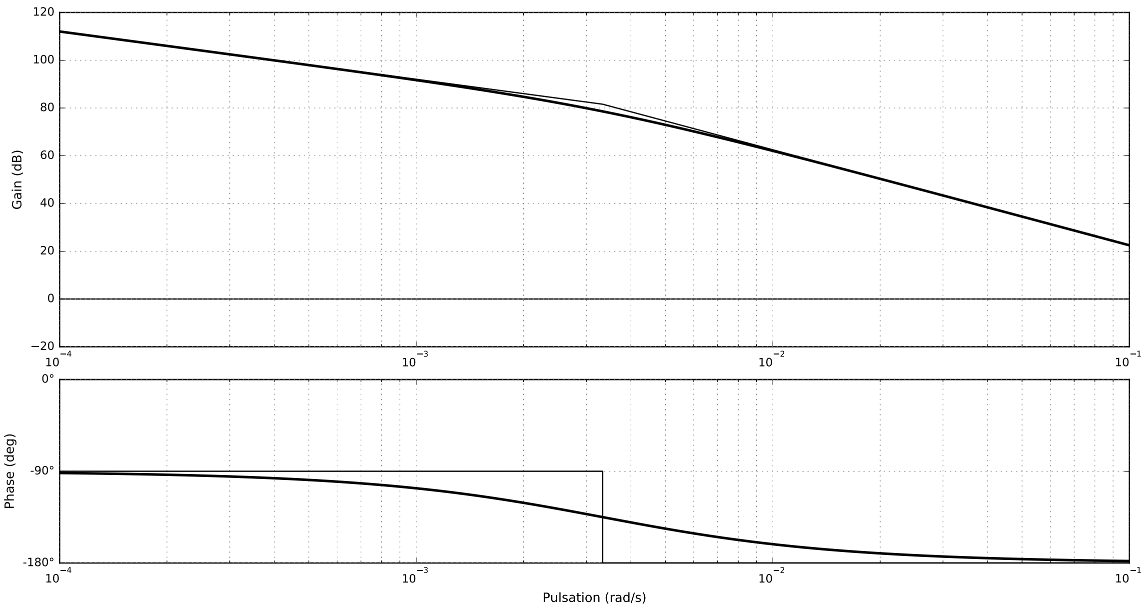


Question 3 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_3(p) = \dfrac{40}{p\left(1+300p\right)}$.

Tracer asymptotique

	$\omega \to 0$	$\omega = \dfrac{1}{300}$ rad/s	$\omega \to \infty$
$H_1(p) = \dfrac{40}{p}$	−20 dB/décade −90°	−20 dB/décade −90°	
$H_2(p) = \dfrac{1}{1+300p}$	0 dB/décade 0°	−20 dB/décade −90°	
$F_3(p)$	−20 dB/décade −90°	−40 dB/décade −180°	

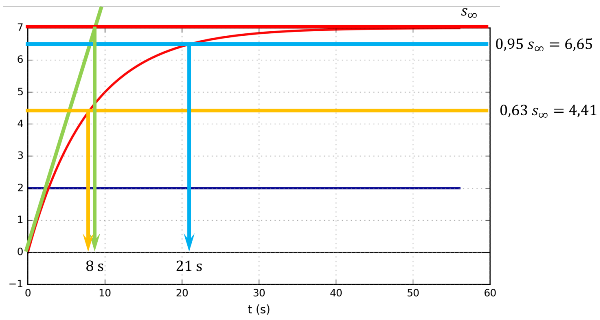
Positionnement du diagramme de gain Lorsque que ω tend vers 0, $F_3(p) \simeq \dfrac{40}{p}$. Cette asymptote de pente −20 dB/decade passe par le point $(40, 0)$.



Exercice 204 – Identification temporelle ⋆

B2-06

Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*



La tangente à l'origine est non nulle. Il n'y a pas de dépassement. On va donc identifier un système d'ordre 1 de la forme $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.

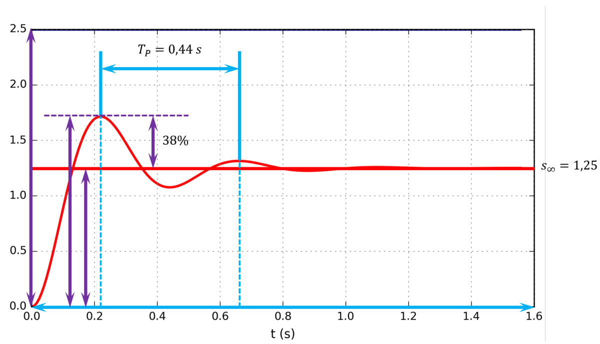
L'échelon d'entrée a une amplitude de 2. En régime permanent la valeur atteinte est de 7. On a donc $K = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$.

Pour identifier la constante de temps, on peut :

- regarder à quel temps a lieu l'intersection entre l'asympote en régime permanent et la tangente à l'origine ;
- mesurer le temps de temps réponse à 63 % ;
- mesurer le temps de temps réponse à 95 % et diviser cette valeur par 3.

On a donc $H(p) = \dfrac{3{,}5}{1+8p}$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système en réalisant les mesures nécessaires et en utilisant les formules appropriées.*



La tangente à l'origine est nulle et il y a des dépassements. On modélise le système par un système d'ordre 2. $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

On a $K=\dfrac{1,25}{2,5}=0,5$.

On mesure un dépassement de $1,38=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Leftrightarrow \ln 0,38=\dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\xi^2}\ln 1,38=-\pi\xi \Leftrightarrow (1-\xi^2)(\ln 1,38)^2=\pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2-\xi^2(\ln 1,38)^2=\pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2=\pi^2\xi^2+\xi^2(\ln 1,38)^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2=\xi^2\left(\pi^2+(\ln 1,38)^2\right)$
$\Leftrightarrow \dfrac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2+(\ln 1,38)^2}=\xi^2 \Leftrightarrow \xi=\sqrt{\dfrac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2+(\ln 1,38)^2}}=0,3$.

Par ailleurs, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{2\pi}{0,44\sqrt{1-0,3^2}}=14,9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

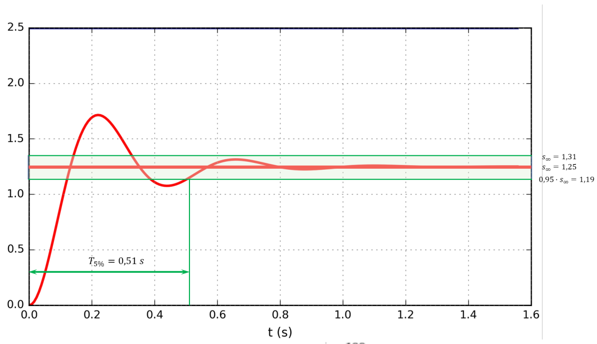
Au final, $H(p)=\dfrac{0,5}{1+\dfrac{2\times 0,3}{14,9}p+\dfrac{p^2}{14,9^2}}$.

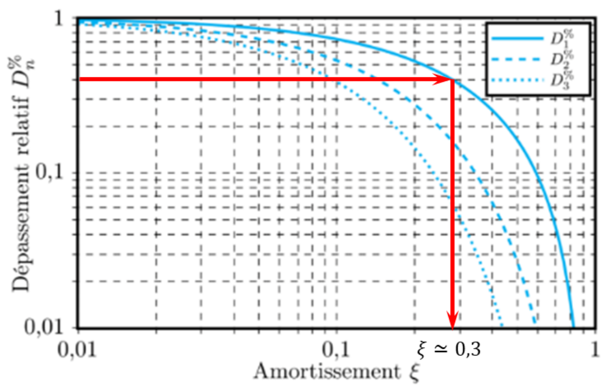
Question 3 *Déterminer la fonction de transfert du système en utilisant les abaques.*

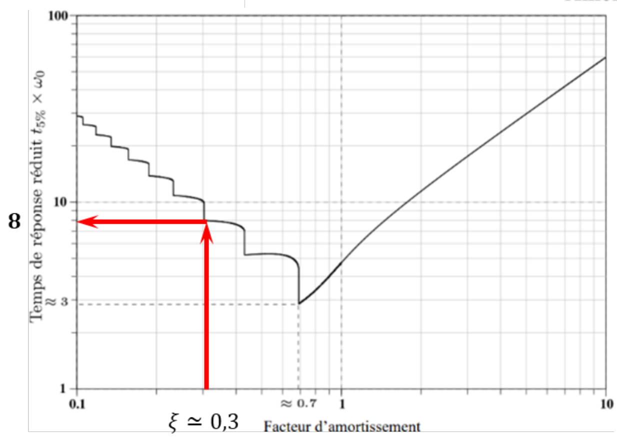
Le dépassement est de 38 %. On a donc $\xi=0,3$.

De plus, on mesure $T_{5\%}\times\omega_0=8$ avec $T_{5\%}=0,51\,\mathrm{s}$ on a $\omega_0=8/0,5\simeq 16\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Au final, $H(p)=\dfrac{0,5}{1+\dfrac{2\times 0,3}{16}p+\dfrac{p^2}{16^2}}$.



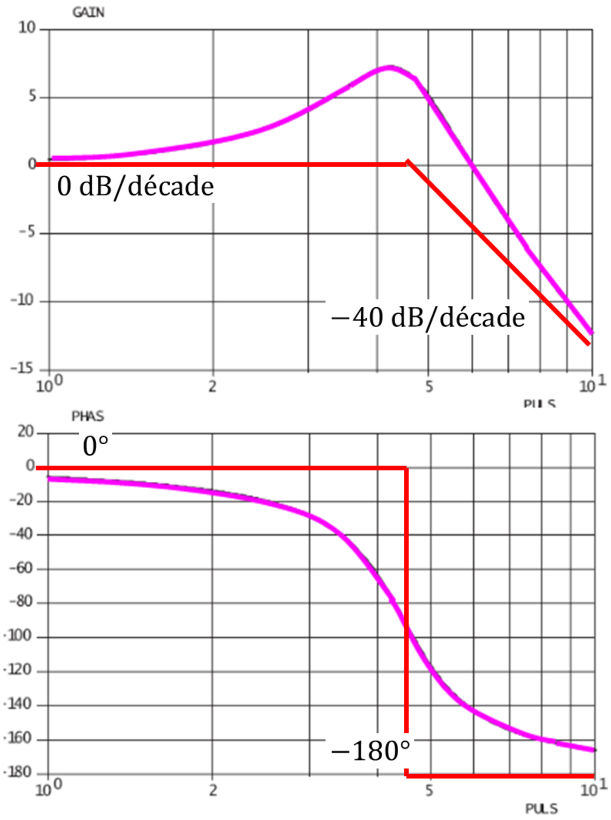




Exercice 203 – Identification ⋆

B2-06

Question 1 *Tracer le diagramme de Bode asymptotique.*



Question 2 *Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.*

La phase tend vers 0 lorsque ω tend vers 0 rad/s et vers −180° lorsque ω tend vers l'infini. On observe de plus une résonance. Par ailleurs le gain est nul quand ω tend vers 0 rad/s. Le système est donc d'ordre 2 avec un gain unitaire et un $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On détermine ω_0 lorsque la phase vaut −90°.

À ce stade, $H(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi}{4,5}p+\dfrac{p^2}{4,5^2}}$.

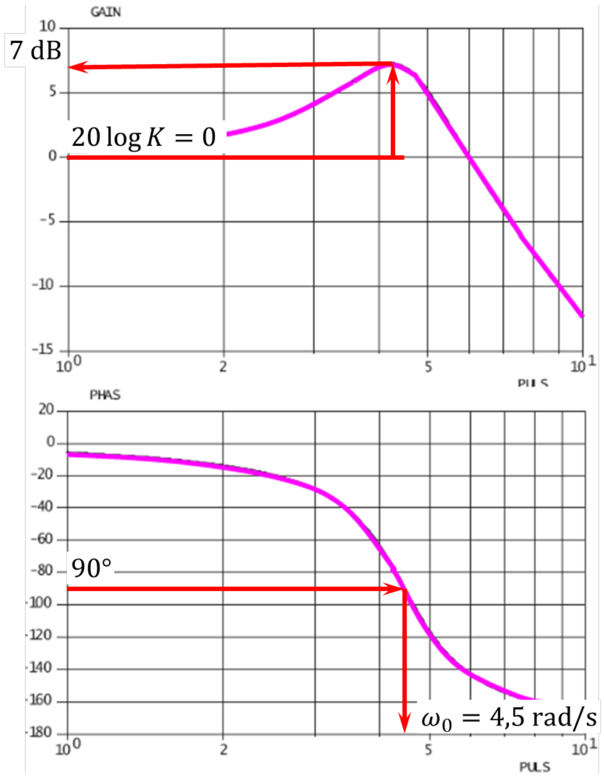
Enfin, on mesure un gain à la résonance de 7 dB. On a donc $20\log A_{\max} = 7$ soit $A_{\max} = 10^{7/20} = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Par suite, $\dfrac{1}{A_{\max}} = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{A_{\max}} = 4\xi^2\left(1-\xi^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{A_{\max}^2} = 4\xi^2 - 4\xi^4 \Rightarrow 4\xi^4 - 4\xi^2 + \dfrac{1}{A_{\max}^2} = 0 \Rightarrow 4X^2 - 4X + \dfrac{1}{A_{\max}^2} = 0$

On a alors $\Delta = 16 - \dfrac{16}{A_{\max}^2}$ et $X_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{16}$

En réalisant les applications numériques, on a $\xi = \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{\Delta}}{16}} = 0,23$.

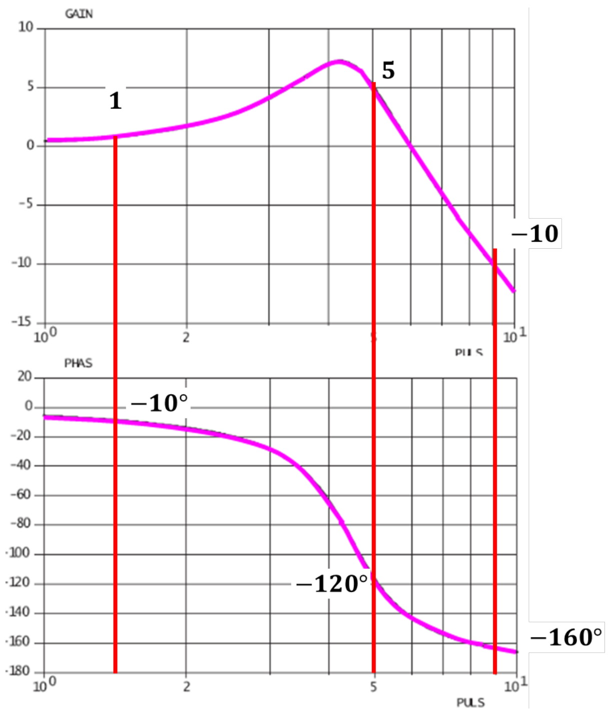
Alors, $H(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{2\times 0,23}{4,5}p+\dfrac{p^2}{4,5^2}}$.



Question 3 *Déterminer les période et les pulsations de chacun des signaux.*

- Signal rouge : $T = 4{,}2\,\text{s}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1{,}5\,\text{rad/s}$.
- Signal vert : $T = 3{,}6/3 = 1{,}2\,\text{s}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5{,}2\,\text{rad/s}$.
- Signal bleu : $T = 4{,}2/6 = 0{,}7\,\text{s}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 9\,\text{rad/s}$.

Question 4 *En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.*



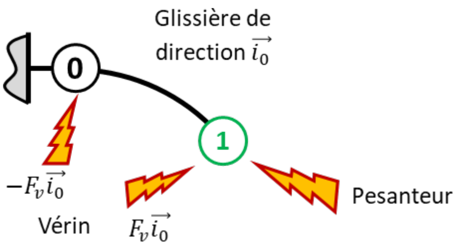
- Pour $\omega = 1{,}5\,\text{rad/s}$, $G_{\text{dB}} = 1 \Rightarrow 20\log K = 1 \Rightarrow K = 10^{1/20} = 1{,}12$ et $\varphi = -0{,}17\,\text{rad}$. On a donc $s(t) = 1{,}12\sin(\omega t - 0{,}17)$.
- Pour $\omega = 5\,\text{rad/s}$, $G_{\text{dB}} = 5 \Rightarrow K = 10^{5/20} = 1{,}8$ et $\varphi = -2{,}1\,\text{rad}$. On a donc $s(t) = 1{,}8\sin(\omega t - 2{,}1)$.

- Pour $\omega = 9\,\text{rad/s}$ $G_{\text{dB}} = 5 \Rightarrow K = 10^{-10/20} = 0,3$ et $\varphi = -2,8\,\text{rad}$. On a donc $s(t) = 0,3\sin(\omega t - 2,8)$.

Exercice 202 – Mouvement T ⋆

C2-07

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Exprimer l'équation d'équilibre de la pièce* ***1****.*

- On isole **1**.
- Bilan des actions mécaniques :
  - pesanteur : $\{\mathscr{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$;
  - vérin : $\{\mathscr{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$;
  - liason glissière : $\{\mathscr{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01}\,\overrightarrow{j_1} + Z_{01}\,\overrightarrow{j_1} \\ L_{01}\,\overrightarrow{i_1} + M_{01}\,\overrightarrow{j_1} + N_{01}\,\overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_A$.

En appliquant le théorème de la résultante statique en projection suivant $\overrightarrow{i_0}$, on a $-m_1 g + F_v = 0$.

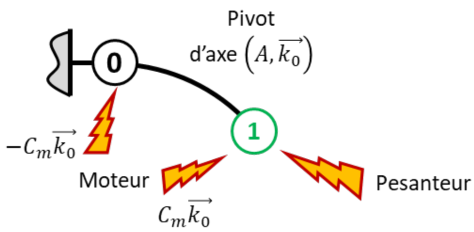
Question 3 *Déterminer l'ensemble des inconnues de liaison.*

En A, on a $\{\mathscr{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{AG} \wedge -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \left(\lambda(t)\,\overrightarrow{i_0} + \ell\,\overrightarrow{j_1}\right) \wedge -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \ell m_1 g\,\overrightarrow{k_1} \end{array} \right\}_A$ En appliquant le PFS à 1, on a le TRS : $\left\{ \begin{array}{l} 0 - m_1 g + F_v = 0 \\ Y_{01} = 0 \\ Z_{01} = 0 \end{array} \right.$ et le TMS en A : $\left\{ \begin{array}{l} L_{01} = 0 \\ M_{01} = 0 \\ N_{01} + \ell m_1 g = 0 \end{array} \right.$.

Exercice 201 – Mouvement R ⋆

C2-07

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner l'équation d'équilibre de la pièce* ***1****.*

- On isole **1**.
- Bilan des actions mécaniques :
  - $\{\mathscr{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\,\overrightarrow{i_0} + Y_{01}\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$;
  - $\{\mathscr{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\,\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_A$;
  - $\{\mathscr{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}(A, \text{pes} \rightarrow 1)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B, \text{pes} \rightarrow 1)} + \overrightarrow{AB} \wedge -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} = R\,\overrightarrow{i_1} \wedge -m_1 g\,\overrightarrow{j_0}$ $= -R m_1 g\,\overrightarrow{k_0}$.

- On réalise le théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$: $C_m - R m_1 g = 0$.

Question 3 *Déterminer l'ensemble des inconnues de liaisons.*

On réalise le TRS en projection sur $\overrightarrow{i_0}$: $X_{01} = 0$.
On réalise le TRS en projection sur $\overrightarrow{j_0}$: $Y_{01} = m_1 g$.

Exercice 200 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer* $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = -\dfrac{Z_1}{Z_3}$.

Question 3 *Donner une relation géométrique entre Z_1, Z_2 et Z_3 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages.*

On a $Z_3 = 2Z_2 + Z_1$.

Exercice 199 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer* $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$.

Question 3 *Donner une relation géométrique entre Z_1, Z_{21}, Z_{22} et Z_4 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages (on fera l'hypothèse que toutes les roues dentées ont le même module).*

On a $Z_1 + Z_{21} + Z_{22} = Z_4$.

Exercice 198 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer* $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$.

Exercice 197 – Barrière Sympact ⋆⋆

C2-07

On néglige la pesanteur sur la pièce **1**.

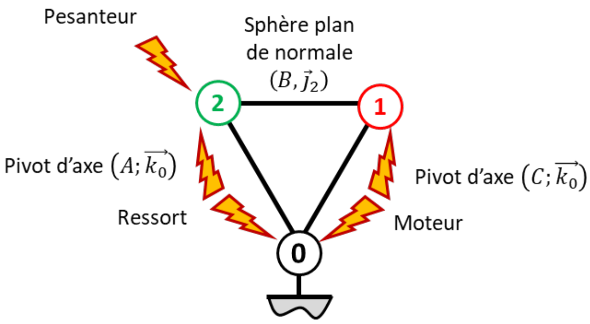
On note $\{\mathscr{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce **2**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\,\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*

DDS



Question 2 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

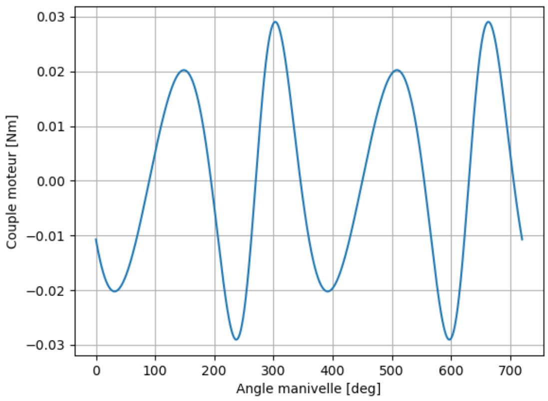
Question 3 *Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- **On isole 1.**
- **On réalise le bilan des actions mécaniques** :
  - action de la pivot en C (pas de moment suivant $\overrightarrow{k_0}$),
  - action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathscr{T}(2\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_B\,\overrightarrow{j_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_B$, on a alors $\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2\to 1)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\to 1)} + \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{R(2\to 1)} = R\,\overrightarrow{i_1}\wedge F_B\,\overrightarrow{j_2} = R F_B \sin\left(\varphi-\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{k_0} = R F_B\cos\left(\varphi-\theta\right)\overrightarrow{k_0}$;
  - $\{\mathscr{F}(\text{Moteur}\to 1)\}$.
- **On réalise le TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$** : $C_m + R F_B\cos\left(\varphi-\theta\right) = 0$.
- **On isole 2.**
- **On réalise le bilan des actions mécaniques** :
  - action de la pivot en A (pas de moment suivant $\overrightarrow{k_0}$),
  - action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathscr{T}(1\to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -F_B\,\overrightarrow{j_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_B$, on a alors $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,1\to 2)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,1\to 2)} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R(1\to 2)} = \lambda\,\overrightarrow{i_2}\wedge -F_B\,\overrightarrow{j_2} = -\lambda F_B\,\overrightarrow{k_2}$.
  - $\{\mathscr{F}(\text{Ressort}\to 2)\}$;
  - action de la pesanteur : $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,\text{pes}\to 2)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{pes}\to 2)} + \overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{R(\text{pes}\to 2)} = L\,\overrightarrow{i_2}\wedge -Mg\,\overrightarrow{j_0}$
    $= -MgL\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\overrightarrow{k_0}$
    $= -MgL\cos\left(\varphi\right)\overrightarrow{k_0}$
- **On réalise le TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$** : $C_r - \lambda F_B - MgL\cos\varphi = 0$.

Au final, $C_r - \lambda F_B - MgL\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow F_B = \dfrac{C_r - MgL\cos\varphi}{\lambda}$ et
$C_m + R\dfrac{C_r - MgL\cos\varphi}{\lambda}\cos\left(\varphi-\theta\right) = 0$.

Question 4 *Tracer, en utilisant Python, l'évolution du couple moteur en fonction de l'angle de la manivelle. On prendra $M = 1\,\text{kg}$ et $L = 0{,}1\,\text{m}$*

`https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/324a-628215/mcer`



Exercice 196 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer* $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$.

Exercice 195 – La Seine Musicale⋆

B2-07

Question 1 *En considérant que la perturbation $C_{pert}(p)$ est nulle, déterminer $H_f(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ sous forme canonique.*

Réduction de la boucle du moteur à courant continu : $\dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \dfrac{\dfrac{k_c}{R+Lp}\dfrac{1}{J_{eq}p}}{1+\dfrac{k_c}{R+Lp}\dfrac{k_e}{J_{eq}p}} = \dfrac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p + k_e k_c}$.

On a alors,

$$\frac{X_{ch}(p)}{\Omega_c(p)} = K_a \frac{C K_h \dfrac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p+k_e k_c}}{1+C K_h K_{\text{capt}} \dfrac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p+k_e k_c}}$$

$$= K_a \frac{C K_h k_c}{(R+Lp)J_{eq}p+k_e k_c + C K_h K_{\text{capt}} k_c}$$

$$= \frac{K_a}{(k_e k_c + C K_h K_{\text{capt}} k_c)} \frac{C K_h k_c}{\dfrac{J_{eq}(R+Lp)}{k_e k_c + C K_h K_{\text{capt}} k_c}p+1}.$$

Question 2 *En prenant $\Omega_c(p)=0$, exprimer la fonction de transfert $H_r(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ en la mettant sous la forme : $H_r(p) = -\dfrac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2}$. Exprimer α, τ, γ et δ en fonction des différents paramètres de l'étude.*

Par lecture directe du schéma-blocs, on a $\Omega_m(p) = \dfrac{1}{J_{eq}p}\left(C_{\text{pert}}(p) + C_m(p)\right)$.

De plus, $C_m(p) = \left(U_m(p) - k_e\Omega_m(p)\right)\dfrac{k_c}{R+Lp}$ et $U_m(p) = \varepsilon(p) C K_h = -\Omega_m(p) C K_h K_{\text{capt}}$.

On a donc,

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p} C_{\text{pert}}(p) + \frac{1}{J_{eq}p}\left(-\Omega_m(p) C K_h K_{\text{capt}} - k_e \Omega_m(p)\right)\frac{k_c}{R+Lp}.$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p} C_{\text{pert}}(p) + \frac{1}{J_{eq}p}\Omega_m(p)\left(-C K_h K_{\text{capt}} - k_e\right)\frac{k_c}{R+Lp}$$

DDS

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\left(1+\frac{1}{J_{eq}p}\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)\frac{k_c}{R+Lp}\right)=\frac{1}{J_{eq}p}C_{\text{pert}}(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)}=\frac{\frac{1}{J_{eq}p}}{\left(1+\frac{1}{J_{eq}p}\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)\frac{k_c}{R+Lp}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)}=\frac{R+Lp}{J_{eq}p\left(R+Lp\right)+\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)}=\frac{R}{\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}\frac{1+\frac{L}{R}p}{\frac{J_{eq}}{\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}p\left(R+Lp\right)+1}.$$

Par identification, on a alors : $\alpha=-\frac{R}{\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$,

$\tau=\frac{L}{R}$

$\gamma=\frac{RJ_{eq}}{\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$

$\delta=\frac{LJ_{eq}}{\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$.

Question 3 *Exprimer $X_{ch}(p)$ en fonction de $\Omega_m(p)$ et $C_{pert}(p)$.*

D'une part, $\Omega_m(p)=H_f(p)\Omega_c(p)$ quand il n'y a pas de perturbation. D'autre part, $\Omega_m(p)=H_r(p)C_{\text{pert}}(p)$ quand il n'y a pas de perturbation.

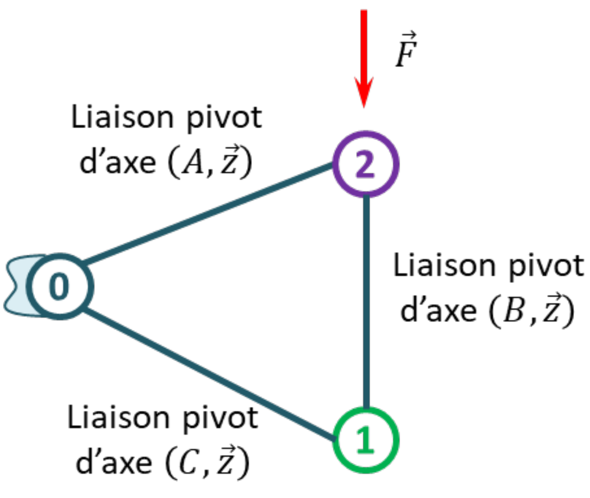
Par superposition, on a donc $\Omega_m(p)=H_f(p)\Omega_c(p)+H_r(p)C_{\text{pert}}(p)$.

Par suite, $X_{ch}(p)=\left(H_f(p)\Omega_c(p)+H_r(p)C_{\text{pert}}(p)\right)\frac{DK_{\text{red}}}{2p}$.

Exercice 194 – Détermination des efforts dans une structure étayée ⋆⋆

C2-07

Question 1 *Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).*



Question 2 *Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.*

Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs**. En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :

- on isole 1 et on réalise le PFS ;
- on isole 2 et on réalise le PFS en B.

Question 3 *Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F.*

On isole 1. On réalise le BAME :
- $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}$;
- $\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\}$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}+\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\}=0$.

Résolution : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}=-\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} F_{01}\overrightarrow{x_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.

On isole 2. On réalise le BAME :
- $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{02}\overrightarrow{x}+Y_{02}\overrightarrow{y}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A=\left\{\begin{array}{c} X_{02}\overrightarrow{x}+Y_{02}\overrightarrow{y}\\ -a\,Y_{02}\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_A$;
- $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} F_{01}\overrightarrow{x_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$;
- $\{\mathscr{T}(\text{ext}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} -F\overrightarrow{y}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_C=\left\{\begin{array}{c} -F\overrightarrow{y}\\ -F\,b\,\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_C$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :
$\{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\}+\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}+\{\mathscr{T}(\text{ext}\rightarrow 2)\}=0$.

Résolution :

$$\left\{\begin{array}{l} X_{02}+F_{01}\cos\alpha=0\\ Y_{02}+F_{01}\sin\alpha-F=0\\ -a\,Y_{02}-F\,b=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} X_{02}=-F_{01}\cos\alpha=-F\dfrac{a+b}{a\tan\alpha}\\ F_{01}=\dfrac{F-Y_{02}}{\sin\alpha}=F\dfrac{a+b}{a\sin\alpha}\\ Y_{02}=-\dfrac{b}{a}F\end{array}\right.$$

Exercice 193 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

On a :
- $u_m(t)=e(t)+R\,i(t)\Rightarrow U_m(p)=E(p)+R\,I(p)$ et $C_{M1}(p)=k_t\,I(p)$ donc $K_2=\dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p)=k_e\Omega_m(p)$ et donc $K_7=k_e$;
- $(M+m)\,r\rho_1 p\Omega_m(p)=\dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r}-F_p(p)\Leftrightarrow(M+m)\,r^2\rho_1^2 p\Omega_m(p)=C_{M1}(p)-\rho_1 r\,F_p(p)$ et donc $K_9=\rho_1 r$ et $H_3(p)=\dfrac{1}{(M+m)\,r^2\rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p)=\dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8=\dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5=\rho_1$ et $K_6=r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon=0$ et $X=X_c$ soit $\varepsilon=0=K_1X_C-K_8\theta_m=K_1X_C-K_8\dfrac{X}{K_5K_6}$. Au final, $K_1=\dfrac{K_8}{K_5K_6}$.

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

D'une part,

$$X(p)=\Big(\big(X_C(p)-X(p)\big)C(p)-F_P(p)D\Big)\frac{A}{p\big(Bp+1\big)}$$

$$X(p)=\frac{A\big(X_C(p)-X(p)\big)C(p)}{p\big(Bp+1\big)}-\frac{AF_P(p)D}{p\big(Bp+1\big)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)+\frac{AX(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)}=\frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)}-\frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)}. \Leftrightarrow X(p)\left(\frac{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}{p\left(Bp+1\right)}\right)=\frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)}+\frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p)=\frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}-\frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}.}$$

D'autre part, $X(p)=\Omega_m(p)H_4(p)K_5K_6$, $U_m(p)=\left(X_c(p)K_1-\theta_m(p)K_8\right)C(p)$, $\theta_m(p)=\Omega_m(p)H_4(p)$.

$$\Omega_m(p)=\left(\left(U_m(p)-\Omega_m(p)K_7\right)K_2-F_P(p)K_9\right)H_3(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\left(1+K_7K_2H_3(p)\right)=U_m(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9$$

$$X(p)=\left(U_m(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)K_1-\theta_m(p)K_8\right)C(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)K_1-X(p)\frac{K_8}{K_5K_6}\right)C(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)-X(p)\right)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+C(p)H_3(p)K_1K_2\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2H_3(p)+C(p)H_3(p)K_1K_2H_4(p)K_5K_6\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)H_4(p)K_5K_6}.$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2\frac{1}{p}K_5K_6\right)=\left(X_c(p)C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2-F_P(p)\frac{}{(M+}\right.$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)=\left(X_c(p)C(p)\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{1}\frac{k_t}{R}}{\left((M+m)r^2\rho_1^2p^2+\frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{(M+m)}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C\right.}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{1}}{\left((M+m)r\rho_1p^2+\frac{(M+m)r\rho_1p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{(M+m)r\rho}{(M+m)r}\right.}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2+\frac{pk_ek_t}{Rr\rho_1}+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(\frac{R}{k_ek_t}(M+m)r^2\rho_1^2p+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(\frac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_ek_t}p+1\right)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(Bp+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}(Bp+1)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{R}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{R}}{p(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}\frac{R}{k_ek_t}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}\frac{k_e}{K_8}K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

On a donc $A=\frac{K_8}{k_e}$, $B=\frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_ek_t}$ et $D=\frac{K_9Rr\rho_1}{K_8k_t}$.

Exercice 192 – Fonctions de transfert⋆

B2-07

Question 1 *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.*

On a $\mathrm{FTBO}(p)=\frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}=\frac{K^2}{Rf+RJp+Lfp+LJp^2}=\frac{K^2}{Rf\left(1+p\frac{RJ+Lf}{Rf}+\frac{LJ}{Rf}p^2\right)}$.

On a donc $K_{\mathrm{BO}}=\frac{K^2}{Rf}$, $\omega_{\mathrm{BO}}=\sqrt{\frac{Rf}{LJ}}$, $\frac{2\xi_{\mathrm{BO}}}{\omega_{\mathrm{BO}}}=\frac{RJ+Lf}{Rf}\Leftrightarrow\xi_{\mathrm{BO}}=\omega_{\mathrm{BO}}\frac{RJ+Lf}{2Rf}=\sqrt{\frac{Rf}{LJ}}\frac{RJ+Lf}{2Rf}=\frac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJRf}}$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.*

On a $\mathrm{FTBF}(p)=\frac{\frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}}{1+\frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}}=\frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)+K^2}=\frac{\frac{K^2}{K^2+Rf}}{\frac{RJ+Lf}{Rf+K^2}p+\frac{LJ}{Rf+K^2}p^2+1}$.

On a donc $K_{\mathrm{BF}}=\frac{K^2}{K^2+Rf}$, $\omega_{\mathrm{BF}}=\sqrt{\frac{Rf+K^2}{LJ}}$, $\frac{2\xi_{\mathrm{BF}}}{\omega_{\mathrm{BF}}}=\frac{RJ+Lf}{Rf+K^2}\Leftrightarrow\xi_{\mathrm{BO}}=\omega_{\mathrm{BF}}\frac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)}=\sqrt{\frac{Rf+K^2}{LJ}}\frac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)}$
$\xi_{\mathrm{BF}}=\frac{RJ+Lf}{2LJ\sqrt{Rf+K^2}}$.

Question 3 *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramétrés caractéristiques.*

Si on note $R(p)$ la seconde entrée du **premier comparateur** et $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur,

$\mathrm{FTBO(p)}=\frac{\varepsilon(p)}{R(p)}=A\times\frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{B}{p}}\times C=\frac{AC}{B+p}=\frac{\frac{AC}{B}}{1+\frac{p}{B}}$. On a donc $K_{\mathrm{BO}}=\frac{AC}{B}$ et $\tau_{\mathrm{BO}}=\frac{1}{B}$.

Question 4 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramétrés caractéristiques.*

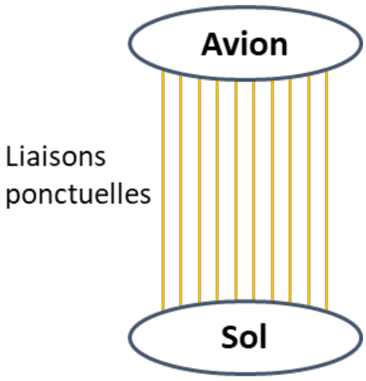
On a $\mathrm{FTBF(p)}=\frac{\frac{AC}{B+p}}{1+\frac{AC}{B+p}}=\frac{AC}{B+p+AC}=\frac{\frac{AC}{B+AC}}{1+\frac{p}{B+AC}}$.

On a donc $K_{\mathrm{BF}}=\frac{AC}{B+AC}$ et $\tau_{\mathrm{BF}}=\frac{1}{B+AC}$.

Exercice 191 – ⋆

B2-16

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan). **Question 1** *Réaliser le graphe des liaisons.*



Question 2 *Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.*

La liaison de l'avion avec le sol est assimilabe à une liaison appui-plan de normale $\overrightarrow{z}$. Il y a donc 3 mobilités (1 rotation autour de $\overrightarrow{z}$, 1 translation selon $\overrightarrow{x}$ et 1 translation suivant $\overrightarrow{y}$.

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion) ;
- $I_s = 10 \times 1 = 10$ (8 liaisons ponctuelles avec 1 inconnue statique par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 6 + 10 = 7$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (10 - 2 + 1) \times 6 = 54$ (on ne peut isoler que l'avion) ;
- $I_c = 10 \times 5 = 50$ (8 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 50 + 54 = 7$.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales $(A, \overrightarrow{z})$ (atterrisseur auxiliaire), $(P_g, \overrightarrow{z})$ (atterrisseur principal gauche) et $(P_d, \overrightarrow{z})$ (atterrisseur principal droit).

Question 3 *Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.*

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion) ;
- $I_s = 3 \times 1 = 3$.

En conséquences, $h = 3 - 6 + 3 = 0$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

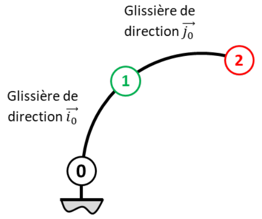
- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (3 - 2 + 1) \times 6 = 12$ (on ne peut isoler que l'avion) ;
- $I_c = 3 \times 5 = 15$ (3 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison) ;

En conséquences, $h = 3 - 15 + 12 = 0$.

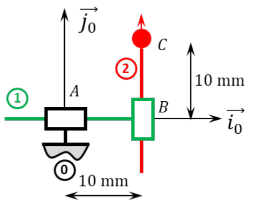
Exercice 190 – Mouvement TT – ⋆

B2-12

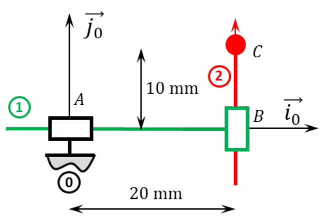
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 10$ mm et $\mu = 10$ mm.*



Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 20$ mm et $\mu = 10$ mm.*



Exercice 189 – Mouvement TT – ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de* ***2*** *par rapport à* ***0****.*

Le point C a un mouvement quelconque dans le plan $\left(A, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}\right)$.

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de* ***2*** *par rapport à* ***0****.*

On a $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0} + \mu(t)\overrightarrow{j_0}$ et donc, on a directement $\left\{\begin{array}{l} x_C(t) = \lambda(t) \\ y_C(t) = \mu(t) \\ z_C(t) = 0 \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10\,\text{cm}$ à la vitesse $v = 0{,}01\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Question 3 *Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R.*

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

On a $v = R\dot{\theta}(t)$. Par intégration, $\theta(t) = \dfrac{v}{R}t$ (avec $\theta(t) = 0\,\text{rad}$ pour $t = 0\,\text{s}$).

Question 4 *Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v, R et du temps.*

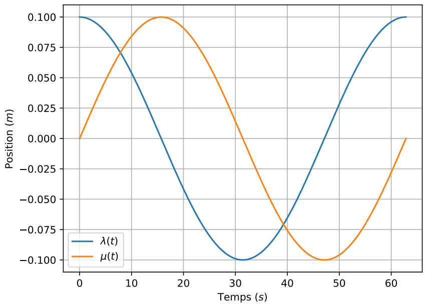
Exprimons la trajectoire du point C : $\overrightarrow{AC} = R\overrightarrow{e_r} = R\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0} + R\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0}$. Par identification $\lambda(t) = R\cos\theta(t)$ et $\mu(t) = R\sin\theta(t)$.

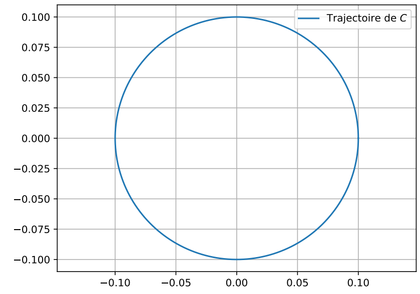
Au final, $\left\{\begin{array}{l} \lambda(t) = R\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right) \\ \mu(t) = R\sin\left(\dfrac{v}{R}t\right) \end{array}\right.$.

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.*

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0,T,200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t,les_lambda,label="$\\lambda(t)$")
plt.plot(les_t,les_mu,label="$\\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps ($s$)")
plt.ylabel("Position ($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()

plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda,les_mu,label="Trajectoire de $C$")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```

DDS





Exercice 188 – Banc hydraulique ⋆

C2-03

Question 1 *Déterminer, en fonction de K_p, ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.*

Le débit de fuite est nul; donc $\Delta Q_e(p)=0$.

Cas 1 : cours sur la précision connu – *Attention à avoir le même type d'entrée/sortie*

La FTBO est de classe nulle ($C(p)$ est un gain, $H_{\text{pom}}(p)$ et $H_{\text{pre}}(p)$ de classe 0). Le gain de la Boucle ouverte est $K_{\text{BO}}=K_pK_mK_{\text{pom}}K_{\text{cap}}$.

Si l'entrée est un échelon d'amplitude P_0, l'écart statique est donc donné par $\varepsilon_S=\dfrac{P_0}{1+K_{\text{BO}}}=\dfrac{P_0}{1+K_pK_mK_{\text{pom}}K_{\text{cap}}}$.

Cas 2 : cours sur la précision peu connu – À savoir faire, mais on perd un peu de temps... – *Attention à avoir le même type d'entrée/sortie* Si on connait quand même un petit peu son cours, on a $\varepsilon(p)=\dfrac{P_{\text{con}}(p)}{1+K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}K_{\text{cap}}}$.

On a alors, $\varepsilon_s=\lim\limits_{p\to0}p\dfrac{\dfrac{P_0}{p}}{1+K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}K_{\text{cap}}}=\dfrac{P_0}{1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}$

Cas 3 : cours sur la précision pas connu – À savoir faire, mais on perd beaucoup peu de temps...

En utilisant la formule de Black, on a $P_e(p)=P_{\text{con}}(p)K_{\text{cap}}\dfrac{K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}}{1+K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}K_{\text{cap}}}$

$=P_{\text{con}}(p)K_{\text{cap}}(p)\dfrac{K_PK_{\text{pom}}K_m}{(1+T_2p)(1+T_1p)+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}$

En passant à la valeur finale avec une entrée échelon, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}P_e(t)=P_0K_{\text{cap}}\dfrac{K_PK_{\text{pom}}K_m}{1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}$

L'écart statique est donc donné par $\varepsilon_S=P_0-P_0\dfrac{K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}{1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}=P_0\dfrac{1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}-K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}{1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}$

$=\dfrac{P_0}{1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}$

Question 2 *Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.*

On souhaite que l'écart statique soit inférieure à 5% soit 0,05 pour une entrée unitaire.

On cherche donc K_P tel que $\dfrac{1}{1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}<0,05\Leftrightarrow 1<0,05\left(1+K_PK_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}\right)$

$\Leftrightarrow\dfrac{1-0,05}{0,05K_{\text{pom}}K_mK_{\text{cap}}}<K_P$

Soit $K_P>\dfrac{1-0,05}{0,05\times1,234\times10^7\times3,24\times2,5\times10^{-8}}\Rightarrow K_P>19$.

Question 3 *Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p la fonction de transfert en régulation définie par : $H_{pert}(p)=\dfrac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$. En déduire, en fonction de K_p, ε_{pert} définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.*

Dans ce cas il n'y a pas d'intégrateur avant la perturbation échelon. Il faut savoir faire le calcul.

On peut utiliser la « lecture directe » : $P_e(p)=P_r(p)H_{\text{pre}}-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)=H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)\varepsilon(p)-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)$
$=-H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}P_e(p)-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)$.

$\Leftrightarrow P_e(p)\left(1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}\right)=-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)$

$$\Leftrightarrow \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)} = -\frac{H_{\text{fui}}(p)}{1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}}$$

Calculons $\varepsilon_{\text{pert}}(p) = -\dfrac{H_{\text{fui}}(p)}{1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}}\Delta Q_e(p)K_{\text{cap}}$.

On a alors $\varepsilon_{\text{pert}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} -p \times \dfrac{H_{\text{fui}}(p)}{1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}} \dfrac{\Delta Q_0}{p} K_{\text{cap}}$

$$= -\frac{K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}}}{1+K_m K_{\text{pom}} K_P K_{\text{cap}}}$$

Question 4 *Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{pert} à la valeur spécifiée au cahier des charges.*

Pour $\Delta Q_e = 5\times 10^{-4}\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$, il faut $\varepsilon_{\text{pert}} < 40\times 10^5$ (Pa) soit

$$\frac{K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}}}{1+K_m K_{\text{pom}} K_P K_{\text{cap}}} < 40\times 10^5 \Rightarrow K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}} < 40\times 10^5 \left(1+K_m K_{\text{pom}} K_P K_{\text{cap}}\right) \Rightarrow \frac{K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}} - 40\times 10^5}{40\times 10^5 K_m K_{\text{pom}} K_{\text{cap}}} < K_P \Rightarrow$$

$K_P > -1$

Question 5 *Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.*

Je vous laisse faire le calcul... Il faut savoir le faire le plus vite possible. Il faut d'abord calculer la FTBF, la mettre sous forme canonique, déterminer $\xi_{\text{BF}} = \dfrac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1 T\left(1+K_P K_M K_{\text{Pom}} K_{\text{Cap}}\right)}}$ puis determiner K_P tel que $\xi_{\text{BF}} = 1$.

Exercice 187 – Banc hydraulique ⋆

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

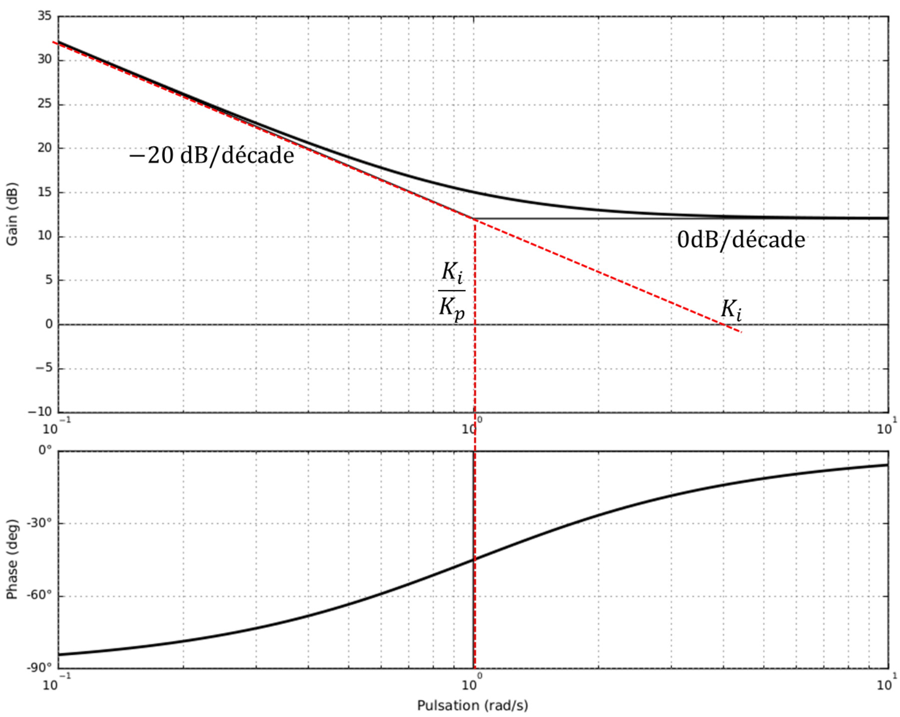
Question 1 *Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.*

On a $C(p) = \dfrac{K_i}{p} + K_p = \dfrac{K_i + pK_p}{p} = K_i \dfrac{1+p\dfrac{K_p}{K_i}}{p}$.

Question 2 *Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p.*

	$\omega \to 0$	$\omega = \dfrac{K_i}{K_p}$	$\omega \to \infty$
$\dfrac{K_i}{p}$	-20dB/Décade $-90°$		-20dB/Décade $-90°$
$1+\dfrac{K_p}{K_i}p$	0dB/Décade 0°		$+20$dB/Décade $+90°$
$C(p)$	-20dB/Décade $-90°$		0dB/Décade 0°

Coupe l'axe des abscisse en $\omega = K_i$



Question 3 *Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.*
Ce correcteur augmente la classe de la FTBO donc augmente la précision. Cependant, il réduit la phase. Il faut donc veiller à ce que la pulsation de cassure soit réglée de telle sorte que le système ne soit pas déstabilisé.

Question 4 *Quelle valeur faut-il donner à $\omega_{0\,\text{dB}}$ pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?*
D'après la remarque, on a $t_e\omega_{0\,\text{dB}} = 3$ soit $\omega_{0\,\text{dB}} = 3/t_e = 0{,}075\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 5 *Déterminer analytiquement le rapport $T = \dfrac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.*
Calculons la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée : $F_{\text{BO}} = \dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2 p}\dfrac{K_{\text{m}}}{1+T_1 p}K_{\text{cap}}$.

Le correcteur doit être réglé pour que $\omega_{0\,\text{dB}} = 0{,}075\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Calculons la marge de phase. $\arg(F_{\text{BO}}) = -\arg\left(1+T_1 p\right) - \arg\left(1+T_2 p\right) = -\arctan T_1\omega - \arctan T_2\omega$ + On a donc $\arg(F_{\text{BO}}(0,075)) = -\arctan(10\times 0,075) - \arctan(5\times 0,075) = -57°$ soit une marge de phase de $-123°$.

Pour atteindre une marge de phase de 60°, on peut donc baisser la phase de 63°.

Calculons $\arg\left(C(j\omega)\right) = -90 + \arctan\left(\dfrac{K_p}{K_i}\omega\right)$.

On cherche donc $\dfrac{K_i}{K_p}$ tel que $\arg(C(0,075)) = -63$ Soit $-90 + \arctan\left(\dfrac{K_p}{K_i}0,075\right) = -63 \Leftrightarrow \arctan\left(\dfrac{K_p}{K_i}0,075\right) = 27$ $\Rightarrow \dfrac{K_p}{K_i}0,075 = 0,51 \Leftrightarrow \dfrac{K_p}{K_i} = 6,79$.

Question 6 *En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.*
Il faut chercher K_i et K_p pour respecter $\omega_{0\,\text{dB}}$. Recherchons le gain de la boucle ouverte non corrigée pour $\omega_{0\,\text{dB}}$.

$G_{\text{dB}}(F_{\text{BO}}) = 20\log\left(K_{\text{pom}}K_{\text{m}}K_{\text{cap}}\right) - 20\log\left(\sqrt{1^2+T_1^2\omega^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1^2+T_2^2\omega^2}\right)$

On a alors $G_{\text{dB}}(F_{\text{BO}})(0,075) = -0,004 - 1,94 - 0,57 = 2,52\,\text{dB}$.

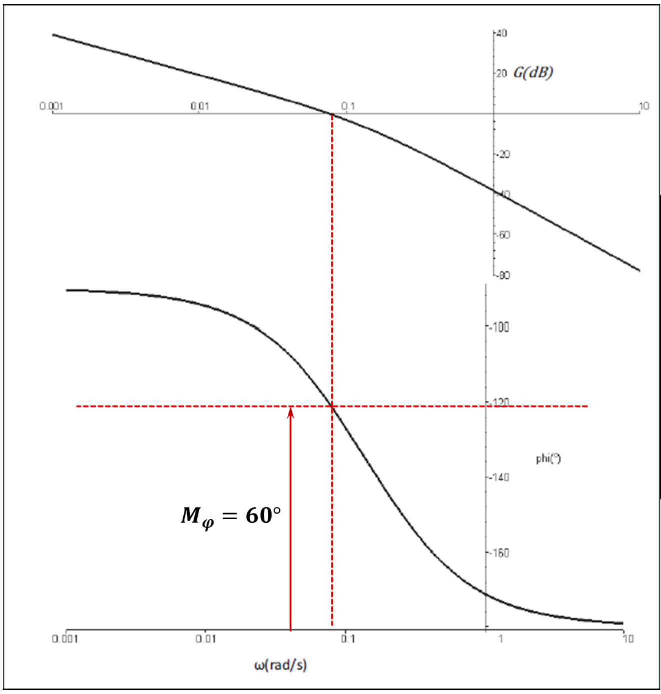
Il faut donc baisser le gain de 2,52 dB $G_{\text{dB}}\left(C(p)\right) = 20\log K_i - 20\log\omega + 20\log\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{K_p}{K_i}\right)^2\omega^2}\right)$.

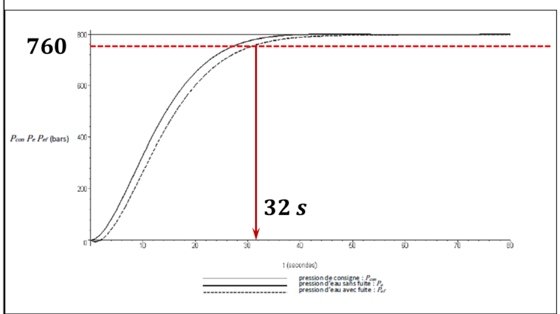
On a alors $G_{\text{dB}}(C(0,075)) = 20\log K_i + 22,5 + 1 = -2,52$ soit $K_i = 10^{-\dfrac{2,52+1+22,5}{20}} = 0,05$.

Par suite, $K_p = 6,79\times 0,05 = 0,34$.

(**A vérifier**).

Question 7 *La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.*





- Stabilité :
  - Marge de phase mesurée : 60°**cdc ok**.
  - Marge de gain mesurée : infini **cdc ok**.

- Rapidité : $t_e = 32\,\text{s} < 40\,\text{s}$ **cdc ok**.
- Précision : écart statique nul **cdc ok**.
- Amortissement : nul **cdc ok**.

Exercice 186 – Mouvement TT – ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Par dérivation vectorielle, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Par composition du torseur cinématique, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_1} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \ddot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0}.$$

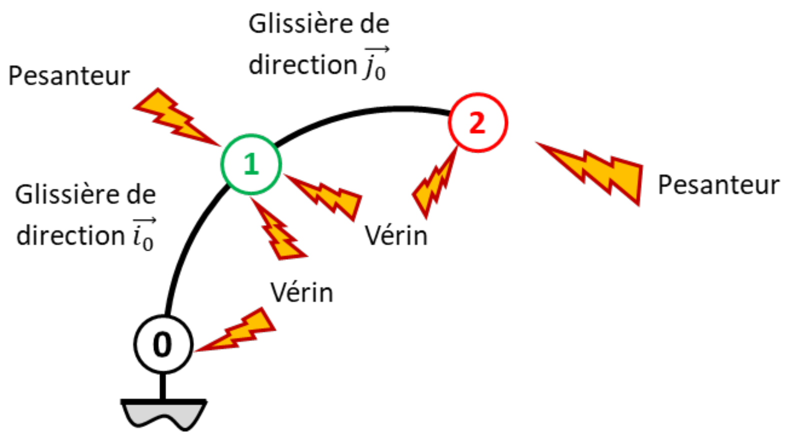
Exercice 185 – Mouvement TT – ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{j_0} + Z_{01}\overrightarrow{k_0} \\ L_{01}\overrightarrow{i_0} + M_{01}\overrightarrow{j_0} + N_{01}\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12}\overrightarrow{i_0} + Z_{12}\overrightarrow{k_0} \\ L_{12}\overrightarrow{i_0} + M_{12}\overrightarrow{j_0} + N_{12}\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{C,\mathscr{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0_{v1} \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\overrightarrow{i_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1_{v2} \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_2\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.

DDS

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0\to 1)\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{j_0}\\ N_{01}\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1\to 2)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{12}\overrightarrow{i_0}\\ N_{12}\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to 2)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_2 g\,\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{C,\mathscr{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0_{v1}\to 1)\}=\left\{\begin{array}{c} F_1\overrightarrow{i_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1_{v2}\to 2)\}=\left\{\begin{array}{c} F_2\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.*

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole **2** et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{j_0}$;
- on isole **1+2** et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{i_0}$.

Exercice 184 – Palettisation – Stabilité ⋆

C2-03

On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p)=\dfrac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}=\dfrac{1}{Np}$, que $k_a=\dfrac{\pi}{180}k_r$ et que la FTBO est donnée par $T(p)=\dfrac{k_{BO}}{p\left(1+\tau_m p\right)}$ $\left(k_{BO}=\dfrac{k_c k_m k_r}{N}\right)$.

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 1 *Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.*

On souhaite une marge de phase de 45°. On cherche donc ω_φ tel que $\varphi\left(\omega_\varphi\right)=-180+45=-135°$.

$\varphi(\omega)=-90-\arg\left(1+\tau_m j\omega\right)=-90-\arctan\left(\tau_m\omega\right)$.

On a donc $\varphi\left(\omega_\varphi\right)=-135 \Leftrightarrow -90-\arctan\left(\tau_m\omega_\varphi\right)=-135 \Leftrightarrow -\arctan\left(\tau_m\omega_\varphi\right)=-45 \Leftrightarrow \arctan\left(\tau_m\omega_\varphi\right)=45$ $\Rightarrow \tau_m\omega_\varphi=1 \Rightarrow \omega_\varphi=\dfrac{1}{\tau_m}=\dfrac{1}{5\times 10^{-3}} \Rightarrow \omega_\varphi=200\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Par suite, il faut que le gain soit nul en ω_φ.

On a donc $G_{\text{dB}}(\omega)=20\log k_{BO}-20\log\omega-20\log\sqrt{1+\omega^2\tau_m^2}$. En $\omega_\varphi=\dfrac{1}{\tau_m}$: $G_{\text{dB}}(\omega_\varphi)=0 \Leftrightarrow 20\log k_{BO}-20\log\dfrac{1}{\tau_m}-20\log\sqrt{1+\dfrac{1}{\tau_m^2}\tau_m^2}=0 \Leftrightarrow \log k_{BO}+\log\tau_m-\log\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \log\dfrac{k_{BO}\tau_m}{\sqrt{2}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{k_{BO}\tau_m}{\sqrt{2}}=1 \Leftrightarrow k_{BO}=\dfrac{\sqrt{2}}{\tau_m}$.

(**A vérifier**) $k_{BO}=282,8$.

Question 2 *En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.*

$k_{BO}=\dfrac{k_c k_m k_r}{N}$; donc $k_c=\dfrac{N k_{BO}}{k_m k_r}=\dfrac{200\times 282,8}{4\times 30}=471$.

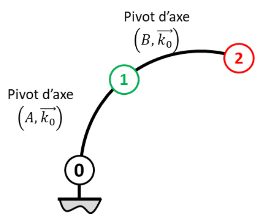
Question 3 *Déterminer l'écart de position.*

Il y a une intégration dans le correcteur. La FTBO est de classe 1 est le système est précis en position.

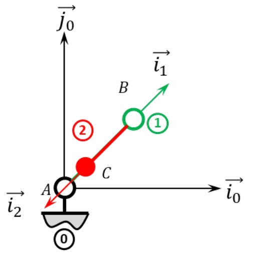
Exercice 183 – Mouvement RR ⋆

B2-12

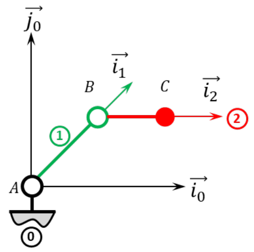
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



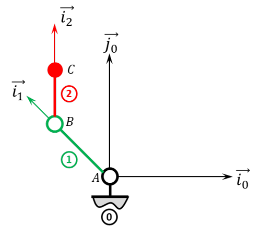
Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = \pi$ rad.*



Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ rad.*



Question 4 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ rad.*



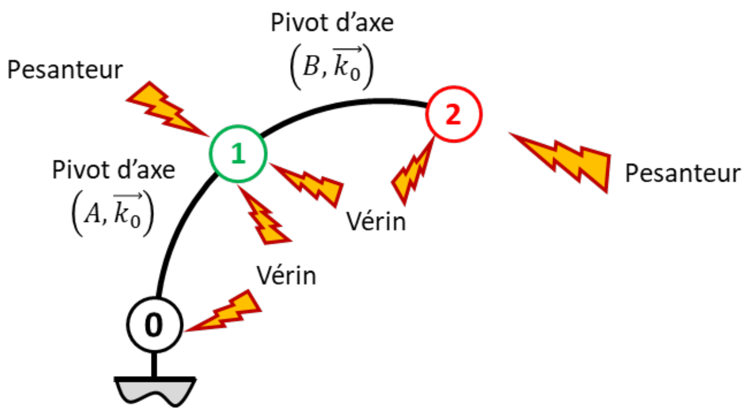
Exercice 182 – Mouvement RR ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\,\overrightarrow{i_0} + Y_{01}\,\overrightarrow{j_0} + Z_{01}\,\overrightarrow{k_0} \\ M_{01}\,\overrightarrow{j_0} + N_{01}\,\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12}\,\overrightarrow{i_1} + Y_{12}\,\overrightarrow{j_1} + Z_{12}\,\overrightarrow{k_1} \\ M_{12}\,\overrightarrow{j_1} + N_{12}\,\overrightarrow{k_1} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_2,\mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1\,\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_2\,\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\,\overrightarrow{i_0} + Y_{01}\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12}\,\overrightarrow{i_1} + Y_{12}\,\overrightarrow{j_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.

DDS

- Pesanteur sur 1 : $\left\{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\right\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_1,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\left\{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\right\} = \left\{\begin{array}{c} -m_2 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_2,\mathscr{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\left\{\mathscr{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1\,\overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\left\{\mathscr{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_2\,\overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.*

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole **2** et on réalise le théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$;
- on isole **1+2** et on réalise le théorème du moment statique en B en projection sur $\overrightarrow{k_0}$.

Exercice 181 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)\, r \rho_1 p \Omega_m(p) = \dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)\, r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \dfrac{1}{(M+m)\, r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \dfrac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \dfrac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

D'une part,

$$X(p) = \left(\left(X_C(p) - X(p)\right) C(p) - F_P(p) D\right) \frac{A}{p\left(Bp+1\right)}$$

$$X(p) = \frac{A\left(X_C(p) - X(p)\right) C(p)}{p\left(Bp+1\right)} - \frac{A F_P(p) D}{p\left(Bp+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)} = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)} - \frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)}. \Leftrightarrow X(p)\left(\frac{p\left(Bp+1\right) + AC(p)}{p\left(Bp+1\right)}\right) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)} + \frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right) + AC(p)} - \frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right) + AC(p)}.}$$

D'autre part, $X(p) = \Omega_m(p) H_4(p) K_5 K_6$, $U_m(p) = \left(X_c(p) K_1 - \theta_m(p) K_8\right) C(p)$, $\theta_m(p) = \Omega_m(p) H_4(p)$.

$$\Omega_m(p) = \left(\left(U_m(p) - \Omega_m(p) K_7\right) K_2 - F_P(p) K_9\right) H_3(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\left(1 + K_7 K_2 H_3(p)\right) = U_m(p) H_3(p) K_2 - F_P(p) H_3(p) K_9$$

$$X(p) = \left(U_m(p) H_3(p) K_2 - F_P(p) H_3(p) K_9\right) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \left(\left(X_c(p) K_1 - \theta_m(p) K_8\right) C(p) H_3(p) K_2 - F_P(p) H_3(p) K_9\right) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)K_1-X(p)\frac{K_8}{K_5K_6}\right)C(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)-X(p)\right)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+C(p)H_3(p)K_1K_2\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2H_3(p)+C(p)H_3(p)K_1K_2H_4(p)K_5K_6\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)H_4(p)K_5K_6}.$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2\frac{1}{p}K_5K_6\right)=\left(X_c(p)C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2-F_P(p)\frac{\dots}{(M+\dots}\right.$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)=\left(X_c(p)C(p)\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho\dots}\right.}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{1}\frac{k_t}{R}}{\left((M+m)r^2\rho_1^2p^2+\frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}-F_P(p)\frac{\dots}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+\dots\right.}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{1}}{\left((M+m)r\rho_1p^2+\frac{(M+m)r\rho_1p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{(M+m)r\rho\dots}{(M+m)r\dots}\right.}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2+\frac{pk_ek_t}{Rr\rho_1}+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(\frac{R}{k_ek_t}(M+m)r^2\rho_1^2p+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(\frac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_ek_t}p+1\right)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}(Bp+1)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}(Bp+1)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{R}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{R}}{p(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}\frac{R}{k_ek_t}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

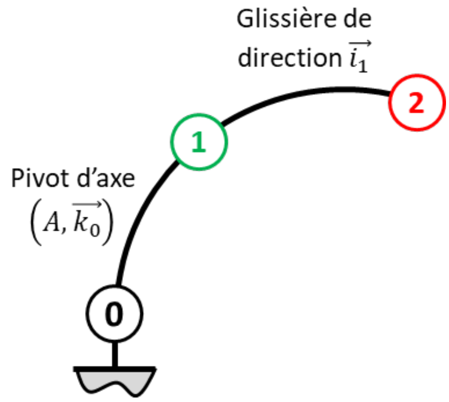
$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\dfrac{K_8}{k_e}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\dfrac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\dfrac{\dfrac{K_8}{k_e}\dfrac{k_e}{K_8}K_9\dfrac{Rr\rho_1}{k_e k_t}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\dfrac{K_8}{k_e}}$$

On a donc $A=\dfrac{K_8}{k_e}$, $B=\dfrac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D=\dfrac{K_9 R r\rho_1}{K_8 k_t}$.

Exercice 180 – Mouvement RT ⋆

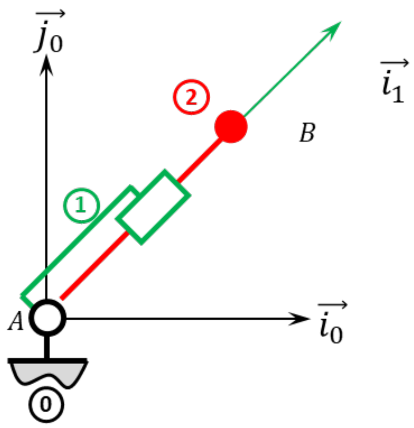
B2-12

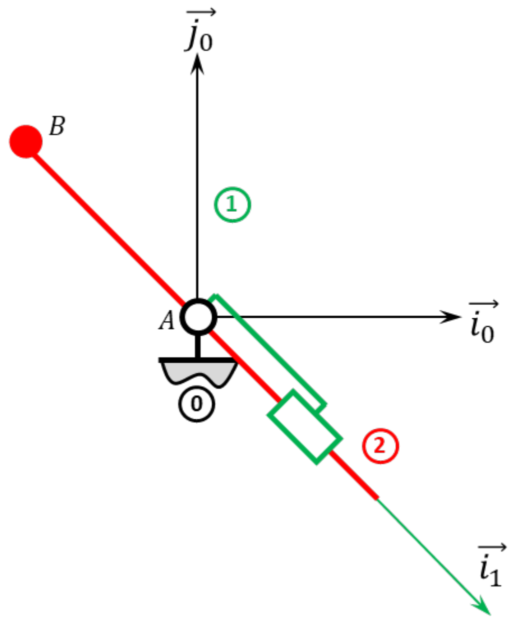
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ *rad et* $\lambda(t)=20\,\text{mm}$.

Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta=\dfrac{-\pi}{4}$ *rad et* $\lambda(t)=-20\,\text{mm}$.





Exercice 179 – Quille pendulaire⋆

B2-07

Question 1 *Donner les expressions des fonctions de transfert* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *en fonction de la variable complexe* p *et des constantes.*

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p)=SpX(p)+\dfrac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p)=S\Sigma(p)-kX(p)-\lambda pX(p)-F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p)=A_2\left(A_1Q(p)-X(p)\right)=A_1A_2Q(p)-A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p) = \dfrac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\dfrac{2B}{Vp} - X(p)\dfrac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_1 A_2 = \dfrac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \dfrac{2B}{Vp}\dfrac{V}{S2B} = \dfrac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right) = -A_4 F_R(p) + A_3 A_4 \Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)\left(Mp^2 + \lambda p + k\right) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \dfrac{S\Sigma(p)}{Mp^2+\lambda p + k} - \dfrac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.

Au final, $A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 *Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.*

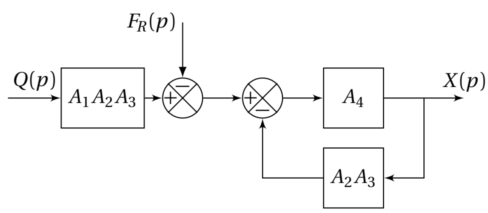
Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = \left(H_1 Q(p) - F_R(p)\right) H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right)$ et $\Sigma(p) = A_2\left(A_1 Q(p) - X(p)\right)$.

On a donc $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3 A_2\left(A_1 Q(p) - X(p)\right)\right) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2 A_3 A_4) = A_4\left(-F_R(p) + A_3 A_2 A_1 Q(p)\right)$. On a donc $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \dfrac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p) = \dfrac{2BS}{pV}$ et $H_2 = \dfrac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V}\frac{1}{Mp^2+\lambda p + k}} = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}$.

Question 3 *Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.*

Dans ce cas, $\dfrac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p) H_2(p) = \dfrac{2BS}{p\left(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2\right)}$.

Exercice 178 – Mouvement T – ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en translation de direction $\overrightarrow{i_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 177 – Mouvement T – ⋆

B2-13

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ au point B.*

$\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} \end{array}\right\}_{\forall P}$.

DDS

$$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0}.$$

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0}.$$

Exercice 176 – Calcul de FTBO★

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*

$\mathrm{FTBO}(p) = BCDE$.

Question 2 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*

$\mathrm{FTBO}(p) = B(1+A)$.

Question 3 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*

$\mathrm{FTBO}(p) = A\dfrac{BCD}{1+BCD}$.

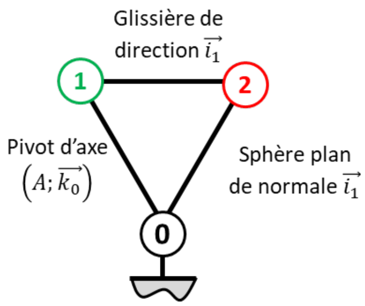
Question 4 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*

$$\mathrm{FTBO}(p) = A\frac{\frac{B}{1+B}CD}{1+\frac{B}{1+B}CD} = \frac{ABCD}{1+B+BCD}.$$

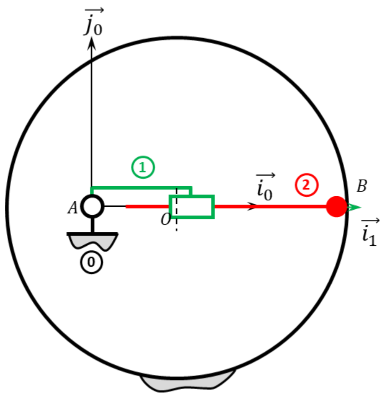
Exercice 175 – Pompe à palettes ★★

B2-12

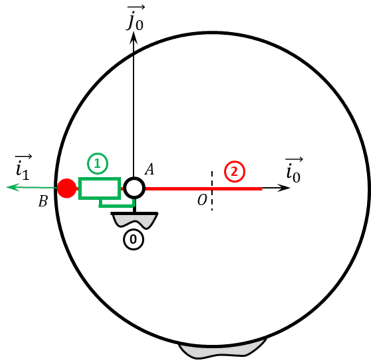
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta(t) = 0$ *rad.*



Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta(t) = \pi$ *rad.*



Question 4 *En déduire la course de la pièce **2**.*

La course de la pièce 2 est donnée par la différence entre la longueur AB maximale et AB minimale : $c = 30 - 10 = 20\,\text{mm}$.

Exercice 174 – Système 4 barres ⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 173 – Mouvement R ⋆

C2-05
B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en rotation de centre A et d'axe $\overrightarrow{k_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Quelle est la trajectoire du point B appartenant à **1** par rapport à **0**.*

B est est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre A et de rayon R).

Question 3 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1} = R\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} + R\sin\theta\,\overrightarrow{j_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t) = R\cos\theta(t) \\ y_B(t) = R\sin\theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{array}\right.$

dans le repère $\left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 172 – Mouvement R ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0}$. Or $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.
D'où $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par une autre méthode.*

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - R\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.*

On a directement $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \\ R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} \end{array}\right\}_B$.

DDS

Question 4 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.

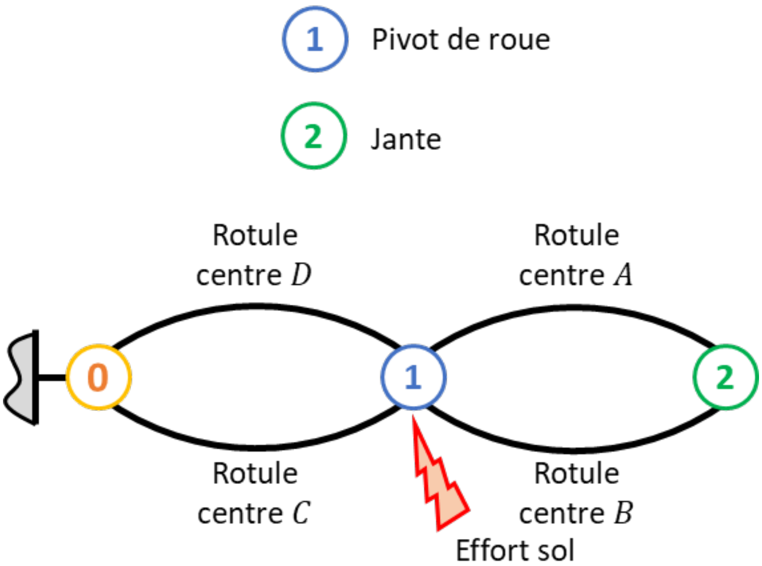
$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}$. (En effet, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}$.)

Exercice 171 – Suspension automobile ⋆⋆

B2-14

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Peut-on résoudre complètement le système ? Pourquoi ?*

Calculons le degré d'hyperstatisme :

- mobilités : $m = 2$ (rotations autour de $\overrightarrow{a}$ et de $\overrightarrow{z}$) ;
- inconnues statiques : $I_s = 3 \times 4 = 12$;
- équations : $E_s = 2 \times 6 = 12$.
- $h = m - E_s + I_s = 2 - 12 + 12 = 2$.

On ne peut donc pas déterminer toutes les actions mécaniques.

Exercice 170 – Suspension automobile ⋆⋆

C2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Réaliser le graphe des liaisons en faisant apparaître les actions mécaniques. Exprimer les torseurs des actions mécaniques de chacune des liaisons.*

Question 2 *En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliqué au point C, en projection sur les axes de la base $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{x}\right)$ en fonction des composantes F_{sol}^a et F_{sol}^r et des dimensions d_0, d_3 et d_4.*

Question 3 *Résoudre littéralement le système.*