

Application 1 –
Corrigé

Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- C1-05 : Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- C2-08 : Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
- C2-09 : Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

Fermeture géométrique.

On a : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$.En projection sur \vec{z}_0 : $e \cos \theta + R = z$. Par dérivation successive, on a : $-e \dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$ et $-e \ddot{\theta} \sin \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$.

On isole le solide (1).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ M_{01} \vec{y}_0 + N_{01} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_I$. On a $Z_{21} < 0$, $Y_{21} > 0$ et à la limite du glissement, $Y_{21} = -f Z_{21}$.
 $\mathcal{M}(O, 2 \rightarrow 1) = \mathcal{M}(I, 2 \rightarrow 1) + \overrightarrow{OI} \wedge R(2 \rightarrow 1) = (e \vec{z}_1 + R \vec{z}_0) \wedge (Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0) = -e Y_{21} \cos \theta \vec{x}_0 - e Z_{21} \sin \theta \vec{x}_0 - R Y_{21} \vec{x}_0 = -((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) \vec{x}_0$.
- Couple moteur : $\{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ C_m \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à (O, \vec{x}_0) on a donc : $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0 = \left[\frac{d\sigma(O, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \vec{x}_0 =$

$$\left[\frac{d\sigma(O, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_O(1) \Omega(1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_1 \dot{\theta} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = I_1 \ddot{\theta}.$$

Application du théorème du moment dynamique en projection sur \vec{x}_0 .

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{02} \vec{y}_0 \\ L_{02} \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Y_{21} \vec{y}_0 - Z_{21} \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_I$.
- Ressort : $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_0 - k z \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_A$.
- Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_A$.
- Fluide : $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_h \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_A$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0$.

$$\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0 = m_2 \ddot{z}$$

Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - k z - m_2 g = m_2 \ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - k z - m_2 g - m_2 \ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2 g - e m_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m + e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2 g - e m_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Application 2 –
Corrigé

Application – Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs

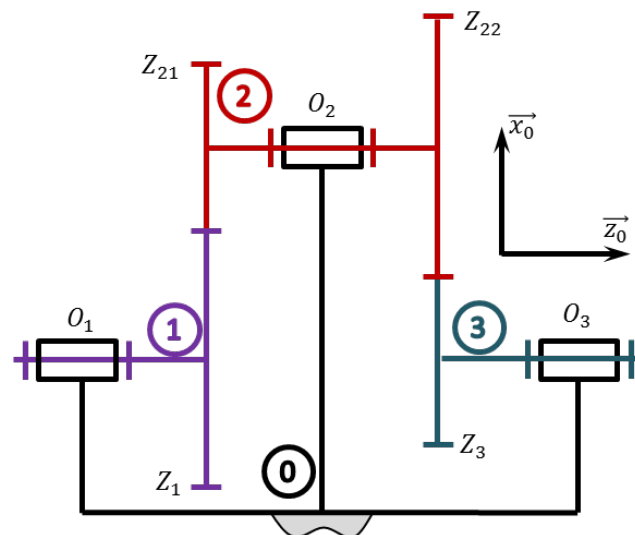
Savoirs et compétences :

- C1-05 : Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- C2-08 : Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
- C2-09 : Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec Z_1 , Z_{21} , Z_{23} et Z_3 le nombre de dents des roues dentées. On nomme k_1 le rapport du train de S_1 et S_2 avec $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$ et k_2 le rapport de S_2 et S_3 avec $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$.

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m \vec{z}_0$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r \vec{z}_0$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite $d = mz$ avec d le diamètre primitif, m le module, z le nombre de dents du pignon. $\omega(1/0)$, $\omega(2/0)$ et $\omega(3/0)$ sont les vitesses de rotation de S_1 , S_2 et S_3 autour des axes (O_1, \vec{x}_g) , (O_2, \vec{x}_g) et (O_3, \vec{x}_g) . Le repère galiléen \mathcal{R}_g est lié au solide S_0 . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les moments d'inertie sont définies aux centres de masse $G_1 = O_1$, $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$ associées aux solides S_1 , S_2 et S_3 suivant l'axe \vec{z}_0 sont notés J_1 , J_2 et J_3 .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur C_m agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une poulie de rayon R est placée sur l'extrémité droite de l'arbre 3. Une charge de masse M y est suspendue.

Question 1 Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

Question 2 Déterminer l'inertie équivalente du réducteur seul ramené à l'axe moteur.

Question 3 Déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble réducteur et charge ramené à l'arbre moteur.

Question 4 Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

Question 5 Déterminer la relation entre le couple d'entrée, les grandeurs inertielles et l'accélération de l'arbre 1.

Application 3 –
Corrigé

Application 3 –Axe numérique

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Pour aller rechercher des produits dans leurs rayons, Amazon utilise des axes linéaires afin de déplacer un préhenseur.



Les performances dynamique de l'axe demandées sont les suivantes :

- vitesse linéaire maximale : 50 m min^{-1} ;
- accélération linéaire maximale : $9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Objectif L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques du moteur (vitesse et couple) permettant d'atteindre ces performances.

Question 1 Quelle est la vitesse maximale que l'axe peut atteindre en m s^{-1} .

Correction $V = 0,83 \text{ m s}^{-1}$

Question 2 Combien de temps l'axe met-il pour atteindre la vitesse maximale ?

Correction $T_a = 0,83/9,8 = 0,08 \text{ s}$

Question 3 Quelle distance l'axe parcourt-il pour atteindre la vitesse maximale ?

Correction

Question 4 Quelle est la longueur minimale à commander pour que l'axe puisse atteindre la vitesse maximale ?

Correction

Question 5 Proposer une longueur minimale de l'axe pour pouvoir profiter de ses performances dynamiques.

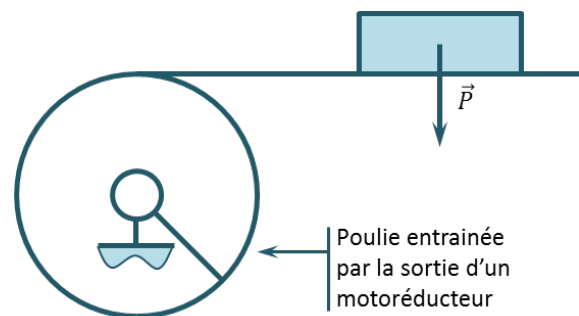
Correction

Question 6 Tracer le profil de la position, de la vitesse et de l'accélération pour parcourir une distance de 50 cm. On cherchera à atteindre les performances maximales de l'axe.

Correction

Un motoréducteur permet d'entraîner un système poulie – courroie permettant de déplacer la charge. On considère :

- une charge de masse 1 kg ;
- une poulie de rayon 5 cm ;
- un réducteur de rapport de transmission 1 : 20.



Question 7 Déterminer le couple à fournir par la poulie pour déplacer la charge lorsque l'accélération est au maximum.

Correction

Question 8 Déterminer la vitesse et le couple à fournir par le moteur en considérant que l'inertie du motoréducteur est négligeable.

Correction

Question 9 Donner la méthode permettant de prendre en compte l'inertie J du motoréducteur? Quel serait l'impact de la prise en compte de cette hypothèse?

Correction

TD 1 – Corrigé



Véhicule TIM

Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- ☐ C1-05 : Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- ☐ C2-08 : Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
- ☐ C2-09 : Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Question 1 Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Correction

- On isole le solide 1.
- Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- On applique le PFS :
 - TRS : $-T_{01} \vec{x} + N_{01} \vec{z} = -mg \vec{z}_0 = -mg (\cos \alpha \vec{z} - \sin \alpha \vec{x})$;
 - TMS en G en projection sur \vec{y} : $-C_r + R T_{01} = 0$.
- On résout :
 - $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0$;
 - $N_{01} - mg \cos \alpha = 0$;
 - $C_r = R T_{01}$.

Question 2 Déterminer l'expression analytique de l'angle α_{lim} à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Correction

À la limite du roulement, on a $C_r = r N_{01} \Leftrightarrow R T_{01} = r N_{01} \Leftrightarrow R mg \sin \alpha_{\text{lim}} = r mg \cos \alpha_{\text{lim}}$ et $\tan \alpha_{\text{lim}} = \frac{r}{R}$.

Pour une masse du solide 1 $m = 50 \text{ kg}$ et pour un rayon $R = 0,25 \text{ m}$ le roulement se produit à partir d'un angle α_{lim} tel que $\tan \alpha_{\text{lim}} = 0,008$.

Question 3 Déterminer le coefficient de résistance au roulement r .

Correction $r = 0,002 \text{ m}$.

Question 4 Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en A_1 si le coefficient de frottement au contact vaut $f = 0,5$.

Correction

À la limite du glissement, on a $T_{01} = f N_{01}$ et $\frac{T_{01}}{N_{01}} = \tan \alpha$. Pour $\tan \alpha_{\text{lim}} < f$ il y a donc roulement sans glissement.

Modélisation du véhicule

Question 5 Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux points A_{23} et A_4 .

Correction En A_{23} , on a : $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \overrightarrow{V(A_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)}$ et $\vec{0} = \overrightarrow{V(O_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{A_{23}O_{23}} \wedge \Omega(23/1) + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} + R\vec{z} \wedge \dot{\theta}_{23}\vec{y} + \dot{x}\vec{x} \Rightarrow 0 = -R\dot{\theta}_{23} + \dot{x}$.
De même en A_4 , $0 = -R\dot{\theta}_4 + \dot{x}$.

Question 6 En isolant l'ensemble $E = 1 + 2 + 3 + 4$, écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} .

Correction

- On isole E .
- BAME :
 - Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{matrix} -(M+3m)g\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_E} = \left\{ \begin{matrix} -(M+3m)g(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x}) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_E}$.
 - Résistance au roulement : $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_i = \left\{ \begin{matrix} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{matrix} \right\}_{A_i}$.
 - Traînée : $\{\mathcal{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_{23}}$.
- La résultante dynamique est donnée par $(M+3m)\overrightarrow{\Gamma(G, E/0)} = (M+3m)\ddot{x}\vec{x}$.
- On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} :
 - $(M+3m)g \sin\alpha - \frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$
 - $-(M+3m)g \cos\alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

Question 7 Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en O_{23} et O_4 en projection sur \vec{y} .

Correction

- On isole 23.
- BAME :
 - 23 est soumis à la pesanteur;
 - action de la pivot sans frottement avec le solide 1;
 - résistance au roulement : $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} = \left\{ \begin{matrix} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ -N_{023}r\vec{y} \end{matrix} \right\}_{A_{23}} = \left\{ \begin{matrix} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ (-rN_{023} + RT_{023})\vec{y} \end{matrix} \right\}_{O_{23}}$.
- Le moment dynamique de O_{23} centre d'inertie des roues en projection sur \vec{y}_0 s'écrit $\delta(O_{23}, 23/0)\vec{y}_0 = 2I\ddot{\theta}_{23}$.
- TMD en O_{23} en projection sur \vec{y}_0 s'écrit donc $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$.

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur : $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$.

Question 8 Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur C_m vaut :

$$C_m = (M+3m)g \cos\alpha r + \left[\frac{3I}{R} + R(M+3m) \right] \ddot{x} - R(M+3m)g \sin\alpha + \frac{1}{2}R\rho S C_x \dot{x}^2.$$

Correction On a : $C_m = I\ddot{\theta}_4 + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - rN_{023} + r(M+3m)g \cos\alpha - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - RT_{023} + 2I\ddot{\theta}_{23} + r(M+3m)g \cos\alpha - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + \frac{2I}{R}\ddot{x} + r(M+3m)g \cos\alpha - R\left((M+3m)g \sin\alpha - \frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 - (M+3m)\ddot{x}\right)$.

$$C_m = r(M+3m)g \cos\alpha + \left(\frac{3I}{R} + R(M+3m)\right)\ddot{x} + \left(-R(M+3m)g \sin\alpha + R\frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2\right).$$

 CQFD.

Question 9 Identifier dans l'expression de C_m les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

Correction

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr \cos \alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M+3m)gR \sin \alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left(\frac{3I}{R} + R(M+3m)\right)\ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

Question 10 Déterminer l'expression du couple moteur C_m quand le véhicule a une vitesse constante V sur une piste horizontale.

Correction À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

Question 11 Déterminer dans les conditions d'essais le produit $\frac{1}{2}\rho SC_x$ caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

Correction La vitesse constante atteinte sur les graphes est de 17 m s^{-1} . Par ailleurs $\frac{1}{2}\rho SC_x = \frac{C_m - (M+3m)gr}{R\dot{x}^2} = \frac{3,245 - (70 + 3 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 0,002}{0,25 \cdot 17^2} = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$.

Question 12 Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de 5 km h^{-1} (on négligera le couple de résistance au roulement).

Correction