

Cycle 03

Détermination des efforts et des lois de mouvement en dynamique

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

Cours

Chapitre 2

Application du Principe Fondamental de la Dynamique

Savoirs et compétences :

- Mod2.C16 : torseur cinétique;
- Mod2.C17 : torseur dynamique;
- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide;
- Mod2.C15 : matrice d'inertie;
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement;
- Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.



Toupee



Volants d'inertie d'un vilebrequin

1	Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général	2
1.1	Théorème de la résultante dynamique	2
1.2	Théorème du moment dynamique	2
2	Torseur cinétique	2
2.1	Définition	2
2.2	Écriture avec l'opérateur d'inertie	2
2.3	Cas particuliers	2
2.4	Méthodologie de Calcul	3
3	Torseur dynamique	3
3.1	Définition	3
3.2	Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques	4
3.3	Cas particuliers	4
3.4	Méthodologie de calcul	5

1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition **Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique** Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G .
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème **Théorème de la résultante dynamique** Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème **Théorème du moment dynamique** Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

2 Torseur cinétique

2.1 Définition

Définition Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V(P/R_0)} dm \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V(P/R_0)} dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur cinétique, $\overrightarrow{R_c(S/R_0)}$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G/R_0)}$.
- Le **moment cinétique** dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)}$.

2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

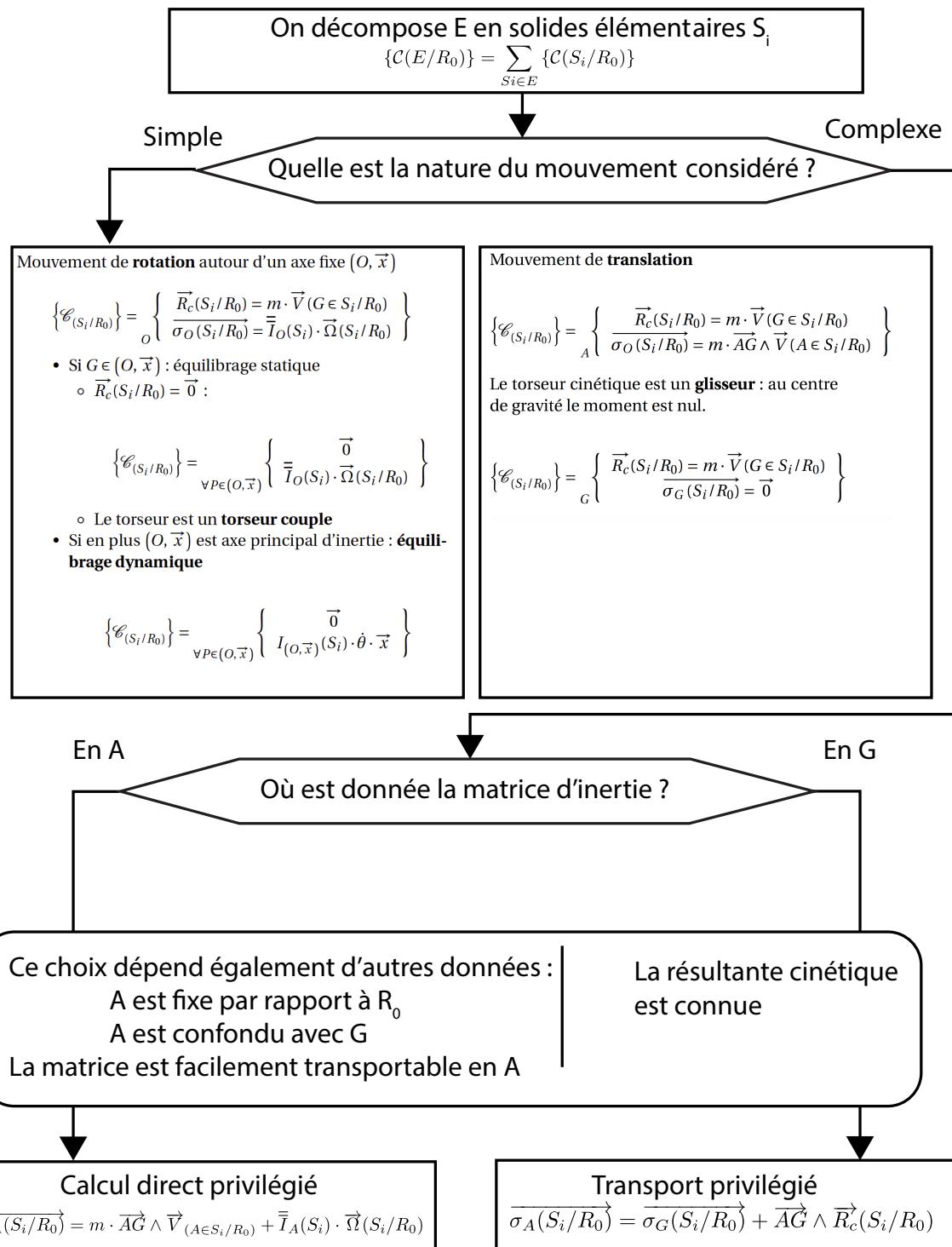
$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)}.$$

2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A fixe dans le mouvement de S/R_0 , on a : $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.
- En appliquant cette formule en G , centre d'inertie de S , on a : $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.

2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



3 Torseur dynamique

3.1 Définition

Définition Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$.
- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$.

3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

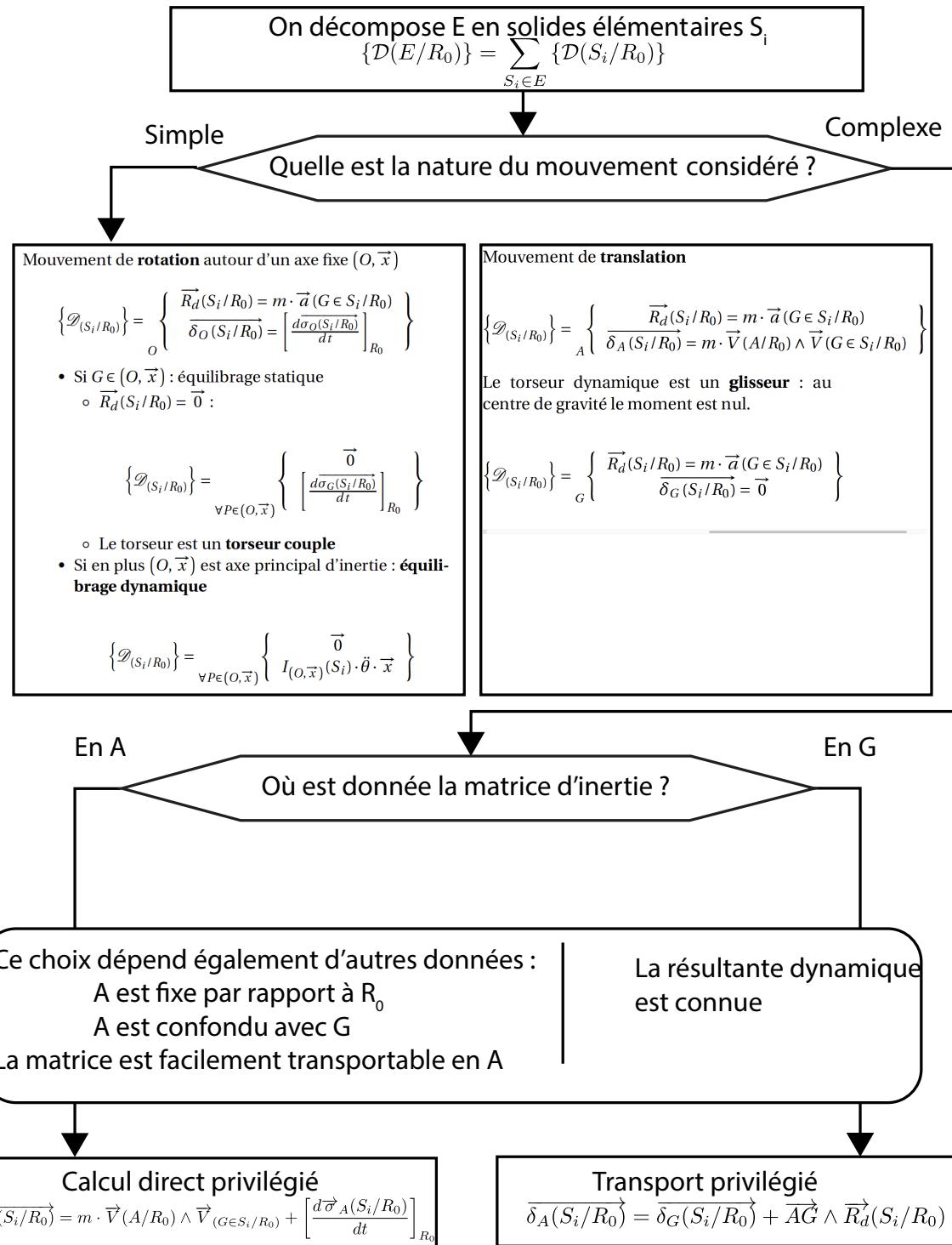
- Relation entre les **résultantes** : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.
- Relation entre les **moments** : $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

3.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point O fixe dans R_0 , on a : $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.
- En appliquant cette formule en un point G , centre d'inertie de S , on a : $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.

3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Références

- [1] Emilien Durif, *Cinétique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Cinétique*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans \mathcal{R}_0 , A
Torseur cinétique $\{\mathcal{E}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)} \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{array} \right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G, S/R_0) \\ \delta(A, S/R_0) = \left[\frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0) \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G, S/R_0) \\ \delta(G, S/R_0) = \left[\frac{d\sigma(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G, S/R_0) \\ \delta(A, S/R_0) = \left[\frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_A$

Activation 1 – Corrigé



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

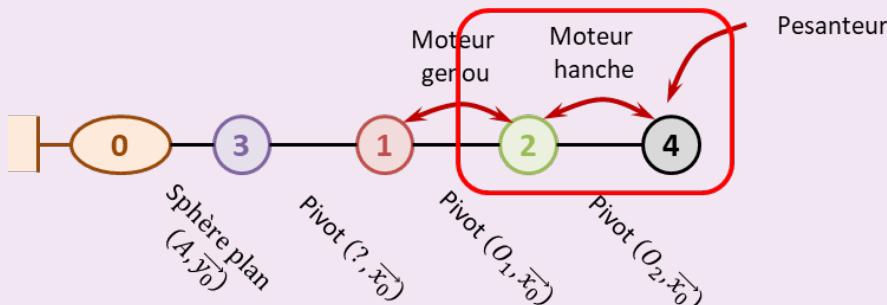
Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle dynamique

Objectif Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Correction Étant donné que l'on souhaite que l'angle α reste constant pendant la levée d'une charge, le mouvement de 4 sera donc un mouvement de translation rectiligne.



Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction E étant en translation, on a $\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} = \overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} + \overrightarrow{O_1 G_4} \wedge \overrightarrow{R_c(E/0)}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{R_c(E/0)} = m_4 \overrightarrow{V(G_4, E/0)} = m_4 \dot{h}(t) \vec{z}_0$. On a donc : $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = ((\lambda(t) \vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0) \wedge m_4 \dot{h}(t) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = -L m_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t)$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction Méthode 1 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}$ et déplacement

On a $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)}}{dt} = \vec{0}$. En conséquences, $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = ((\lambda(t)\vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0) \wedge m_4 \ddot{h}(t) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Méthode 2 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}$

On a aussi $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)}}{dt} \right) + m_4 \overrightarrow{V(O_1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}$.

$$\begin{aligned} \text{Par suite on a } & \left(\overrightarrow{V(O_1, E/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)} \right) \vec{x}_0 = ((L \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}_{10} \vec{x}_0) \wedge \dot{h}(t) \vec{z}_0) \vec{x}_0 \\ & = (-L \dot{\theta}_{10} \vec{z}_1 \wedge \dot{h}(t) \vec{z}_0) \vec{x}_0 \\ & = -L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10}. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) + L m_4 \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \dot{h}(t) - m_4 L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t).$$

Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à $54,5^\circ$ correspondant à la valeur maximale du couple.

Correction • On isole l'ensemble E .

- On réalise le bilan des actions mécaniques :

- action de la liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(1 \rightarrow E)}}{\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)}} \right\}_{O_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \vec{x}_0 = 0$;
- action du réducteur : $\{\mathcal{T}(1_r \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\vec{0}}{C_r \vec{x}_0} \right\}_{O_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \vec{x}_0 = 0$;
- action de la pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{-m_4 g \vec{z}_0}{\vec{0}} \right\}_{G_4}$. On a alors $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \vec{x}_0 = \overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow E)}$.

$$\vec{x}_0 + (\overrightarrow{O_1 G_4} \wedge -m_4 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = ((\lambda(t) \vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0) \wedge -m_4 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = (-L \cos \theta_{10} \vec{y}_0 \wedge -m_4 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = m_4 g L \cos \theta_{10}.$$

- E étant en pivot d'axe (O_1, \vec{x}_1) , on applique le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur \vec{x}_1 :

$$-L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) = C_r + m_4 g L \cos \theta_{10} \Leftrightarrow C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t)).$$

En réalisant l'application numérique, on a : $C_r = -60 \times 51,8 \times 10^{-2} \times \cos 54,5 \left(9,81 + \frac{0,425}{0,5} \right) \simeq -190,5 \text{ Nm}$.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Correction En régime permanent, on a $\eta = \frac{C_r \omega_r}{C_m \omega_m} = r \frac{C_r}{C_m}$ et $C_m = \frac{r}{\eta} C_r = \frac{1}{0,75 \times 120} \times 190,5 \simeq 2,12 \text{ Nm}$.

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Correction Si on en avait la possibilité, il faudrait mettre un capteur de puissance au niveau de la commande (mesure de la vitesse et du couple de commande) puis un capteur de puissance au niveau de la charge (mesure de vitesse et du couple en sortie au niveau du genou). Le rendement peut s'observer en régime permanent en faisant le rapport des puissances. Pour observer une perte de rendement, il est nécessaire que soient modélisées les actions de frottement.

Validation du dimensionnement du moteur

Objectif Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Question 7 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

Correction $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i} = \sqrt{\frac{1}{15} (0,838^2 \times 2 + 0,912^2 \times 2 + 0,838^2 \times 2)} \approx 0,546 \text{ Nm.}$

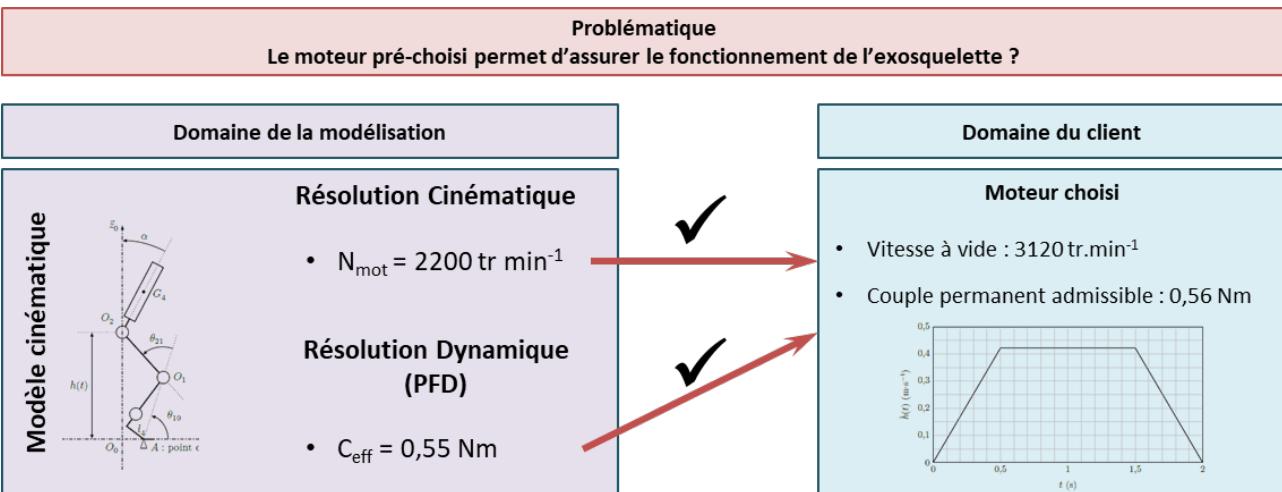
Retour sur l'objectif

Question 8 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Correction

- Le couple thermiquement équivalent calculé est de 0,546 Nm ce qui est inférieur aux couple admissible par le moteur.
- La fréquence de rotation à atteindre par le moteur est de 2200 tr min^{-1} . Le moteur proposé tourne à 3120 tr min^{-1} à vide. On peut donc supposer qu'en charge, il atteindra les 2200 tr min^{-1} .

Su ces deux critères le moteur proposé est donc validé.



Activation 2 – Corrigé



Éolienne

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Correction

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1+2+3\}$) en projection sur l'axe (K, \vec{z}_0) : $\overrightarrow{\mathcal{M}(K, \bar{E} \rightarrow E) \cdot \vec{z}_0} = \overrightarrow{\delta(K, E/R_0) \cdot \vec{z}_0} \Leftrightarrow C_m = \left(\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)} \right) \cdot \vec{z}_0$.

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0}$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (K, \vec{z}_0) :

$$\overrightarrow{\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0} = \left(\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left(\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \right) \cdot \vec{z}_0.$$

Or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}) soit : $\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 = J$.

Ainsi : $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0} = J \dot{\alpha}$.



En considérant que $\bar{\bar{I}}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, $\bar{\bar{I}}_K(1) \vec{\Omega}(1/0) = \begin{pmatrix} -E_1 \dot{\alpha} \\ -D_1 \dot{\alpha} \\ J \dot{\alpha} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0} = J \dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.

- On connaît l'opérateur d'inertie en G , on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0) \cdot \sigma(G, 2/0)} = \bar{\bar{I}}_G(2) \cdot \vec{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\vec{\Omega}(2/0)$: $\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{y}_2)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0) \cdot \sigma(G, 2/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$:
 - $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + \vec{K} \vec{G} \wedge \vec{R}_c(2/0) = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + \alpha \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V}(G \in 2/0)$
 - On calcule $\vec{V}(G \in 2/0)$: $\vec{V}(G \in 2/0) = \vec{V}(K \in 2/0) + \vec{G} \vec{K} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = \vec{0} - \alpha \cdot \vec{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) = \alpha \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$

- On calcule $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) : a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) = a \cdot \vec{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$
- On en déduit $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q, 3/0)} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \vec{KQ} \wedge m \cdot \vec{V} (Q \in 3/0) :$
 - On calcule $\vec{KQ} : \vec{KQ} = \vec{KG} + \vec{GQ} = a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2$
 - On calcule $\vec{V} (Q \in 3/0) : \vec{V} (Q \in 3/0) = \vec{V} (Q \in 3/2) + \vec{V} (Q \in 2/1) + \vec{V} (Q \in 1/0) = \vec{0} + \vec{V} (G \in 2/1) + \vec{QG} \wedge \vec{\Omega}(2/1) + \vec{V} (G \in 1/0) + \vec{QG} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}$
 - On calcule $\vec{KQ} \wedge m \vec{V} (Q \in 3/0) :$

$$\begin{aligned} \vec{KQ} \wedge m \vec{V} (Q \in 3/0) &= m \cdot [a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}] \\ &= m [a \cdot b \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2] \end{aligned}$$
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support $\mathbf{0}$, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$$

Or, $\vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2$,

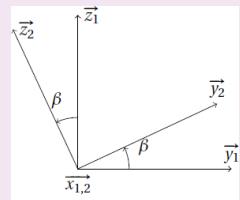
$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Correction



$$\begin{aligned}\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 &= \cos \beta \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 &= 1 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 &= 0 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 &= \sin \beta\end{aligned}$$

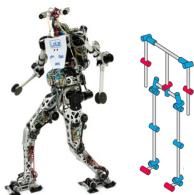
On trouve alors :

$$\begin{aligned}\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 3/0) &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \ddot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)]\end{aligned}$$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$.

Activation 3 – Corrigé



Le robot humanoïde Lola

Concours Mines Ponts – PSI 2015

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation

Stabilité du robot

Objectif L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ci-après.

Exigence 1.3 : Le robot ne doit pas basculer lors de la marche

Description : La position du ZMP* reste dans le polygone de sustentation
* : défini dans la suite

Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir atteindre les performances cibles

Sous-exigence	Description
Id=1.1.4	La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum
Id=1.1.3	Le robot peut accélérer jusqu'à $1,39 \text{ m.s}^{-2}$

Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

Question 1 Montrer que $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ est un glisseur.

Correction

L'automoment est un des invariants du torseur : $\forall P, \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \text{cst}$. Dans le cas d'un glisseur, il existe un point tel que le moment est nul. L'automoment est donc nul en tous points de l'espace.

Dans notre cas, $b \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{z_0} dy \cdot b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = 0$ (permutation circulaire du produit mixte).

Question 2 Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Correction On cherche H_S tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \overrightarrow{0}$.

$$\text{On a donc } b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S O_S} + \overrightarrow{O_S M}) \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S O_S} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} -Y_{H_S} \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy \overrightarrow{x_0} + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\text{Projetons cette expression sur } \overrightarrow{x_0} : -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{O_S M} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy = 0 \text{ soit } Y_{H_S} = \frac{\int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}.$$

On a, en raison du parallélogramme, $Y_M > 0$. Nécessairement, H_S est donc à droite du point O_S .

De même, on a donc $b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$
 $\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S C_S} + \overrightarrow{C_S M}) \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$
 $\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S C_S} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{C_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$
 On a $\overrightarrow{C_S M} = -\lambda \overrightarrow{y_0}$ avec $\lambda > 0$ ($M \in \Sigma$) et $\overrightarrow{H_S C_S} = \mu \overrightarrow{y_0}$. En projetant de plus suivant $\overrightarrow{x_0}$, on a :
 $(\int_{M \in \Sigma} \mu \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy) \overrightarrow{x_0} = 0$
 $\Rightarrow \int_{M \in \Sigma} \mu p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda p(M) dy = 0$ soit $\mu = \frac{\int_{M \in \Sigma} \lambda p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}$.
 μ est donc nécessairement positif et H_S est à gauche de C_S .
 Au final, H_S appartient à $[O_S C_S]$.

Question 3 Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M) \overrightarrow{z_0} + t(M) \overrightarrow{y_0}$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

Correction $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} (p(M) \overrightarrow{z_0} + t(M) \overrightarrow{y_0}) dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S}$
 $= \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{z_0} dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S} + \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} t(M) \overrightarrow{y_0} dy \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_S}.$

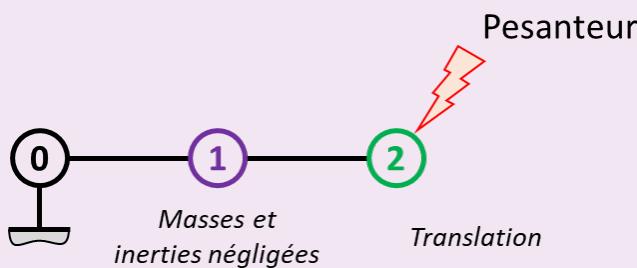
Le premier torseur vérifie bien les deux premières questions. Le second torseur est bien un glisseur (automomment nul).

(...)

Établissement de la condition de non-basculement

Question 4 En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$.

Correction



- On isole 1+2.
- Bilan des actions mécaniques :
 - action de la pesanteur;
 - action du sol.
- On applique le TMD au point H_S en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.
 - $\overrightarrow{\delta(1,0/G)} = \overrightarrow{0}$ (mouvement de translation). $\overrightarrow{\delta(1,0/H_S)} = \overrightarrow{\delta(1,0/G)} + \overrightarrow{H_S G} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)}$
 $= m_1 (-Y_{H_S} \overrightarrow{y_0} + Y_G(t) \overrightarrow{y_0} + Z_G(t) \overrightarrow{z_0}) \wedge \dot{Y}_G \overrightarrow{y_0} = -m_1 Z_G(t) \dot{Y}_G \overrightarrow{x_0}$.
 - Déplacement de l'action de la pesanteur : $(-Y_{H_S} \overrightarrow{y_0} + Y_G(t) \overrightarrow{y_0} + Z_G(t) \overrightarrow{z_0}) \wedge -m_1 g \overrightarrow{z_0}$
 $= -m_1 g (-Y_{H_S} \overrightarrow{x_0} + Y_G(t) \overrightarrow{x_0})$.
 - Au final, $-m_1 g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = -m_1 Z_G(t) \dot{Y}_G \Leftrightarrow g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = Z_G(t) \dot{Y}_G$. On a donc $g Y_G(t) - Z_G(t) \dot{Y}_G = g Y_{H_S}$ et $Y_{H_S} = \frac{g Y_G(t) - Z_G(t) \dot{Y}_G}{g}$.

En faisant le TMD au point H_S il est inutile de faire le TRD.

Question 5 Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S; C_S]$ est $L = 300$ mm, déterminez la longueur de

la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Correction Le cas limite de basculement est lorsque $H_S = C_S$ et donc $Y_{H_S} = L$.

$$\text{On a donc } Y_G(t) = Y_{H_S} + \frac{Z_G(t)\ddot{Y}_G}{g} = 300 + \frac{1050 \times 1390}{9810} = 449 \text{ mm.}$$

La foulée est donnée par $4Y_G \simeq 1,795 \text{ m} < 1,50 \text{ m}$. L'exigence 1.1.4 n'est pas respectée.

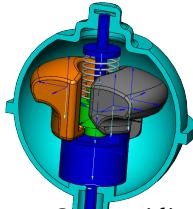
Question 6 Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max}$ le robot peut-il avoir? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage?

Correction On isole (1+2) et on réalise le TRD :

- projection sur \vec{y}_0 : $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = m_1 \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2}$;
- projection sur \vec{z}_0 : $b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy - m_1 g = 0$.

À la limite du glissement, on a $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = \mu b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy$ soit $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max} = \mu g = 0,1 \times 9,81 = 0,981 \text{ m s}^{-2} < 1,39 \text{ m s}^{-2}$. L'exigence 1.1.3 n'est pas respectée.

Application 1 – Corrigé



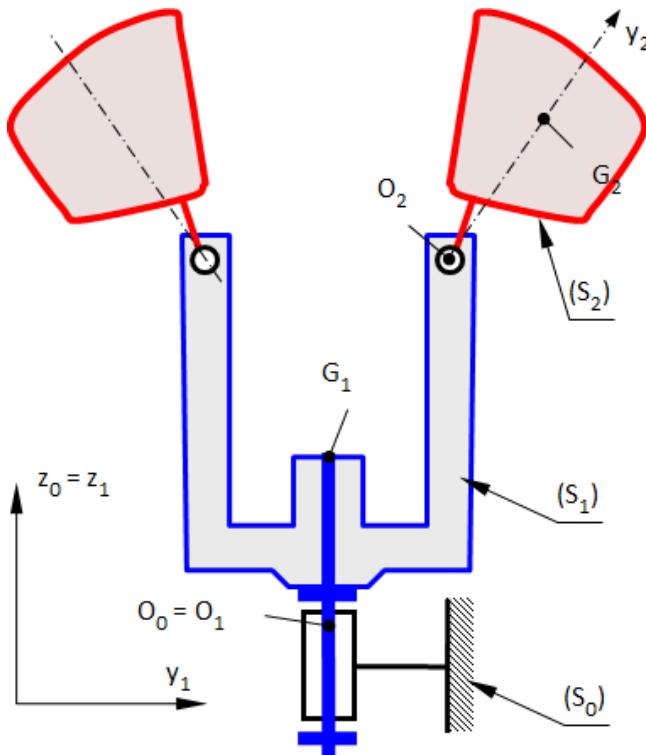
Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie;
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie;
- Mod2.C15 : matrice d'inertie.

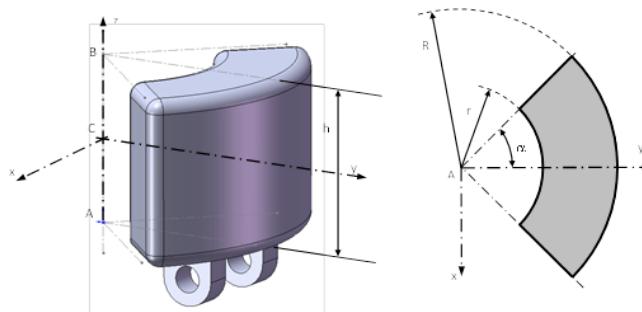
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.



- (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- $\overrightarrow{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- $\overrightarrow{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Correction Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On a donc $I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$.

Le solide 2 admet le plan (\vec{y}_2, \vec{z}_2) comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de x sont nuls.

On a donc $I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$.

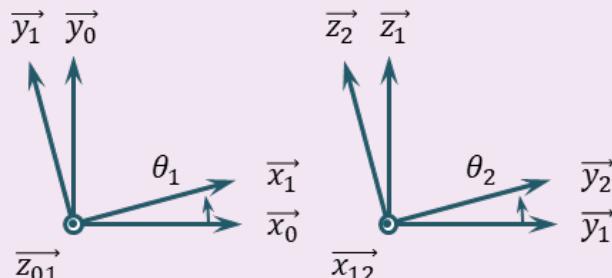
Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer :

- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 ;
- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

Correction



Mouvement du solide 1/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_1}.$$

O_1 est un point fixe dans R_0 .

$$\{\mathcal{C}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ I_{O_1}(S_1) \vec{\Omega}(S_1/R_0) \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \text{ et } \{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}.$$

Mouvement du solide 2/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ V(G_2, S_2/R_0) \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_2}.$$

$$\vec{V}(G_2, S_2/R_0) = \vec{V}(G_2, S_2/S_1) + \vec{V}(G_2, S_1/R_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_2, S_2/S_1)} + \overrightarrow{G_2 O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} }_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_0, S_1/R_0)} + \overrightarrow{G_2 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} }_{\vec{0}} \right) \\
 &= (-L_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) + (-d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + L_2 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 = L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \\
 G_2 \text{ est le centre de gravité de } S_2. \\
 \{\mathcal{C}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1) \\ I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2} \\
 \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1 (\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\
 I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} \\
 \{\mathcal{D}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, S_2/R_0)} \\ \left[\frac{d}{dt} \left(I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right) \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2} \\
 \overrightarrow{\Gamma(G_2, S_2/R_0)} = \left[\frac{d(L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1)}{dt} \right]_{R_0} \\
 &= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2) - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1 (-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\
 &= L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2 + (2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2)) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\
 \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} &= \dots \\
 &= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} \\
 &+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + (B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) (-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) + (-D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2) \\
 \left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \\
 \left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\
 \left[\frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1
 \end{aligned}$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

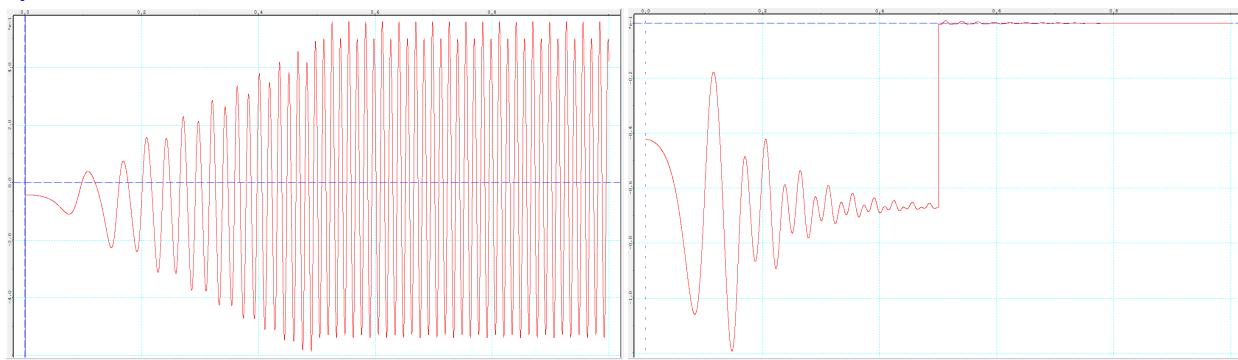
$$\begin{aligned}
 \text{Correction } \overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2 &= \left(\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\
 &= \left(\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\
 \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} &= \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \vec{x}_2 + \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0}
 \end{aligned}$$

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.



Cycle 03

Application 2 – Corrigé



Conducteur virtuel pour véhicule automobile

Centrale Supélec PSI 2014

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

Objectif L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

Modélisation du comportement dynamique du véhicule

Question 1 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, α , h , V et des caractéristiques inertielles.

Correction La matrice d'inertie étant donnée en G, commençons par calculer $\overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = I_G(VH)\overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)}$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \overrightarrow{\psi Z_g} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overrightarrow{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

Il faut alors déplacer le moment cinétique. On aura pour cela besoin de $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{VU} - h\overrightarrow{Z_g} \wedge \overrightarrow{\psi Z_g} = \overrightarrow{VU}$.

Au final, $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{OG} \wedge MV\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + h\overrightarrow{Z_g} \wedge MV\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\overrightarrow{V}$

$$= \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV(\cos\alpha\overrightarrow{Y_L} - \sin\alpha\overrightarrow{X_L}) = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} - hMV\sin\alpha \\ hMV\cos\alpha \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

– Je note \overrightarrow{V} le vecteur tel que $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{Z_L})$ est une base. –

Question 2 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α , h , V et des caractéristiques inertielles.

Correction

On a en un point quelconque $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge M\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)}.$

D'une part, $\left[\frac{d\overrightarrow{X_L}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \dot{\psi}\overrightarrow{Y_L}$ et $\left[\frac{d\overrightarrow{Y_L}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = -\dot{\psi}\overrightarrow{X_L}$. On a donc $\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g}$

$$= \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - \dot{\alpha}hMV \cos \alpha - \dot{\psi}(hMV \cos \alpha) \\ -\dot{\alpha}hMV \sin \alpha + \dot{\psi}(-E\dot{\psi} - hMV \sin \alpha) \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

D'autre part, $\overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge M \overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V \overrightarrow{U} \wedge MV \overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$.

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})(hMV \cos \alpha) \\ -E\dot{\psi}^2 - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})hMV \sin \alpha \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

Question 3 On note $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_G . Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \overrightarrow{Y_L}$ en fonction de $\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α , V . Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction On a vu que $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V \overrightarrow{U}$, donc $\overrightarrow{\Gamma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \overrightarrow{V} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})(\cos \alpha \overrightarrow{Y_L} - \sin \alpha \overrightarrow{X_L})$.

On a donc $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha$. En linéarisant cette relation, on a $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})$.

Question 4 En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$ et celui de la roue arrière $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$, en déduire l'expression de $\overrightarrow{R(VH \rightarrow VH)} \cdot \overrightarrow{Y_L}$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction On a $Y_{12} = -2D\delta_{12}$ et $Y_{34} = -2D\delta_{34}$. En conséquence, $Y_{12} = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)$ et $Y_{34} = -2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{R(VH \rightarrow VH)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right) - 2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right) = -2D\left(2\alpha - \beta + \frac{\ell_1 - \ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$.

Question 5 Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V}\right)\dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V}\dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1 = 1 \text{ m}$, $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$, $D = 21000 \text{ N rad}^{-1}$, $C = 3100 \text{ kg m}^2$, $M = 1500 \text{ kg}$, $V = 15 \text{ m s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

Correction La première équation correspond au théorème de la résultante dynamique appliqué à VH en projection sur $\overrightarrow{Y_L}$.

La seconde équation correspond au théorème du moment dynamique appliqué à VH en O projection sur $\overrightarrow{Z_L}$.

Question 6 En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.

Correction Dans le domaine de Laplace, on a

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} 211p\psi(p) + 225p\alpha(p) + 840\alpha(p) = 420\beta(p) \\ 31p^2\psi(p) + 91p\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{array} \right. \\
 \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (225p + 840)\alpha(p) = 420\beta(p) - 211p\psi(p) \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{array} \right. \\
 \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \alpha(p) = \frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \end{array} \right. \\
 & \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840} \right) \psi(p) - 210\frac{420\beta(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \\
 \Rightarrow & \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840} \right) \psi(p) + \left(\frac{-210 \times 420}{225p + 840} - 420 \right) \beta(p) = 0 \\
 \Rightarrow & H_2(p) = \frac{\frac{210 \times 420}{225p + 840} + 420}{31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}} = \frac{210 \times 420 + 420(225p + 840)}{(225p + 840)(31p^2 + 91p) + 210 \times 211p} \\
 = & \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p((225p + 840)(31p + 91) + 210 \times 211)} \\
 = & \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)} \\
 = & \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)} \\
 = & \frac{441000 + 94500p}{p(6975p^2 + 46515p + 120750)}
 \end{aligned}$$

Application 3 – Corrigé



Application – Kart

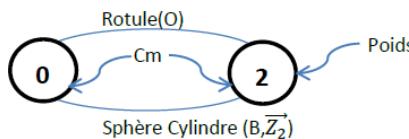
C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

Eléments de corrigé:

Question 1:



$$\left\{ \begin{array}{c} X_o \cdot \vec{X}_2 + Y_o \cdot \vec{Y}_2 + Z_o \cdot \vec{Z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_o ; \left\{ \begin{array}{c} X_B \cdot \vec{X}_2 + Y_B \cdot \vec{Y}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} X_B \cdot \vec{X}_2 + Y_B \cdot \vec{Y}_2 \\ a(X_B \cdot \vec{Y}_2 - Y_B \cdot \vec{X}_2) \end{array} \right\}_o$$

Question 2 :

$$\text{On isole 2: BAME: Torseurs de } 0 \rightarrow 2 \text{ et Cm: } \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{Z} \end{array} \right\}_0 ; \text{ poids: } \left\{ \begin{array}{c} m_2 \cdot g \vec{Y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \cdot g \vec{Y} \\ m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \vec{X} \end{array} \right\}_0$$

Calcul du torseur cinétique:

$$\{C(2/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \vec{V_G} \in \overrightarrow{2/0} \\ \sigma(\vec{G}_2, \overrightarrow{2/0}) \end{array} \right\}_G ; \vec{V_G} \in \overrightarrow{2/0} = \vec{0} ; \vec{\sigma}(\vec{G}_2; \overrightarrow{2/0}) = I(G_2, 2) \vec{\Omega}(2/0) = -D \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{Y}_2 + C \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Z}$$

Calcul du torseur dynamique:

$$\{D(2/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \vec{F_G} \in \overrightarrow{2/0} \\ \delta(\vec{G}_2, \overrightarrow{2/0}) \end{array} \right\}_G ; \vec{F_G} \in \overrightarrow{2/0} = \vec{0} ; \vec{\delta}(\vec{G}_2; \overrightarrow{2/0}) = -D \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Y}_2 + D \dot{\theta}_2^2 \cdot \vec{X}_2 + C \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Z}$$

PFS en O dans la base 2:

$$\text{Sur } \vec{X}_2 : X_O + X_B = 0$$

$$\text{Sur } \vec{Y}_2 : Y_O + Y_B = 0$$

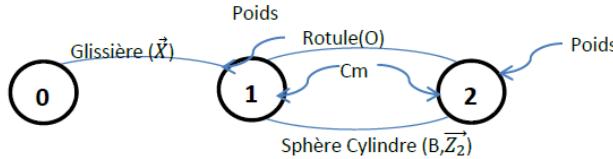
$$\text{Sur } \vec{Z} : Z_0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{X}_2 : -a \cdot Y_B + m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_2) = D \dot{\theta}_2^2$$

$$\text{Sur } \vec{Y}_2 : a \cdot X_B - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_2) = -D \cdot \ddot{\theta}_2$$

$$\text{Sur } \vec{Z} : C_m = C \ddot{\theta}_2$$

Question 3:



Question 4:

$$\text{On isole } \{1+2\} \text{ BAME: } \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \cdot \vec{Y} + Z_{01} \cdot \vec{Z} \\ L_{01} \cdot \vec{X} + M_{01} \vec{Y} + N_{01} \cdot \vec{Z} \end{array} \right\}_o$$

$$\{C(1 + 2/R)\} = \{C(1/R)\} + \{C(2/R)\}$$

$$\{C(1/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \cdot \overrightarrow{V(G \in 1/0)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_o = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \cdot \lambda \cdot \vec{X} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_o$$

$$\{C(2/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \overrightarrow{VG \in 2/0} \\ \sigma(\overrightarrow{G_2}, 2/0) \end{array} \right\}_G; \overrightarrow{VG \in 2/0} = \lambda \cdot \vec{X};$$

$$\overrightarrow{\sigma(G_2; 2/0)} = I(0,2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} = -D \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{Y}_2 + C \dot{\theta}_2 \cdot \vec{Z}$$

Torseur dynamique:

$$\{D(1 + 2/R)\} = \{D(1/R)\} + \{D(2/R)\}$$

$$\{D(2/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \overrightarrow{\Gamma G \in 2/0} \\ \delta(\overrightarrow{G_2}, 2/0) \end{array} \right\}_G; \overrightarrow{\Gamma G \in 2/0} = \ddot{\lambda} \cdot \vec{X};$$

$$\overrightarrow{\delta(G_2; 2/0)} = -D \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Y}_2 + D \dot{\theta}_2^2 \cdot \vec{X}_2 + C \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Z}$$

$$\overrightarrow{\delta(O; 2/0)} = \overrightarrow{\delta(G_2; 2/0)} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta(O; 2/0)} = -D \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Y}_2 + D \dot{\theta}_2^2 \cdot \vec{X}_2 + C \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Z} + l_2 \cdot \vec{Z} \wedge m_2 \cdot \ddot{\lambda} \cdot \vec{X}$$

$$\overrightarrow{\delta(O; 2/0)} = -D \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Y}_2 + D \dot{\theta}_2^2 \cdot \vec{X}_2 + C \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{Z} + l_2 \cdot m_2 \cdot \ddot{\lambda} \cdot \vec{Y}$$

PFS à {1+2}:

$$Sur \vec{X}_0 : 0 = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\lambda}$$

$$Sur \vec{Y}_0 : Y_{01} = m_1 g + m_2 g$$

$$Sur \vec{Z} : Z_0 = 0$$

$$Sur \vec{X}_0 : L_{01} = D \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2) + D \cdot \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_2)$$

$$Sur \vec{Y}_0 : M_{01} = D \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) - D \cdot \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + m_2 \cdot l_2 \cdot \ddot{\lambda}$$

$$Sur \vec{Z} : N_{01} = 0$$

Question 5:

Idem question 4 mais ajouter tous les termes complémentaires.

Application 4 – Corrigé

Pendule

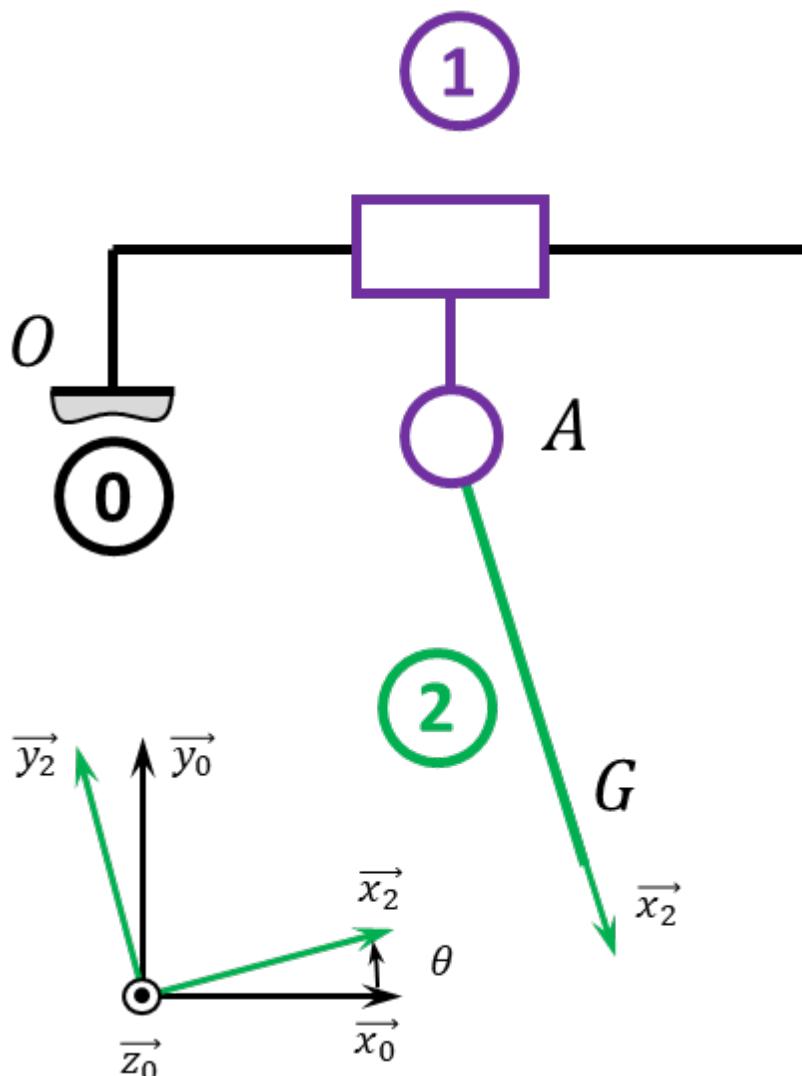
Pendule

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Mise en situation

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.



- On note 1 la pièce de masse M_1 et de centre de gravité G_1 . $\overrightarrow{OA} = \lambda(t) \overrightarrow{x_0} - h \overrightarrow{y_0}$.
 - On note 2 la pièce de masse M_2 et de centre de gravité G et de matrice d'inertie $I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.
- On a $\overrightarrow{AG} = L \overrightarrow{x_2}$

Travail à réaliser

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{\delta}(A, 2/0)$ en utilisant deux méthodes différentes.

Correction
Cinématique

$$\text{On a } \overrightarrow{V(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{OG}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\lambda \overrightarrow{x_0} - h \overrightarrow{y_0} + L \overrightarrow{x_2}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{x_0} + L \dot{\theta} \overrightarrow{y_2}.$$

$$\text{On a } \overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(G, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{x_0} + L \ddot{\theta} \overrightarrow{y_2} - L \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_2}.$$

Cinétique & dynamique

$$\text{On a } \overrightarrow{\delta(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0}$$

Question 2 En déduire le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$.

Correction

Application 5 – Corrigé

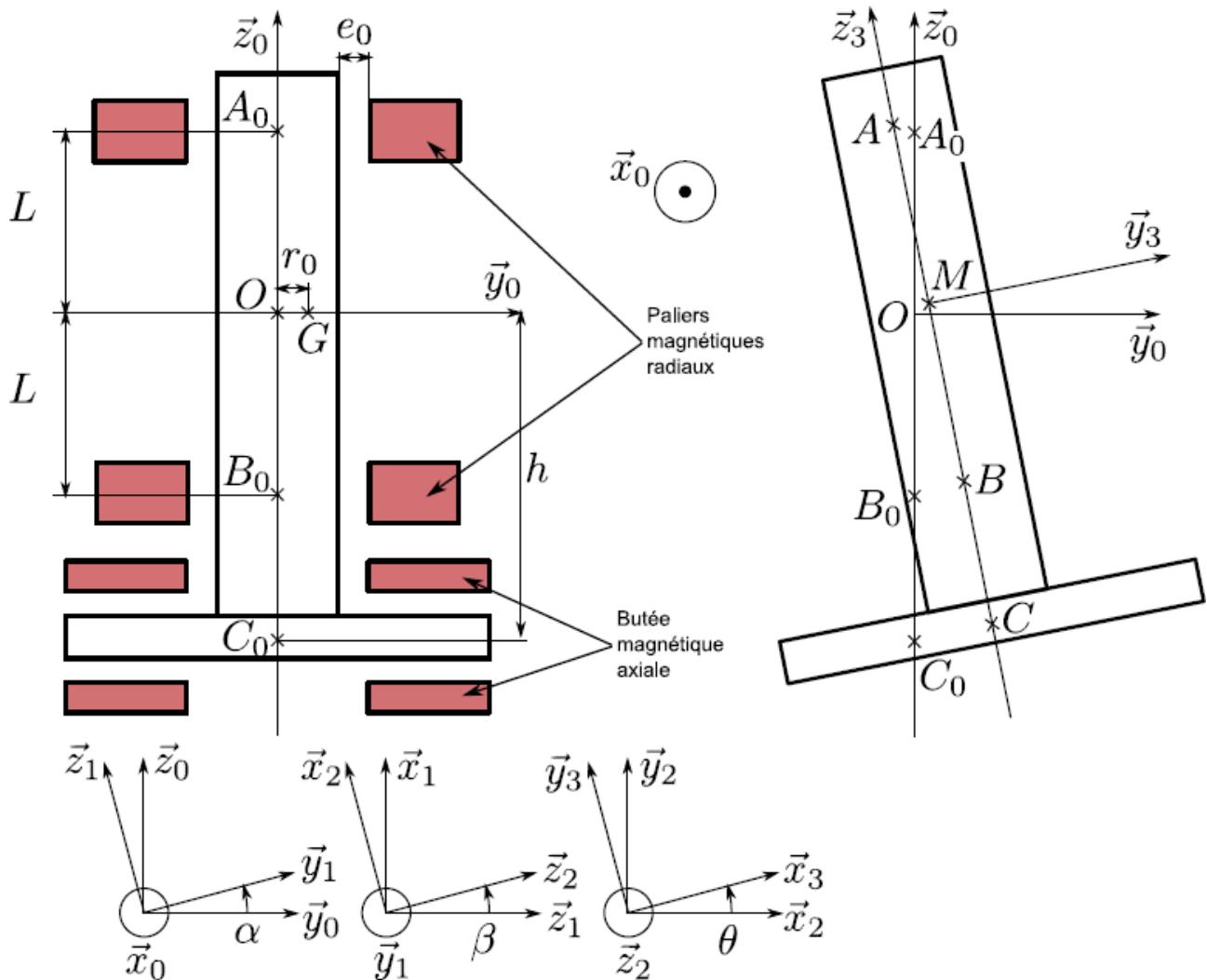
Pompe turbo-moléculaire

Centrale Supelec PSI 2009

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ($\alpha = \beta = \theta = x = y = z = 0$) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note A_0 et B_0 les centres des paliers magnétiques radiaux et A et B les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.



On note O le milieu de $[A_0B_0]$ et M le milieu de $[AB]$. Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe (AB) , mais à une distance de celui-ci telle que $\overrightarrow{MG} = r_0 \vec{y}_3$.

De même, la matrice d'inertie $I_{G,3}$ n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie D non nul. On admet toutefois que $r \ll L$ et $D \ll (A, B, C)$, où A, B, C sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor,

auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements (x, y, z) du point M dans le repère $\mathcal{R}_0(0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ ainsi que par trois rotations (α, β, γ) telles que :

- α paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à \mathcal{B}_0 autour de l'axe \vec{x}_0 ;
- β paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ par rapport à \mathcal{B}_1 autour de l'axe \vec{y}_1 ;
- θ paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$ par rapport à \mathcal{B}_2 autour de l'axe \vec{z}_2 .

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'à part la rotation propre principale θ , ces mouvements sont très petits.

En notant $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $|\varepsilon(x)| \ll |x|$, on peut écrire : $\begin{cases} x, y, z \approx \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \approx \varepsilon(1) \end{cases}$.

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante : $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$.

Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3A)\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3B)\} = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3C)\} = \begin{Bmatrix} Z_C \vec{z}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_C, \{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_G.$$

Avec $\begin{cases} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 = -k \overrightarrow{[A_0 A]}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \overrightarrow{[V(A, 3/0)]}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 = -k \overrightarrow{[B_0 B]}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \overrightarrow{[V(B, 3/0)]}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ Z_C = -k \overrightarrow{[C_0 C]}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \overrightarrow{[V(C, 3/0)]}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \end{cases}$ et $k = 50 \times 10^4 \text{ Nm}^{-1}$ et $c = 970 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$. La notation $\overrightarrow{[V]}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$ désigne la projection dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) du vecteur \overrightarrow{V} . Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

Le rotor, tel que $L = 50 \text{ mm}$, a pour masse $m = 10 \text{ kg}$, pour centre de gravité G tel que $\overrightarrow{MG} = r_0 \vec{y}_3$ où $r_0 = 0,05 \text{ mm}$, et pour matrice d'inertie en G : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$ où $A = 0,08 \text{ kgm}^2$, $C = 0,04 \text{ kgm}^2$ et $D = 10^{-4} \text{ kgm}^2$. On admet que $r_0 \approx \varepsilon(L)$ et $D \approx \varepsilon(A) \approx \varepsilon(C)$.

Objectif Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.

Question 1 Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.

Correction

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

Question 2 Montrer l'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\overrightarrow{V(G, 3/0)} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 - r_0\omega\vec{x}_3$.

Correction

Question 3 Déterminer l'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti $0 : \overrightarrow{\Gamma(G, 3/0)}$.

Correction

On admet que par changement de base, la matrice $I_{G,3}$ s'écrit dans la base B_2 : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & D \sin \theta \\ 0 & A & -D \cos \theta \\ D \sin \theta & -D \cos \theta & C \end{pmatrix}_{B_2}$.

Question 4 Montrer que l'expression au premier ordre du moment cinétique en G du rotor par rapport au bâti

s'écrit : $\overrightarrow{\sigma(G, 3/0)} = \begin{pmatrix} A\dot{\alpha} + D\omega \sin \theta \\ A\dot{\beta} - D\omega \cos \theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$.

Correction

Question 5 Déterminer l'expression au premier ordre du moment dynamique en G du rotor par rapport au bâti 0 : $\overrightarrow{\delta(G, 3/0)}$, dans la base B_2 .

Correction

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en G , conduit alors à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2 \sin \theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\dot{\alpha} + 2kL\alpha = -D\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2 \sin \theta \\ C_m = 0 \end{cases}$$

TD 1 – Corrigé



Orthèse d'épaule

Concours Centrale Supelec PSI 2010

Savoirs et compétences :***

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Question 1

$$\{D_{AB/R0}\} = \{D_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} m_2 \bar{a}(G_2, 2/0) \\ \bar{\delta}_{G2}(2/0) \end{Bmatrix}$$

$$\bar{V}(G_2, 2/0) = l_1 \dot{\gamma} \bar{x}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{x}_2$$

$$\bar{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{\gamma} \bar{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \bar{z}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \bar{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \bar{z}_2$$

$$m_2 \bar{a}(G_2, 2/0) = m_2 \begin{Bmatrix} l_1 \ddot{\gamma} + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 \\ -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \cos \delta \end{Bmatrix}_{R1}$$

$$\bar{\sigma}_{G2}(2/0) = [I_{G2}(2)] \bar{\Omega}(2/0) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R2 \ R2} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} + \dot{\delta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R2 \text{ ou } R1} \begin{Bmatrix} 0 \\ B_2(\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \\ 0 \end{Bmatrix}_{R2 \text{ ou } R1}$$

$$\bar{\delta}_{G2}(2/0) = \left(\frac{d\bar{\sigma}_{G2}(2/0)}{dt} \right)_0 = B_2(\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{y}_1$$

Question 2

- On isole l'ensemble {bras (1) + Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$$\{T(bâti \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \bar{x}_1 + Y_1 \bar{y}_1 + Z_1 \bar{z}_1 \\ L_1 \bar{x}_1 + M_1 \bar{y}_1 + N_1 \bar{z}_1 \end{Bmatrix} \text{ avec } M_1=0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(actionneur1 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_1(t) \bar{y} \end{Bmatrix};$$

$$\{T(force \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_F \bar{x} + Z_F \bar{z} \\ \bar{0} \end{Bmatrix};$$

$$\{T(pesanteur \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} m_1 g \bar{z} \\ \bar{0} \end{Bmatrix};$$

$$\{T(pesanteur \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} m_2 g \bar{z} \\ \bar{0} \end{Bmatrix};$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en 0 selon la direction \bar{y} :

$$C_1(t) + 0 + (\overrightarrow{OB} \wedge (X_F \bar{x} + Z_F \bar{z}) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 g \bar{z} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 g \bar{z}) \bar{y} = \bar{\delta}_o(1/0) \cdot \bar{y} + \bar{\delta}_o(2/0) \cdot \bar{y}$$

Question 3

Compléments au corrigé : Détails du calcul (**non demandé**) :

$$\overrightarrow{OB} = l_1 \vec{z}_1 + l_2 \vec{z}_2 ; \quad \overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1 ; \quad \overrightarrow{OG_2} = l_1 \vec{z}_1 + \lambda_2 \vec{z}_2$$

$$\bar{\delta}_O(2/0) = \bar{\delta}_{G2}(2/0) + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \bar{a}(G_2, 2/0)$$

$$\bar{\delta}_O(2/0). \vec{y} = B_2(\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) + \begin{pmatrix} \lambda_2 \sin \delta & l_1 \ddot{\gamma} + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 & 0 \\ R1 & l_1 + \lambda_2 \cos \delta \\ R1 & -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta})^2 \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$$

$$\ddot{\gamma}(B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

$$\bar{\delta}_O(1/0) = \bar{\delta}_{G1}(1/0) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \bar{a}(G_1, 2/0)$$

$$\bar{\delta}_O(1/0). \vec{y} = B_1 \ddot{\gamma} + \begin{pmatrix} 0 & l_1 \ddot{\gamma} \\ 0 \wedge m_1 & 0 \\ R1 & l_1 \\ R1 & -l_1 \dot{\gamma}^2 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \ddot{\gamma}(B_1 + m_1 l_1^2)$$

Soit :

$$C_1(t) + l_1 X_F \cos \gamma - l_1 Z_F \sin \gamma + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_1 m_1 g \sin \gamma - l_1 m_2 g \sin \gamma - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = \\ \ddot{\gamma}(B_1 + m_1 l_1^2) + \ddot{\gamma}(B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

Question 4

- On isole l'Avant-Bras (2).
- BAME :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\}_A = \begin{cases} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y}_1 + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y}_1 + N_2 \vec{z}_1 \end{cases} \text{ avec } M_2=0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(actionneur2 \rightarrow 2)\}_A = \begin{cases} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{cases} ;$$

$$\{T(force \rightarrow 2)\}_B = \begin{cases} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} ;$$

$$\{T(pesanteur \rightarrow 2)\}_{G2} = \begin{cases} m_2 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} ;$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en A selon la direction \vec{y} :

$$C_2(t) + 0 + (\overrightarrow{AB} \wedge (X_F \vec{x} + Z_F \vec{z}) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 g \vec{z}) \cdot \vec{y} = \bar{\delta}_2(2/0). \vec{y}$$

- Détails du calcul :

$$\overrightarrow{AB} = l_2 \vec{z}_2 ; \quad \overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$$

$$\bar{\delta}_A(2/0) = \bar{\delta}_{G2}(2/0) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \bar{a}(G_2, 2/0)$$

$$\text{avec } \bar{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{\gamma} \vec{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \vec{z}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta})^2 \vec{z}_2$$

$$\bar{\delta}_A(2/0). \vec{y} = B_2(\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) + \begin{pmatrix} 0 & l_1 \ddot{\gamma} \cos \delta + l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) \\ 0 \wedge m_2 & 0 \\ R2 & l_1 \ddot{\gamma} \sin \delta - l_1 \dot{\gamma}^2 \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta})^2 \\ R1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \\ = B_2(\dot{\gamma} + \ddot{\delta}) + m_2 \lambda_2 (l_1 \ddot{\gamma} \cos \delta + l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \ddot{\delta}))$$

Soit :

$C_2(t) + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) =$
$\ddot{\gamma}(B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta$

Question 5

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la

forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas statique (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F , Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 6

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la

forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas statique (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F , Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 7

Hypothèses :

- $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$ et $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$ (statique)
- $\gamma = \pi / 2$ et $\delta = 0$ (configuration la plus défavorable)

$$C_{1,\text{statmax}} = (l_1 + l_2)Z_F + C_{1,\text{permax}} \text{ et } C_{2,\text{statmax}} = l_2 Z_F + C_{2,\text{permax}}$$

Le couple statique maximal est limité à $C_{1,\text{statmax}} = 50 \text{ N.m}$ soit :

$$Z_{F,\text{max}} = \frac{C_{1,\text{statmax}} - C_{1,\text{permax}}}{l_1 + l_2} = \frac{50 - 2,55}{0,35 + 0,27} \text{ soit } \boxed{Z_{F,\text{max}} = 76,5 \text{ N}}$$

Le cahier des charges est respecté (effort de manipulation maximal du patient 50 N.m)

TD 2 – Corrigé



Stabilisateur passif d'image

Mines Ponts 2018 – PSI

Savoirs et compétences :***

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation

Objectif Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.

Travail demandé

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Correction (1) et (E) sont en liaison pivot d'axe (O, \vec{Y}_0) . On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à (E) en O en projection sur \vec{Y}_0 .

Calcul de $\overline{\delta}(O, E/0)$

Méthode 1 – En passant par le calcul de $\overline{\delta}(O, 2/0)$, $\overline{\delta}(O, C/0)$ et $\overline{\delta}(O, Cp/0)$

Le support 2 étant sans masse, on a $\overline{\delta}(O, 2/0) = \vec{0}$. La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a $\overline{\delta}(G_C, C/0) = \vec{0}$ et $\overline{\delta}(G_{Cp}, Cp/0) = \vec{0}$.

Calcul de $\overline{\delta}(O, C/0)$

On a $\overline{\delta}(O, C/0) = \overline{\delta}(G_C, C/0) + \overline{OG_C} \wedge M_C \Gamma(G_C, C/0)$.

Calcul de $\Gamma(G_C, C/0)$

$$\overline{V(G_C, C/0)} = \overline{V(G_C, C/1)} + \overline{V(G_C, 1/0)} = \overline{G_C O} \wedge \overline{\Omega(C/0)} + v(t) \vec{X}_0 = -L_C \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t) \vec{X}_0 = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t) \vec{X}_0.$$

De plus $\overline{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0$.

$$\text{Au final, } \overline{\delta(O, C/0)} = \overline{OG_C} \wedge M_C \Gamma(G_C, C/0) = L_C \vec{Z}_2 \wedge M_C (L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0)$$

$$\overline{\delta(O, C/0)} = L_C M_C (L_C \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0).$$

Calcul de $\overline{\delta}(O, Cp/0)$

On a $\overline{\delta(O, Cp/0)} = \overline{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} + \overline{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \Gamma(G_{Cp}, C/0)$.

Calcul de $\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)$

$$\text{De même, } \overline{V(G_{Cp}, Cp/0)} = \overline{V(G_{Cp}, Cp/1)} + \overline{V(G_{Cp}, 1/0)} = \overline{G_{Cp} O} \wedge \overline{\Omega(Cp/0)} + v(t) \vec{X}_0 = L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t) \vec{X}_0 = -L_{Cp} \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t) \vec{X}_0.$$

De plus $\overline{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \ddot{\varphi} \vec{X}_2 + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0$.

$$\text{Au final, } \overline{\delta(O, Cp/0)} = \overline{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \Gamma(G_{Cp}, Cp/0) = -L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge M_{Cp} (-L_{Cp} \dot{\varphi} \vec{X}_2 + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0)$$

$$\overline{\delta(O, C/0)} = -L_{Cp} M_{Cp} (-L_{Cp} \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0)$$

On a donc $\overline{\delta(O, E/0)} \cdot \vec{Y}_0 = M_{Cp} L_{Cp}^2 \ddot{\varphi} - M_{Cp} L_{Cp} a(t) \cos \varphi + M_C L_C^2 \dot{\varphi} + M_C L_C a(t) \cos \varphi$

Méthode 2 – En passant par le calcul de $I_O(E)$

On a $I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et $I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et donc

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

O est un point quelconque; donc $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = \overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[\frac{d\sigma(O, E/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)}$ et $\sigma(O, E/R_0) = I_O(E) \cdot \overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}$.

De plus, $\overrightarrow{OG} = \frac{M_C \overrightarrow{L_C} - M_{Cp} \overrightarrow{L_{Cp}}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2}$, $\overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0}$ et $\overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C \overrightarrow{L_C} - M_{Cp} \overrightarrow{L_{Cp}}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\varphi} (M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C + M_{Cp}) \frac{M_C \overrightarrow{L_C} - M_{Cp} \overrightarrow{L_{Cp}}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2} \wedge v(t) \overrightarrow{X_0} =$

$\dot{\varphi} (M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) v(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}$.
 $\left[\frac{d\sigma(O, E/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \ddot{\varphi} (M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp})(a(t) \cos \varphi - v(t) \dot{\varphi} \sin \varphi) \overrightarrow{Y_0}$.

$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \wedge (M_C + M_{Cp}) \left(v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C \overrightarrow{L_C} - M_{Cp} \overrightarrow{L_{Cp}}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2} \right) =$

$(M_C + M_{Cp}) \left(\frac{M_C \overrightarrow{L_C} - M_{Cp} \overrightarrow{L_{Cp}}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \right) \overrightarrow{Y_2} = (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \ddot{\varphi} (M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}$

Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E

- Liaison pivot $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0$.
- $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = (\overrightarrow{OG_C} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = (L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}$.
- $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow Cp)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow Cp)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = (-L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_{Cp} g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = -L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}$.

Théorème du moment dynamique en O en projection sur $\overrightarrow{Y_2}$

$$\dot{\varphi} (M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi = L_C M_C g \sin \varphi - L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi.$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} (M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi = -(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi.$$

On a donc : $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi$, $Q_3(t) = (M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C) \cos \varphi$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c , m_{cp} , L_c , L_{cp} et g .

Correction Dans les conditions précédentes, on a $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \varphi$ et $Q_3(t) = (M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C)$.

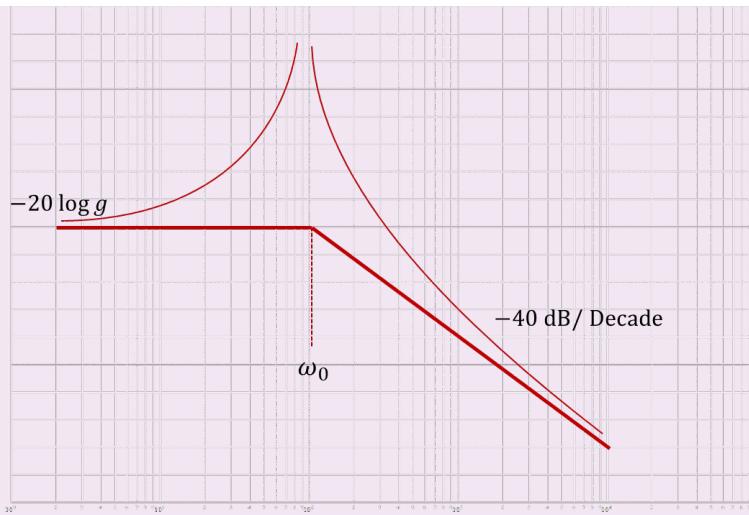
$$\text{L'équation de comportement devient donc } Q_1 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \varphi = Q_3 a(t)$$

$$\Rightarrow Q_1 p^2 \Phi(p) + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \Phi(p) = Q_3 A(p) \text{ et } H(p) = \frac{Q_3}{Q_1 p^2 + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}.$$

$$\text{On a donc } \omega_0^2 = \frac{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}{Q_1} = \frac{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}{M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}. \text{ Le gain } K \text{ vaut } \frac{M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C}{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g} = \frac{1}{g}.$$

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Correction



Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) . En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de (E) selon l'axe (O, \vec{y}_0) .

Correction On a $\omega_a = 10\omega_0$. Une décade après ω_0 , $G_{dB} = -20 \log 10 - 40 = -60 \text{ dB}$. Une atténuation de -60 dB correspond à un gain de $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$. L'amplitude des oscillations sera donc de $0,001a_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ rad}$ soit $0,03^\circ$.

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Correction On a $0,03^\circ < 0,5^\circ$. Le cahier des charges est vérifié au voisinage de $10\omega_0$.

Eléments de corrigé

1. $Q_1 = M_{cp}L_{cp}^2 + M_C L_C^2, Q_2(t) = (L_{cp}M_{cp} - L_C M_C)g \sin \varphi, Q_3(t) = (M_{cp}L_{cp} - M_C L_C)\cos \varphi.$
2. $\omega_0^2 = \frac{(L_{cp}M_{cp} - L_C M_C)g}{M_{cp}L_{cp}^2 + M_C L_C^2}.$
3. .
4. $0,03^\circ$.
5. .