

## Colle

### Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

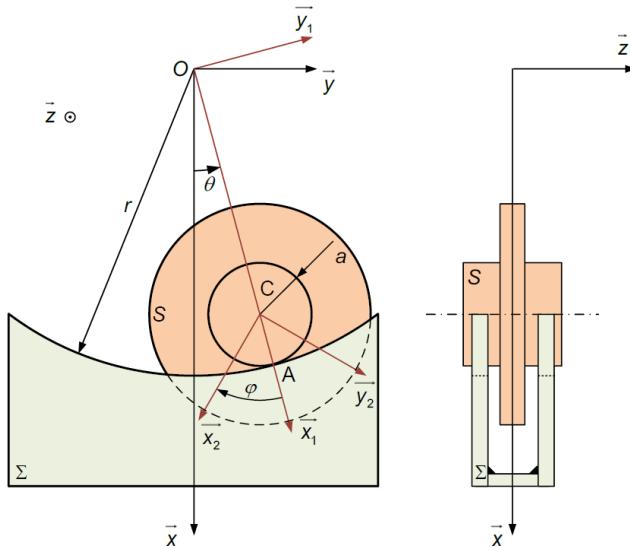
Sources multiples

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

### Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti  $\Sigma$ .



Soit  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti  $\Sigma$ . On désigne par  $\vec{g} = g \vec{x}$  l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de  $\Sigma$  sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe  $(O, \vec{z})$ , de rayon  $r$ . Le solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$  ( $a < r$ ).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon  $S$ , de centre  $C$ , roule sans glisser au point  $A$  sur la portée cylindrique de  $\Sigma$ ;

- soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  le repère, tel que le point  $C$  soit sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- soit  $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  un repère lié à  $S$ . On pose  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

Notons  $I$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à son axe de symétrie  $(C, \vec{z})$  et  $f$  le coefficient de frottement entre  $S$  et  $\Sigma$ .

On donne  $a = 12,3 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .

**Question 2** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur  $\theta$ .

**Question 3** En supposant que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement, déterminer la période  $T$  des oscillations de  $S$ .

**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de  $S$ , sachant que  $T = 5 \text{ s}$ .

En supposant toujours que l'angle  $\theta$  reste petit, on pose  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$ .

On suppose à la date  $t = 0$ , tel que  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

**Question 5** Déterminer la valeur maximale de  $\theta_0$  pour que  $S$  roule sans glisser sur  $\Sigma$ .



## Colle



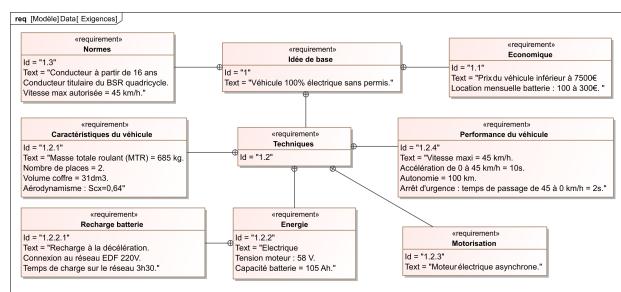
### Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

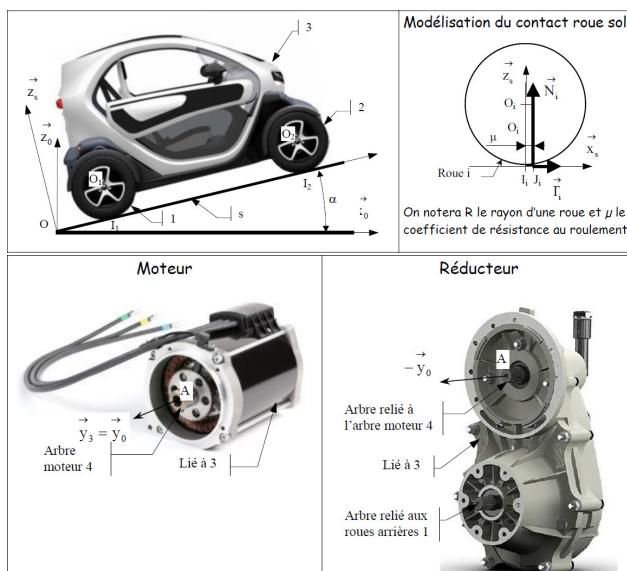
## Mise en situation



## Choix du motoréducteur

**Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



#### Hypothèses générales :

- le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est sup-

posé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ ;

- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3 \times 10^{-3}$  m. On pose  $\vec{I}_1 J_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{T}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{T_i}{J_i} \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ 0 \end{array} \right\}_{J_i}$  avec  $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  et  $i = 1$  (roues arrières) ou  $2$  (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$ .

#### Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe ( $A, \vec{y}_0$ ) :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe ( $O_i, \vec{y}_0$ ) :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- les autres inerties seront négligées.

**Grandeur cinétiques :** Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

#### Choix de l'ensemble moto-réducteur

#### Équation de mouvement du véhicule

**Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

**Notations :**

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

**Question 1** Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :

- écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- en déduire une équation faisant intervenir  $C_m$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $v$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  .....
- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer  $(N_1 + N_2)$ . Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

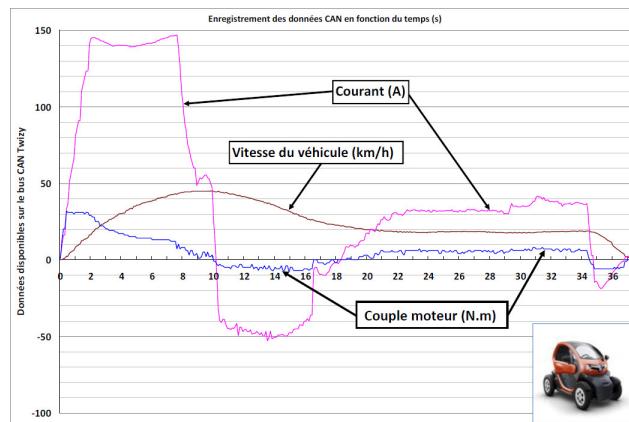
**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10})$ ,  $(v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{r C_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m$ ,  $J_m$ ,  $J_R$ ,  $R$  et  $r$ .

### Détermination du coefficient de résistance au roulement $\mu$

**Objectif** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- justifier dans quelle phase se placer;
- définir la variable mesurée;
- définir les hypothèses nécessaires;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .



### Choix du moto-réducteur

**Objectif** Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{mini}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

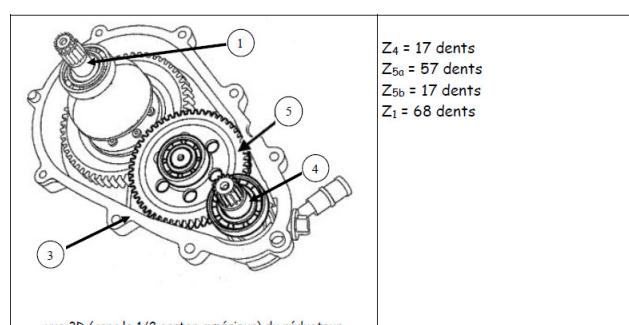
**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

**Objectif** Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.



## Colle



### Robot de dépose de fibres optiques

Mines Ponts – PSI – 2004

Savoirs et compétences :

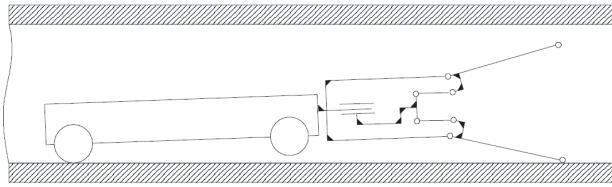
- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

#### Présentation

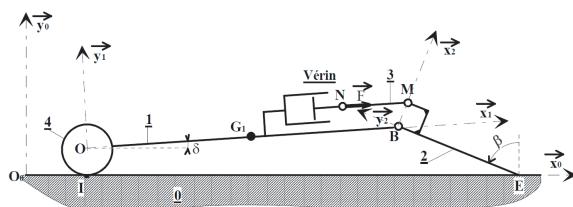
L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

**Objectif** En fin des mouvements des bras, on doit avoir  $\delta = 14^\circ$  et  $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$ .

De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.



Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action  $F$  du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant  $t$ , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :



#### Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- une tige **1** de longueur  $OB = L_1$ , de section négligeable, de masse  $m_1$ , et de centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2} \vec{x}_1$ ;

- une roue **4**, de centre  $O$ , de rayon  $R = 0,07 \text{ m}$ , de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec **1**;
- un bras **2** constitué de deux éléments **B E** et **B M** tels que  $\overrightarrow{BE} = -a \vec{y}_2$  et  $\overrightarrow{BM} = b \vec{x}_2$ , de section et de masse négligeables;
- une biellette **3** (**N M**) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige **1**;
- un vérin hydraulique de masse négligeable.

En **I**, le contact entre la roue **4** et la paroi **0** se fait par roulement sans glissement.

En **E**, le contact entre le bras **2** et la paroi **0** se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action  $\vec{F}$  du vérin sur la biellette **3a**, à chaque instant, pour direction  $\vec{x}_1$  :  $\vec{F} = F \vec{x}_1$ .

#### Repères et paramétrage

- $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , repère associé à la canalisation **O** et supposé galiléen.
- $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , repère associé à la tige **1**.
- $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , repère associé au bras **2**.
- $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .

#### Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à  $\delta = 14^\circ$ , une vitesse  $\dot{\delta}$  inférieur à  $50^\circ/s$ .

#### Modélisation dynamique

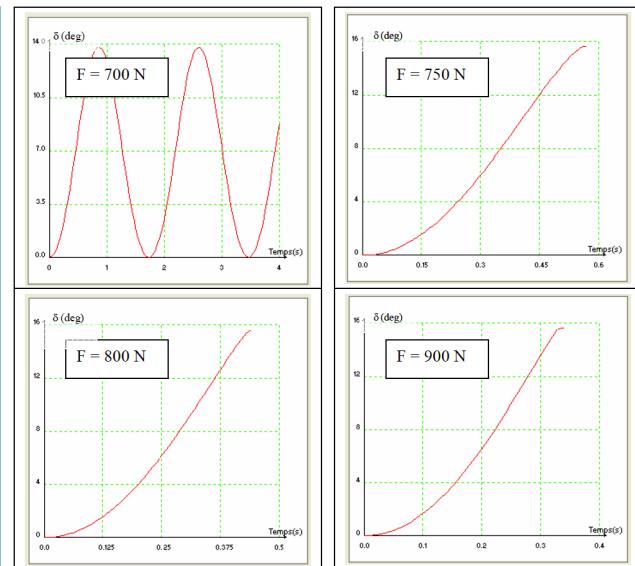
**Question 1** Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ , puis la calculer.

**Question 2** Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma$ .

**Question 3** Donner la puissance intérieure à  $\Sigma$ .

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre  $F$ ,  $\delta$ , et  $\beta$ .

Des simulations pour différentes valeurs de  $F$  donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de  $\delta$  en fonction du temps.



**Question 5** Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses  $\dot{\delta}$  en fin de course. En déduire les valeurs de  $F$  respectant le cahier des charges.

## Colle



### Télécabine à stabilité accrue : le funitel

Mines Ponts PSI – 2003

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

#### Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câble mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).

Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement  $f = 0,03$ . 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme  $p$  :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2$  avec  $p$  en pascal,  $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$  masse volumique de l'air,  $V_a$  module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en m/s.

**Objectif** On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique gali-

léenne, notée  $E_{ct}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_v$ , des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Sur la ligne, les cabines se déplacent à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ . En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ . Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble. On envisagera une accélération constante des cabines de  $a = 1,3 \text{ m s}^{-2}$ . **Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

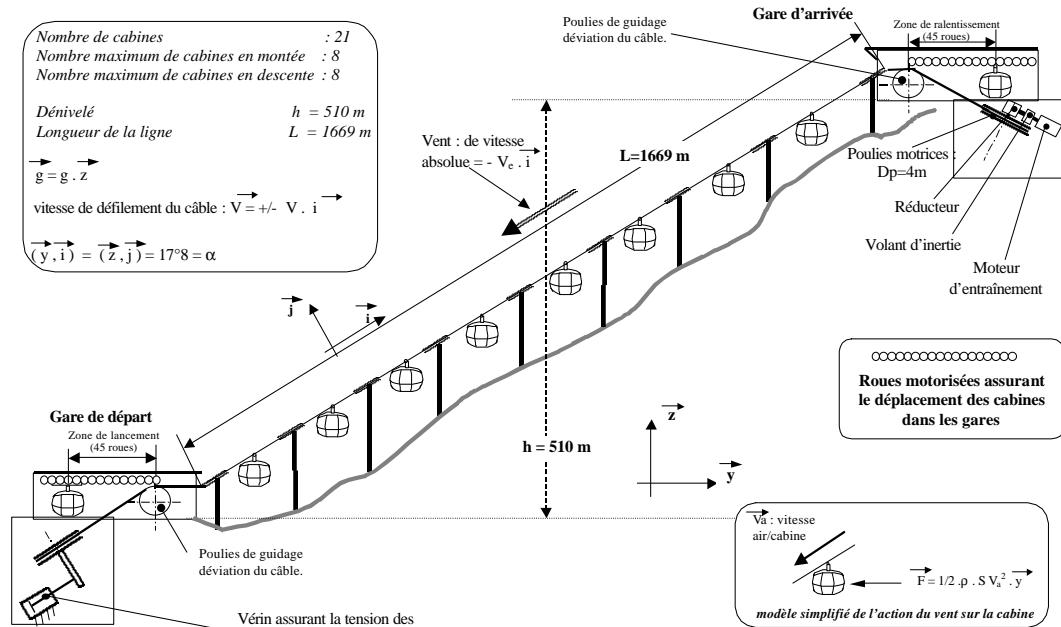
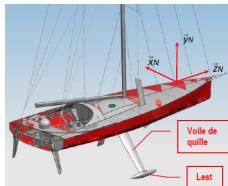


FIG. 1 : Ligne totale

Extrait du cahier des charges		Autres caractéristiques techniques	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	M <sub>c</sub> =2500kg
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	S <sub>l</sub> = 10m <sup>2</sup>
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	S <sub>f</sub> = 7,1 m <sup>2</sup>
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	26 M <sub>p</sub> = 2080 kg	Masse linéique du câble	$\mu = 8,47 \text{ kg/m}$
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	V = 7,2 m/s	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d' entraînement	N = 1700 tr/min	Diamètre d'une poulie motrice :	D <sub>p</sub> = 4m
Longueur de la ligne	L = 1669 m	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	I <sub>M</sub> = 575.10 <sup>3</sup> m <sup>2</sup> .kg
Dénivelé	h = 510 m		

## Colle



### Quille pendulaire \*

Concours Commun Mines Ponts 2014

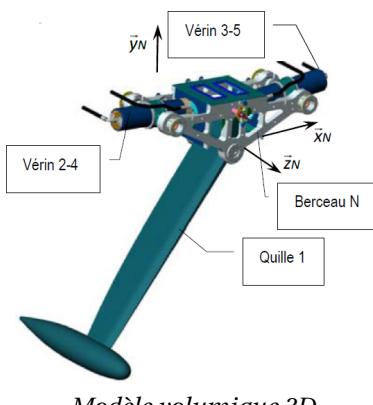
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe ( $O, \vec{z}_N$ ) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



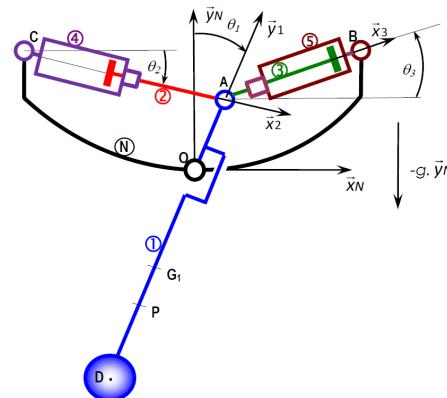
Modèle volumique 3D

**Objectif** L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

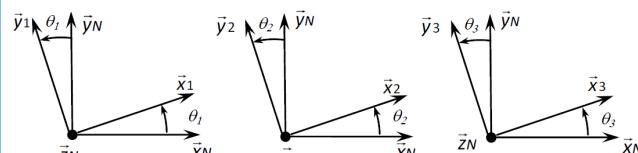
#### Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère  $R_N$  est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que :  $F_{h2} > 0$  et  $F_{h3} = 0$ . Le vérin 2–4 est alors moteur et le vérin 3–5 est libre ( $F_{h2}$  désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc  $-F_{h2}$  qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.



Modèle 2D



Paramétrage

#### Données géométriques, massiques et inertielles

- $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1; \overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\vec{x}_2;$   
 $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\vec{x}_3,$
- Solide 1, masse  $M_1$ , centre d'inertie  $G_1$ ,  $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\vec{y}_1$ ,  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}$ .
  - Solide 2, masse  $M_2$ , centre d'inertie  $G_2$ ,  $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\vec{x}_2$ ,  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$ .
  - Solide 3, masse  $M_3$  =

$$\begin{aligned} M_2, \text{ centre d'inertie } G_3, \\ \overrightarrow{AG_3} = L_2\vec{x}_3, I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}. \\ \bullet \text{ Solide 4, masse } M_4, \text{ centre d'inertie } C, I_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_N)}. \\ \bullet \text{ Solide 5, masse } M_5, \text{ centre d'inertie } B, I_B(5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_N)}. \end{aligned}$$

#### Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2}\vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_C$ .
- Action de pression de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_{h3}\vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_B$ .

- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action hydraulique de l'eau sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$  avec  $\overrightarrow{OP} = -h \vec{y}_1$ .

## Vecteurs vitesse

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

- $\vec{V}(G_1, 1/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_2, 2/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_3, 3/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(A, 2/4)$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

## Energie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à  $E$  en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à  $E$ . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $N$ . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position  $\theta_1 = 0$  à la position  $\theta_1 = 45^\circ$  en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position  $\theta_1 = 0$  en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

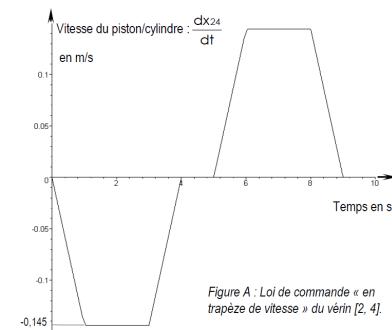
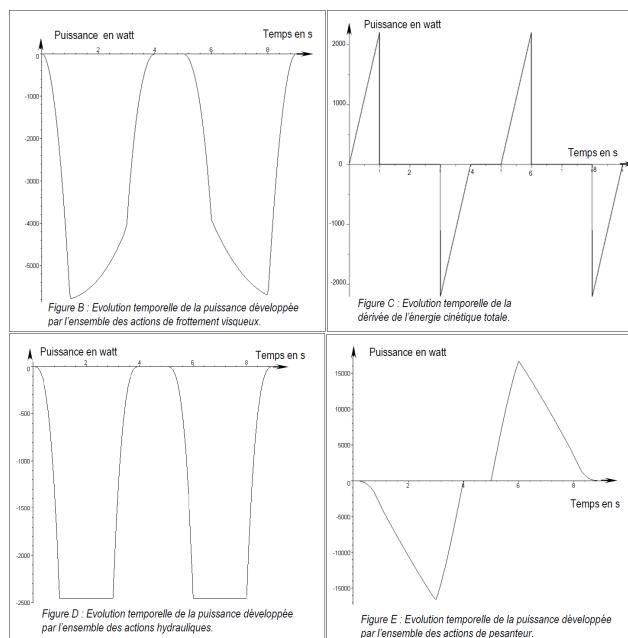


Figure A : Loi de commande « en trapèze de vitesse » du vérin [2, 4].

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure suivante.



**Question 8** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

## Colle



### RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain\*

Concours Commun Mines Ponts 2009

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Mise en situation

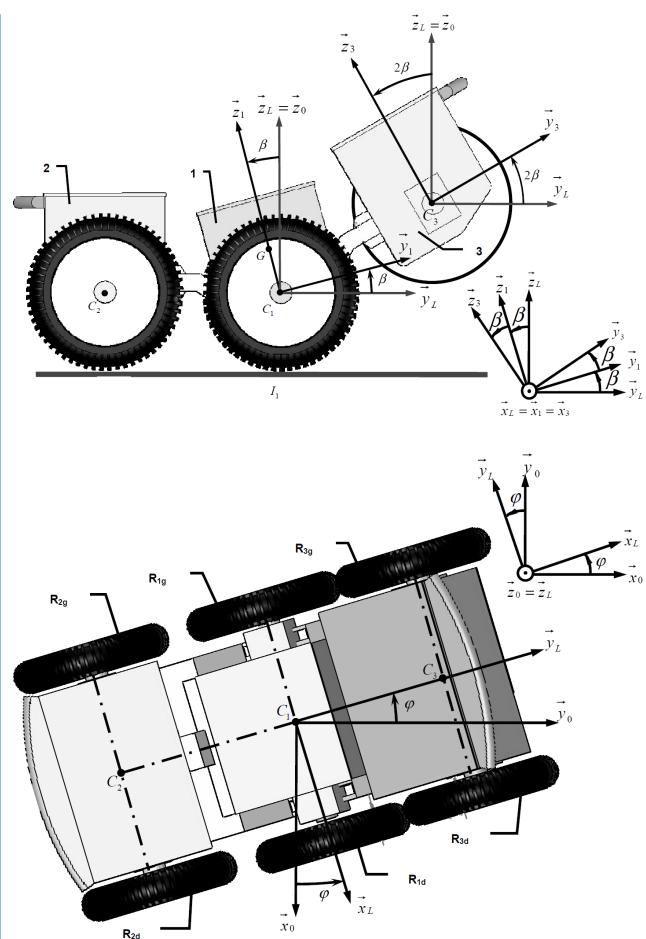
Le robuROC 6 est un robot mobile développé par la société ROBOSOFT. Cette plateforme robotisée a été conçue pour des applications de recherche et d'exploration en milieu extérieur. Elle est équipée de 6 roues motrices indépendantes, de même diamètre, montées par paires sur 3 podes articulés en tangage et en roulis.

**Hypothèse(s)** Le mouvement de roulis n'est pas pris en compte. Il est fixé à une valeur nulle.

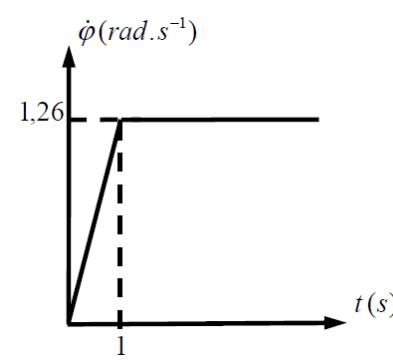
Les 6 roues de la plate-forme (notée *PF*) sont motorisées permettant ainsi de se déplacer sur des reliefs très accidentés. Cependant, la plate-forme ne comporte pas de systèmes spécifiques de direction. Le changement de direction est imposé par une rotation différentielle des roues du pôle central 1. Les roues avant et arrière doivent alors avoir des vitesses de rotation compatibles avec celles du pôle central 1. Lorsque le rayon de courbure de la trajectoire suivie par la plate-forme devient inférieur à 4 mètres, le groupe hydraulique est actionné pour passer en « Mode 2 roues instable ». La plate-forme ne tenant pas en équilibre sur 2 roues, elle retombe dès le début du mouvement sur les roues arrière ou les roues avant, passant donc en « Mode 4 roues Déplacement ». Cette intervention du groupe hydraulique permet ainsi de soulager le contact entre les roues des podes avant / arrière et le sol.

Pour cette étude, nous considérerons que la plate-forme retombe sur les roues arrière (figure suivante) et nous nous placerons dans le cas d'un rayon de courbure nul. Le mouvement de lacet étudié est donc une rotation autour de l'axe ( $C_1, \vec{z}_0$ ), d'angle  $\varphi$ , appelé angle de lacet.

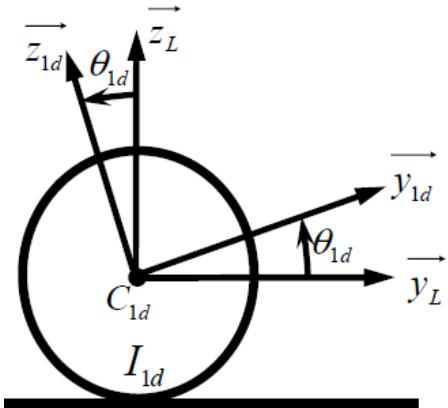
Ce mouvement est défini par le torseur cinématique suivant :  $\{\mathcal{V}(PF/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(PF/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{C_1}$ .



L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à respecter la loi de vitesse de la figure suivante.



Les roues centrales et les roues arrière sont en contact avec le sol. Dans ce mode, seules les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices. Elles roulent sans glisser sur le sol en  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . Les roues du pode avant 3 et du pode arrière 2 sont bloquées.



	Nom	Centre de gravité	Point de contact avec le sol	Vitesse de rotation / au pôle central	Repère associé
Roue centrale droite	$R_{1d}$	$C_{1d}$	$I_{1d}$	$\dot{\theta}_{1d}$	$R_{1d} = (C_{1d}, \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$
Roue centrale gauche	$R_{1g}$	$C_{1g}$	$I_{1g}$	$\dot{\theta}_{1g}$	$R_{1g} = (C_{1g}, \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$
Roue arrière droite	$R_{2d}$	$C_{2d}$	$I_{2d}$	nulle	-----
Roue arrière gauche	$R_{2g}$	$C_{2g}$	$I_{2g}$	nulle	-----

### Paramétrage

- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au sol **0** supposé galiléen;
- $\mathcal{R}_L = (C_1; \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  lié à la plate-forme **PF** tel que  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_L) = (\vec{y}_0, \vec{y}_L)$  appelé angle de lacet;
- $\mathcal{R}_1 = (C_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au pôle central **1** tel que  $\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_1) = (\vec{z}_L, \vec{z}_1)$ ;  $\beta$  est l'angle de tangage;  $\beta = 2^\circ$  (supposé constant pendant tout le mouvement du lacet);
- $\mathcal{R}_3 = (C_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié au pôle avant **3** tel que  $2\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_3) = (\vec{z}_L, \vec{z}_3) = 4^\circ$ ;
- $\vec{C}_1 \vec{C}_3 = b \vec{y}_3$  et  $\vec{C}_1 \vec{C}_2 = -b \vec{y}_L$  avec  $b = 553$  mm;
- la figure précédente permet de définir le paramétrage de chacune des roues de la plate-forme en contact avec le sol avec l'exemple de la roue centrale droite  $R_{1d}$ .

### Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides

Le mouvement de roulis étant nul et le mouvement de tangage étant fixé à une valeur constante, il est possible de définir l'ensemble rigide  $\Sigma$  constitué des trois podes **1**, **2** et **3**, des deux roues avant, des deux roues arrière et des bras d'articulation **4** et **4'**. Pour chaque constituant de cet ensemble, la masse est supposée répartie uniformément. Centre de gravité de  $\Sigma$ :  $G$  tel que  $\vec{C}_1 \vec{G} = a_G \vec{z}_1$  et  $a_G = 85$  mm,  $m_\Sigma = 152$  kg,  $I_{C_1}(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$  avec  $A = 30,2$  kgm<sup>2</sup>,  $B = 8,2$  kgm<sup>2</sup> et  $C = 32,3$  kgm<sup>2</sup>.

Roue droite ou gauche + axe de roue :  $R_{i,dou}$  ( $i$  correspond au numéro du pôle). Centre de gra-

vité de  $R_{i,dou}$  :  $C_{i,dou}$  tel que l'entraxe  $C_{ig}C_{id} = 2e$ ,  $\vec{C}_i \vec{C}_{id} = e \vec{x}_L$  et  $\vec{C}_i \vec{C}_{ig} = -e \vec{x}_L$  avec  $e = 340$  mm,  $m_r = 4$  kg, rayon d'une roue  $R = 225$  mm,  $I_{C_{i,dou}}(R_{i,dou}) = \begin{pmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{pmatrix}_{(\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)}$  valable dans toute base orthonormée directe contenant  $\vec{x}_L$  avec  $A_r = 0,1$  kgm<sup>2</sup> et  $B_r = 0,04$  kgm<sup>2</sup>.

Axe des moteurs du pôle central : les deux motoréducteurs centraux sont constitués chacun d'un moteur à courant continu alimenté en 48 V associé à un réducteur épicycloïdal de rapport de réduction  $k = 1/25$ . La matrice d'inertie en  $C_1$  d'un axe moteur droit  $M_{1d}$  ou  $M_{1g}$  (en rotation suivant  $(C_1, \vec{x}_L)$ ) est :  $I_{C_1}(M_{1d} \text{ ou } M_{1g}) = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & B_m & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)}$  avec  $A_m = 795 \times 10^{-7}$  kgm<sup>2</sup> et  $B_m = 8 \times 10^{-3}$  kgm<sup>2</sup>.

Les masses et inerties des autres pièces seront négligées.

### Modélisation du contact roue / sol

Les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices, elles roulent sans glisser aux points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . On pose  $\vec{C}_{1d} \vec{I}_{1d} = -R \vec{z}_L$  et  $\vec{C}_{1g} \vec{I}_{1g} = -R \vec{z}_L$ . Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(0 \rightarrow R_{1d}) = Y_{1d} \vec{y}_L + Z_{1d} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{1d}}$  et  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(0 \rightarrow R_{1g}) = Y_{1g} \vec{y}_L + Z_{1g} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{1g}}$ .

Les roues arrière  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  sont bloquées, leur vitesse de rotation par rapport au pôle arrière **2** est nulle. Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(0 \rightarrow R_{2d}) = T_{2d} \vec{n}_g + Z_{2d} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{2d}}$  et  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(0 \rightarrow R_{2g}) = T_{2g} \vec{n}_g + Z_{2g} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{2g}}$  avec  $\vec{n}_d$  et  $\vec{n}_g$  deux vecteurs unitaires opposés aux vitesses de glissement des roues  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  par rapport au sol **0** respectivement en  $I_{2d}$  et  $I_{2g}$ . On pose  $\vec{C}_{2d} \vec{I}_{2d} = -R \vec{z}_L$  et  $\vec{C}_{2g} \vec{I}_{2g} = -R \vec{z}_L$ .  $T_{2d} = f Z_{2d}$  et  $T_{2g} = f Z_{2g}$ ;  $f$  est le facteur de frottement constant au contact roue/sol  $f = 0,6$ .

### Autres liaisons

Toutes les autres liaisons de la plate-forme sont supposées parfaites (sans jeu, sans frottement).

### Motoréducteur centraux

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1d}$  est notée  $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$ .

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1g}$  est notée

$$\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}.$$

**Question 1** Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble  $\Sigma$  au point  $C_1$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer la somme des efforts normaux  $Z_{2d} + Z_{2g}$  s'exerçant sur les roues arrières. Isolons l'ensemble de la plate-forme PF, soit l'ensemble  $\Sigma$ , les roues centrales et les motoréducteurs. Plaçons-nous dans le plan médian  $(C_1, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  de la plate-forme PF. Nous définissons le projeté  $I_1$  des points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$  dans ce plan.  $I_1$  est défini par le vecteur :  $\vec{C_1 I_1} = -R \vec{z}_L$ . D'autre part, nous avons  $\vec{C_2 I_1} = b \vec{y}_L - R \vec{z}_L$  et  $\vec{C_3 I_1} = -b \vec{y}_3 - R \vec{z}_L$ . Nous ferons l'hypothèse que le moment dynamique  $\delta(I_1, PF/0) \cdot \vec{x}_L$  est négligeable devant les actions mécaniques.

**Question 2** En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  en  $I_1$  en projection sur  $\vec{x}_L$ , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact  $Z_{2d} + Z_{2g}$ , entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir  $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r)g$  avec  $m_2 = 52 \text{ kg}$  la masse du pod arrière 2.

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  par une approche énergétique.

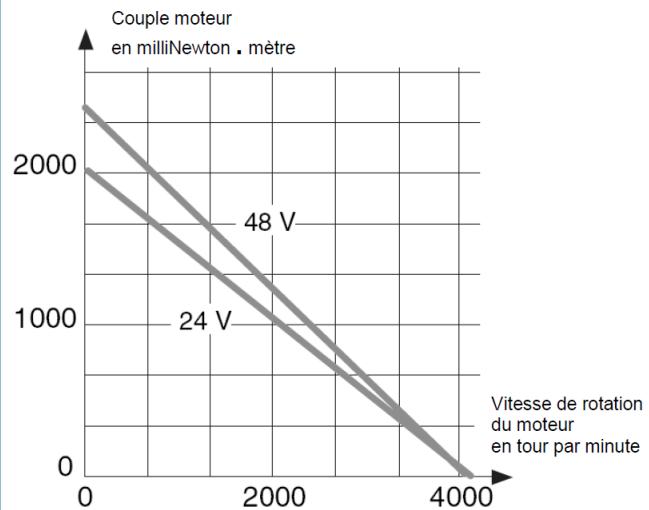
**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat

sera mis sous la forme  $\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$  où  $J$  est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

**Question 4** Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme  $C_m = k_2(J\ddot{\varphi} + k_1(T_{2d} + T_{2g}))$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.

Pour la question suivante, vous prendrez  $J = 34 \text{ kg m}^2$ ,  $k_1 = 0,65 \text{ m}$  et  $k_2 = 1,3 \times 10^{-2}$  sans unité.

**Question 5** Calculer le couple moteur maximal :  $C_m \text{ maxi}$ . À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

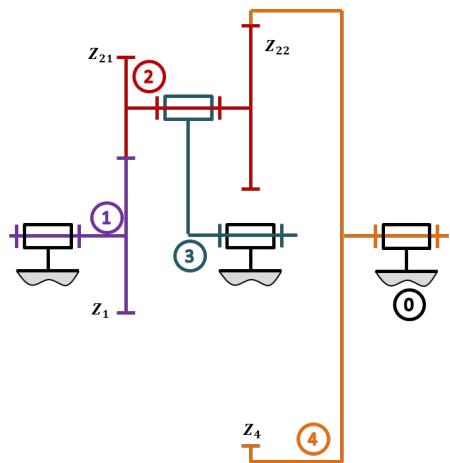


**Exercice 1 – Train simple \***

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

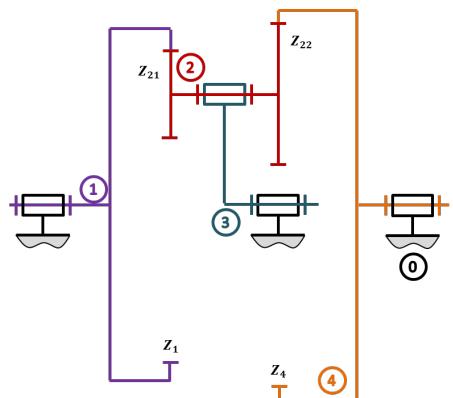
**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

Corrigé voir 1.



**Exercice 2 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06**

Soit le train épicycloïdal suivant.


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

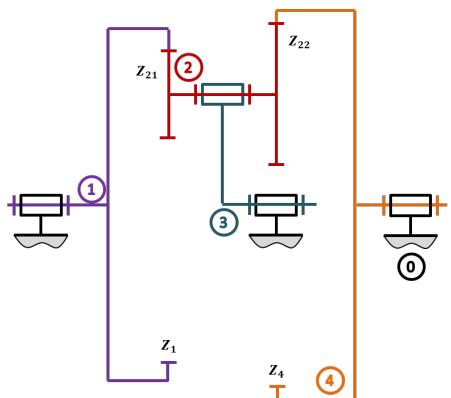
**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

Corrigé voir 2.



**Exercice 3 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06**

Soit le train d'engrenages suivant.


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

Corrigé voir 3.

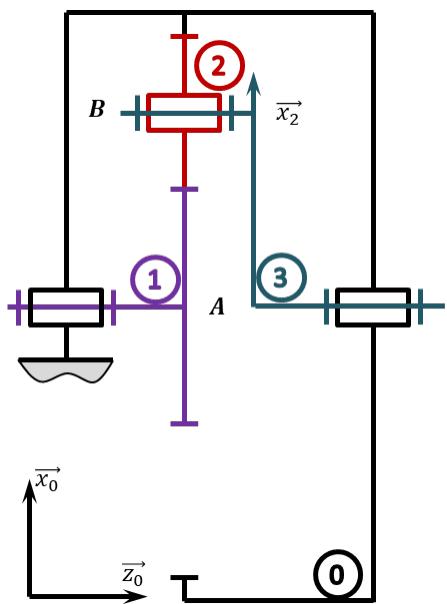


**Exercice 4 – Train simple \***

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

Corrigé voir 4.

Cycle 04