Activation 2 – Corrigé

Éolienne

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

Question 1 *Tracer le graphe de structure de l'éolienne.*

Correction

Question 2 *Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.*

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1+2+3\}$) en projection sur l'axe $\left(K, \overrightarrow{z_0}\right)$: $\overrightarrow{\mathscr{M}\left(K, \bar{E} \rightarrow E\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\delta\left(K, E/R_0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} \Leftrightarrow C_m = \left(\overrightarrow{\delta\left(K,1/R_0\right)} + \overrightarrow{\delta\left(K,2/R_0\right)} + \overrightarrow{\delta\left(K,3/R_0\right)}\right) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Question 3 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0}$.*

Correction • Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\left(K, \overrightarrow{z_0}\right)$:

- $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \left(\overline{\overline{I}}_K(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)\right) \cdot \overrightarrow{z_0} = \left(\overline{\overline{I}}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

  Or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K, \overrightarrow{z}\right)$ soit : $\overline{\overline{I}}_K(1) \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_0} = J$.

  Ainsi : $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J\dot{\alpha}$.

R En considérant que $\overline{\overline{I}}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}$, $\overline{\overline{I}}_K(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} -E_1\dot{\alpha} \\ -D_1\dot{\alpha} \\ J\dot{\alpha} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J\dot{\alpha}$.

Question 4 *Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.*

Correction • Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.

- On connaît l'opérateur d'inertie en G, on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}$:$\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)} = \overline{\overline{I}}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$: $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha}\left(\cos\beta\, \overrightarrow{z_2} + \sin\beta\, \overrightarrow{y_2}\right)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}$: $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)}$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$:
  - $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)} = \overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)} + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)} + a \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge M \cdot \overrightarrow{V}\left(G \in 2/0\right)$
  - On calcule $\overrightarrow{V}\left(G \in 2/0\right)$: $\overrightarrow{V}\left(G \in 2/0\right) = \overrightarrow{V}\left(K \in 2/0\right) + \overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{0} - a \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge \left(\dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1\right)$
    $= a \cdot \dot{\alpha}\, \overrightarrow{y}_1$

- On calcule $a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$: $a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)=a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge M\left(a\cdot\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1\right)=M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1}$
- On en déduit $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}$: $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}=\begin{pmatrix} A\cdot\dot{\beta}\\ B\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\\ C\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$

Question 5 *Déterminer le moment cinétique* $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)}$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q,3/0)}=\overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)}=\overrightarrow{KQ}\wedge m\cdot\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$:
  - On calcule $\overrightarrow{KQ}$: $\overrightarrow{KQ}=\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GQ}=a\cdot\overrightarrow{x_1}-b\cdot\overrightarrow{z_2}$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$: $\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)=\overrightarrow{V}(Q\in 3/2)+\overrightarrow{V}(Q\in 2/1)+\overrightarrow{V}(Q\in 1/0)=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{V}(G\in 2/1)+\overrightarrow{QG}\wedge\overrightarrow{\Omega}(2/1)+\overrightarrow{V}(G\in 1/0)+\overrightarrow{QG}\wedge\overrightarrow{\Omega}(1/0)=\overrightarrow{0}+b\cdot\overrightarrow{z_2}\wedge\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_2+a\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y}_1+b\cdot\overrightarrow{z_2}\wedge\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1}=b\cdot\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{y_2}+a\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y}_1-b\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}$
  - On calcule $\overrightarrow{KQ}\wedge m\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$:
    $\overrightarrow{KQ}\wedge m\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)=m\cdot\left[a\cdot\overrightarrow{x_1}-b\cdot\overrightarrow{z_2}\right]\wedge\left[b\cdot\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{y_2}+a\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y}_1-b\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}\right]$
    $=m\left[a\cdot b\cdot\overrightarrow{z_2}+a^2\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1}+b^2\cdot\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_2+b\cdot a\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta\cdot\overrightarrow{x_1}+b^2\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\cdot\overrightarrow{y_2}\right]$
- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)}=m\left[a\cdot b\cdot\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}+a^2\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1}+b^2\cdot\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_2+b\cdot a\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta\cdot\overrightarrow{x_1}+b^2\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\cdot\overrightarrow{y_2}\right]$

Question 6 *Déterminer la composante suivant* $\overrightarrow{z_0}$ *du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support* ***0****, notée* $\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,1/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,1/0)}=\overrightarrow{z_0}\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[z_0\right]_{\mathscr{R}_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}=J\cdot\ddot{\alpha}$$

Question 7 *Déterminer la composante suivant* $\overrightarrow{z_0}$ *du moment dynamique* $\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,2/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,2/0)}=\overrightarrow{z_0}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[z_0\right]_{\mathscr{R}_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}$$

Or, $\overrightarrow{z_{0,1}}=\cos\beta\cdot\overrightarrow{z_2}+\sin\beta\cdot\overrightarrow{y_2}$,

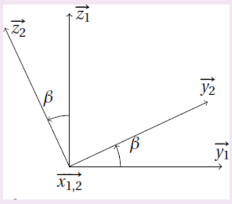
$$\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}=\begin{pmatrix} A\cdot\dot{\beta}\\ B\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\\ C\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$
$$=\dot{\alpha}\left[B\cdot\sin^2\beta+C\cdot\cos^2\beta+M\cdot a^2\right]$$

d'où,

$$\boxed{\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,2/0)}=\ddot{\alpha}\left[B\cdot\sin^2\beta+C\cdot\cos^2\beta+M\cdot a^2\right]+2\cdot\dot{\alpha}\dot{\beta}\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta\left[B-C\right].}$$

Question 8 *Déterminer la projection du moment dynamique de* $3/0$ *selon* $\overrightarrow{z_0}$ *:* $\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,3/0)}$.

Correction



$$\overrightarrow{z_{0,1}}\cdot\overrightarrow{z_2}=\cos\beta$$
$$\overrightarrow{z_{0,1}}\cdot\overrightarrow{z_1}=1$$
$$\overrightarrow{z_{0,1}}\cdot\overrightarrow{x}_0=0$$
$$\overrightarrow{z_{0,1}}\cdot\overrightarrow{x_1}=0$$
$$\overrightarrow{z_1}\cdot\overrightarrow{y_2}=\sin\beta$$

On trouve alors :
$\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,3/0)}=m\frac{\mathrm{d}\left[a\cdot b\cdot\dot{\beta}\cos\beta+a^2\cdot\dot{\alpha}+b^2\cdot\dot{\alpha}\sin^2\beta\right]}{\mathrm{d}t}$
$=m\left[a\cdot b\cdot\left(\ddot{\beta}\cos\beta-\dot{\beta}^2\sin\beta\right)+a^2\ddot{\alpha}+b^2\cdot\left(\ddot{\alpha}\sin^2\beta+2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta\right)\right]$

Question 9 *Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice* ***2*** *($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre* ***0*** *et* ***1****) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.*

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $\left(K,\overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ donne : $C_m=-m\cdot a\cdot b\cdot\dot{\beta}^2\sin\beta$.

Cycle 04

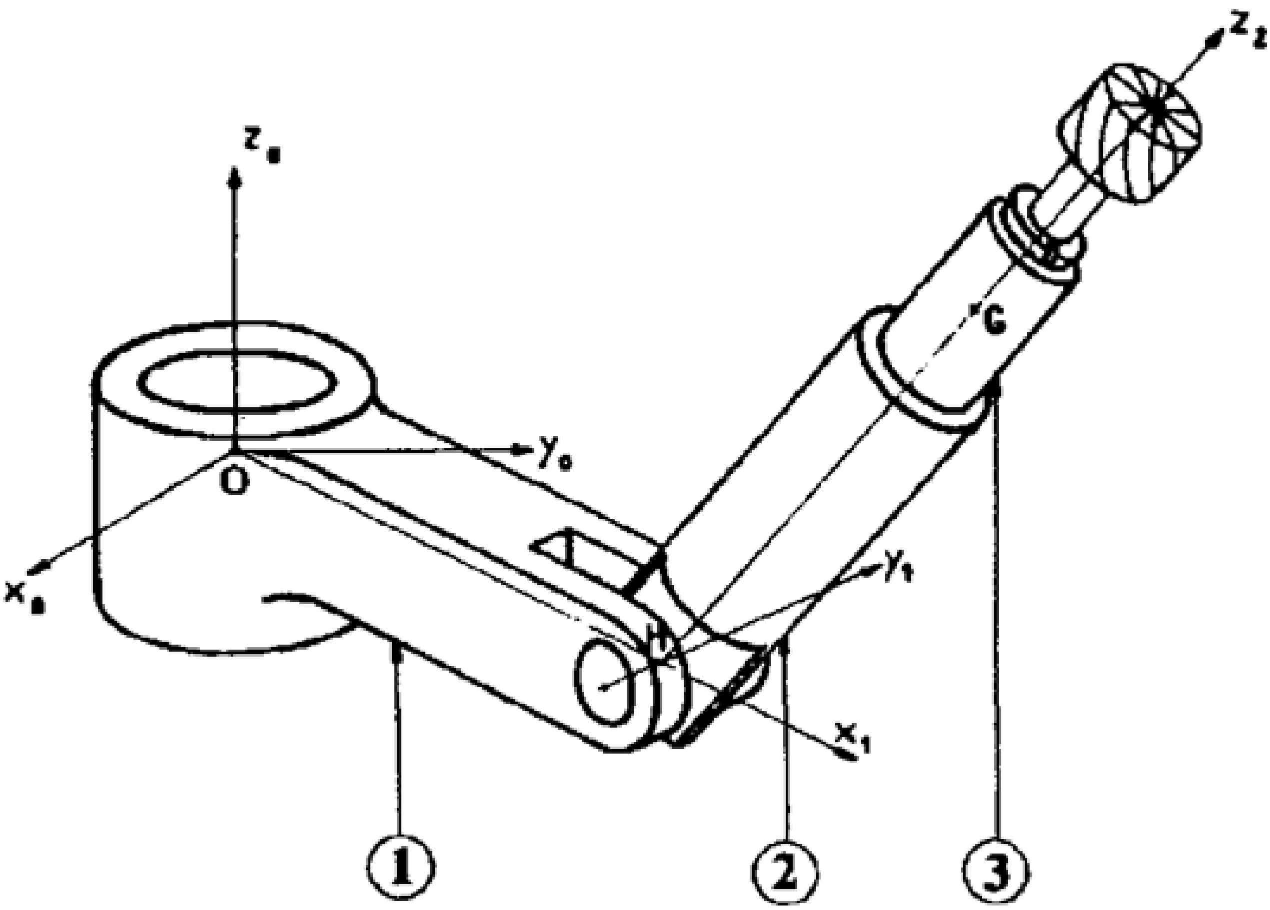
Colle 01 – Corrigé

Porte-outil

Savoirs et compétences :

- *C2-08 :Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.*

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides **1**, **2** et **3**.



Le repère $\mathscr{R}_0=\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, avec $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ vertical ascendant, est lié au bâti **0** de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère $\mathscr{R}_1=\left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au support tournant **1** en liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec le bâti **0**. La position de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ est repérée par $\alpha=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.

On note I_1 le moment d'inertie de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et H le point tel que $\overrightarrow{OH}=h\,x_1$.

Le repère $\mathscr{R}_2=\left(H;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au bras pivotant **2** en liaison pivot d'axe $\left(H,\overrightarrow{y_1}\right)$ avec **1**. La position de **2** est repérée par $\beta=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)$.

On note m_2 la masse de **(2)**, de centre d'inertie H de matrice d'inertie $I_H(2)=\begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & C_2\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}$.

Le repère $\mathscr{R}_3=\left(G;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au porte-outil **(3)** (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe $\left(H,\overrightarrow{z_2}\right)$ avec **(2)**.

La position de **(3)** est repérée par $\gamma = \left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\right) = \left(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_3}\right)$ et par $\overrightarrow{HG} = \lambda \overrightarrow{z_2}$.

On note m_3 la masse de **(3)**, de centre d'inertie G de matrice d'inertie $I_G(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_3}$.

Question 1 *Justifier la forme de la matrice de la pièce **(3)**.*

Question 2 *Calculer $\overrightarrow{V(G, 3/0)}$.*

Question 3 *Indiquer la méthode permettant de calculer le torseur dynamique en G de **(3)** en mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_2}$.*

Question 4 *Calculer le moment dynamique en H appliqué à l'ensemble **{2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{y_1}$.*

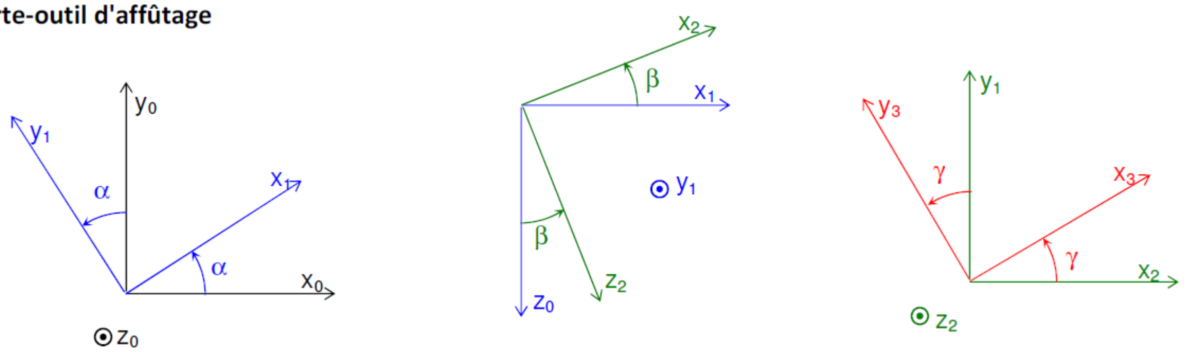
Question 5 *Calculer le moment dynamique en O appliqué à l'ensemble **{1, 2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.*

1. $\{\mathscr{V}(3/\mathscr{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} + \dot{\beta}\overrightarrow{y_1} + \dot{\gamma}\overrightarrow{z_2} \\ r\dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + \left(h + r\sin\beta\right)\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \dot{r}\overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$.
2. $\overrightarrow{\Gamma(G, 3/\mathscr{R}_0)} = \left(2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{x_2}$
$+\left[2\dot{\alpha}\left(\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta\right) + \left(h + r\sin\beta\right)\ddot{\alpha}\right]\overrightarrow{y_1}$
$-\left(h + r\sin\beta\right)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1}$
$+\left(\ddot{r} - r\dot{\beta}^2\right)\overrightarrow{z_2}$.

Cycle 04

Porte-outil d'affûtage

1 –



Torseur cinématique de **3** / R_0: $\mathcal{V}(3/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(3/R_0) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G \in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} \end{array} \right\}_G$

$\overrightarrow{OG} = h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2$

$$\vec{V}(G \in 3/R_0) = h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2 + r\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} \text{ avec } \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1$$

$$\boxed{\mathcal{V}(3/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\,\vec{z}_2 \\ r\,\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2 \end{array} \right\}_G}$$

2 – Accélération de $G \in 3/R_0$: $\vec{\Gamma}(G \in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\vec{V}(G \in 3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$

$$= \dot{r}\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + r\ddot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{r}\dot{\beta}\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} + (\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + (h + r\sin\beta)(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1) + \ddot{r}\,\vec{z}_2 + \dot{r}\,(\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1)$$

avec $\left[\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0) \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\beta}\,\vec{z}_2 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G \in 3/R_0) = (2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta})\,\vec{x}_2 + [2\dot{\alpha}(\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta) + (h + r\sin\beta)\ddot{\alpha}]\,\vec{y}_1 - (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2)\,\vec{z}_2}$$

3 – Pour déterminer F_{23} et C_{23}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **3**:

Liaison pivot glissant d'axe (G, $\vec{z}_2$) entre **2** et **3**: $\mathcal{T}(2 \rightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{c} X_{23}\,\vec{x}_2 + Y_{23}\,\vec{y}_1 \\ L_{23}\,\vec{x}_2 + M_{23}\,\vec{y}_1 \end{array} \right\}_G$

Action de l'actionneur M_{23}: $\mathcal{T}(M_{23} \rightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{c} F_{23}\,\vec{z}_2 \\ C_{23}\,\vec{z}_2 \end{array} \right\}_H$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{c} -m_3\,g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$

Pour déterminer F_{23}, il faut appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide **3** en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_2$:

$m_3\ \vec{\Gamma}(G \in 3/R_0).\vec{z}_2 = F_{23} - m_3\, g\, \vec{z}_0.\vec{z}_2$

$m_3(-(h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\ \vec{x}_1.\vec{z}_2 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2)\ ) = F_{23} - m_3\, g\cos\beta$

$$\boxed{F_{23} = m_3(\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2(h + r\sin\beta)\sin\beta + g\cos\beta)}$$

Pour déterminer C_{23}, il faut appliquer le théorème du moment dynamique au solide **3**, en mouvement par rapport à R_0, en G (la matrice d'inertie de **3** est donnée en G) en projection sur $\vec{z}_2$:

$$\vec{\delta}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = C_{23} + \overrightarrow{GH} \wedge F_{23}\vec{z}_2 = C_{23} - r\vec{z}_2 \wedge F_{23}\vec{z}_2 = C_{23}$$

$$\vec{\delta}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{z}_2 = \frac{d[\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_2]}{dt} - \vec{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0) = \mathcal{I}_G(3)\,\vec{\Omega}(3/R_0) \qquad \text{avec } \vec{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\vec{z}_2$$

La matrice d'inertie du solide **3** est donnée sur le repère R_3 mais l'axe (G, $\vec{z}_2$) étant de révolution (voir l'allure de la matrice), elle est identique sur le repère R_2. Il est plus simple d'exprimer $\vec{\Omega}(3/R_0)$ sur R_2 que sur R_3:

$$\vec{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\ (\cos\beta\,\vec{z}_2 - \sin\beta\,\vec{x}_2) + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\vec{z}_2 = -\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\vec{z}_2$$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta \end{pmatrix}.\vec{z}_2 = \left[-D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + D\dot{\beta}\,\vec{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\vec{z}_2\right].\vec{z}_2$$

soit $\quad \vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = (-D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + D\dot{\beta}\,\vec{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\vec{z}_2)(\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1) = 0$$

d'où $\quad C_{23} = \dfrac{d[E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta]}{dt}$ $\qquad \boxed{C_{23} = E(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}\ \cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\ \sin\beta)}$

Pour déterminer C_{12}, le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **2** fait intervenir les actions de **3** sur **2** et celles de **1** sur **2**.
La liaison entre **1** et **2** étant une liaison pivot d'axe (H, $\vec{y}_1$), la seule équation ne faisant pas intervenir d'inconnues de cette liaison est la projection du théorème du moment dynamique sur l'axe (H, $\vec{y}_1$) mais celle-ci va faire intervenir les inconnues de la liaison **3/2.** Il faut donc isoler l'ensemble {**2**, **3**}.

Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble {**2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (H, $\vec{y}_1$) entre **1** et **2**: $\mathcal{T}(1 \rightarrow 2) = {}_G\begin{Bmatrix} X_{12}\,\vec{x}_1 + Y_{12}\,\vec{y}_1 + Z_{12}\vec{z}_0 \\ L_{12}\,\vec{x}_1 + N_{12}\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$

Action du moteur M_{12}: $\mathcal{T}(M_{12} \rightarrow 2) = {}_H\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{12}\,\vec{y}_1 \end{Bmatrix}$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow 2{+}3) = {}_G\begin{Bmatrix} -m_3\, g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} -m_2\, g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Théorème du moment dynamique en H appliqué à l'ensemble {**2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{y}_1$:

$$\vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1 + \vec{\delta}_H(3/R_0).\vec{y}_1 = C_{12} + (\overrightarrow{HG} \wedge -m_3 g\vec{z}_0).\vec{y}_1 = C_{12} - (r\vec{z}_2 \wedge m_3 g\vec{z}_0).\vec{y}_1 = C_{12} + r\, m_3\, g \sin\beta$$

$$* \ \vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1 = \left[\frac{d\vec{\sigma}_H(2/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{y}_1 = \frac{d[\vec{\sigma}_H(2/R_0).\vec{y}_1]}{dt} - \vec{\sigma}_H(2/R_0).\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} \quad \text{avec} \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} = -\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$$

$$\vec{\sigma}_H(2/R_0) = \mathcal{I}_H(2)\,\vec{\Omega}(2/R_0) \qquad \text{avec } \vec{\Omega}(2/R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{y}_1 = \dot{\alpha}(\cos\beta\,\vec{z}_2 - \sin\beta\,\vec{x}_2) + \dot{\beta}\,\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_H(2/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix} = -A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\,\vec{y}_1 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$

$$\text{d'où} \quad \vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1 = \frac{d(B\dot{\beta})}{dt} - A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2.\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 = B\ddot{\beta} + (C-A)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$$

$$* \ \vec{\delta}_H(3/R_0).\vec{y}_1 = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{y}_1 + \left[\overrightarrow{HG} \wedge m_3\,\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)\right]\vec{y}_1$$

$$= \frac{d[\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{y}_1]}{dt} - \vec{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} + \left[r\vec{z}_2 \wedge m_3\,\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)\right]\vec{y}_1$$

$$= \frac{d(D\dot{\beta})}{dt} - D\dot{\alpha}^2\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{x}_1 + E\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\,\vec{z}_2.\vec{x}_1 + r\,m_3\,(\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2).\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)$$

$$= D\ddot{\beta} - D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta + E\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta + r\,m_3\,[2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta} - (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1.\vec{x}_2]$$

$$\text{d'où} \quad C_{12} = -r\,m_3\,g\sin\beta + B\ddot{\beta} + (C-A)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$$
$$+ D\ddot{\beta} - D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta + E\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta + r\,m_3\,[2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta} - (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\cos\beta]$$

$$\boxed{C_{12} = \ddot{\beta}(B + D + m_3 r^2) + \dot{\alpha}^2[(C - A - D + E + m_3 r^2)\sin\beta - hrm_3]\cos\beta + E\,\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\sin\beta + r\,m_3\,(2\dot{r}\dot{\beta} - g\sin\beta)}$$

Pour déterminer C_{01}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}_0$) entre **0** et **1**: $\mathcal{T}(0 \to 1) = {}_O\begin{Bmatrix} X_{01}\,\vec{x}_0 + Y_{01}\,\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ L_{01}\,\vec{x}_0 + M_{01}\,\vec{y}_0 \end{Bmatrix}$

Action du moteur M_{01}: $\mathcal{T}(M_{01} \to 1) = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{01}\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to 1{+}2{+}3) = {}_G\begin{Bmatrix} -m_3\,g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} -m_2\,g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_O\begin{Bmatrix} -m_1\,g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Théorème du moment dynamique en O appliqué à l'ensemble {**1**, **2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\vec{\delta}_O(1/R_0).\vec{z}_0 + \vec{\delta}_O(2/R_0).\vec{z}_0 + \vec{\delta}_O(3/R_0).\vec{z}_0 = C_{01} + (\overrightarrow{OG} \wedge -m_3 g\vec{z}_0 + \overrightarrow{OH} \wedge -m_2 g\vec{z}_0).\vec{z}_0 = C_{01}$$

$$= \frac{d[\vec{\sigma}_O(1/R_0).\vec{z}_0 + \vec{\sigma}_O(2/R_0).\vec{z}_0 + \vec{\sigma}_O(3/R_0).\vec{z}_0]}{dt}$$

* $\vec{\sigma}_O(1/R_0).\vec{z}_0 = I_1\,\dot{\alpha}$ car **1/0 =** rotation autour de l'axe (O, $\vec{z}_0$) fixe dans R_0

* $\vec{\sigma}_O(2/R_0).\vec{z}_0 = \vec{\sigma}_H(2/R_0).\vec{z}_0 + [\overrightarrow{OH} \wedge m_2\vec{V}(H\in 2/R_0)].\vec{z}_0$

$$= -A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{z}_0 + B\dot{\beta}\,\vec{y}_1.\vec{z}_0 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2.\vec{z}_0 + (h\,\vec{x}_1 \wedge m_2 h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1).\vec{z}_0$$

$$= A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\cos^2\beta + m_2 h^2\,\dot{\alpha}$$

* $\vec{\sigma}_O(3/R_0).\vec{z}_0 = \vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_0 + [\overrightarrow{OG} \wedge m_3\vec{V}(G\in 3/R_0)].\vec{z}_0$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_0 = -D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{z}_0 + D\dot{\beta}\,\vec{y}_1.\vec{z}_0 + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2.\vec{z}_0$$

$$= D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\cos\beta$$

$$[\overrightarrow{OG} \wedge m_3\vec{V}(G\in 3/R_0)].\vec{z}_0 = m_3[(h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2) \wedge (r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)].\vec{z}_0$$

$$= m_3[\vec{z}_0 \wedge (h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2)].[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)\vec{y}_1.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)\vec{y}_1.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)^2\,\dot{\alpha}$$

d'où $C_{01} = \dfrac{d}{dt}\left[I_1\,\dot{\alpha} + A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\cos^2\beta + m_2 h^2\,\dot{\alpha} + D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\cos\beta m_3(h + r\sin\beta)^2\,\dot{\alpha}\right]$

$$\boxed{C_{01} = \frac{d}{dt}\left[(I_1 + (A+D)\sin^2\beta + (C+E)\cos^2\beta + m_2 h^2 + m_3(h + r\sin\beta)^2)\dot{\alpha} + E\,\dot{\gamma}\cos\beta\right]}$$

<u>Nota:</u> si on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}, on va trouver une relation liant C_{01}, C_{12}, C_{23} et F_{23}. En effet:

$$P(M_{01}\rightarrow 1/R_0) + P(0\rightarrow 1/R_0) + P(\text{pesanteur}\rightarrow 1+2+3/R_0) + \sum P_{int} = \frac{d}{dt}T(1+2+3/R_0)$$

avec $P(M_{01}\rightarrow 1/R_0) = C_{01}\,\dot{\alpha}$

$P(0\rightarrow 1/R_0) = 0$ (liaison parfaite)

$P(\text{pesanteur}\rightarrow 1/R_0) = 0$ car le centre de gravité O de **1** est fixe dans R_0

$P(\text{pesanteur}\rightarrow 2/R_0) = 0$ car la vitesse du centre de gravité H de **2** est perpendiculaire au poids

$P(\text{pesanteur}\rightarrow 3/R_0) = -m_3\, g\, \vec{z}_0.\vec{V}(G\in 3/R_0) = -m_3\, g\, \vec{z}_0.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2]$

$$= m_3\, g(r\dot{\beta}\sin\beta - \dot{r}\cos\beta)$$

$\sum P_{int} = P_i(1,2) + P_i(2,3)$

$$= [\mathcal{T}(1\rightarrow 2) + \mathcal{T}(M_{12}\rightarrow 2)] \otimes \mathcal{V}(2/1) + [\mathcal{T}(2\rightarrow 3) + \mathcal{T}(M_{23}\rightarrow 3)] \otimes \mathcal{V}(3/2)$$

$$= {}_H\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{12}\,\vec{y}_1 \end{Bmatrix} \otimes {}_H\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\,\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} F_{23}\,\vec{z}_2 \\ C_{23}\,\vec{z}_2 \end{Bmatrix} \otimes {}_H\begin{Bmatrix} \dot{\gamma}\vec{z}_2 \\ \dot{r}\,\vec{z}_2 \end{Bmatrix} = C_{12}\,\dot{\beta} + C_{23}\dot{\gamma} + F_{23}\,\dot{r}$$

$$T(1/R_0) = \frac{1}{2}I_1\,\dot{\alpha}^2$$

$$T(2/R_0) = \frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(H\in 2/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(2/R_0).\vec{\sigma}_H(2/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_2 h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1)(-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\,\vec{y}_1 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2)$$

$$= \frac{1}{2}m_2 h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(A\,\dot{\alpha}^2\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + B\dot{\beta}^2)$$

$$T(3/R_0) = \frac{1}{2}m_3\vec{V}^2(G\in 3/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(3/R_0).\vec{\sigma}_G(3/R_0)$$

$$= \frac{1}{2} m_3 [r \dot{\beta} \vec{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{r} \vec{z}_2]^2$$

$$+ \frac{1}{2} [-\dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_2 + \dot{\beta} \vec{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{z}_2] \left[- D \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_2 + D \dot{\beta} \vec{y}_1 + E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{z}_2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m_3 [r^2 \dot{\beta}^2 + (h + r \sin \beta)^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{r}^2] + \frac{1}{2} \left[D (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)^2 \right]$$

soit
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{l} [I_1 + m_2 h^2 + (A + D) \sin^2 \beta + (C + E) \cos^2 \beta + m_3 (h + r \sin \beta)^2] \dot{\alpha}^2 \\ + [B + D + m_3 r^2] \dot{\beta}^2 + m_3 \dot{r}^2 + E \dot{\gamma}^2 + 2E \dot{\gamma} \dot{\alpha} \cos \beta \end{array} \right\}$$
$$= C_{01} \dot{\alpha} + C_{12} \dot{\beta} + C_{23} \dot{\gamma} + F_{23} \dot{r} + m_3 g (r \dot{\beta} \sin \beta - \dot{r} \cos \beta)$$

Colle 02 – Corrigé

Porte-outil

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- *C2-08 :Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.*

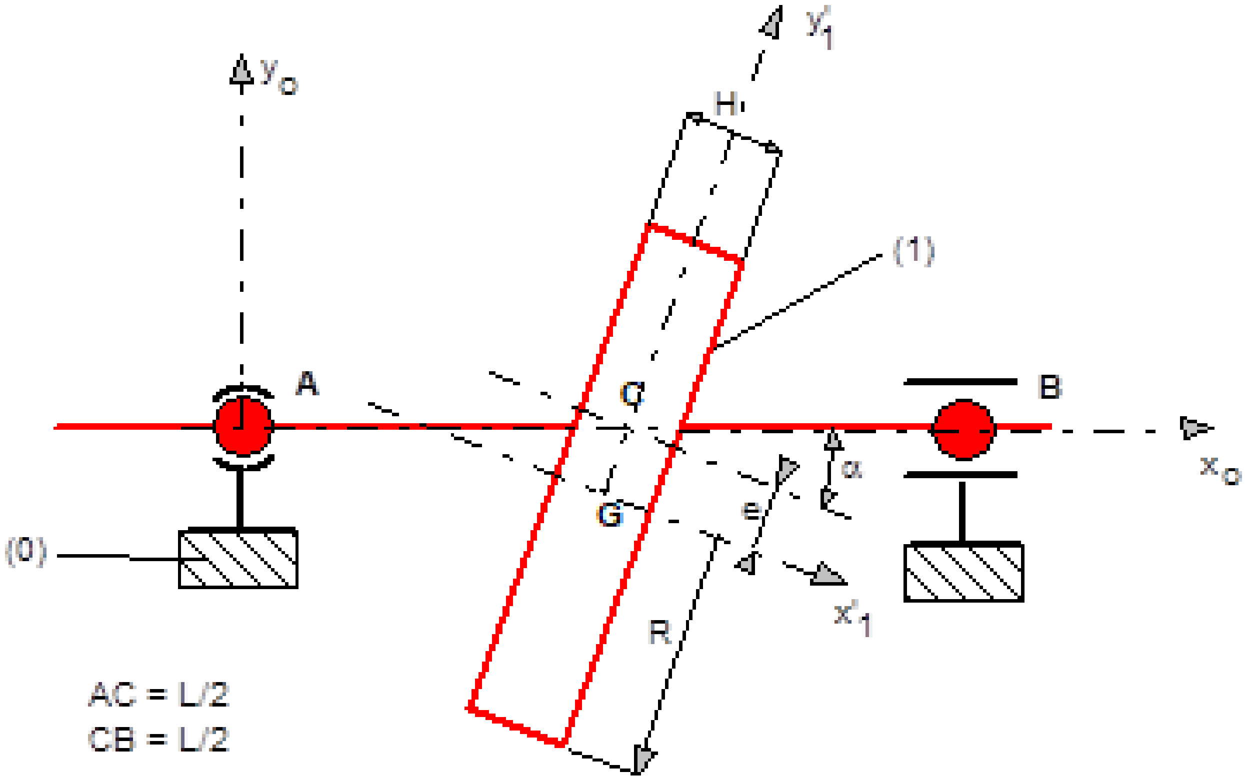
Soit le rotor **(1)** défini ci-dessous. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathscr{R}'_1 = \left(G;\overrightarrow{x'_1},\overrightarrow{y'_1},\overrightarrow{z'_1}\right)$ est attaché à ce solide.

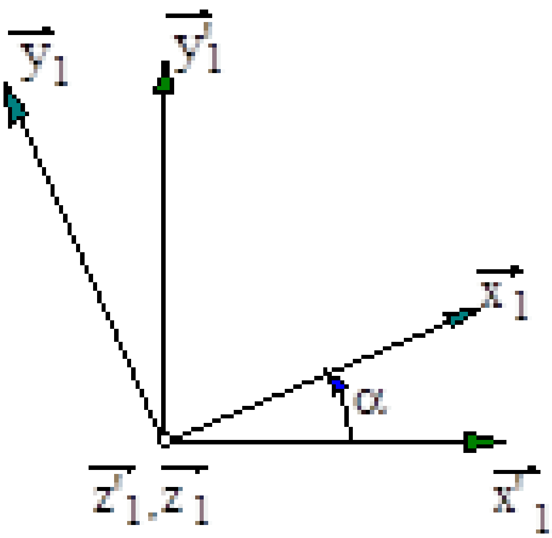
La base $\mathscr{B}'_1 = \left(\overrightarrow{x'_1},\overrightarrow{y'_1},\overrightarrow{z'_1}\right)$ se déduit de $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z'_1}$.

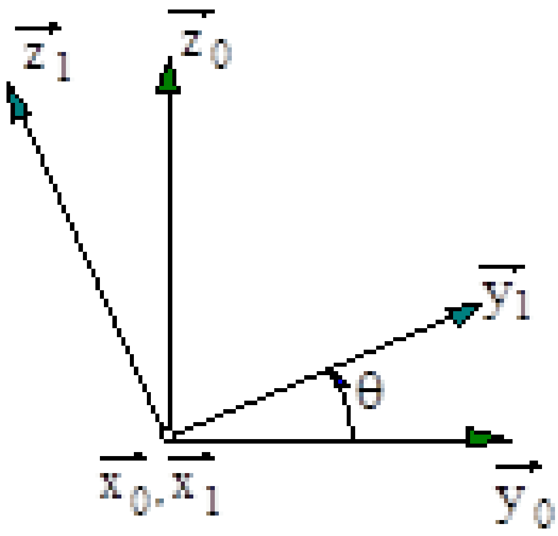
La base $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathscr{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Enfin, le rotor **1** est entrainé par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté $C_m\overrightarrow{x_0}$. Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.







Question 1 *Déterminer la forme de la matrice d'inertie dy cylindre en C dans la base $\mathscr{B}_1'$.*

Question 2 *Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de* **(1)** *dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$.*

Question 3 *Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.*

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $\tilde{\tilde{I}}(G,1) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = -e\ \overrightarrow{y'_1}$

$$\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \tilde{\tilde{I}}(G,1) + m\begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Ainsi : $\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{2}+e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) \end{array} \right\}_C$$

Résultante cinétique : $m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) = -\,m\,e\,\dot{\theta}\,\cos\alpha\ \vec{z}_1$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\,c\alpha \\ \dot{\theta}\,s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\,(A\,c\alpha\,\vec{x'}_1 + B\,s\alpha\,\vec{y'}_1)$

Or : $\vec{x'}_1 = c\alpha\ \vec{x}_1 - s\alpha\ \vec{y}_1$ et $\vec{y'}_1 = c\alpha\ \vec{y}_1 + s\alpha\ \vec{x}_1$

$$\vec{\sigma}(C,1/R_0) = \dot{\theta}\,\{(A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\vec{x_1} + (B-A)\,s\alpha\,c\alpha\,\vec{y_1}\} = \dot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1})$$

$$\boxed{\{C\,(1/R_0)\} = \left\{\begin{matrix} m\,\vec{V}(G/R_0) = -\,m\,e\,\dot{\theta}\,\cos\alpha\,\vec{z_1} \\ \vec{\sigma}(C,1/R_0) = \dot{\theta}\,\{(A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\vec{x_1} + (B-A)\,s\alpha\,c\alpha\,\vec{y_1}\} = \dot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) \end{matrix}\right\}_C}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D\,(1/R_0)\} = \left\{\begin{matrix} M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}(C,1/R_0) \end{matrix}\right\}_C$$

Résultante dynamique : $M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1} - \dot{\theta}^2\,\vec{y_1})$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}(C,1/R_0) = \dfrac{d\,\vec{\sigma}(C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}(C,1/R_0) = \frac{d\,\{\dot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1})\}}{dt/R_0} = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1}$$

Car $\dfrac{d\,\vec{y_1}}{dt/R_0} = \dfrac{d\,\vec{y_1}}{dt/R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{y_1} = \dot{\theta}\,\vec{x_1}\wedge\vec{y_1} = \dot{\theta}\,\vec{z_1}$

$$\boxed{\{D\,(1/R_0)\} = \left\{\begin{matrix} M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1} - \dot{\theta}^2\,\vec{y_1}) \\ \vec{\delta}(C,1/R_0) = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} \end{matrix}\right\}_C}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \vec{\delta}(C,1/R_0) + \vec{AC}\wedge m\,\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} + \vec{AC}\wedge(-\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1} - \dot{\theta}^2\,\vec{y_1})$$

Or : $\vec{AC} = \dfrac{L}{2}\,\vec{x_1}$

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} + m\,e\,\cos\alpha\,\frac{L}{2}\,(\ddot{\theta}\,\vec{y_1} + \dot{\theta}^2\,\vec{z_1})$$

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \vec{x_1}(A'\ddot{\theta}) + \vec{y_1}\,(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\ddot{\theta} + \vec{z_1}(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\dot{\theta}^2$$

$$\{D\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M\ \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1) \\ \vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{x}_1 (A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\ (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)\ddot{\theta} + \vec{z}_1 (B' + m\,e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2 \end{array} \right\}_A$$

Q4- Déterminer l'énergie cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

C étant fixe dans R_0 : $2\,T(S/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).\,[\bar{\bar{I}}(C,S)\ \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)]$

$$2\,T(S/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\,.\ \vec{\sigma}(C,S/R_0)$$

$$2\,T(S/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\,.\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_1\,.\ \dot{\theta}(A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)$$

$$2\,T(S/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\,.\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = A'\ \dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{2\,T(S/R_0) = A'\ \dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\dot{\theta}^2}$$

Q5- Les liaisons en A et B sont supposées parfaites. Le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$. Déterminer les actions de liaison en A et B et le couple moteur nécessaire C_m pour obtenir ce mouvement

On isole 1 et on lui applique le PFD : $\{D\ (1/R_0)\} = \{\bar{1} \rightarrow 1\}$

Or : $\{D\ (1/R_0)\} = \{A \rightarrow 1\} + \{B \rightarrow 1\} + \{\text{Poids} \rightarrow 1\} + \{Cm\}$

$$\{\bar{1} \rightarrow 1\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{array} \right\}_{A\,B_0} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{array} \right\}_{B\,B_0} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G\,B_0} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B_0}$$

On réduit tout en A dans la base B_0 :

LA en B : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} = L\,\vec{x}_0 \wedge (X_B\,\vec{x}_0 + Y_B\,\vec{y}_0 + Z_B\,\vec{z}_0) = L(Y_B\,\vec{z}_0 - Z_B\,\vec{y}_0)$

Pesanteur : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y}'_1) \wedge -mg\ \vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\ \vec{y}'_1 \wedge \vec{y}_0$

Or : $\vec{y}'_1 = c\alpha\ \vec{y}_1 + s\alpha\ \vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = c\theta\ \vec{y}_0 + s\theta\ \vec{z}_0$

$$\vec{y}'_1 = c\alpha\ (c\theta\ \vec{y}_0 + s\theta\ \vec{z}_0) + s\alpha\ \vec{x}_0 = s\alpha\ \vec{x}_0 + c\alpha\ c\theta\ \vec{y}_0 + c\alpha\ s\theta\ \vec{z}_0$$

$$\vec{y}'_1 \wedge \vec{y}_0 = (s\alpha\ \vec{x}_0 + c\alpha\ c\theta\ \vec{y}_0 + c\alpha\ s\theta\ \vec{z}_0) \wedge \vec{y}_0 = s\alpha\ \vec{z}_0 - c\alpha\ s\theta\ \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y}'_1) \wedge -mg\ \vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\ (s\alpha\ \vec{z}_0 - c\alpha\ s\theta\ \vec{x}_0)$$

$$\overrightarrow{M_A} = -e\,m\,g\;c\alpha\, s\theta\;\overrightarrow{x_0} + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2})\,\overrightarrow{z_0}$$

Résultante dynamique

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\;(\ddot{\theta}\,\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{y_1})$$

$\overrightarrow{y_1} = c\theta\,\overrightarrow{y_0} + s\theta\,\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{z_1} = c\theta\,\overrightarrow{z_0} - s\theta\,\overrightarrow{y_0}$

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\;\{\ddot{\theta}\,(c\theta\,\overrightarrow{z_0} - s\theta\,\overrightarrow{y_0}) - \dot{\theta}^2\,(c\theta\,\overrightarrow{y_0} + s\theta\,\overrightarrow{z_0})\}$$

$$\boxed{M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = m\,e\,\cos\alpha\;\{\overrightarrow{y_0}(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) - \overrightarrow{z_0}(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2\,s\theta)\}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \overrightarrow{x_0}(A'\ddot{\theta}) + \overrightarrow{y_1}\,(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + \overrightarrow{z_1}(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\dot{\theta}^2$$

$\overrightarrow{y_1} = c\theta\,\overrightarrow{y_0} + s\theta\,\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{z_1} = c\theta\,\overrightarrow{z_0} - s\theta\,\overrightarrow{y_0}$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \overrightarrow{x_0}(A'\ddot{\theta}) + (c\theta\,\overrightarrow{y_0} + s\theta\,\overrightarrow{z_0})\,(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + (c\theta\,\overrightarrow{z_0} - s\theta\,\overrightarrow{y_0})(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}\,(A,1/R_0) &= \overrightarrow{x_0}(A'\ddot{\theta})\\ &+ (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\,\overrightarrow{y_0}\\ &+ (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta)\,\overrightarrow{z_0}\end{aligned}}$$

En définitive : $\{\bar{1} \rightarrow 1\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} X_A & Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta \\ Y_A + Y_B - mg & -L\,Z_B \\ Z_A + Z_B & LY_B + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2}) \end{array}\right\}_{B_0}$

$$\{D(1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & A'\ddot{\theta} \\ m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) & (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta) \\ m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) & (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta) \end{array} \right\}_{A\;B_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = A'\ddot{\theta} \\ Z_B = -\frac{1}{L}\{(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\} \\ Y_B = \frac{1}{L}\{m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta)\} \end{array}}$$

Si $\dot{\theta} = \omega = cste$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,c\theta \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,s\theta \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = 0 \\ Z_B = -\frac{1}{L}(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\omega^2\,s\theta \\ Y_B = \frac{1}{L}\{m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\omega^2\,c\theta\} \end{array}}$$

ZA et ZB sont non nulles. Si tout était équilibré elles seraient nulles

Le mouvement est imposé. La recherche des composantes de liaisons donne lieu à des équations algébriques

Colle 03 – Corrigé

Régulateur

Savoirs et compétences :

- *C2-08 :Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.*

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti **(0)**. Les solides **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(5)** sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en O, A ou B de manière à demeurer dans un même plan noté $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}\right)$. Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de $\overrightarrow{z_1}$. On repère sa position angulaire par le paramètre ψ.

Au bâti **(0)**, on associé le repère fixe $\mathcal{R}_0$.

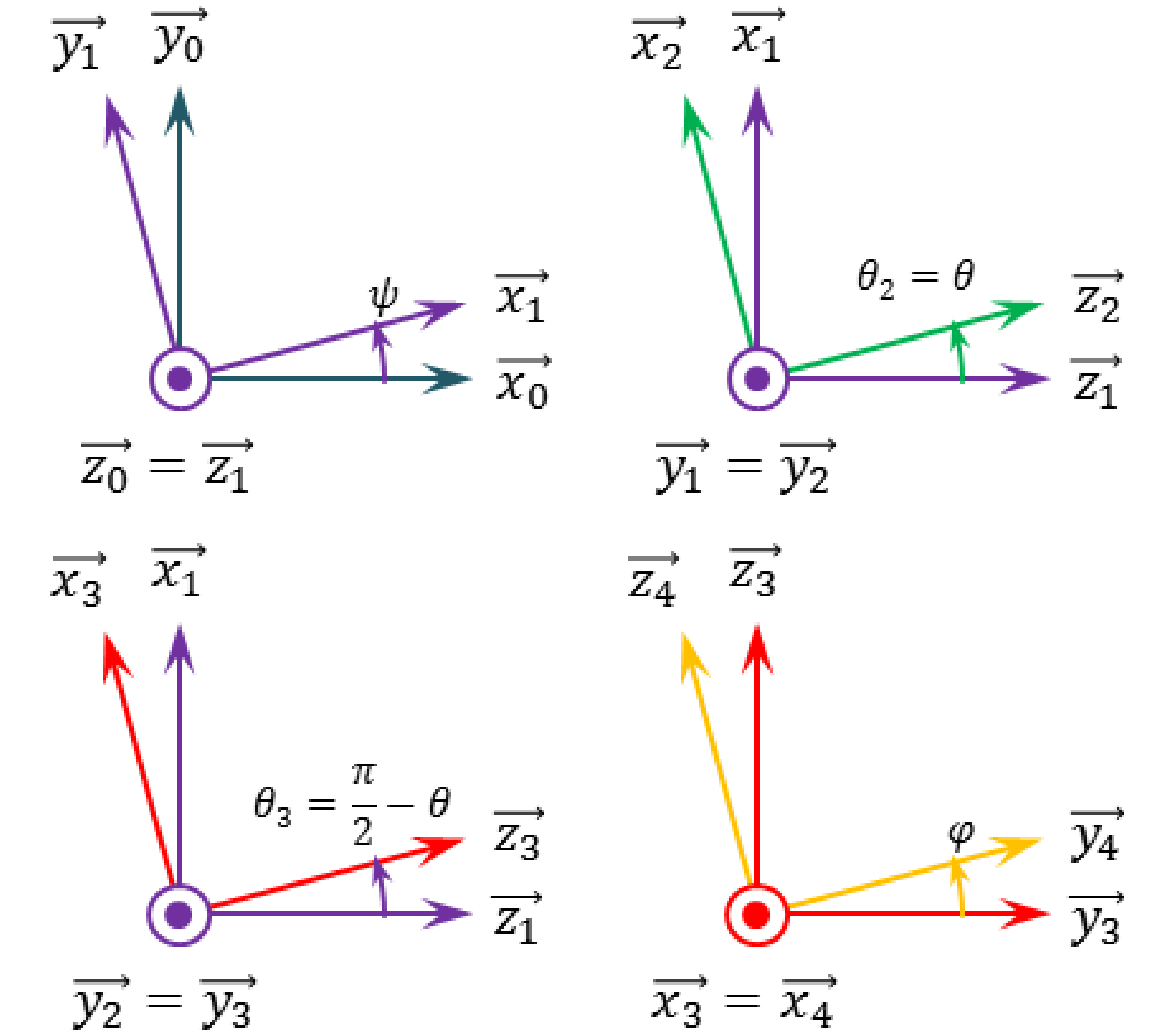
À chaque S_i on associe une base $\mathcal{B}_i\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i}\right)$. Les repère $\mathcal{R}_i$ sont d'origine O ou A selon le cas.

Les rotations internes sont définies par θ_2 autour de $\left(O,\overrightarrow{y_1}\right)$ et θ_3 autour de $\left(A,\overrightarrow{y_1}\right)$.

Les barres **(2)** et **(3)** sont identiques, de longueur $2a$ et de masse $m_2=m_3=m$.

Les barres **(1)** et **(5)** ont une masse m_i et des longueurs ℓ_i. **(4)** est un volant d'inertie de masse M qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $\left(G,\overrightarrow{x_3}\right)$ avec la barre **(3)**. Un repère $\mathcal{R}_4$ est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire φ.

On donne le paramétrage suivant.



Question 1 *Proposer une matrice d'inertie pour chacun des solides.*

Question 2 *Déterminer les torseurs cinétiques suivants :* $\{\mathscr{C}(1/0)\}_O$, $\{\mathscr{C}(2/0)\}_O$.

Question 3 *Déterminer les torseurs dynamiques suivants :* $\{\mathscr{D}(1/0)\}_O$, $\{\mathscr{D}(2/0)\}_O$. *En déduire* $\{\mathscr{D}(1\cup 2/0)\}_O$

Correction

Détermination de $\{\mathscr{C}(1/0)\}_O$

O est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathscr{C}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c} m_1\overrightarrow{V(G_1,1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(O_1,1/0)}=I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\end{array}\right\}_O$$

(1) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_0}$ et de rayon négligeable.

On a donc $I_O(1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}$ avec $A_1=\dfrac{m_1 l_1^2}{3}$.

De plus, $\{\mathscr{V}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\dot{\psi}\overrightarrow{z_1}\\ \overrightarrow{V(O,1/0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$. On a donc

$I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}=\overrightarrow{0}$. Au final :

$$\{\mathscr{C}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$$

Détermination de $\{\mathscr{C}(2/0)\}_O$

O est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \overrightarrow{V(G_2,2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(O,2/0)} \end{array} \right\}_O$$

(2) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_2}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{O_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}$ avec $A_2 = \dfrac{4ma^2}{3} =$. De plus, $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{V(G_2,2/0)} \end{array} \right\}_{G_2}$.

$\overrightarrow{V(G_2,2/0)} = \overrightarrow{V(O,2/0)} + \overrightarrow{G_2O} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = -a\overrightarrow{z_2} \wedge \left(\dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{y_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}\left(\cos\theta\overrightarrow{x_1} - \sin\theta\overrightarrow{z_1}\right)\right)$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} = \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}.$$

Au final :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \end{array} \right\}_O$$

Détermination de $\{\mathscr{C}(3/0)\}_O$

****************** Au point G_3, on a :

$$\{\mathscr{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_3 \overrightarrow{V(G_3,3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)} \end{array} \right\}_O$$

(3) est une tige d'axe $\overrightarrow{x_3}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_3}$ avec $A_4 = \dfrac{4ma^2}{3} =$. De plus, $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{V(G_3,3/0)} \end{array} \right\}_{G_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3,3/0)}$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} = \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}.$$

Au final :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \end{array} \right\}_O$$

Question 4 *Déterminer les torseur dynamique* $\{\mathscr{D}(4/0)\}_G$.

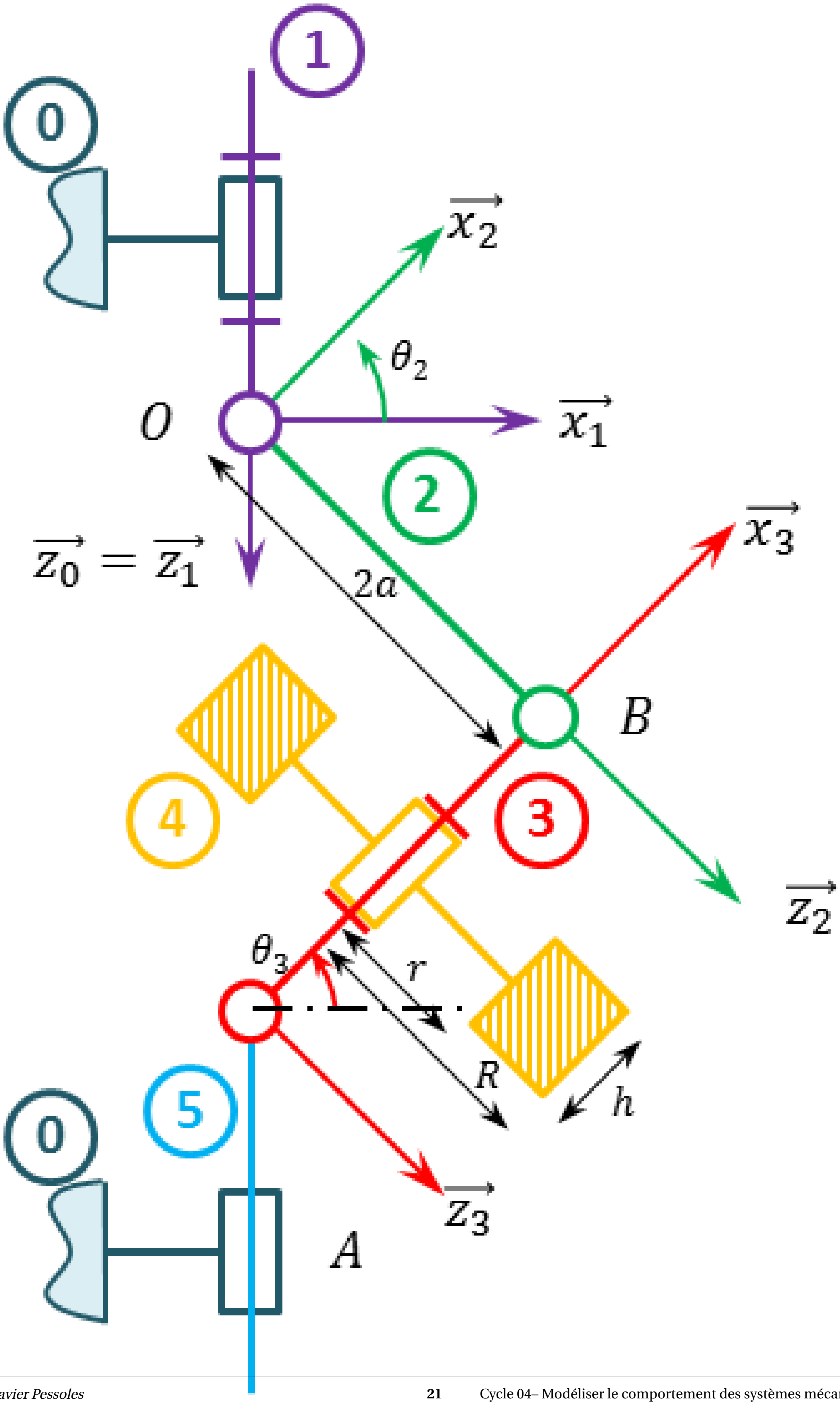
Correction

Question 5 *Déterminer les torseur dynamique* $\{\mathscr{D}(1\cup 2\cup 3\cup 4\cup 5/0)\}_O$.

Correction

Question 6 *Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.*

Correction


1
0
$\overrightarrow{x_2}$
θ_2
O
$\overrightarrow{x_1}$
2
$\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$
$2a$
$\overrightarrow{x_3}$
B
4
3
$\overrightarrow{z_2}$
θ_3
r
R
h
0
5
$\overrightarrow{z_3}$
A

Exercice 1 – Mouvement TR ⋆

C2-08

C2-09

Question 1 *Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(2/0)\}$ en B.*

Expression de la résultante dynamique $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right)$.

Méthode 1 : Calcul en $G_2 = C$ puis déplacement du torseur dynamique

- Calcul du moment cinétique en G_2 : $G_2 = C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = I_C(2)\dot{\theta}\overrightarrow{k_0} = C_1\dot{\theta}\overrightarrow{k_1}$.
- Calcul du moment dynamique en G_2 : $G_2 = C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_1}$.
- Calcul du moment dynamique en B : $\overrightarrow{\delta(B, 2/0)} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_d(2/0)} = C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_1} + R\overrightarrow{i_2}\, m_2 \wedge \left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right)\right)$ $= C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_1} + Rm_2\left(-\sin\theta\,\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{k_0} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{k_2}\right)$.

Au final, on a donc $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right)\right) \\ C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_1} + Rm_2\left(-\sin\theta\,\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{k_0} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{k_2}\right) \end{array} \right\}_B$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \overrightarrow{i_0}$*

On a $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} = \overrightarrow{R_d(1/0)} + \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_1\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + m_2\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right)\right)$. On projette alors sur $\overrightarrow{i_0}$, $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \overrightarrow{i_0} = m_1\ddot{\lambda}(t) + m_2\left(\ddot{\lambda}(t) - R\left(\ddot{\theta}\sin\theta(t) + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right)$.

Exercice 2 – Mouvement RR ⋆

C2-08

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Exprimer le torseur dynamique* $\{\mathscr{D}(1/0)\}$ *en* A.

Question 2 *Exprimer le torseur dynamique* $\{\mathscr{D}(2/0)\}$ *en* B.

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Exercice 3 – Mouvement RR 3D ⋆⋆

C2-08

C2-09

Question 1 *Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(1/0)\}$ en B.*

Par définition, $\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B,1/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$
$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1,1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$
Calcul de $\overrightarrow{V(B,1/0)}$: $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\,\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.
Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$: $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}$.
Au final, $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1\left(R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}\right)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(B,1/0)}$ B est le centre d'inertie du solide 1 ; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(B,1/0)} = I_B(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1} \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} = C_1\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0}$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(B,1/0)} = C_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{k_0}$.
Au final, $\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_1\left(R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}\right) \\ C_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_B$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$*

Tout d'abord, $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)} = \overrightarrow{\delta(A,1/0)} + \overrightarrow{\delta(A,2/0)}$.
Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$ – Méthode 1
$\overrightarrow{\delta(A,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(\overrightarrow{\delta(B,1/0)} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_d(1/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(C_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} + R\,\overrightarrow{i_1}\wedge m_1\left(R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta}$.
Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$ – Méthode 1
A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}\cdot\overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}\right]_{\mathscr{R}_0} \underbrace{-\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_0}\right]_{\mathscr{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}$.

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(I_A(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

$I_A(2) = I_{G_2}(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2R^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_2} = \dot{\theta}\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j_2}\right) + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_2}$.

On a donc $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2+m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2m_2R^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\varphi \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi\left(B_2+m_2R^2\right) \\ \dot{\theta}\cos\varphi\left(C_2+m_2R^2\right) \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}$.

De plus $\overrightarrow{k_1} = \cos\varphi\,\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j_2}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}\sin^2\varphi\left(B_2+m_2R^2\right) + \dot{\theta}\cos^2\varphi\left(C_2+m_2R^2\right)$.
Enfin, $\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = \left(B_2+m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2+m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right)$.
Conclusion
$\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta} + \left(B_2+m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2+m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right)$.