

TD 01 – Corrigé

Banc d'essai BTP

Concours CCINP-TSI 20??

Savoirs et compétences :

Mise en situation

Objectif Valider Req 1.1.1.

Le moteur à courant continu

Modélisation de l'asservissement en vitesse

Question 1 Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain K_{Adapt} ?

Correction Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

Afin d'avoir un asservissement précis ($\epsilon(p) = 0$ lorsque $\Omega_c(p) = \Omega(p)$), on prend $K_{Adapt} = K_{Capt}$.

Hypothèse 1 : on considère que $C_r(p) = 0$ et $\Omega_c(p) \neq 0$.

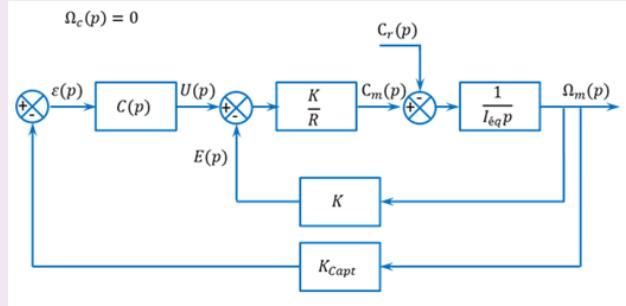
Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$ puis la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$. On considère que $C(p) = K_p$, K_p étant constant. Mettre $H_1(p)$ sous la forme $K_1/(1 + \tau_1 p)$ où on explicitera les valeurs de K_1 et τ_1 .

Correction

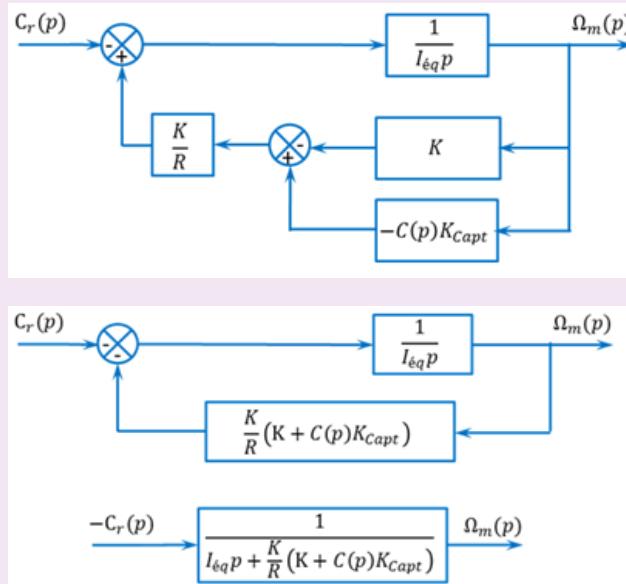
$$\begin{aligned} H_m(p) &= \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K}{R I_{eq} p}}{1 + \frac{K^2}{R I_{eq} p}} = \frac{K}{R I_{eq} p + K^2} = \frac{1/K}{1 + \frac{R I_{eq}}{K^2} p} \\ H_1(p) &= \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = K_{Adapt} \frac{\frac{K}{R I_{eq} p + K^2} C(p)}{1 + \frac{K}{R I_{eq} p + K^2} C(p) K_{Capt}} = \frac{K_{Adapt} K C(p)}{R I_{eq} p + K^2 + K C(p) K_{Capt}} \\ H_1(p) &= \frac{K_{Adapt} K K_p}{R I_{eq} p + K^2 + K K_p K_{Capt}} = \frac{\frac{K_{Adapt} K_p}{R I_{eq}}}{\frac{K + K_p K_{Capt}}{R I_{eq}} p + 1} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p} \\ \text{Soit par identification : } K_1 &= \frac{K_{Adapt} K_p}{K + K_p K_{Capt}} \text{ et } \tau_1 = \frac{R I_{eq}}{K^2 + K K_p K_{Capt}}. \end{aligned}$$

Hypothèse 2 : on considère que $\Omega_c(p) = 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 3 Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

Correction


Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$. On considère que $C(p) = K_P$, K_P étant constante. Mettre $H_2(p)$ sous la forme $-K_2/(1 + \tau_2 p)$ où on explicitera les valeurs de K_2 et τ_2 .

Correction


On a donc : $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{1}{\frac{K}{R}(K + K_P K_{\text{Capt}}) + I_{\text{eq}}p} = -\frac{\frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}}{1 + \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}p} = -\frac{K_2}{1 + \tau_2 p}$ Soit par identification : $K_2 = \frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}$ et $\tau_2 = \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}$.

Hypothèse 3 : on considère maintenant que $\Omega_c(p) \neq 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 5 En utilisant le théorème de superposition, exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $\Omega_c(p)$ et $C_r(p)$.

Correction Par superposition on a : $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$.

À une fréquence de rotation de 350 min^{-1} en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de 1928 min^{-1} soit environ 202 rad/s . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à 990 Nm . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude 202 rad/s et à un couple résistant de 990 Nm .

Question 6 Après avoir exprimé la consigne $\Omega_c(p)$ puis le couple résistant $C_r(p)$, calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction On a, pour des échelons de consignes : $\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$ avec $\Omega_{c0} = 202 \text{ rad/s}$ et $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$ avec $C_{r0} = 990 \text{ Nm}$.

L'écart statique ε_S s'écrit en sortie du comparateur :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} \Omega_m(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p(K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p)))$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_{\text{Adapt}} \frac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}} K_1 \frac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}} K_2 \frac{C_{r0}}{p} \right)$$

$$\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}$$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

Question 7 Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain K_I de la forme $C(p) = K_I / p$?

Correction En choisissant $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$, l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain K_P important $K_1 \rightarrow 1$ et $K_2 \rightarrow 0$, mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

Question 8 En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

Correction En reprenant le raisonnement de la question **, et en remplaçant $C(p)$ par K_I / p dans les expressions

$$\text{de } H_1(p) \text{ et } H_2(p) : \lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{K}{R I_{\text{eq}} p + K^2} \frac{K_I}{p}}{1 + \frac{K}{R I_{\text{eq}} p + K^2} \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}}} = \frac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}.$$

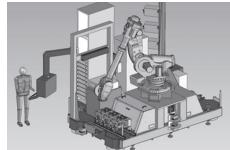
$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{1}{K \left(K + \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = 0$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p (K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p))$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} K_{\text{Adapt}} / K_{\text{Capt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} 0 C_r 0 = 0$$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.

TD 02 – Corrigé



Cellule d'assemblage pour avion Falcon

Concours E3A – PSI 2015.

Savoirs et compétences :



Mise en situation

Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Critères à respecter pour l'exigence 1.2

Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

Question 1 Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Correction Utilisation d'un système vis-écrou.

Détermination de l'inertie équivalente

Question 2 À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente J_{eq} de l'ensemble $\Sigma = \{\text{moteur} + \text{réducteur} + \text{poulies} + \text{chariot}\}$ ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$.

Correction $E_c(\Sigma) = E_c(\text{moteur}) + E_c(\text{réducteur}) + E_c(\text{poulies}) + E_c(\text{chariot})$.

- $E_c(\text{moteur}) = 1/2 J_m \omega_m^2$;
- $E_c(\text{réducteur}) = 1/2 J_{\text{red}} \omega_m^2$;
- $E_c(\text{poulies}) = 1/2 (J_{\text{Pm}} + J_{\text{PR}}) \omega_{\text{red}}^2 = 1/2 (J_{\text{Pm}} + J_{\text{PR}}) \lambda^2 \omega_m^2$;
- $E_c(\text{chariot}) = 1/2 M V^2 = 1/2 M R_p^2 \lambda^2 \omega_m^2$.

On a donc $J_{eq} = M R_p^2 \lambda^2 + (J_{\text{Pm}} + J_{\text{PR}}) \lambda^2 + J_{\text{red}} + J_m$.

Question 3 Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

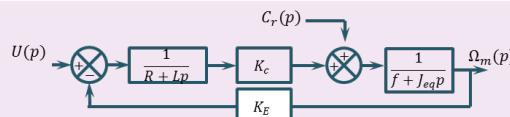
Correction $J_{eq} = 0,0068 \text{ kg m}^2$

Modèle de connaissance du moteur à courant continu

Objectif L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

Question 4 À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

Correction



Question 5 En considérant que $C_R(p) = 0$, déterminer la fonction de transfert $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ sous sa forme canonique.

Correction

$$H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E + R f}}{1 + \frac{R J_e q + L f}{K_c K_E + R f} p + \frac{L J_e q}{K_c K_E + R f} p^2}$$

Le coefficient de frottement visqueux est donné par $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$, l'inductance par $L = 9 \text{ mH}$, la résistance de l'induit par $R = 3 \text{ Ohm}$, la constante de couple par $K_c = 1,3 \text{ Nm A}^{-1}$ et $K_E = 1,3 \text{ V(rads}^{-1}\text{)}^{-1}$.

Question 6 Montrer que la fonction de transfert $H_M(p)$ peut se mettre sous la forme $H_M(p) = \frac{K_C}{K_C K_E + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$. Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de J_{eq} considérée sera $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

Correction En faisant les applications numériques on montre que $R f$ est négligeable devant $K_c K_E$ et que $L f$ et K_C sont négligeables devant $R J_{eq}$. On a donc : $H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E}}{1 + \frac{R J_{eq}}{K_c K_E} p + \frac{L J_{eq}}{K_c K_E} p^2} = \frac{K_C}{K_c K_E + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$.

Question 7 Montrer qu'avec l'expression, $H_M(p)$ peut s'écrire sous la forme $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$ avec $T_E < T_M$.

Correction

$$\left\{ \begin{array}{l} T_e + T_m = \frac{R J_{eq}}{K_c K_e} \\ T_e T_m = \frac{L J_{eq}}{K_c K_e} \end{array} \right. \quad \text{On a (résolution d'une équation du second degré) :}$$

$$T_e = \frac{\frac{R J_{eq}}{K_c K_e} - \sqrt{\left(\frac{R J_{eq}}{K_c K_e}\right)^2 - 4 \frac{L J_{eq}}{K_c K_e}}}{2}. \quad T_e = 0,0051 \text{ s et } T_m = 0,0074 \text{ s.}$$

Étude de l'asservissement en position de l'axe

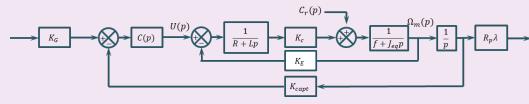
Modélisation de l'asservissement en position

Question 8 Quelle doit être la valeur de K_G pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart ϵ doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

Correction

On doit avoir $K_G = K_{\text{capt}} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{R_p} = 0,556 \text{ V rad}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Question 9 Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

Correction

Étude du modèle simplifié

Question 10 Donner l'expression de $Y(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :

Si $C_r(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \end{aligned}$$

Correction Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{\frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C}}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \end{aligned}$$

On a donc : $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$.

Question 11 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$ puis $C(p) = \frac{K_i}{p}$.

Correction

Question 12 On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$ puis $C(p) = \frac{K_i}{p}$.

Correction

Question 13 Conclure.

Correction

Question 14 Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

Correction

Question 15 Tracer le diagramme de Bode.

Correction

Question 16 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $C(p) = 1$. Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

Correction

Question 17 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $C(p) = \frac{1}{p}$. Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

Correction

Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Question 18 À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).

Correction

TD 03 – Corrigé



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :



Mise en situation

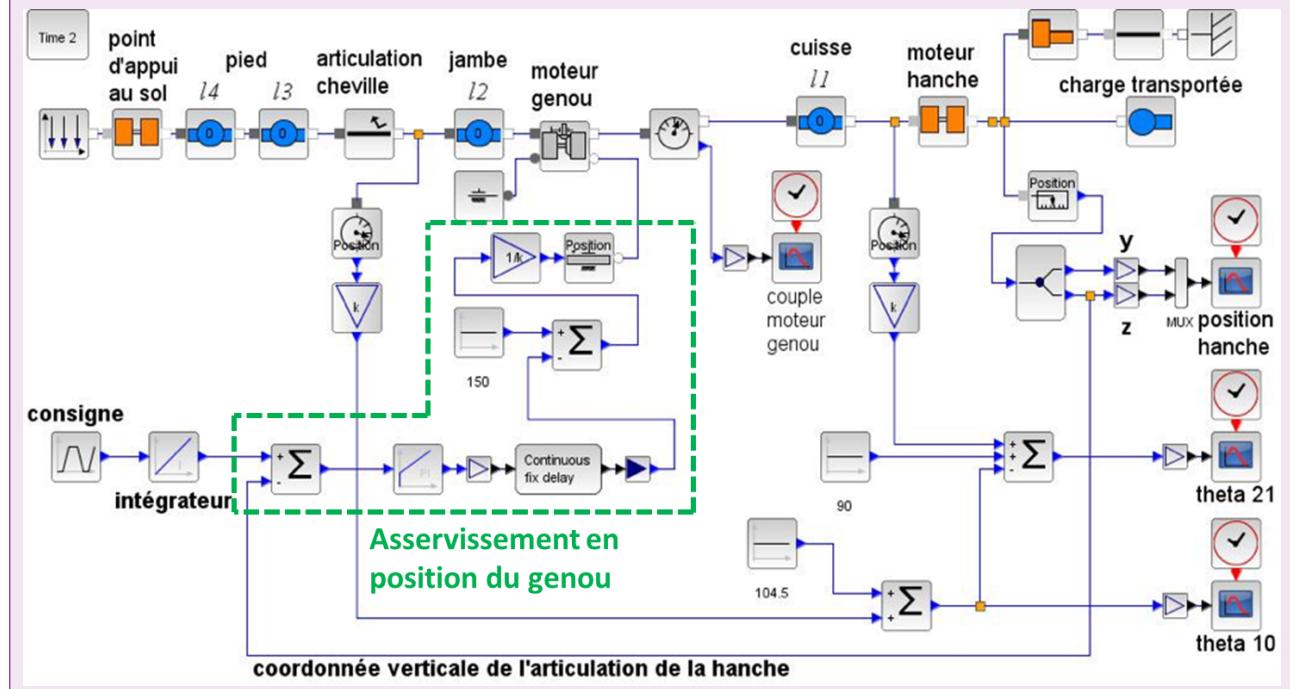
Gestion du mouvement vertical

Objectif Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Correction En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1 + C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}$.

En conséquences : $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp + K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$.

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Correction D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \left(1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}}$.

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Correction On a :

$$\bullet \quad \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{K_1}{p}} = 0 \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1);}$$

$$\bullet \quad \varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain } K_1 \text{ en BO).}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\frac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1). Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Correction En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}$.

On a donc : $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p)$.

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1+Tp)+K_1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1+Tp-K_3}{1+Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1}.$$

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Correction $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} = \frac{1-K_3}{K_1}$.

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3 = 1$.

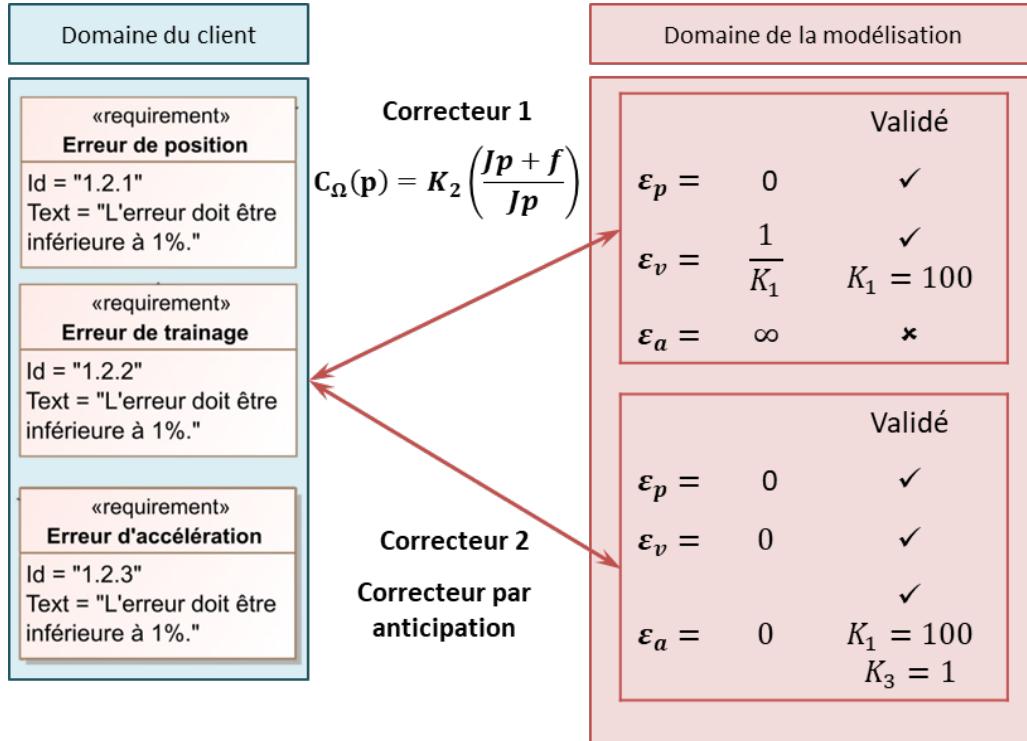
Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On a :

Correction $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p}$. En prenant $K_3 = 1$ et $K_1 = 100$, on obtient : $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1+Tp)+100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$. L'erreur est donc de 33×10^{-5} . Le cahier des charges est donc validé.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



Application 01 –
Corrigé

Exercices d'application – Réponses fréquentielles

S. Grange

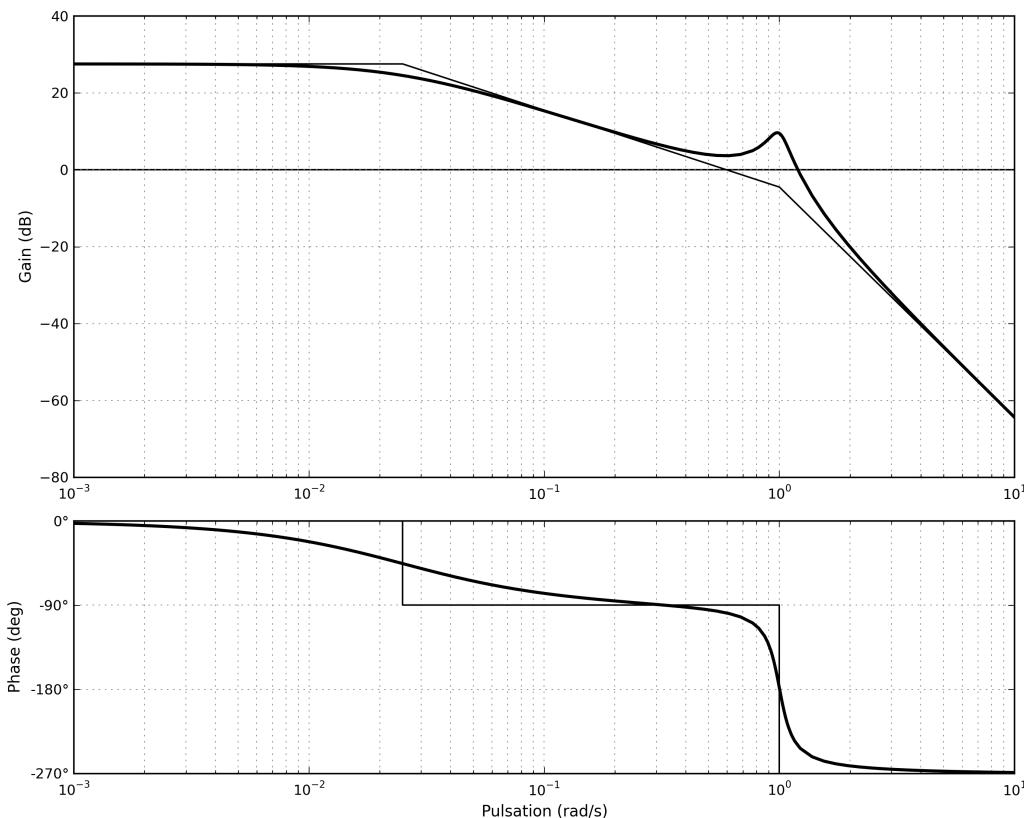
Savoirs et compétences :

Diagramme de Bode

Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

Correction $H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1+40p)\left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1}p + \frac{p^2}{1^2}\right)}$

**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

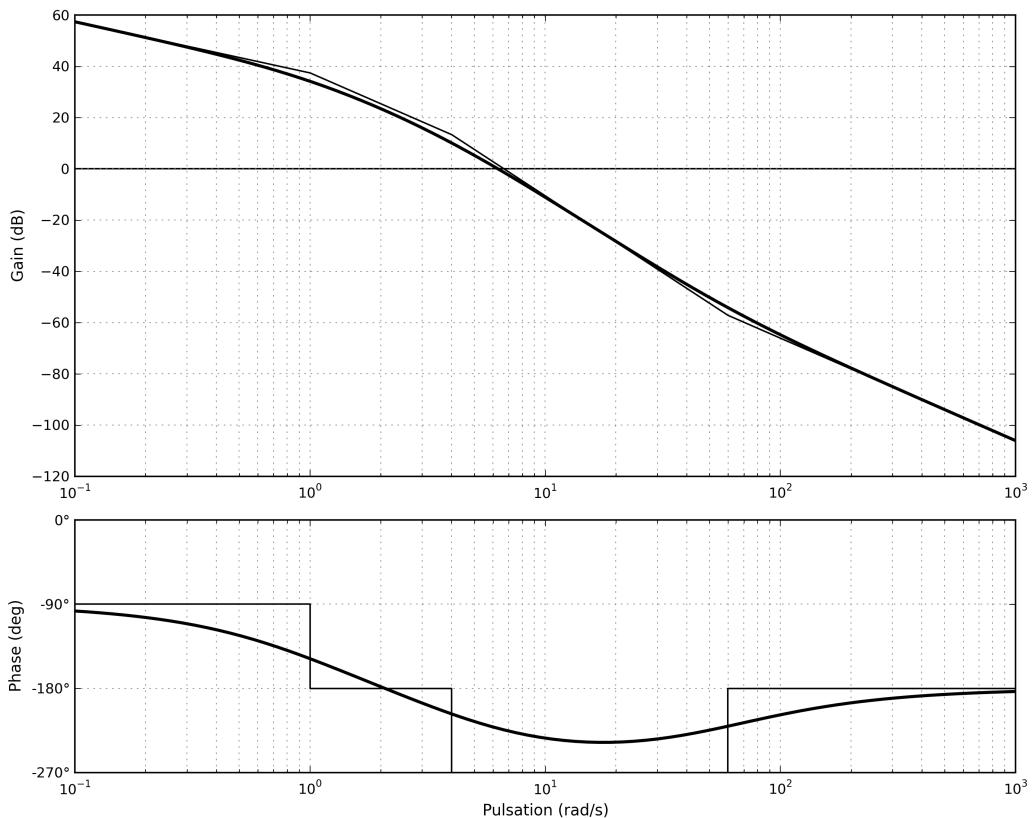
$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+(2 \cdot 1,25)/2p + p^2/2^2)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+p)(1+0,25p)}$$

	1 rad/s	$\frac{1}{0,25} = 4$ rad/s	$\frac{1}{0,0167} = 60$ rad/s
$1 + 0,0167p$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°
$\frac{1}{1+p}$	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$\frac{1}{1+0,25p}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90°
$1/p$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$H(p)$	-20 dB/décade -90°	-40 dB/décade -180°	-60 dB/décade -270°

Poistionnement du diagramme asymptotique de gain : en $\omega = << 1 \text{ rad s}^{-1}$, $H(p) \simeq \frac{75}{p}$. Ainsi pour $\omega \simeq 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, $H_{dB}(0,1) = 20 \log(75/0,1) = 57 \text{ dB}$.



Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.

Correction D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1^{er} ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $\frac{1}{\tau}$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure

lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a : $1/T_1 \simeq 100$ et $1/T_2 \simeq 2000$ donc $T_1 = 0,01\text{s}$ et $T_2 = 0,0005\text{s}$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1\text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1^{er} ordre valent environ $20\log K$ et celui de l'intégrateur $20\log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1\text{ rad/s}$: $20\log(K/0,1) \simeq -20$ $K \simeq 1$

$$\text{On a donc : } H(p) = \frac{1}{p(1+0.01p)(1+0.0005p)}.$$

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc : $H(p) \simeq \frac{1}{p(1+0.01p)}$.

Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Correction On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente : $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$.

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300\text{ rad/s}) = 20\log(S_0/E_0) = 20\log(S_0/3).$$

On peut lire que : $G_{dB}(\omega = 300\text{ rad/s}) \simeq -60\text{ dB}$ et donc $S_0 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$. D'après la courbe de phase, on peut lire : $\varphi(\omega = 300\text{ rad/s}) = -175$ degrés. On a donc : $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$. L'angle est à mettre en radians.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2^{ème} ordre, on a : $\text{Max}(G_{dB}) = 20\log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Correction D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1^{er} ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2^{ème} ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que $1/\sqrt{2}$.

$$H(p) = \frac{K(1+Tp)}{p(1+2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $1/\tau$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a : $1/T \simeq 1$ et $T = 1\text{s}$.

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2^{ème} ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut ω_0 . Ici, il y a un intégrateur et un « 1^{er} ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a : $\omega_0 \simeq 80\text{ rad/s}$.

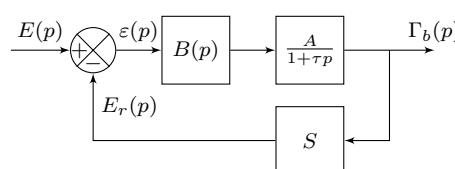
Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a : $20\log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$ et $\xi \simeq 0,11$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1\text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1^{er} ordre et du 2^{ème} ordre valent environ $20\log K$ et celui de l'intégrateur $20\log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1\text{ rad/s}$: $20\log(K/0,1) \simeq 33$ et $K \simeq 4.5$

Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a $A = 100\text{ gms}^{-2}\text{V}^{-1}$, $\tau = 0,2\text{s}$ et $S = 10 \cdot 10^{-3}/\text{g V}/(\text{m/s}^2)$ où g est l'accélération de pesanteur. $E(p)$ est la

transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement et $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma b(t)$.

$$B(p) = 1$$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

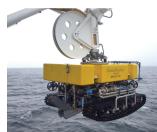
Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

Synthèse 01 – Corrigé



Bateau support de ROV Concours Centrale Supelec – MP 2019

Savoirs et compétences :



Introduction

Objectif Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

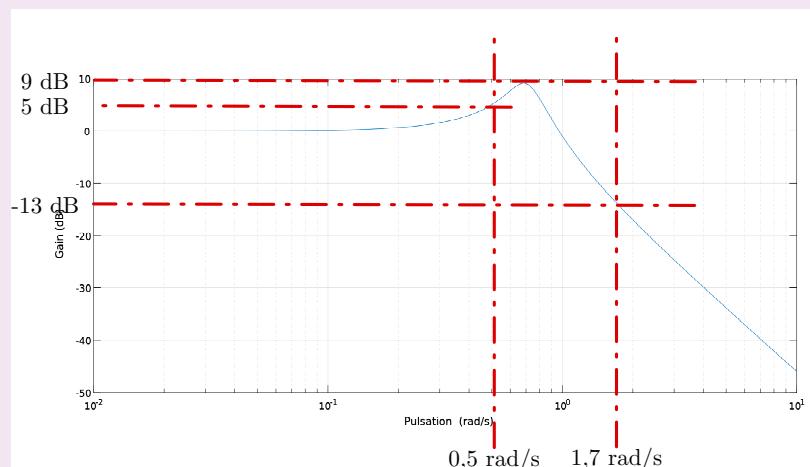
Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Correction La définition du gain en décibel de la fonction de transfert $B(j\omega)$ est $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$. L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$G_{dB(\omega)} < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0,5; 1,7] \text{ rad/s.}$$

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Correction On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :

$\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$. Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Correction On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t)\left(p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}\right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}\Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}\Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) + C_{qR}\left(\frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}\Delta P_E(p) - \Delta P_E(p)\right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) = C_{qR}\left(1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}\right)\Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)).$$

Par identification :

$$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert : $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Exprimer ω_0 , ζ et τ en fonction des constantes définies précédemment.

Correction La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)),$$

$$(\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) = (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1(\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1(\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta)p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1)p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

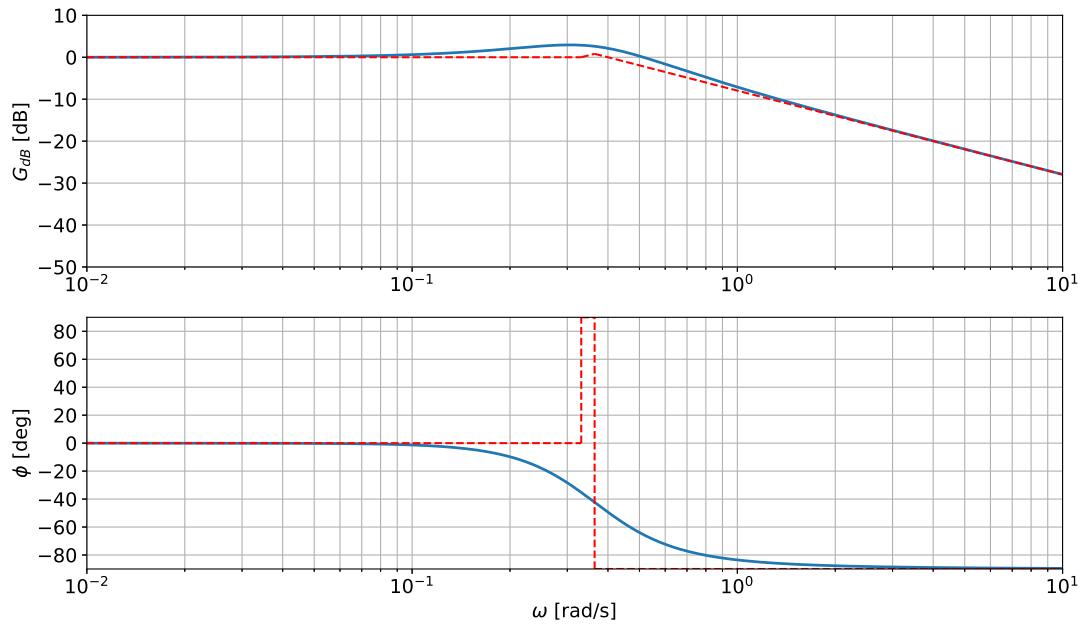
Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Correction Diagrammes de Bode de $H(p)$. On identifie 2 pulsations caractéristiques : $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$ rad/s et $\omega_n = 0,364$ rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ car $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$. La résonance sera toutefois faible.

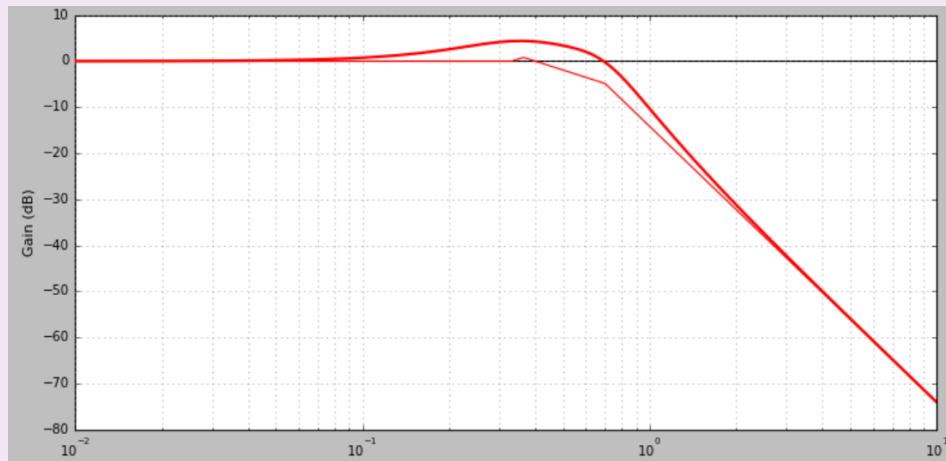
ω	BF $\omega \ll \omega_1$	MF $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	HF $\omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\frac{\tau \omega_n^2}{j\omega}$
G_{dB}	0	$20 \log \tau + 20 \log \omega$	$20 \log(\tau \omega_n^2) - 20 \log \omega$
ϕ	0	90°	-90°



La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

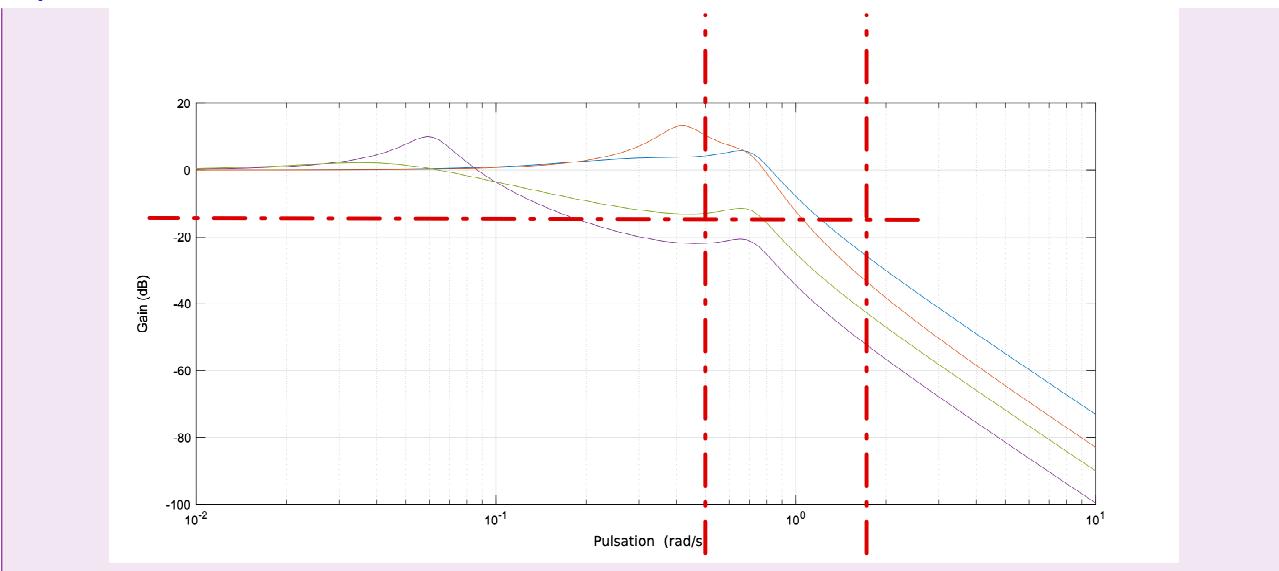
Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_{vague}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Correction On a la relation $G(p) = B(p)G(p)$.

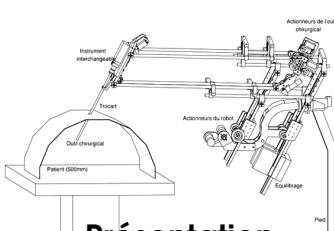


Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Correction Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.



Synthèse 02 – Corrigé



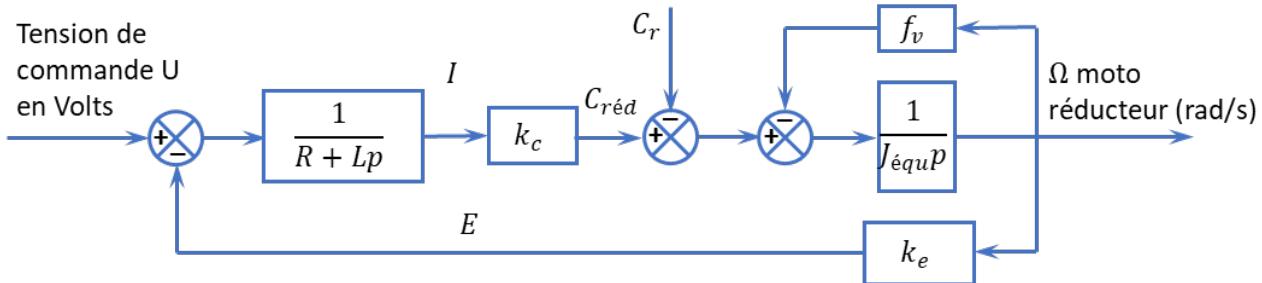
Présentation

Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

Question 1 Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.

Correction On a :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$;
- $E(p) = k_e \Omega_{\text{rédu}}(p)$;
- $C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p)$;
- $C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p)$.



Question 2 Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)}$ lorsque $C_r(p) = 0$.

Correction En raisonnant à partir des équations, on a : $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{\text{rédu}}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{(J_{\text{équ}} p + f_v) \Omega_{\text{rédu}}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \left(\frac{(J_{\text{équ}} p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{\text{rédu}}(p)$

Au final, $M(p) = \frac{k_c}{(J_{\text{équ}} p + f_v)(R + Lp) + k_e k_c}$.

$$\begin{aligned} \text{En mettant l'expression sous forme canonique, on a : } M(p) &= \frac{k_c}{J_{\text{équ}} L p^2 + (R J_{\text{équ}} + L f_v) p + k_e k_c + R f_v} \\ \Rightarrow M(p) &= \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + R f_v}}{\frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{En réalisant l'application numérique, on a : } M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6} p^2 + 14,6 \times 10^{-3} p + 1}.$$

Question 3 Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance L .

Correction En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant L , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et $M(p)$ se modélise par une fonction d'ordre 1.

Question 4 Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de $M_1(p)$ lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de L) étant rejeté.

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

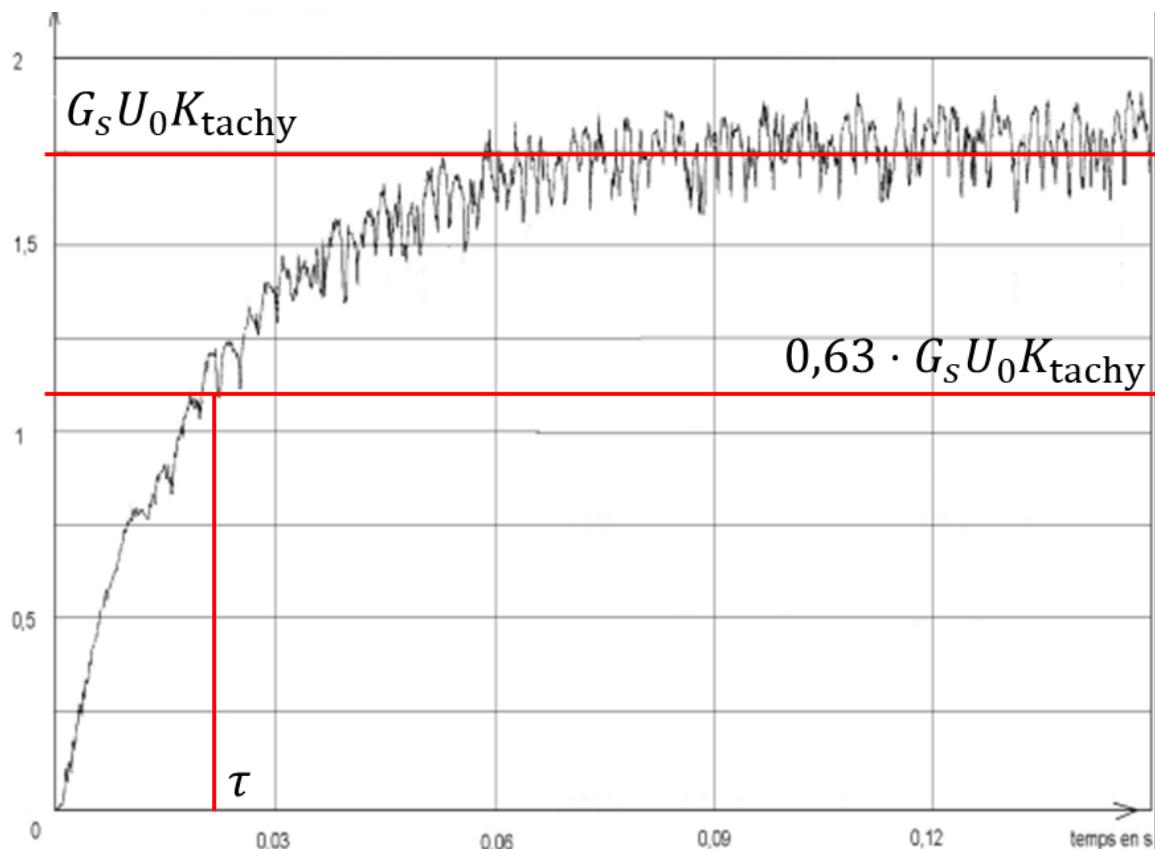
Correction En utilisant la formulation de $M_1(p)$ donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a : $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$. Au final, $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -4607$ et $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -70$. Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme $3,1 \times 10^{-6}(p + 4607)(p + 70)$. Le pôle p_2 et donc dominant par rapport à p_1 .

Question 5 Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur $M_2(p) = \frac{\Omega_{réd}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$. Donner les valeurs numériques de G_s et de T à partir de l'expression de $M_1(p)$ et des réponses apportées précédemment.

Correction En utilisant l'expression établie initialement en négligeant l'inductance, on a $M_2(p) = \frac{k_c}{\frac{k_e k_c + R f_v}{R J_{équ}} p + 1}$. En réalisant l'application numérique, $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015p}$ ($G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ et $T = 0,015 \text{ s}$).

Question 6 Déterminer les valeurs de G_s et T , à partir de la courbe de tension image de $\omega_{réd}(t)$ (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

Correction La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que $24 \cdot G_S \cdot K_{tachy} = 1,75 \text{ V}$ soit $G_S = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$. En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a $\tau = 0,02 \text{ s}$. On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse « L négligeable ».



Respect du critère de marge de phase

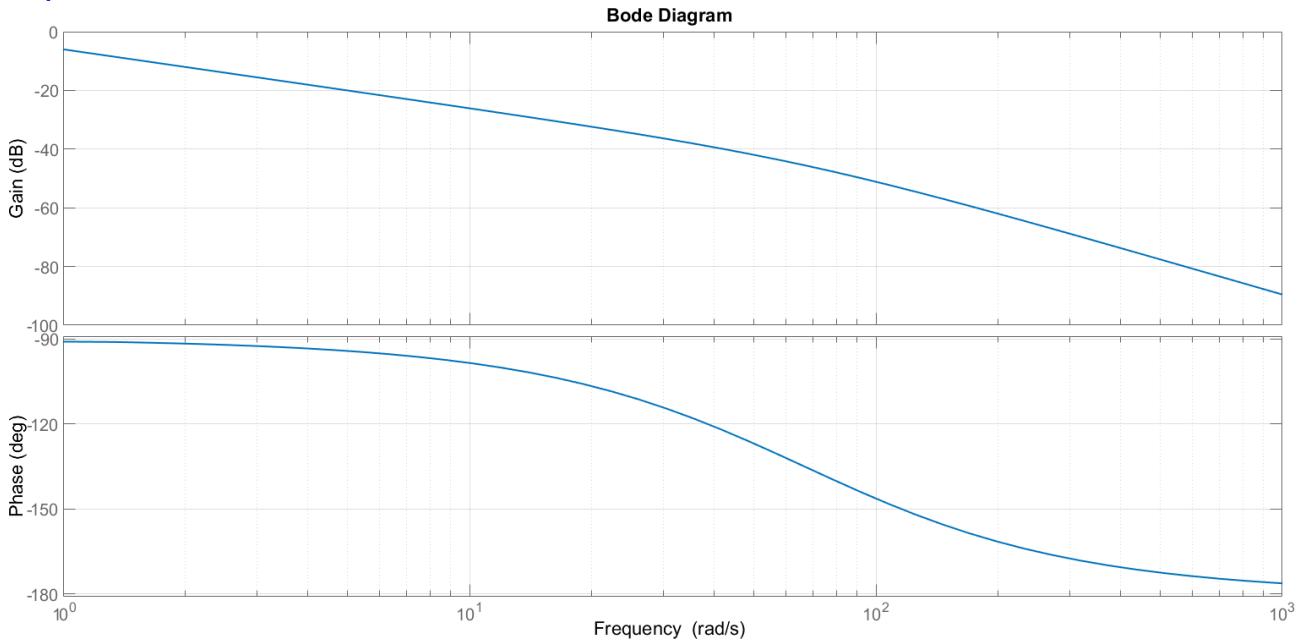
Question 7 Donner la fonction de transfert du bloc $B(p)$ et la valeur du coefficient du bloc C en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de k , la fonction de transfert en boucle ouverte $H_O(p)$.

Correction B assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc $B(p) = \frac{1}{50p}$. Par ailleurs $C = \frac{360}{2\pi}$ incr/rad.

$$\text{On a donc } H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$$

Question 8 Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour $k = 1$. Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de k ? Justifier.

(R) Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à $-180 + 45 = -135^\circ$.



Correction Au vu du tracé, la phase est supérieure à -135° lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

Question 9 Calculer l'écart statique $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$ en incrémentés lorsque la consigne est un échelon de position : $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$.

Correction

Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart

On a $\varepsilon(p) = \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$. $\text{Cons}(p) = \frac{1}{p}$. On a alors $\varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0$.

Question 10 Calculer, pour la valeur k_{45} de k établie précédemment, l'écart statique $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$ en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant $C_r u(t)$ induit par les frottements secs.

Correction On a $\varepsilon(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left(\varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) = \text{Cons}(p) + B(p)CC_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \text{Cons}(p) \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} + C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} + C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{\frac{G_S}{1+Tp} R \frac{1}{50p} C}{k_c \left(1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1+Tp} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1+Tp)50p + CKG_S)} = C_r \frac{G_S RC}{k_c CK G_S} = C_r \frac{R}{k_c K}.$

On a donc $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = C_r \frac{R}{k_c K}$ soient $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95$ incr.

Question 11 La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc K qui annulerait cet écart.

Correction Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur $k = 1$.

Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

Modélisation par schéma-blocs

Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Question 12 Exprimer le coefficient du bloc H_2 et préciser l'unité.

Correction En notant x le déplacement en translation, on a $x = \frac{38,4}{2}\Theta$. On a donc $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

Question 13 Quelle relation doit vérifier le produit P des gains des blocs C_1, H_1, H_2 ? Justifier. Exprimer le coefficient c_1 en incrément par mètre du bloc C_1 .

Correction Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que $P = 1$.

On a $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$.

On a donc $c_1 = 148810 \text{ incr m}^{-1}$.

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

Question 14 Exprimer le nouveau coefficient c_2 du bloc C_1 ainsi que le nouveau produit P_1 .

Correction On souhaite maintenant que $P_1 = \frac{1}{10}$ et $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$.

Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

Question 15 Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert $H_3(p)$; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

Correction Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de $K = 1$.

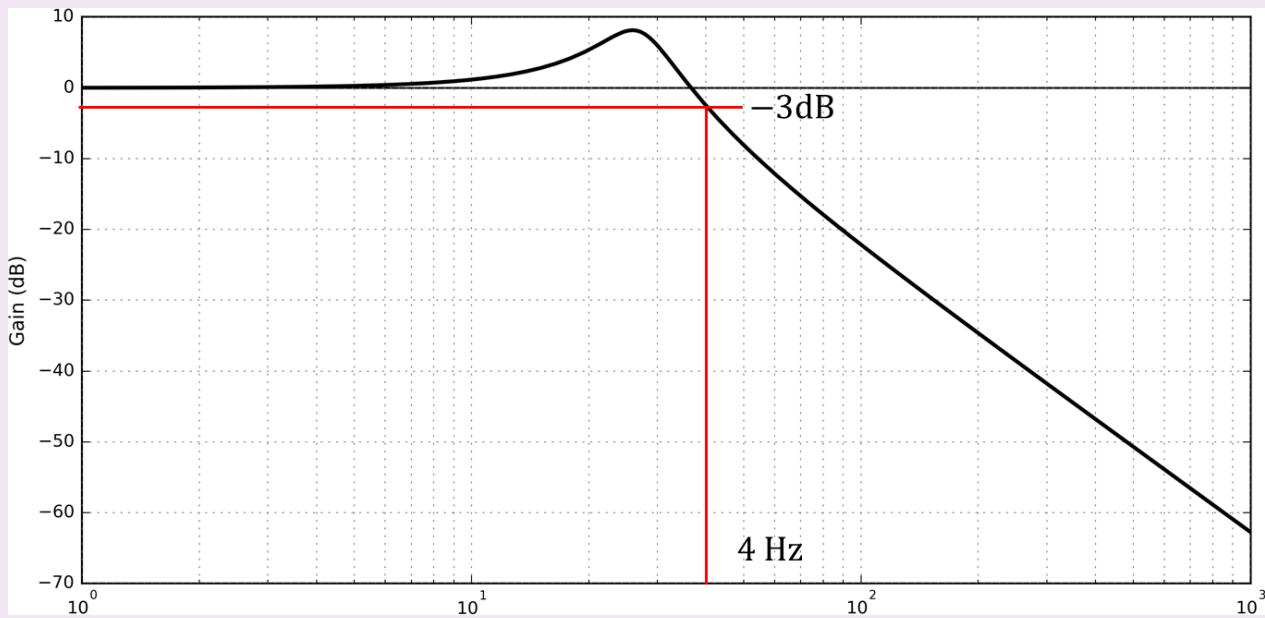
Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve $\xi = 0,2$.

Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a $\omega_0 Tr = 15$. On a donc $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

Question 16 Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait?

Correction On trace le diagramme de Bode. La bande passante à -3 dB est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.



Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de $H_3(p)$, de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit m_1 la masse du solide S_1 . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté \vec{z} . L'origine O du mouvement de S_1 correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit a_0 l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota : a_0 est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par : $m_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0$.

Question 17 Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique : $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$, exprimer le coefficient d'amortissement ξ_3 et la pulsation propre ω_{03} du mouvement en fonction de k_0 , f_0 , m_1 .

Correction On a $m_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0$.

$$\text{On a donc } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

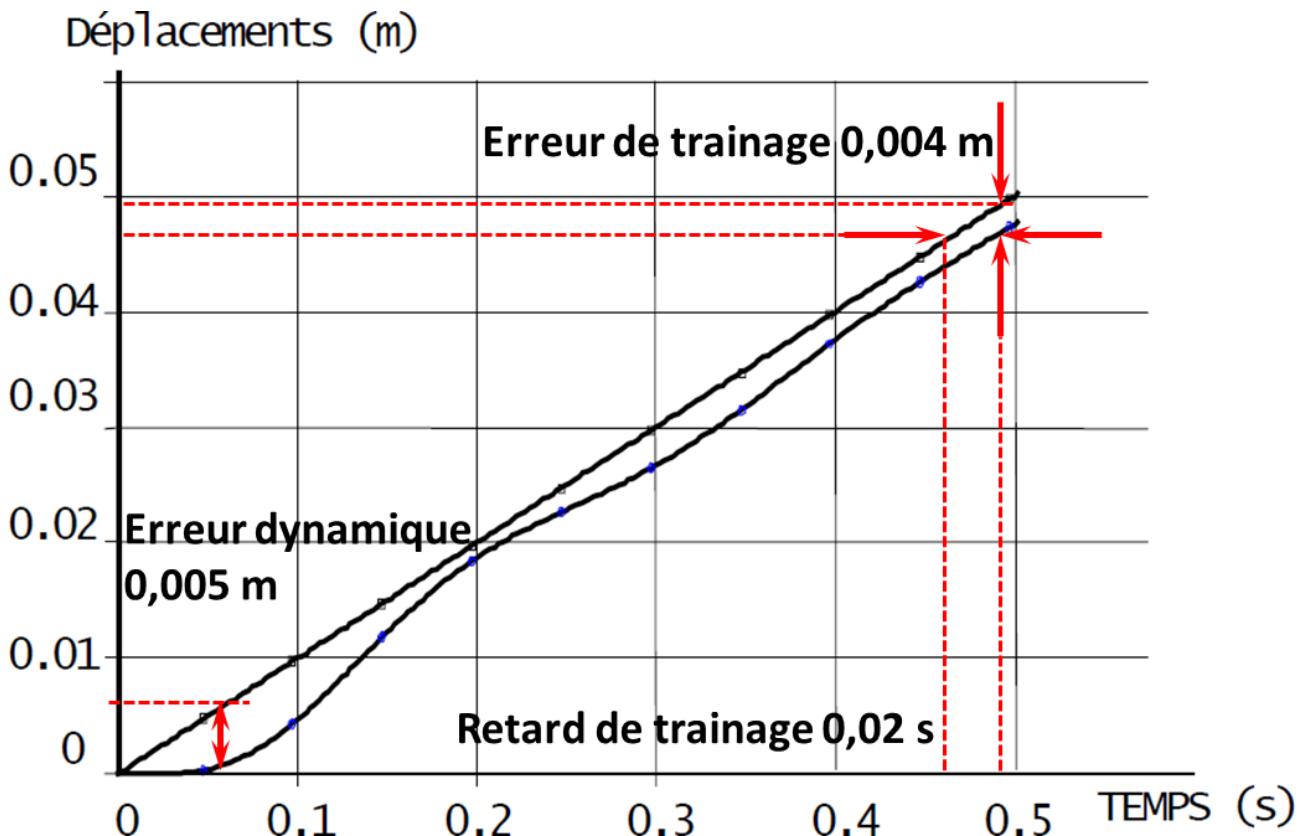
On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface : $m_1 = 1,6 \text{ kg}$.

Question 18 Pour la valeur de ω_{03} calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur k_0 (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à -3 dB de 4 Hz . (On notera que $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$).

Correction On a $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$ or $\omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2$; donc nécessairement, $\omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} \Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1$
 $\Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}$.

Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

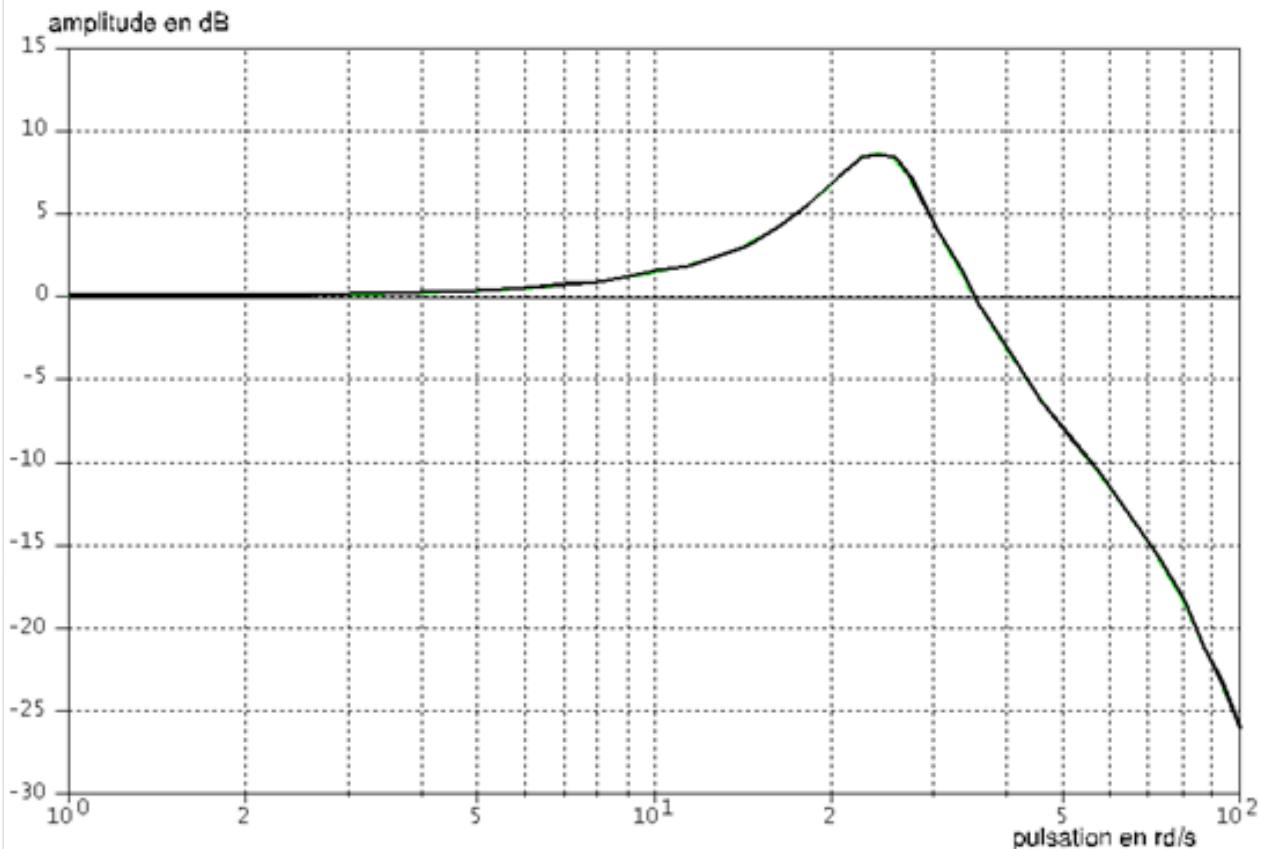
Question 19 Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse) ε_v , en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?



Correction

- Écart dynamique maximal : 5 mm.
- Écart de traînage (ou de vitesse) ε_v , en régime établi : 4 mm.
- Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

On donne, la courbe d'amplitude (gain) de $H(p)$ pour $p = j\omega$ dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

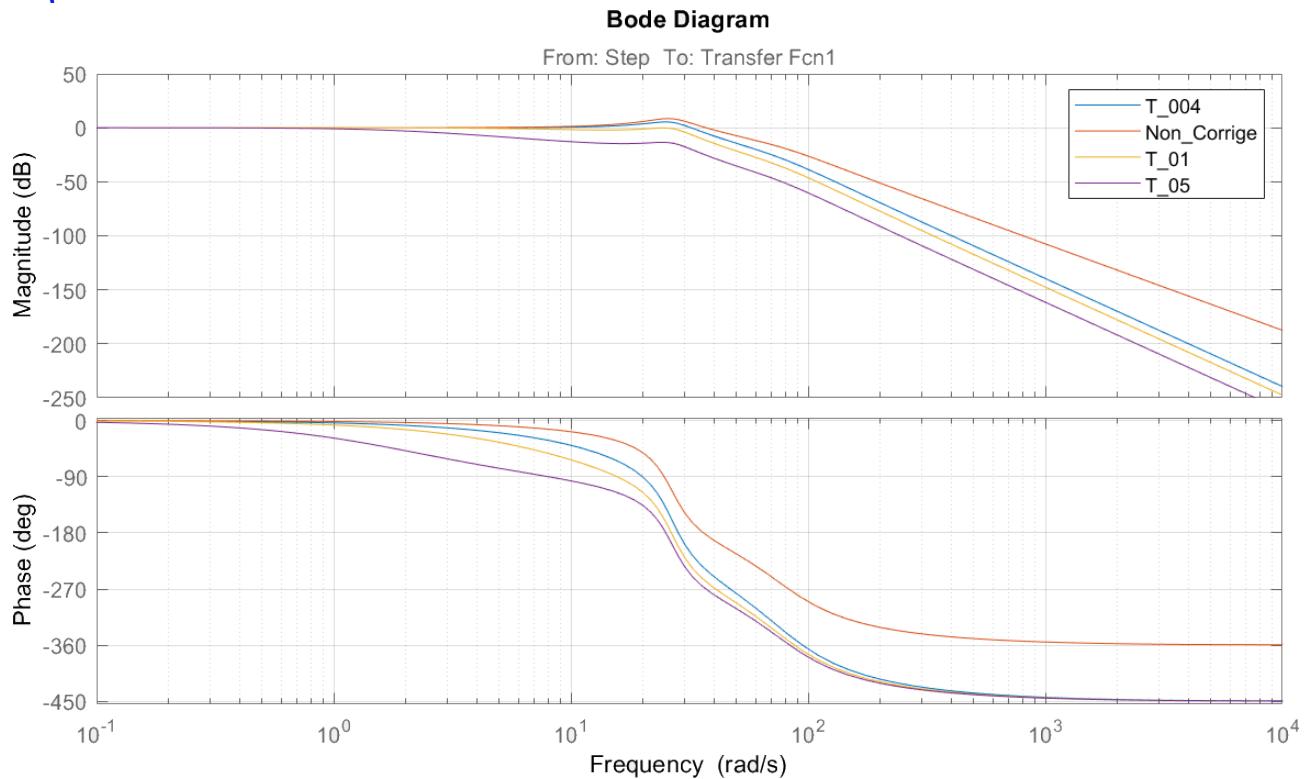


Question 20 Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

Correction Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$. À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport S/E est donc de $10^{8/20} = 2,5$ ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténuées/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

Amélioration des performances dynamiques

Question 21 Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténués de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?



Correction Le filtre $T_2 = 0,1\text{ s}$ permet d'atténuer le gain à une pulsation de 25 rad s^{-1} sans trop atténuer le gain à des pulsations inférieures à $6,3\text{ rad s}^{-1}$.

1. $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p); E(p) = k_e\Omega_{\text{réé}}(p); C_{\text{réé}}(p) = k_c I(p); C_{\text{réé}}(p) - C_r(p) - f_v\Omega_{\text{réé}}(p) = k_{\text{équ}}p\Omega_{\text{réé}}(p).$
2. $M(p) = \frac{k_c}{\frac{J_{\text{équ}}L}{k_e k_c + Rf_v} p^2 + \frac{RJ_{\text{équ}} + Lf_v}{k_e k_c + Rf_v} p + 1}.$
3. .
4. .
5. $M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{RJ_{\text{équ}}}{k_e k_c + Rf_v} p + 1}.$
6. $G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$, on a $\tau = 0,02 \text{ s}$.
7. $B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad}, H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1+Tp}.$
8. .
9. L'écart statique est nul.
10. $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}$
11. $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$
12. .
13. .
14. .
15. $H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$
16. .
17. $\omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1}$ et $\xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$
18. $\Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$
19.
 - Écart dynamique maximal : 5 mm.
 - Écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi : 4 mm.
 - Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.
20. .
21. $T_2 = 0,1 \text{ s.}$

Synthèse 03 – Corrigé



Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006 – Ressources UPSTI

Savoirs et compétences :



Mise en situation

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

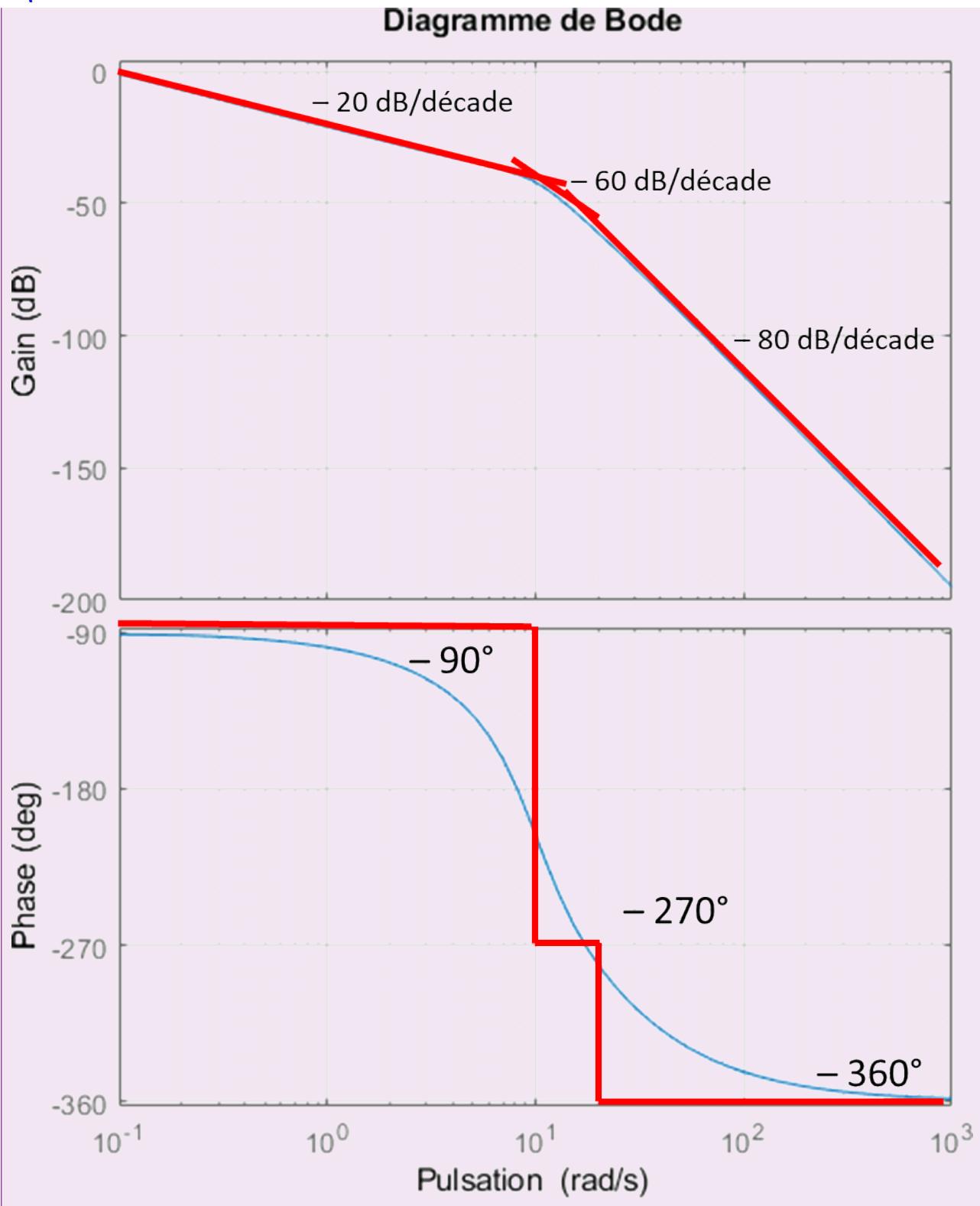
Question 1 En prenant $C(p) = 1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

Correction On a pour $H_1(p)$, $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$ et $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$ soit $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$. Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$ et $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$.

Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, on a $\text{FTBO}(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$. On a donc $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$.

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	-40 dB/decade	-40 dB/decade	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	-20 dB/decade	-20 dB/decade	-20 dB/decade	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	-20 dB/decade	
$\ \text{FTBO}(j\omega)\ _{dB}$	-20 dB/decade	-60 dB/decade	-80 dB/decade	
$\text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega))$	-90°	-270°	-360°	



Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est : $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$.

Question 2 Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.

Méthode Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$. On peut alors définir la marge de phase par $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$.

Correction La pulsation de coupure souhaitée est $\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$. On cherche donc K_r et T_i tels que $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\underbrace{\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \arg \left[\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \right] - 98,5$$

(R)

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque $\omega = \omega_c$. L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$ Soit $\arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5 + 180 \geq 60$ et $\arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$.

Question 3 Calculer la valeur minimale, $T_{i\min}$, que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.

Correction On en déduit que pour $\omega = \omega_c = 1$, $\arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) - 90 \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) \geq 68,5^\circ$ et donc $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$.

!

Attention : à ce stade, la marge de phase serait de 60° SI la pulsation de coupure était de 1 rad s^{-1} ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

Question 4 En adoptant $T_i = T_{i\min}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

Méthode Il faut chercher K_r tel que $20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0$.

Correction En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ -20 dB lorsque $\omega = 1$. La fonction de transfert du correcteur est $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}$.

Le gain dB du correcteur doit donc être de 20 dB lorsque $\omega = 1$: $20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i \omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1 \Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$.

On a donc $K_r = 9,3$.

Analytiquement (à vérifier....) $20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1$.

$$\begin{aligned} ||\text{FTBO}(j\omega)|| &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \frac{1+T_i p}{T_i p} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1+T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1+0,1p+0,01p^2} \frac{1}{1+0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1+0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\ &= \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2}}{\sqrt{1+0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2)^2 + 0,1^2}} \end{aligned}$$

Question 5 Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

Méthode Soit ω_φ la pulsation telle que $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$. La marge de gain s'exprime alors par $MG = -20 \log |H(j\omega_\varphi)|$.

Correction **Approche analytique** On résout $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

Approche graphique

Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Question 6 En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

Correction

Question 7 Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

Correction • $K_f = 1$: lorsque ω tend vers 0, le gain tend vers 0;

• $\omega_0 = 0,5$: valeur de la pulsation de résonance;

$$\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s};$$

$$\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s};$$

• $\xi < 0,7$ (résonance).

Question 8 En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$.

Correction

La pulsation propre ω_0 est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{(1 + 3,3p)}{(1 + 1,66p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$.

Question 9 Calculer le temps du 1^{er} maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $\nu_c(t) = \nu_{c0} u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.

Correction

Calcul du temps du 1^{er} maximum

Le temps du 1^{er} maximum est donné par $f(t_m) = 0$, soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à $t_m = 3,3$ s.

Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionale, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour $t = t_m$:

$$\nu(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (ay(t) + b\dot{y}(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec $y(t) = te^{-t/\tau_2}$ dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2} dt = \left[-\tau_2 te^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$\nu(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[-\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour $t = t_m$ on obtient $\nu(t_m) = 1,13$, soit un dépassement de 13%.

Question 10 Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

Correction

- Le temps du 1^{er} maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

Question 11 Déterminer la fonction de transfert $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose v_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $\|F_2(j\omega)\|$, de cette

fonction peut être approché par la relation : $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$.

Correction On a directement $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$.

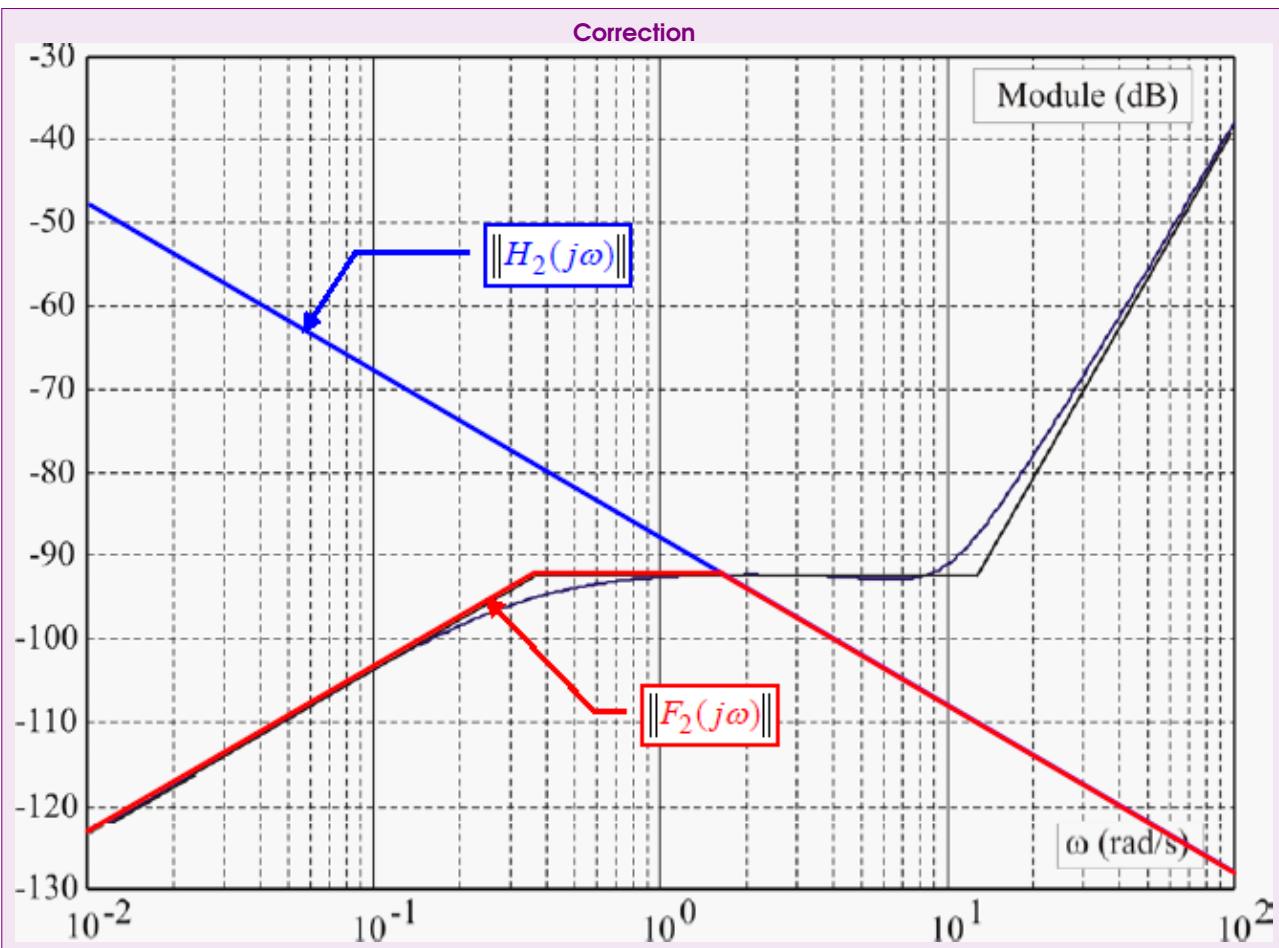
On peut alors déterminer le module et on a $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$.

Dans ces conditions :

- si $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \gg 1$ alors $\|F_2(j\omega)\| \simeq \left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \simeq \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$;
- si $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \ll 1$ alors $\|F_2(j\omega)\| \simeq \|H_2(j\omega)\|$.

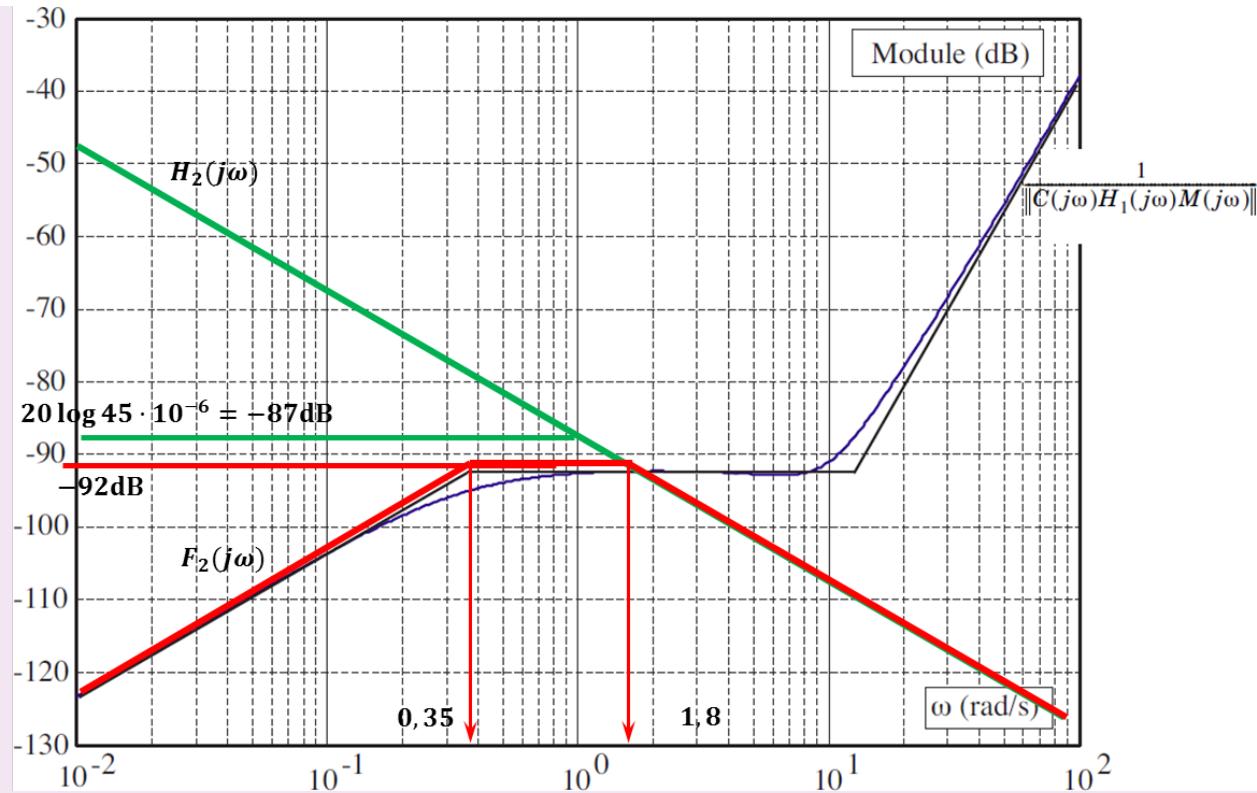
On peut en conclure que $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$.

Question 12 La figure suivante comporte le tracé de la fonction $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$. Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction $\|H_2(j\omega)\|$.



Question 13 En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction $\|F_2(j\omega)\|$. En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert $F_2(p)$ entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

Correction



En analysant les brisures de F_2 , on peut proposer la fonction de transfert suivante : $F_2 = -\frac{Kp}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$

avec $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \simeq 2,9 \text{ s}$, $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \simeq 0,6 \text{ s}$. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le déivateur existe, on a donc $20 \log K \omega = 20 \log 0,01 K = -123$ soit $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7 \cdot 10^{-5}$.

Au final, $F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1 + 2,9 p)(1 + 0,6 p)}$.

Question 14 Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme : $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$.

Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle p_2 étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de p_1 , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

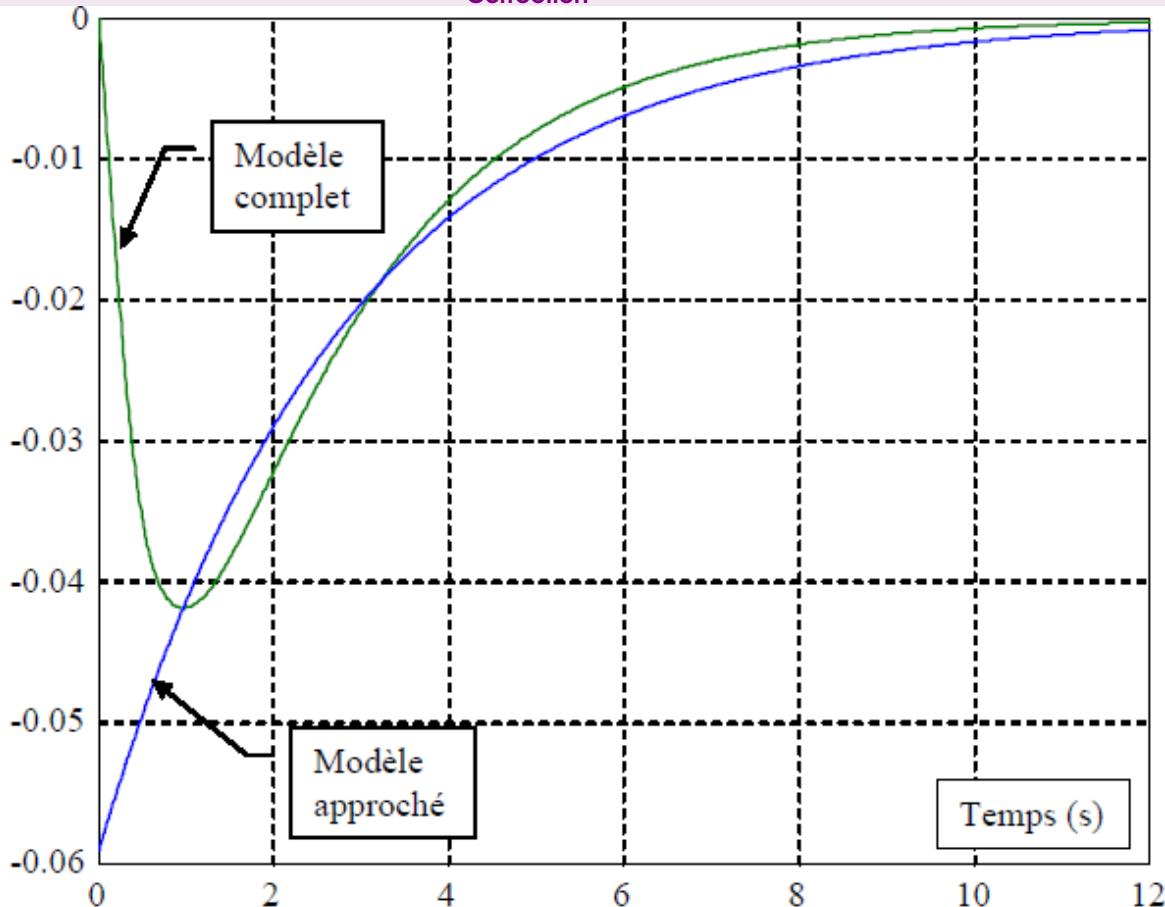
$$F_2(p) = -\frac{p}{(1 + 2,8p)}$$

Question 15 En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{ext} = F_0 u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0 = 2000 \text{ N}$.

Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1^{er} ordre en partant d'une condition non nulle ($v_1 = 0,05$) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de $t_r = 3T = 8,4$ s.

Question 16 Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en précisant la valeur initiale $v_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale $v_1(0)$ (valeurs à considérer en valeur absolue).

Correction


Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

Retour sur le cahier des charges

Question 17 Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

Correction

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.

1. ...
2. $\arg\left[\frac{T_i p + 1}{T_i p}\right] \geq -21,5^\circ$.
3. $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54$ s.
4. ***
5. ***
6. ***
7. ***
8. ***
9. ***
10. ***

Synthèse 04 – Corrigé



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec PSI 2016

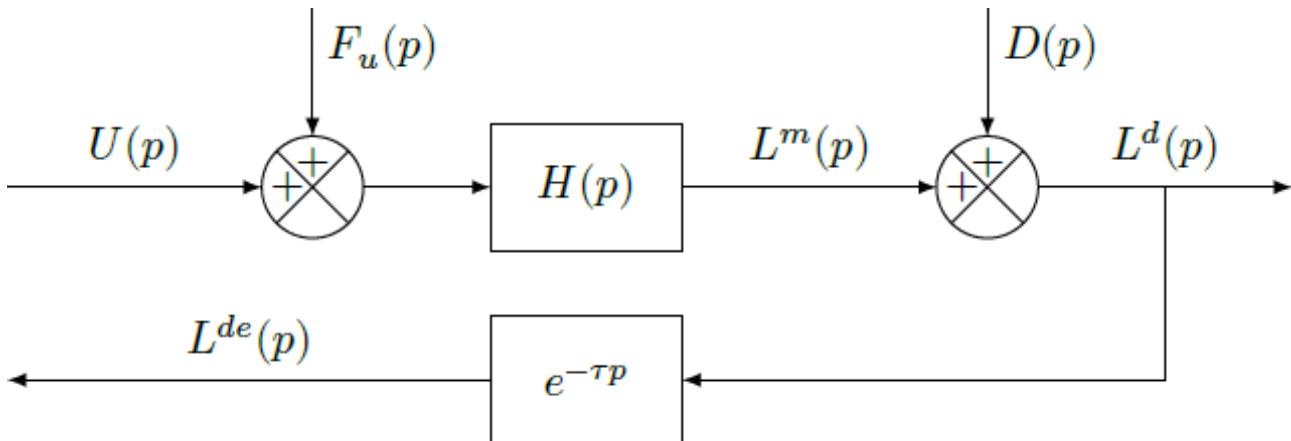
Savoirs et compétences :



Mise en situation

Objectif En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure suivante.



Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

On suppose :

- qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques;
- pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont $F_u(p)$ est la transformée de Laplace;
- que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont $D(p)$ est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe;
- pour l'axe considéré que $L^m(p)$, $L^d(p)$ et $L^{de}(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur L^m est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur);
- que $U(p)$ représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1+0,01p)}$, la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur $\tau = 0,04$ s.

Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

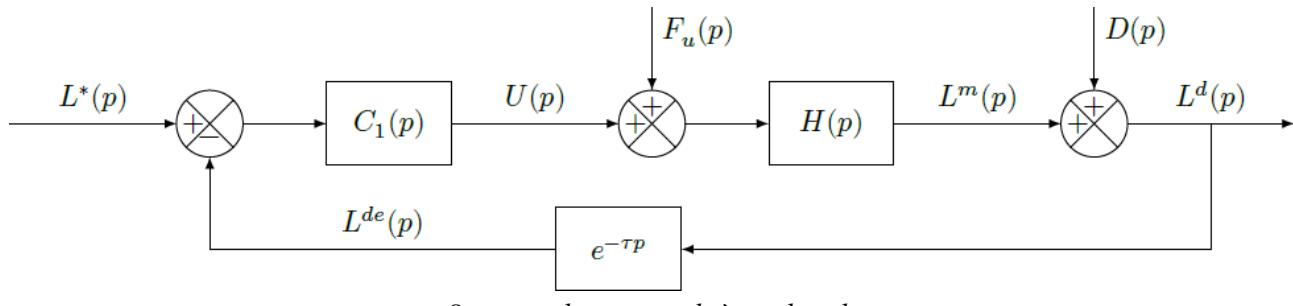
- pulsation de coupure ω_c à 0 dB en boucle ouverte $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$;
- marge de phase $\Delta\varphi \geq 45^\circ$.

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation $L^{de}(t)$ de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté $C_1(p)$ et la consigne $L^*(p)$, est représentée par le schéma de la figure suivante.



En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

Question 1 La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant $C_1(p) = 1$).

Correction

Question 2 Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

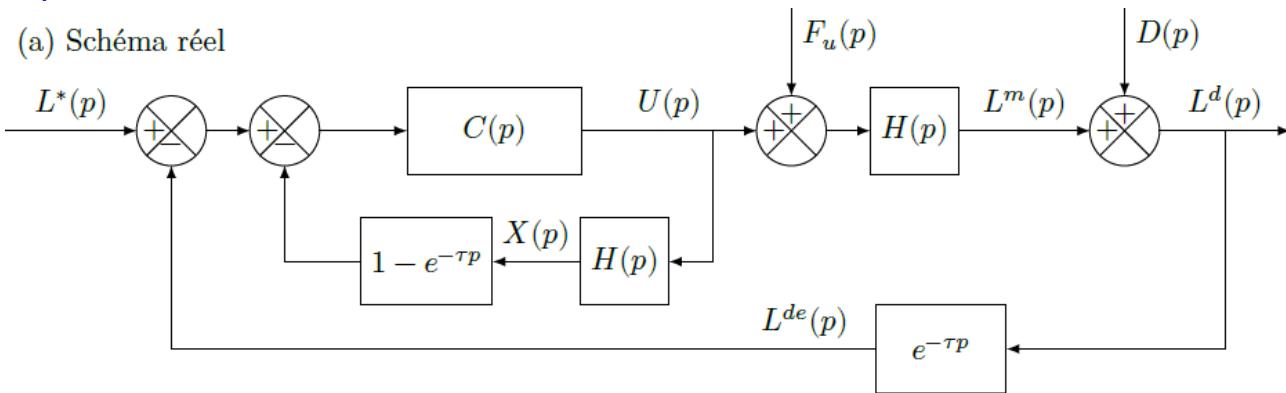
- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur $C_1(j\omega)$ doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur τ ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{Ti_1 p} \right)$, justifier qu'un correcteur de ce type :
 - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
 - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

Correction

Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ($X(p)$ est la transformée de Laplace d'une grandeur $x(t)$ interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).

(a) Schéma réel



(b) Schéma fictif

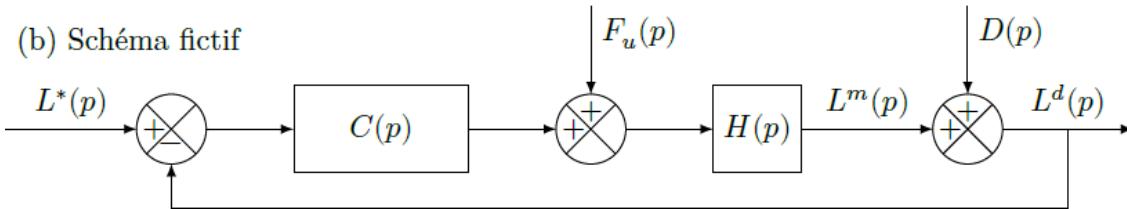


Figure 3 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard

Question 3 En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- déterminer la condition en phase, soit $\arg(C(j\omega))$, que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale T_i ;
- pour la valeur de T_i obtenue, déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

Correction

Question 4 Pour une consigne nulle $L^*(t)$, une perturbation en sortie nulle $d(t) = 0$ et un échelon de perturbation en entrée $f_u(t) = F_0 h(t)$ où $h(t)$ est l'échelon d'Heaviside :

- déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- compte tenu de la forme de $H(p)$, en déduire alors le comportement de la grandeur $x(t)$ lorsque t tend vers l'infini;
- au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

Correction

Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe $L^m(t)$ permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence $L^{m*}(t)$. Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$ la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne ;
- la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée $L^{de}(t)$.

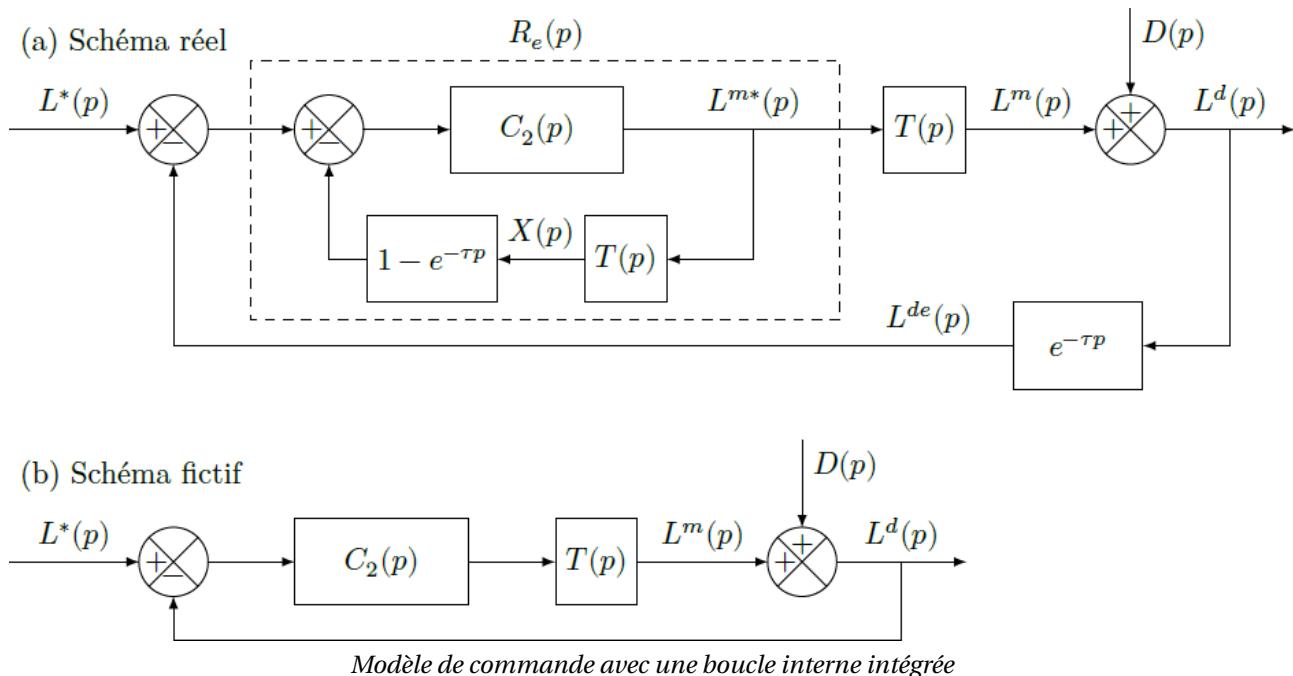
La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée $T(p)$ où :

- $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$ est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure) ;

- $L^{m*}(p)$ est la consigne de l'asservissement de la boucle interne ;
- l'effet de la perturbation $F_u(p)$ est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée ;
- les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace $D(p)$.

Pour la conception de la loi de commande :

- une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée ;
- on synthétise dans ce cas un correcteur $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$ de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur $R_e(p)$ est réalisé en utilisant $C_2(p)$ selon une structure identique à celle de la figure précédente (a) ;
- le calcul du régulateur $C_2(p)$ ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.



Question 5 En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur $L^m(t)$ en régime permanent, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$, en réponse à une perturbation $d(t)$ en échelon $d(t) = D_0 h(t)$. Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur $R_e(p)$ selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point de vue interne.

Correction

Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position $L^d(t)$ en réponse à une consigne en échelon $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$ avec $L_0 = 10 \text{ mm}$ et à une perturbation en échelon $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$ avec $D_0 = 10 \mu\text{m}$.

Question 6 Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

Correction

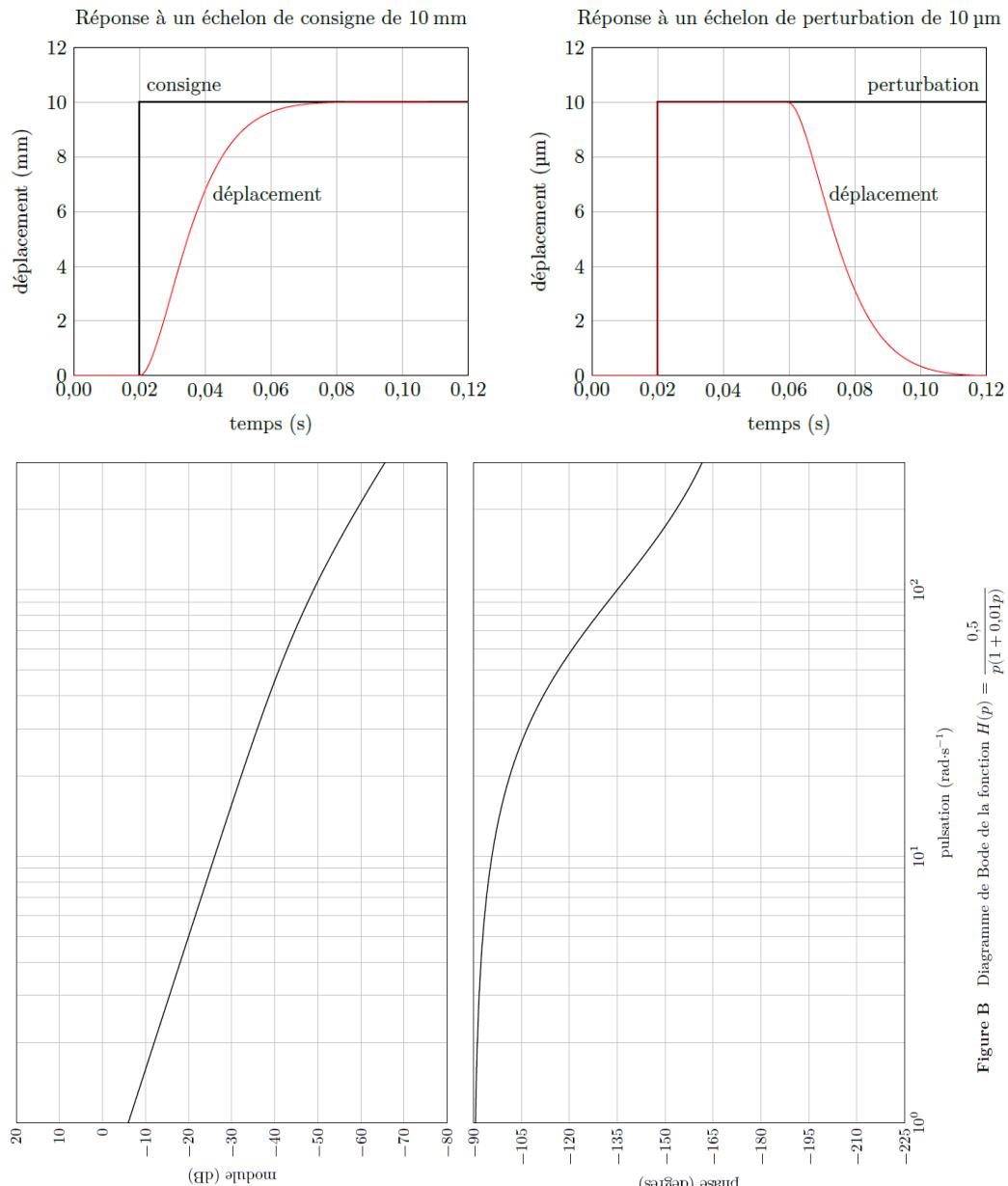


Figure B Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$