

DDS 2

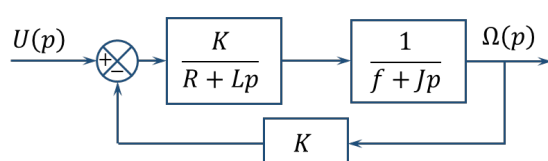
Les ptiits devoirs du soir

Xavier Pessoles

Exercice 169 – Fonctions de transfert*

B2-07

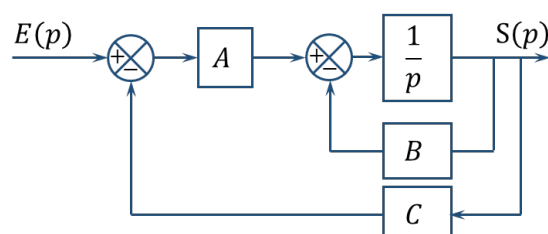
Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Indications

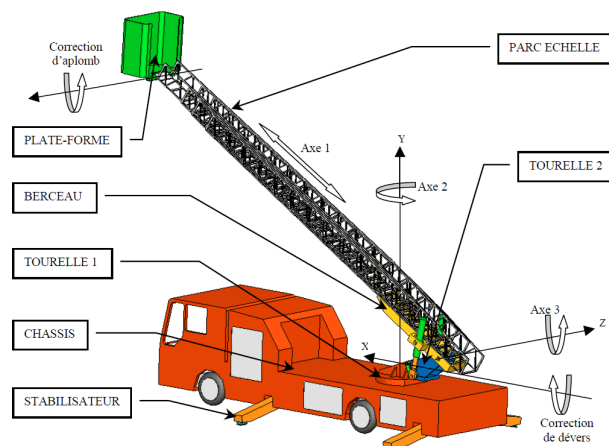
1. $K_{BO} = \frac{K^2}{Rf}$, $\omega_{BO} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}$, $\xi_{BO} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJRf}}$.
2. $K_{BF} = \frac{K}{K^2 + Rf}$, $\xi_{BF} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K^2}}$.
3. $K_{BO} = \frac{AC}{B}$ et $\tau_{BO} = \frac{1}{B}$.
4. $K_{BF} = \frac{A}{B + AC}$ et $\tau_{BF} = \frac{1}{B + AC}$.

Corrigé voir 192.

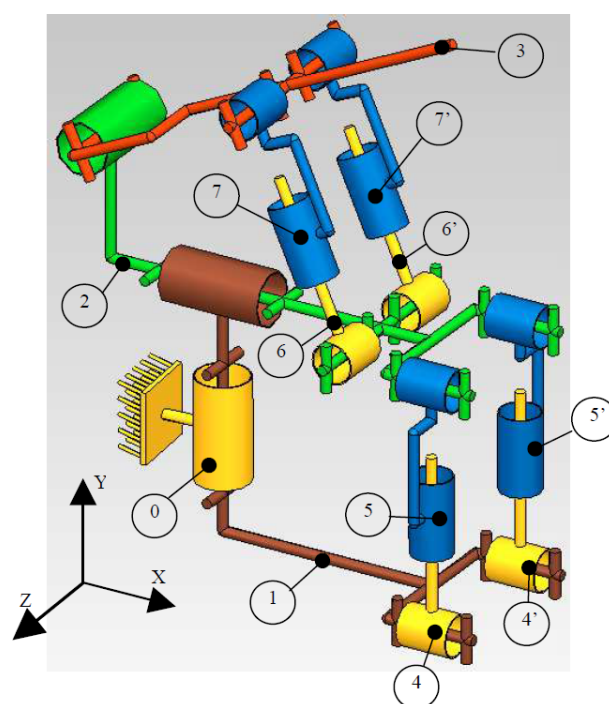
Exercice 168 – Système EPAS *

B2-16

On s'intéresse à l'échelle pivotante équipant un camion de pompier.



On donne un schéma cinématique du système de manoeuvre du parc échelle.



Question 1 Réaliser le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

Question 3 Proposer des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

Éléments de corrigé :

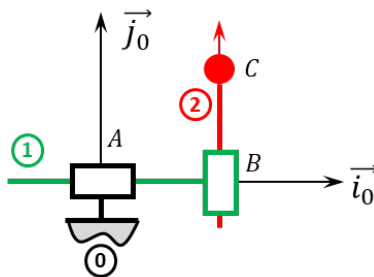
1. .
2. $h = 8$.
3. .

Corrigé voir 191.

Exercice 167 – Mouvement TT – *

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 10 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 20 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.

Corrigé voir 190.

Exercice 166 – Mouvement TT – *

B2-14

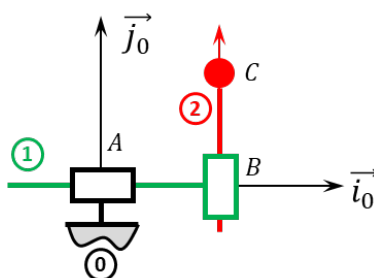
B2-15

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$. $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de 1, et m_1 sa masse. $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2 et m_2 sa masse.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

On cherche à résoudre le problème **en statique**. L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

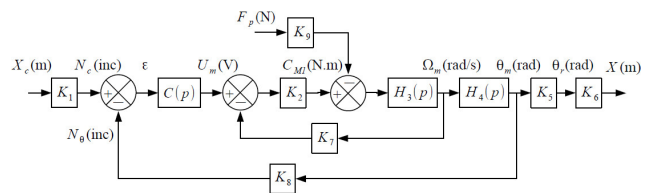
Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 189.

Exercice 165 – Machine de rééducation SysReeduc *

B2-07

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1 \text{ mm}$ le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

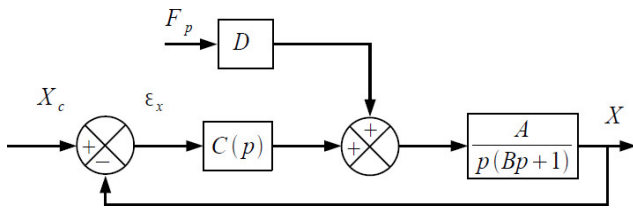
Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .

1. ...

- $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $K_7 = k_e$;
- $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

2. $A = \frac{K_8}{k_e}$, $B = \frac{R(m+M)r^2 \rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$



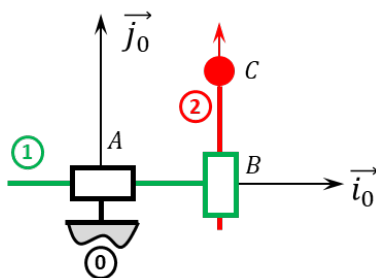
Corrigé voir 188.

Exercice 164 – Mouvement TT – *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Quel est le mouvement de 2 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10 \text{ cm}$ à la vitesse $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$.

Question 3 Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R .

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $V(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\vec{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

Question 4 Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v , R et du temps.

Question 5 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.

Indications :

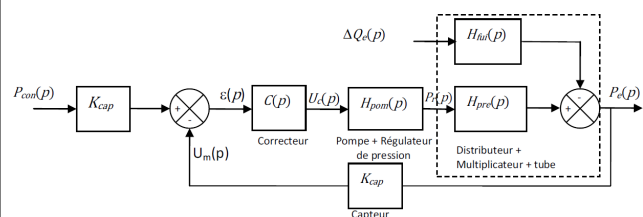
1. .
2. $x_C(t) = \lambda(t)$ et $y_C(t) = \mu(t)$.
3. $\theta(t) = \frac{v}{R} t$.
4. $\lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right)$, $\mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right)$.
5. .

Corrigé voir 187.

Exercice 163 – Banc hydraulique *

C2-03

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



$P_{con}(p)$: pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)

$P_e(p)$: pression d'eau dans le tube (Pa)

$U_c(p)$: tension de commande du régulateur de pression (V)

$P_r(p)$: pression d'huile régulée (Pa)

$\Delta Q_e(p)$: débit de fuite ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)

$U_m(p)$: tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses :

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmittances suivantes : $H_{pre}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$

et $H_{fui}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$ avec $K_m = 3,24$; $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$; $T_1 = 10 \text{ s}$.

- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert : $H_{pom}(p) = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p}$ avec $K_{pom} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$; $T_2 = 5 \text{ s}$.

- Le capteur est modélisé par un gain pur : $K_{cap} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$.

La pression de consigne est de $P_{con} = 800 \text{ bars}$ et les débits de fuite sont estimés à $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

| | |
|-----------------|---|
| Stabilité : | marge de phase de 60° marge de gain de 12 dB |
| Rapidité : | temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$ |
| Précision : | erreur statique $< 5\%$ soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{con} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{pert} < 40 \text{ bars}$ |
| Amortissement : | pas de dépassement |

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation : $t_e \cdot \omega_{0dB} = 3$ où ω_{0dB} désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et t_e le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$, temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$, temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel : $C(p) = K_p$.

Question 1 Déterminer, en fonction de K_p , ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Question 2 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

Question 3 Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p la fonction de transfert en régulation définie par : $H_{pert}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$. En déduire, en fonction de K_p , ε_{pert} définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

Question 4 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{pert} à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Question 5 Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Éléments de corrigé :

1. $\varepsilon_{con} \% = \frac{1}{1 + K_p K_m K_{pom} K_{cap}}$;
2. $K_p > 19$;
3. $\varepsilon_{pert} = \Delta Q_e \frac{K_f}{1 + K_{cap} K_p K_m K_{pom}}$;
4. $K_p > -1$.
5. $K_p < 0,125$. Il est impossible de vérifier les trois conditions avec un correcteur proportionnel.

Corrigé voir 186.

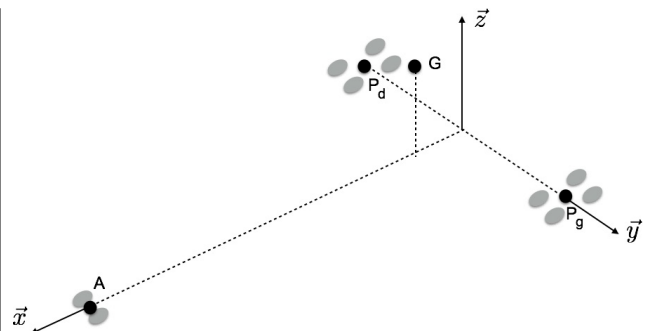
Exercice 162 – *

B2-16

La configuration du train d'atterrissage de l'avion A350-900 est de type tricycle avec :

- deux atterrisseurs principaux (gauche et droit) attachés sur la voilure, légèrement à l'arrière du centre de gravité G de l'avion et de part et d'autre du plan de symétrie vertical (O, \vec{x}, \vec{z}) de l'avion. Ils supportent l'essentiel du poids de l'avion ;
- un atterrisseur auxiliaire situé sous le nez de l'avion, qui assure l'équilibre longitudinal de l'avion au sol et permet de manoeuvrer.

Les atterrisseurs principaux sont équipés de quatre roues chacun, tandis que l'atterrisseur auxiliaire est équipé de deux roues.



Les mobilités entre les différents éléments de l'avion (roues, fuselage...) ne sont pas considérées ; ces éléments ne forment donc qu'une seule classe d'équivalence désignée « avion ».

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan).

Question 1 Réaliser le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales (A, \vec{z}) (atterrisseur auxiliaire), (P_g, \vec{z}) (atterrisseur principal gauche) et (P_d, \vec{z}) (atterrisseur principal droit).

Question 3 Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.

Éléments de corrigé :

1. .
2. $h = 7$.
3. $h = 0$.

Corrigé voir 185.

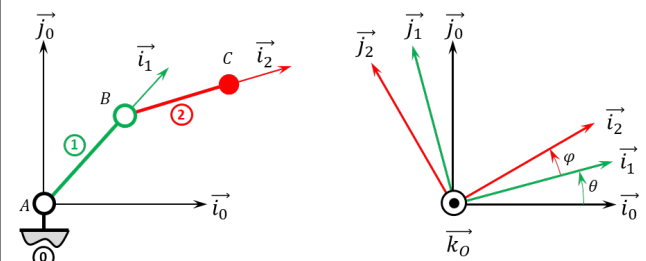
Exercice 161 – Mouvement RR *

C2-05

B2-13

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point C réalise un segment entre les points $[-20, 25]$ et $[20, 25]$ à la vitesse linéaire v .

Question 3 Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.

Question 4 Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C .

Question 5 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

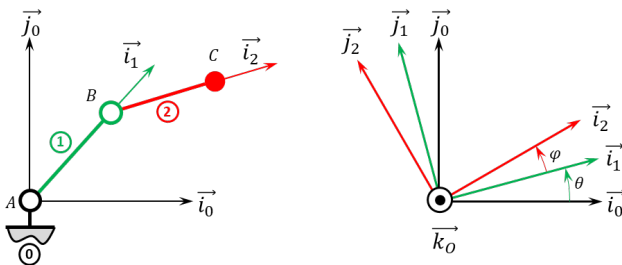
Question 6 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.

Corrigé voir 184.

Exercice 160 – Mouvement RR *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par composition.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C .

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$.

Indications :

- $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = R\dot{\theta} \vec{j}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2$.
- $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = L\dot{\varphi} \vec{j}_2 + \dot{\theta} (L \vec{j}_2 + R \vec{j}_1)$ (c'est la même :).
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k}_0 \\ R\dot{\theta} \vec{j}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2 \end{matrix} \right\}_C$.
- $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = R\ddot{\theta} \vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2 \vec{i}_1 + L(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \vec{j}_2 - L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \vec{i}_2$.

Corrigé voir 183.

Exercice 159 – *

B2-16

Question 1 Calculer l'hyperstatisme du modèle plan du mécanisme global de la pince (Figure 1).

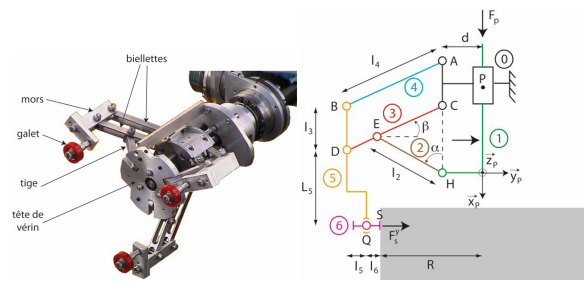


FIGURE 1 – Pince utilisée sur le système ROBOVOLC et schéma cinématique associé

Éléments de corrigé :

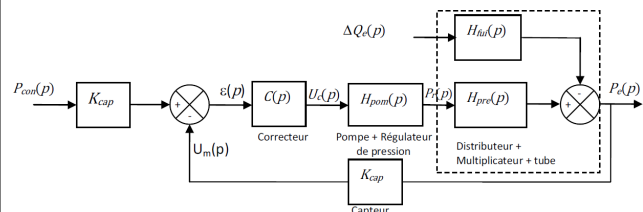
- $h = 1$.

Corrigé voir 182.

Exercice 158 – Banc hydraulique *

C2-03

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



$P_{con}(p)$: pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)

$P_e(p)$: pression d'eau dans le tube (Pa)

$U_c(p)$: tension de commande du régulateur de pression (V)

$P_r(p)$: pression d'huile régulée (Pa)

$\Delta Q_e(p)$: débit de fuite ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)

$U_m(p)$: tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmittances suivantes : $H_{pre}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$ et $H_{fui}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$ avec $K_m = 3,24$; $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$; $T_1 = 10 \text{ s}$.
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert : $H_{pom}(p) = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p}$ avec $K_{pom} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$; $T_2 = 5 \text{ s}$.
- Le capteur est modélisé par un gain pur : $K_{cap} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$.

La pression de consigne est de $P_{con} = 800 \text{ bars}$ et les débits de fuite sont estimés à $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

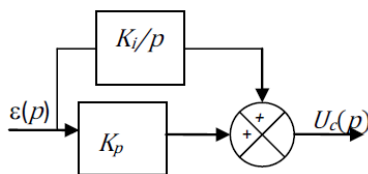
Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

| | |
|-----------------|---|
| Stabilité : | marge de phase de 60° marge de gain de 12 dB |
| Rapidité : | temps d'établissement $t_e < 40$ s (voir remarque ci-dessous) |
| Précision : | erreur statique $< 5\%$ soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40$ bars |
| Amortissement : | pas de dépassement |

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation : $t_e \cdot \omega_{0\text{dB}} = 3$ où $\omega_{0\text{dB}}$ désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et t_e le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$, temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5%,
- $t_e = t_R$, temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5%.

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma bloc ci-dessous.



Question 1 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

Question 2 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

Question 3 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.

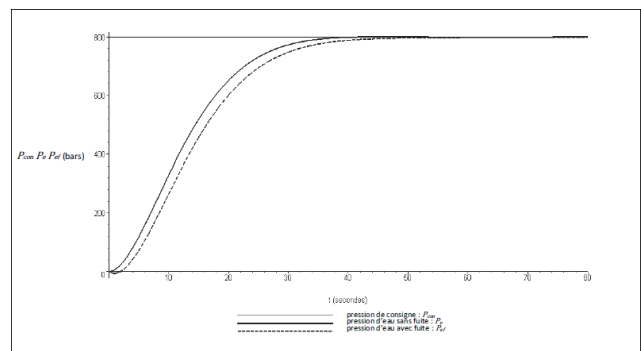
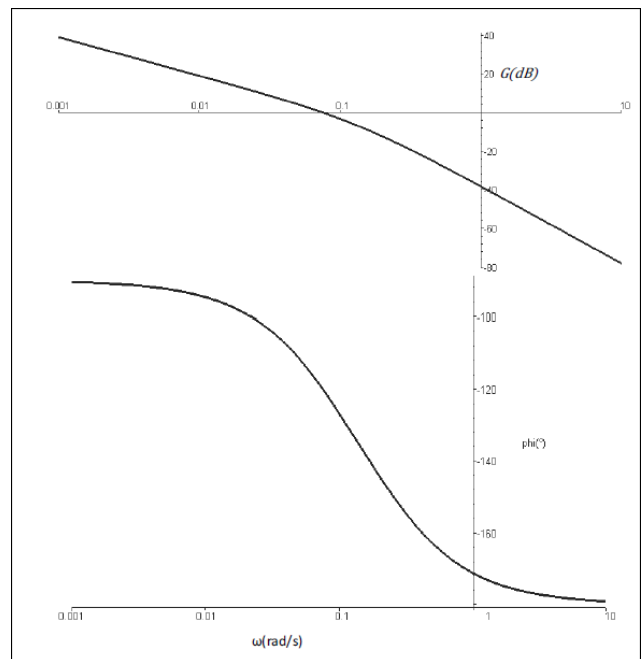
Question 4 Quelle valeur faut-il donner à $\omega_{0\text{dB}}$ pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?

Question 5 Déterminer analytiquement le rapport $T = \frac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

Question 6 En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment. On donne sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

Question 7 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.



Éléments de corrigé :

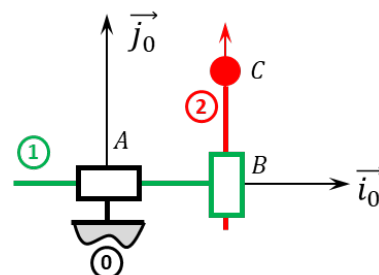
1. $C(p) = K_i \frac{1 + p \frac{K_p}{K_i}}{p}$.
2. .
3. .
4. $T = 6,79$.
5. $K_i = 0,05$ et $K_p = 0,34$ (à vérifier).

Corrigé voir 181.

Exercice 157 – Mouvement TT – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Déterminer $\vec{V}(C, 2/0)$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

Indications :

1. $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0$.

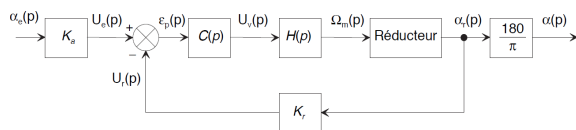
Corrigé voir 180.

Exercice 156 – Palettisation – Stabilité *

C2-03

Une boucle de position est représentée ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{30}{1 + 5 \times 10^{-3} p}$;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$: gain du capteur de position ;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- $N = 200$: rapport de transmission du réducteur (la réduction est donc de $1/N$).
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degré ;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c .



On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$, que $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$ et que la FTBO est donnée par $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)} \left(k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N} \right)$.

On souhaite une marge de phase de 45° .

Question 1 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Question 2 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Question 3 Déterminer l'écart de position.

Éléments de corrigé :

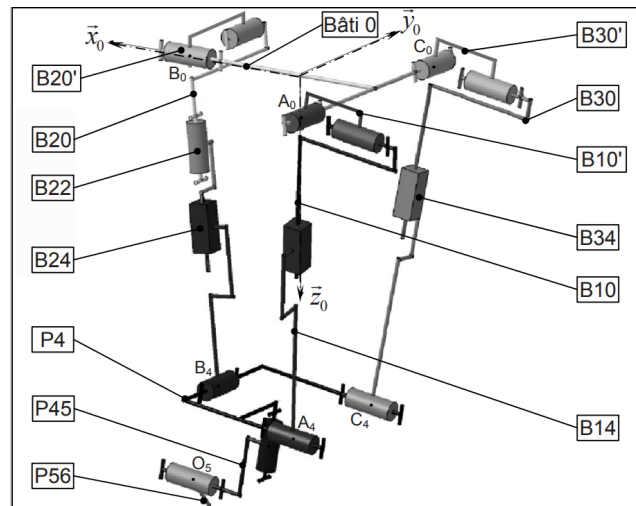
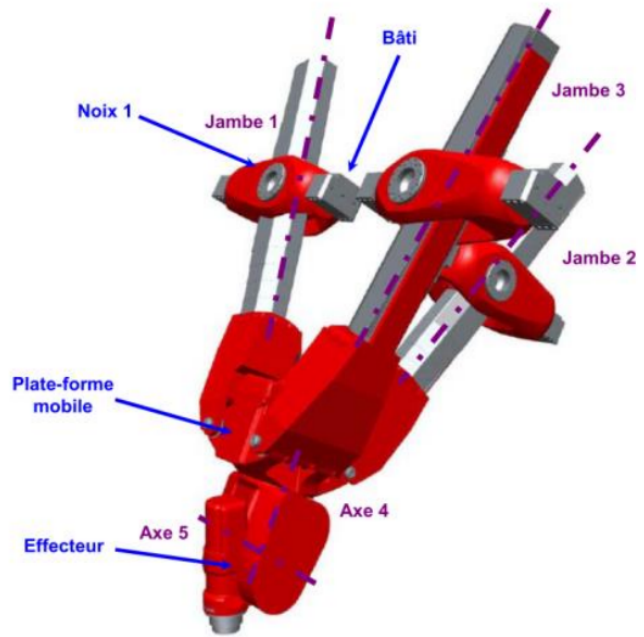
1. $k_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m}$.
2. $k_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau_m k_m k_r} = 471,1$.
3. $\varepsilon_s = 0$.

Corrigé voir 179.

Exercice 155 – Triptéor *

B2-16

Le triptéor est un centre d'Usinage Grande Vitesse à architecture parallèle, permettent d'envisager un usinage rapide et précis.



Question 1 Réaliser le graphe de liaisons.

Question 2 Calculer le degré d'hyperstatisme.

Éléments de corrigé :

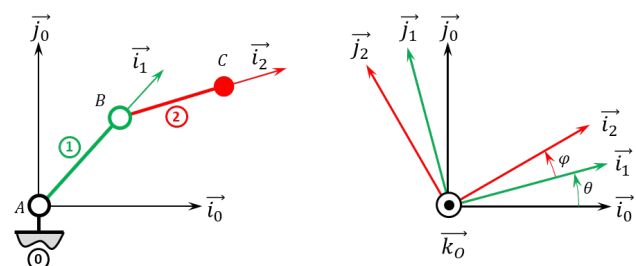
1. .
2. $h = 2$.

Corrigé voir 178.

Exercice 154 – Mouvement RR *

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad et } \varphi = \pi \text{ rad.}$$

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad et } \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Question 4 Retracer le schéma cinématique pour

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ rad et } \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Corrigé voir 177.

Exercice 153 – Mouvement RR *

B2-14

B2-15

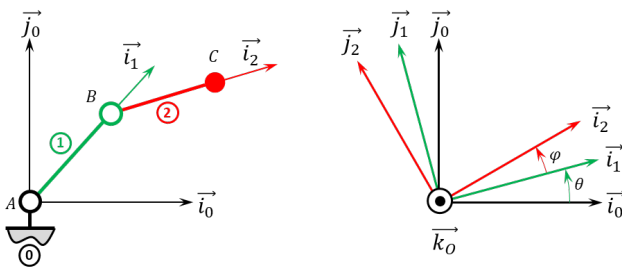
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** et $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} R \vec{i}_1$, on note m_1 la masse de **1**;
- G_2 désigne le centre d'inertie de **2** et $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{2} L \vec{i}_2$, on note m_2 la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet de maintenir **1** en équilibre. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet de maintenir **2** en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

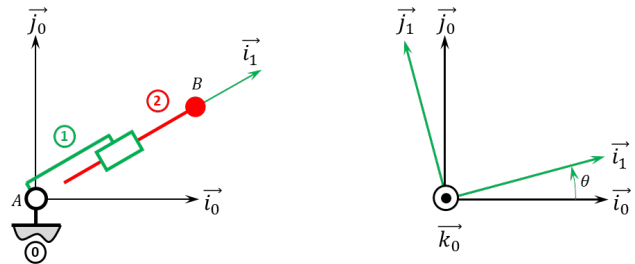
Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 176.

Exercice 152 – Mouvement RT *

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad et } \lambda(t) = 20 \text{ mm.}$$

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour

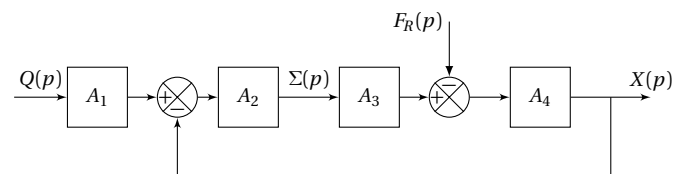
$$\theta = \frac{-\pi}{4} \text{ rad et } \lambda(t) = -20 \text{ mm.}$$

Corrigé voir 175.

Exercice 151 – Quille pendulaire*

B2-07

Le comportement d'un vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

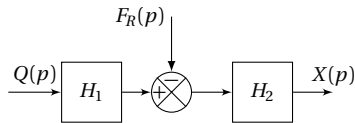
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin [m^3s^{-1}];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin [m^2];
- k : raideur mécanique du vérin [N m^{-1}];
- V : volume d'huile de référence [m^3];
- B : coefficient de compressibilité de l'huile [N m^{-2}];
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- λ : coefficient de frottement visqueux [$\text{N m}^{-1}\text{s}$].

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

1. $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
2. $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
3. $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$.

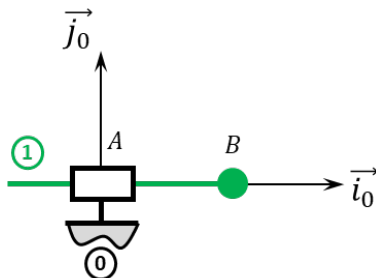
Corrigé voir 188.

Exercice 150 – Mouvement T – *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

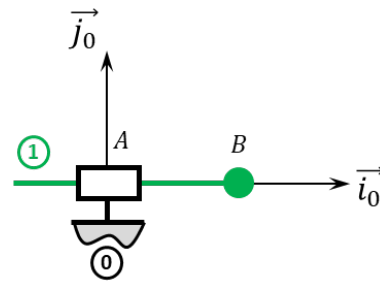
1. .
2. $x_B(t) = \lambda(t)$.

Corrigé voir 173.

Exercice 149 – Mouvement T – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$.

Indications :

1. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}$.
2. $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0$.

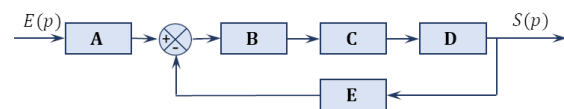
Corrigé voir 172.

Exercice 148 – Calcul de FTBO*

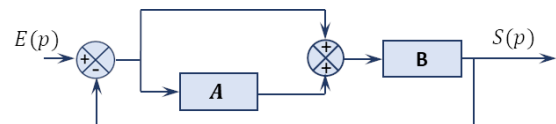
B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

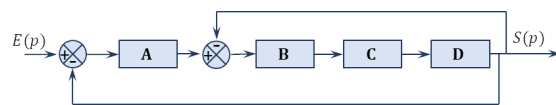
Question 1 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



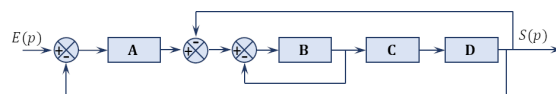
Question 2 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



Question 3 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



Question 4 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



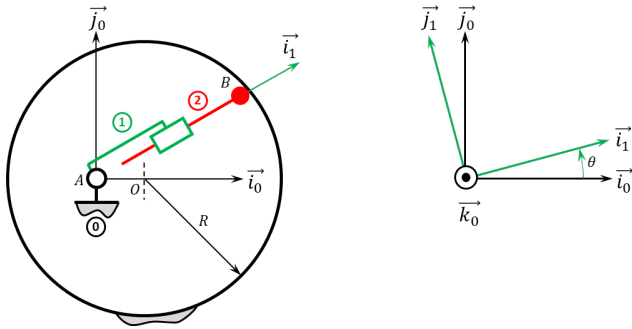
1. FTBO(p) = BCDE.
2. FTBO(p) = B(1 + A).
3. FTBO(p) = A $\frac{BCD}{1 + BCD}$.
4. FTBO(p) = $\frac{ABCD}{1 + B + BCD}$.

Corrigé voir 171.

Exercice 147 – Pompe à palettes **

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 0 \text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \pi \text{ rad}$.

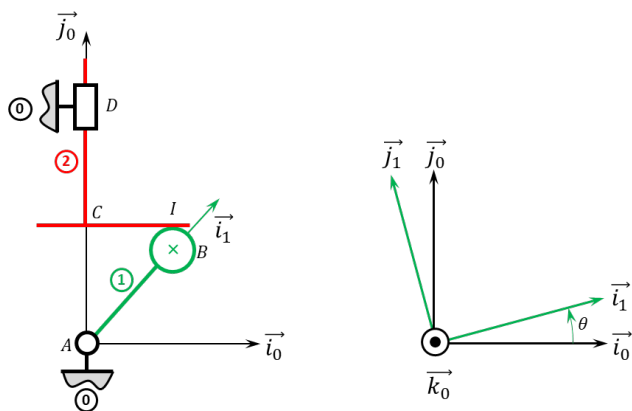
Question 4 En déduire la course de la pièce 2.

Corrigé voir 170.

Exercice 146 – Pompe à pistons radiaux **

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BI} = R \vec{j}_0$. De plus, $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 1 et 2 en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre 0 et 2.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 0 \text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Question 5 En déduire la course de la pièce 2.

Corrigé voir 169.

Exercice 145 – Parallélépipède*

B2-10

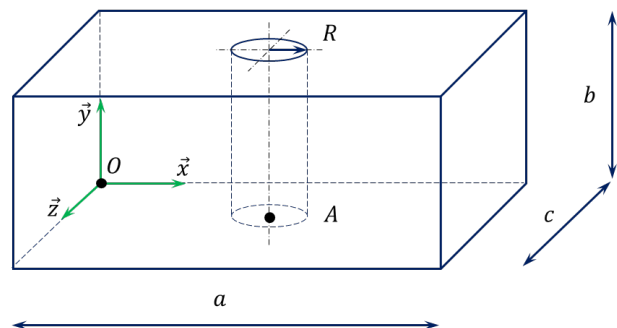
La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe (G, \vec{k}) de rayon R et de hauteur H et de masse m est donnée en son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec

$$A = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède de cotés a , b et c et de masse m est donnée en son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}$,

$$B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, \quad C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



$$\text{On pose } \overrightarrow{OA} = \frac{a}{2} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}.$$

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G , en A puis O .

Corrigé voir 167.

Exercice 144 – Parallélépipède percé*

B2-10

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe (G, \vec{k}) de rayon R et de hauteur H et de masse m est donnée en son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec

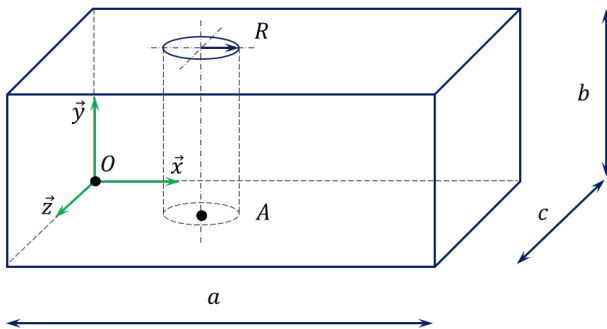
$$A = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle de cotés a , b et c et de masse m est donnée en son

centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec

$$A = m \frac{b^2 + c^2}{12}, B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



On pose $\vec{OA} = \frac{a}{3} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}$.

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

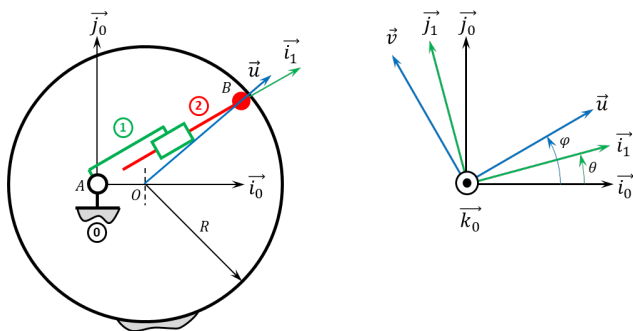
Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G .

Corrigé voir 165.

Exercice 143 – Pompe à piston radial *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{AO} = e \vec{i}_0$ et $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 4 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

On prendra une section de piston 2 de 1 cm^2 et une fréquence de rotation de $\dot{\theta}(t) = \pi \times 2 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 5 Exprimer le débit instantané de la pompe.

Question 6 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ et $e = 15 \text{ mm}$.

Question 7 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

Indications (à vérifier...) :

1. .
2. $\lambda(t) = e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$.
3. .
4. $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$.
5. .

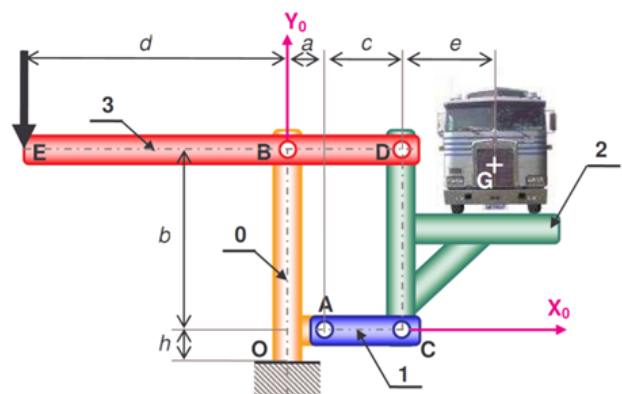
Corrigé voir 164.

Exercice 142 – Pèse camion **

C1-05

On considère un bâti 0 auquel est attaché le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$. Le champ de pesanteur est $g = -g \vec{y}_0$. La barre 1 est liée au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe (A, \vec{z}_0) . Le plateau porte camion 2 est lié à la barre 1 par une liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0) . Le levier 3 est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe (B, \vec{z}_0) . Ce levier est également lié au plateau 2 par une liaison pivot parfaite d'axe (D, \vec{z}_0) . Le camion 4, de centre de masse G et de masse M inconnue, repose sur le plateau 2. L'action mécanique connue est caractérisée par :

$$\{\text{ext} \rightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_E.$$



Question 1 Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.

Question 2 Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de F en fonction de M .

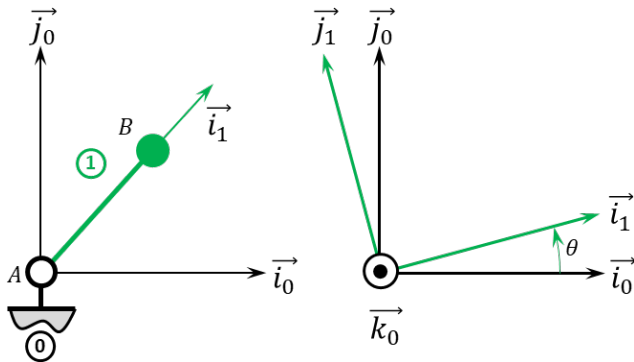
Corrigé voir 163.

Exercice 141 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

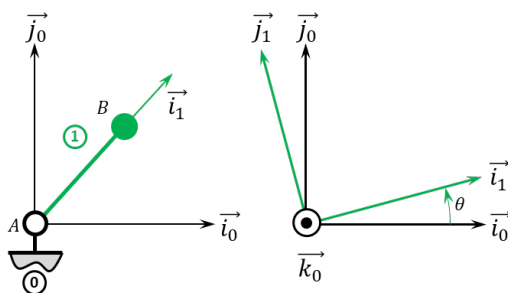
1. .
2. .
3. $x_B(t) = R \cos \theta(t)$ et $y_B(t) = R \sin \theta(t)$.

Corrigé voir 161.

Exercice 140 – Mouvement R *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 1/0)$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 1/0)$ par une autre méthode.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0)$.

Indications :

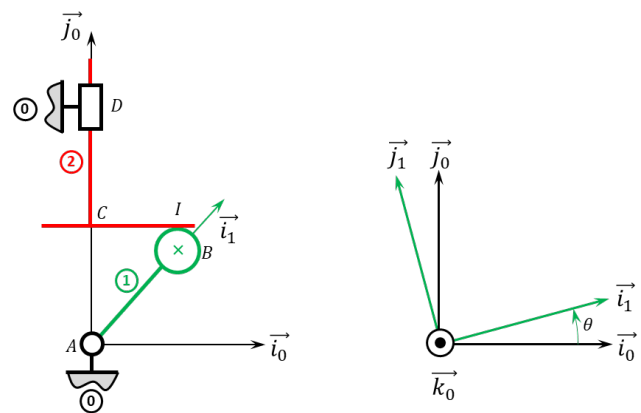
1. $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
2. $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
3. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{matrix} \right\}_B$.
4. $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0) = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1$.

Corrigé voir 161.

Exercice 139 – Pompe à piston axial *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BI} = R \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$. De plus, $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 1 et 2 en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre 0 et 2.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 On note S la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

Question 5 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 10 \text{ mm}$ ainsi que pour $e = 20 \text{ mm}$ et $R = 5 \text{ mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rads}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1 \text{ cm}^2$.

Indications :

1. .
2. $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$.
3. $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.
4. $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.
5. .

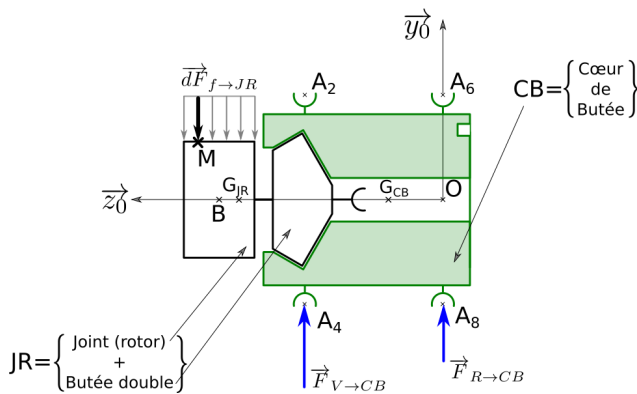
Corrigé voir 160.

Exercice 138 – Banc Balafre *

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

La figure suivante représente le paramétrage permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur

l'ensemble $S = \{JR + CB\}$. On nommera G le centre d'inertie de l'ensemble S .



Données et hypothèses

- On note $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$ où R_J est le rayon du joint avec $R_J = 175$ mm;
- la longueur du joint est $L_J = 150$ mm. La position du point B , centre du joint est $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$ avec $z_B = 425$ mm;
- Le coeur de butée a une masse $M_{CB} = 40$ kg et la position de son centre d'inertie G_{CB} est paramétrée

par $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$ avec $L_{CB} = 193$ mm;

- L'ensemble $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$ a une masse $M_{JR} = 100$ kg et la position de son centre d'inertie G_{JR} est paramétrée par $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0}$ avec $L_{JR} = 390$ mm. On notera $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$ la matrice d'inertie de l'ensemble JR au point G_{JR} exprimée dans une base $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$ liée à JR ;
- Les positions des points A_4 et A_8 sont paramétrées par $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$ avec $z_4 = 280$ mm et $R_{CB} = 150$ mm.

Question 1 Déterminer l'expression de la coordonnée z_G de \overrightarrow{OG} selon $\overrightarrow{z_0}$. Faire l'application numérique.

Question 2 Sachant que l'ensemble JR possède une symétrie de révolution par rapport à $(O, \overrightarrow{z_0})$, simplifier la matrice d'inertie $I_{G_{JR}}(JR)$.

Corrigé voir 159.

Exercice 169 – Fonctions de transfert*

B2-07

Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a } FTBO(p) = \frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)} = \frac{K^2}{Rf + RJp + Lf p + LJp^2} = \frac{K^2}{Rf \left(1 + p \frac{RJ+Lf}{Rf} + \frac{LJ}{Rf} p^2 \right)}.$$

$$\text{On a donc } K_{BO} = \frac{K^2}{Rf}, \omega_{BO} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}, \frac{2\xi_{BO}}{\omega_{BO}} = \frac{RJ+Lf}{Rf} \Leftrightarrow \xi_{BO} = \omega_{BO} \frac{RJ+Lf}{2Rf} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}} \frac{RJ+Lf}{2Rf} = \frac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJRf}}.$$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a } FTBF(p) = \frac{\frac{K}{(R+Lp)(f+Jp)}}{1 + \frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}} = \frac{K}{(R+Lp)(f+Jp) + K^2} = \frac{\frac{K}{K^2+Rf}}{\frac{RJ+Lf}{Rf+K^2}p + \frac{LJ}{Rf+K^2}p^2 + 1}.$$

$$\text{On a donc } K_{BF} = \frac{K}{K^2+Rf}, \omega_{BF} = \sqrt{\frac{Rf+K^2}{LJ}}, \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{RJ+Lf}{Rf+K^2} \Leftrightarrow \xi_{BF} = \omega_{BF} \frac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)} = \sqrt{\frac{Rf+K^2}{LJ}} \frac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)} \\ \xi_{BF} = \frac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf+K^2}}.$$

Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Si on note $R(p)$ la seconde entrée du **premier comparateur** et $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur,

$$FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{R(p)} = A \times \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{p}{B}} \times C = \frac{AC}{B+p} = \frac{\frac{AC}{B}}{1 + \frac{p}{B}}. \text{ On a donc } K_{BO} = \frac{AC}{B} \text{ et } \tau_{BO} = \frac{1}{B}.$$

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

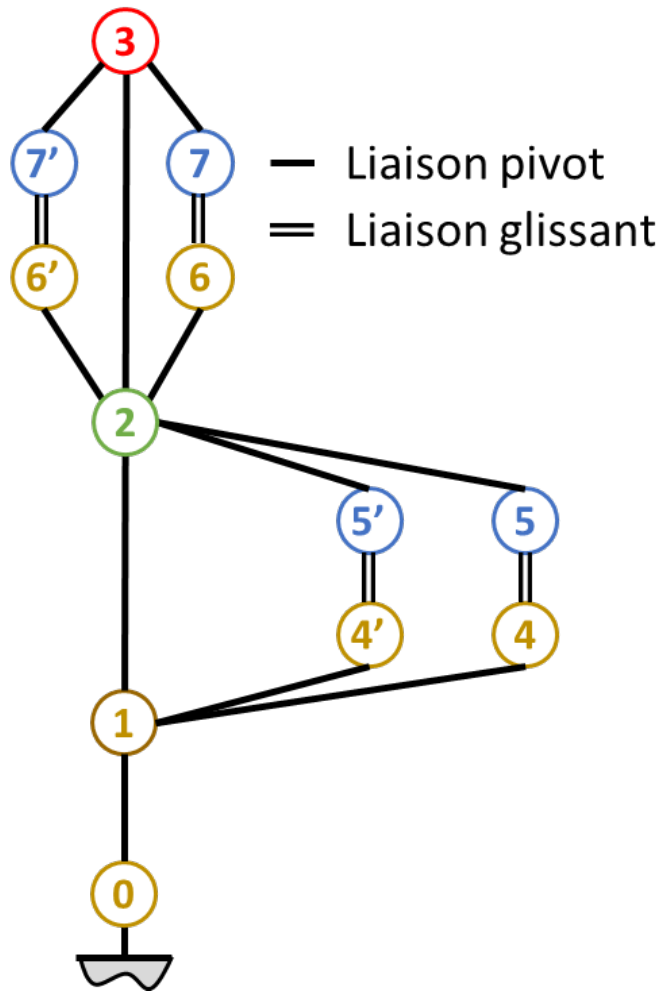
$$\text{On a } FTBF(p) = \frac{\frac{A}{B+p}}{1 + \frac{AC}{B+p}} = \frac{A}{B+p+AC} = \frac{\frac{A}{B+AC}}{1 + \frac{p}{B+AC}}.$$

$$\text{On a donc } K_{BF} = \frac{A}{B+AC} \text{ et } \tau_{BF} = \frac{1}{B+AC}.$$

Exercice 168 – Système EPAS *

B2-16

Question 1 Réaliser le graphe des liaisons.



Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

Détermination des mobilités :

- rotation de l'ensemble des pièces en rotation autour de \vec{y} grâce à la pivot entre 0 et 1 ;
- rotation de la pivot entre 1 et 2 par mouvements opposés des pivots glissant 4-5 et 4'-5' ;
- rotation de la pivot entre 2 et 3 par mouvements simultanés des pivots glissant 6-7 et 6'-7'.

On a donc $m = 3$.

Méthode cinématique :

- nombre de cycles : 15 liaisons et 12 solides, $\gamma = L - S + 1 = 4$;
- nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6 \times 4 = 24$;
- nombre d'inconnues cinématiques : $I_c = 4 \times 2 + 11 \times 1 = 19$;
- hyperstativité : $h = m - I_c + E_c = 3 - 19 + 24 = 8$.

Méthode statique :

- nombre d'équations statiques : $E_s = 6 \times 11 = 66$;
- nombre d'inconnues statiques : $I_s = 4 \times 4 + 11 \times 5 = 71$;
- hyperstativité : $h = m - E_s + I_s = 3 - 66 + 71 = 8$.

Question 3 Proposer des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

On va chercher à rendre le système isostatique tout en conservant une même architecture pour des branches en parallèles.

Dans le cycle 1-2-5-4-1 pris indépendamment du reste du mécanisme on a :

- $m = 1$;
- $I_c = 1 + 1 + 2 + 1 = 4$;
- $E_c = 6 \times 1$;
- $h_1 = m - I_c + E_c = 2 - 4 + 6 = 4$.

En remplaçant la pivot entre 1 et 4 par une linéaire annulaire, on ajoute 3 inconnues cinématiques et 1 mobilité.

On a donc $h_1 = 2$. On peut faire le même changement pour les liaisons 4' - 5', 2 - 6, 2 - 6'.

On a donc :

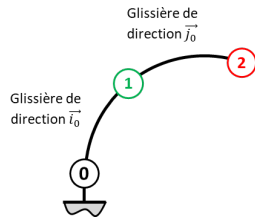
- $m = 7$
- nombre de cycles : 15 liaisons et 12 solides, $\gamma = L - S + 1 = 4$;

- nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6 \times 4 = 24$;
 - nombre d'inconnues cinématiques : $I_c = 4 \times 2 + 7 \times 1 + 4 \times 4 = 31$;
 - hyperstaticité : $h = m - I_c + E_c = 7 - 31 + 24 = 0$.
- (Vérifier que les linéaires annulaires n'ajoutent pas des mobilités supplémentaires...)

Exercice 167 – Mouvement TT – ★

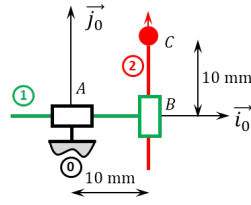
B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



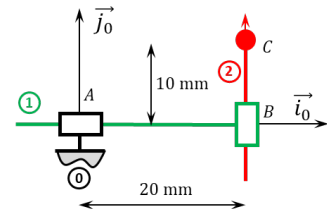
Question 2 Retracer le

schéma cinématique pour $\lambda = 10 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.



Question 3 Retracer le

schéma cinématique pour $\lambda = 20 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.



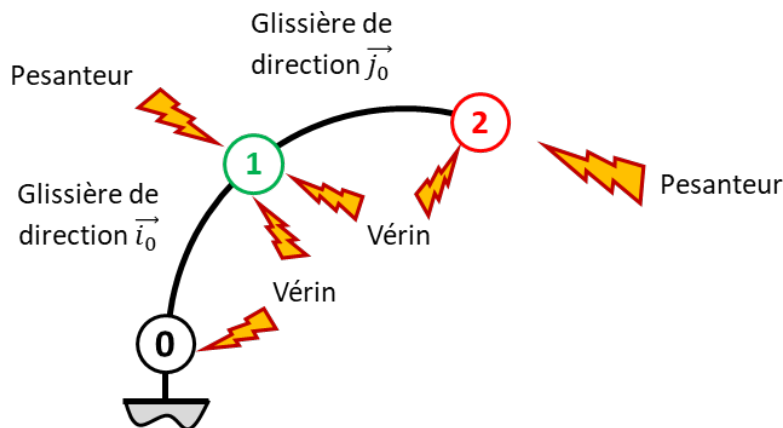
Exercice 166 – Mouvement TT – ★

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_0 + Z_{01} \vec{k}_0 \\ L_{01} \vec{i}_0 + M_{01} \vec{j}_0 + N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_0 + Z_{12} \vec{k}_0 \\ L_{12} \vec{i}_0 + M_{12} \vec{j}_0 + N_{12} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C, \mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{v1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_1 \vec{i}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{v2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_2 \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{01} \vec{j}_0 \\ N_{01} \vec{k}_0 \end{matrix} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} \vec{i}_0 \\ N_{12} \vec{k}_0 \end{matrix} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesantier sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesantier sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_2 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{C, \mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{v1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} F_1 \vec{i}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{v2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} F_2 \vec{j}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole **2** et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{j}_0 ;
- on isole **1+2** et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{i}_0 .

Exercice 165 – Machine de rééducation SysReeduc *

B2-07

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M + m) r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m) r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M + m) r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respecter X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_c - K_8 \theta_m = K_1 X_c - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .

D'une part,

$$\begin{aligned}
 X(p) &= ((X_c(p) - X(p)) C(p) - F_p(p) D) \frac{A}{p(Bp + 1)} \\
 X(p) &= \frac{A(X_c(p) - X(p)) C(p)}{p(Bp + 1)} - \frac{AF_p(p) D}{p(Bp + 1)} \\
 \Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p(Bp + 1)} &= \frac{AX_c(p)C(p)}{p(Bp + 1)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp + 1)} \Leftrightarrow X(p) \left(\frac{p(Bp + 1) + AC(p)}{p(Bp + 1)} \right) = \frac{AX_c(p)C(p)}{p(Bp + 1)} + \frac{AF_p(p)D}{p(Bp + 1)} \\
 \boxed{\Leftrightarrow X(p) = \frac{AX_c(p)C(p)}{p(Bp + 1) + AC(p)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp + 1) + AC(p)}}
 \end{aligned}$$

D'autre part, $X(p) = \Omega_m(p) H_4(p) K_5 K_6$, $U_m(p) = (X_c(p) K_1 - \theta_m(p) K_8) C(p)$, $\theta_m(p) = \Omega_m(p) H_4(p)$.

$\Omega_m(p) = ((U_m(p) - \Omega_m(p) K_7) K_2 - F_p(p) K_9) H_3(p)$

$\Leftrightarrow \Omega_m(p) (1 + K_7 K_2 H_3(p)) = U_m(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9$

$$\begin{aligned}
 X(p) &= (U_m(p)H_3(p)K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = ((X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8)C(p)H_3(p)K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = \left(\left(X_c(p)K_1 - X(p) \frac{K_8}{K_5K_6} \right) C(p)H_3(p)K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9 \right) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = ((X_c(p) - X(p))C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) \left(1 + C(p)H_3(p)K_1K_2 \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)} \right) = (X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)} \\
 &\boxed{\Leftrightarrow X(p)(1 + K_7K_2H_3(p) + C(p)H_3(p)K_1K_2H_4(p)K_5K_6) = (X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}}
 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow X(p) \left(1 + K_7K_2 \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} \frac{K_8}{K_5K_6} K_2 \frac{1}{p} K_5K_6 \right) = \left(X_c(p)C(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} \frac{K_8}{K_5K_6} K_2 - F_p(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} \right) \\
 &\Leftrightarrow X(p) \left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right) = \left(X_c(p)C(p) \frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \frac{k_t}{R} - F_p(p) \frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2} \right) \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \frac{k_t}{R}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{1} \frac{1}{R}}{\left((M+m)r^2\rho_1^2p^2 + \frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 \frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 \frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 + p \frac{k_e k_t}{R} + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{1}}{\left((M+m)r\rho_1p^2 + \frac{(M+m)r\rho_1p^2 \frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{(M+m)r\rho_1p^2 \frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 + p \frac{k_e k_t}{R} + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2 + \frac{p k_e k_t}{Rr\rho_1} + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} \left(\frac{R}{k_e k_t} (M+m)r^2\rho_1^2p + 1 \right) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{Rr\rho_1} \left(\frac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_e k_t} p + 1 \right) + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{Rr\rho_1} (Bp+1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{Rr\rho_1} (Bp+1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{R}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R}}{p (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R} \frac{R}{k_e k_t}} - F_p(p) \frac{K_9 \frac{Rr\rho_1}{k_e k_t}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{Rr\rho_1}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1) + C(p)\frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{K_9 \frac{Rr\rho_1}{k_e k_t}}{p(Bp+1) + C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1) + C(p)\frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_8}{k_e} \frac{k_e}{K_8} \frac{K_9}{k_e} \frac{Rr\rho_1}{k_t}}{p(Bp+1) + C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

On a donc $A = \frac{K_8}{k_e}$, $B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$.

Exercice 164 – Mouvement II – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de 2 par rapport à 0.

Le point C a un mouvement quelconque dans le plan $(A, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On a $\vec{AC} = \lambda(t)\vec{i}_0 + \mu(t)\vec{j}_0$ et donc, on a directement $\begin{cases} x_C(t) = \lambda(t) \\ y_C(t) = \mu(t) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10 \text{ cm}$ à la vitesse $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$.

Question 3 Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R .

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\vec{V}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\vec{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

On a $v = R\dot{\theta}(t)$. Par intégration, $\theta(t) = \frac{v}{R}t$ (avec $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ pour $t = 0 \text{ s}$).

Question 4 Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v , R et du temps.

Exprimons la trajectoire du point C : $\vec{AC} = R\vec{e}_r = R\cos\theta(t)\vec{i}_0 + R\sin\theta(t)\vec{j}_0$. Par identification $\lambda(t) = R\cos\theta(t)$ et $\mu(t) = R\sin\theta(t)$.

Au final, $\begin{cases} \lambda(t) = R\cos\left(\frac{v}{R}t\right) \\ \mu(t) = R\sin\left(\frac{v}{R}t\right) \end{cases}$.

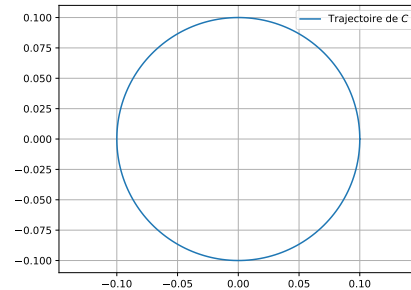
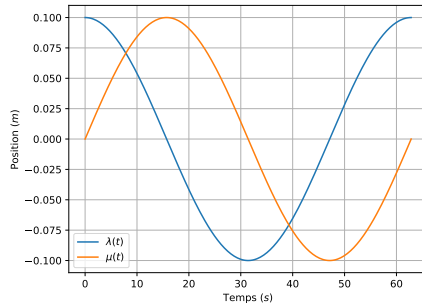
Question 5 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0, T, 200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t, les_lambda, label="$\\lambda(t)$")
plt.plot(les_t, les_mu, label="$\\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps ($s$)")
plt.ylabel("Position ($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()
```

```
plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda, les_mu, label="Trajectoire de $C$")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```



Exercice 163 – Banc hydraulique ★

C2-03

Question 1 Déterminer, en fonction de K_p , ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Le débit de fuite est nul; donc $\Delta Q_e(p) = 0$.

Cas 1 : cours sur la précision connu – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie

La FTBO est de classe nulle ($C(p)$ est un gain, $H_{pom}(p)$ et $H_{pre}(p)$ de classe 0). Le gain de la Boucle ouverte est $K_{BO} = K_p K_m K_{pom} K_{cap}$.

Si l'entrée est un échelon d'amplitude P_0 , l'écart statique est donc donné par $\varepsilon_s = \frac{P_0}{1 + K_{BO}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_m K_{pom} K_{cap}}$.

Cas 2 : cours sur la précision peu connu – À savoir faire, mais on perd un peu de temps... – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie Si on connaît quand même un petit peu son cours, on a $\varepsilon(p) = \frac{P_{con}(p)}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}}$.

$$\text{On a alors, } \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{P_0}{p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

Cas 3 : cours sur la précision pas connu – À savoir faire, mais on perd beaucoup peu de temps...

$$\text{En utilisant la formule de Black, on a } P_e(p) = P_{con}(p) K_{cap} \frac{K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}}$$

$$= P_{con}(p) K_{cap}(p) \frac{K_p K_{pom} K_m}{(1 + T_2 p)(1 + T_1 p) + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

$$\text{En passant à la valeur finale avec une entrée échelon, on a } \lim_{t \rightarrow \infty} P_e(t) = P_0 K_{cap} \frac{K_p K_{pom} K_m}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

$$\text{L'écart statique est donc donné par } \varepsilon_s = P_0 - P_0 \frac{K_p K_{pom} K_m K_{cap}}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} = P_0 \frac{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap} - K_p K_{pom} K_m K_{cap}}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

$$= \frac{P_0}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

Question 2 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

On souhaite que l'écart statique soit inférieure à 5% soit 0,05 pour une entrée unitaire.

$$\text{On cherche donc } K_p \text{ tel que } \frac{1}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} < 0,05 \Leftrightarrow 1 < 0,05(1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 0,05}{0,05 K_{pom} K_m K_{cap}} < K_p$$

$$\text{Soit } K_p > \frac{1 - 0,05}{0,05 \times 1,234 \times 10^7 \times 3,24 \times 2,5 \times 10^{-8}} \Rightarrow K_p > 19.$$

Question 3 Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p la fonction de transfert en régulation définie par : $H_{pert}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$. En déduire, en fonction de K_p , ε_{pert} définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

Dans ce cas il n'y a pas d'intégrateur avant la perturbation échelon. Il faut savoir faire le calcul.

On peut utiliser la « lecture directe » : $P_e(p) = P_r(p)H_{pre} - \Delta Q_e(p)H_{fui}(p) = H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)\varepsilon(p) - \Delta Q_e(p)H_{fui}(p)$
 $= -H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}P_e(p) - \Delta Q_e(p)H_{fui}(p)$.

$$\Leftrightarrow P_e(p)(1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}) = -\Delta Q_e(p)H_{fui}(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)} = -\frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}}$$

$$\text{Calculons } \varepsilon_{pert}(p) = -\frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}} \Delta Q_e(p)K_{cap}.$$

$$\text{On a alors } \varepsilon_{pert} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \times \frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}} \frac{\Delta Q_0}{p} K_{cap}$$

$$= -\frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap}}{1 + K_m K_{pom} K_p K_{cap}}$$

Question 4 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{pert} à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Pour $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, il faut $\varepsilon_{pert} < 40 \times 10^5 \text{ (Pa)}$ soit

$$\frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap}}{1 + K_m K_{pom} K_p K_{cap}} < 40 \times 10^5 \Rightarrow K_f \Delta Q_0 K_{cap} < 40 \times 10^5 (1 + K_m K_{pom} K_p K_{cap}) \Rightarrow \frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap} - 40 \times 10^5}{40 \times 10^5 K_m K_{pom} K_{cap}} < K_p \Rightarrow K_p > -1$$

Question 5 Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

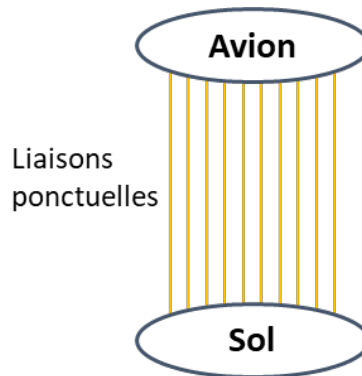
Je vous laisse faire le calcul... Il faut savoir le faire le plus vite possible. Il faut d'abord calculer la FTBF la mettre sous

forme canonique, déterminer $\xi_{BF} = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T (1 + K_p K_M K_{pom} K_{cap})}}$ puis déterminer K_p tel que $\xi_{BF} = 1$.

Exercice 162 - *

B2-16

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan). **Question 1** Réaliser le graphe des liaisons.



Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.

La liaison de l'avion avec le sol est assimilable à une liaison appui-plan de normale \vec{z} . Il y a donc 3 mobilités (1 rotation autour de \vec{z} , 1 translation selon \vec{x} et 1 translation suivant \vec{y}).

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_s = 10 \times 1 = 10$ (8 liaisons ponctuelles avec 1 inconnue statique par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 6 + 10 = 7$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (10 - 2 + 1) \times 6 = 54$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_c = 10 \times 5 = 50$ (8 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 50 + 54 = 7$.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales (A, \vec{z}) (atterrisseur auxiliaire), (P_g, \vec{z}) (atterrisseur principal gauche) et (P_d, \vec{z}) (atterrisseur principal droit).

Question 3 Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_s = 3 \times 1 = 3$.

En conséquences, $h = 3 - 6 + 3 = 0$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (3 - 2 + 1) \times 6 = 12$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_c = 3 \times 5 = 15$ (3 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison);

En conséquences, $h = 3 - 15 + 12 = 0$.

Exercice 161 – Mouvement RR *

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Le point C peut atteindre tous les points situés compris entre deux cercles de rayon 5 mm et de rayon 25 mm.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de 2 par rapport à 0.

On a $\vec{AC} = R \vec{i}_1 + L \vec{i}_2$. On projetant ce vecteur dans le repère $\mathcal{R}_A i_0 j_0 k_0$ on a

$$\vec{AC} = R(\cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0) + L(\cos(\theta + \varphi) \vec{i}_0 + \sin(\theta + \varphi) \vec{j}_0). \text{ On a donc : } \begin{cases} x_C(t) = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ y_C(t) = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

Question 3 Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.

Distance à parcourir : 0,05 m. Durée du parcours : $T = \frac{0,05}{v}$.

Question 4 Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.

$\forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right]$, $y_C(t) = 0,025$. Pour $t = 0$, $x_C(0) = -0,025$. On a alors $x_C(t) = -0,025 + vt$.

$$\text{Au final, } \forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right], \begin{cases} x_C(t) = -0,025 + vt \\ y_C(t) = 0,025 \\ z_C(t) = 0 \end{cases} \text{ dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0).$$

Question 5 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$.

Afin que le point C suive un segment, il faut donc que $\begin{cases} -0,025 + vt = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,025 + vt - R \cos \theta = L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-0,025 + vt - R \cos \theta)^2 = L^2 \cos^2(\theta + \varphi) \\ (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2 \sin^2(\theta + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-0,025 + vt - R \cos \theta)^2 + (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2$$

$$\Rightarrow 0,025^2 + v^2 t^2 + R^2 \cos^2 \theta - 2 \times 0,025 vt + 2R \cos \theta - vt R \cos \theta + 0,025^2 + R^2 \sin^2 \theta - 2 \times 0,025 R \sin \theta = L^2$$

$$\Rightarrow (2 - vt) \cos \theta - 2 \times 0,025 \sin \theta = \frac{L^2}{R} - \frac{2 \times 0,025^2}{R} - \frac{v^2 t^2}{R} - R + 2 \times 0,025 \frac{vt}{R}$$

Équation trigonométrique de la forme $a \cos x + b \sin x = c$.

Il y a donc une solution analytique. On peut aussi résoudre l'équation numériquement.

Une fois $\theta(t)$ déterminée, on a $0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \Rightarrow \arcsin\left(\frac{0,025 - R \sin \theta(t)}{L}\right) - \theta(t) = \varphi(t)$

Question 6 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.

Exercice 160 – Mouvement RR *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = R \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} + L \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}.$$

(Avec $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}$).

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par composition.

On a $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)}$.

$$\overrightarrow{V(C, 2/1)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -L \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{k_0} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}.$$

$$\overrightarrow{V(C, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = (-L \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1}).$$

Au final, $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} + \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1})$.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$. Pour sommer les torseurs, il faut écrire les vecteurs vitesses au même point, ici en C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \\ R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0}.$$

De plus, $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1}$ et $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_2} = -(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{i_2}$.

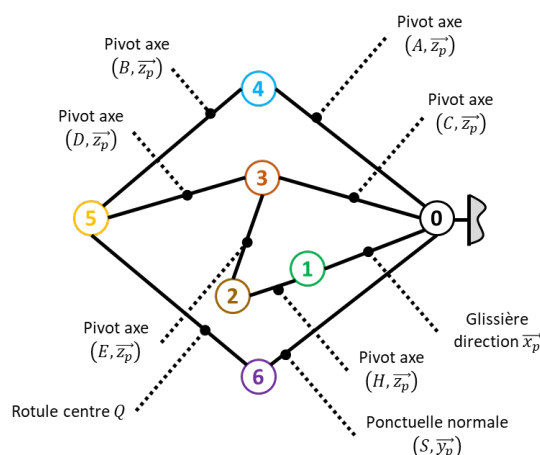
On a donc $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1} + L (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} - L (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \overrightarrow{i_2}$.

Exercice 159 – *

B2-16

Question 1 Calculer l'hyperstatisme du modèle plan du mécanisme global de la pince (Figure 1).

Le graphe de liaisons est donné figure suivante.



- Dans le plan, on a $m = 2$: mobilité correspondant au serrage de la pièce et rotation de 6 autour de l'axe $(Q, \overrightarrow{z_p})$.
- $I_c = 6 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 3 = 10$ (6 pivots, 1 glissière et 1 ponctuelle dans le plan);
- $E_c = 3 \times 3 = 9$
- $h = m - I_c + E_c = 2 - 10 + 9 = 1$.

Exercice 158 – Banc hydraulique *

C2-03

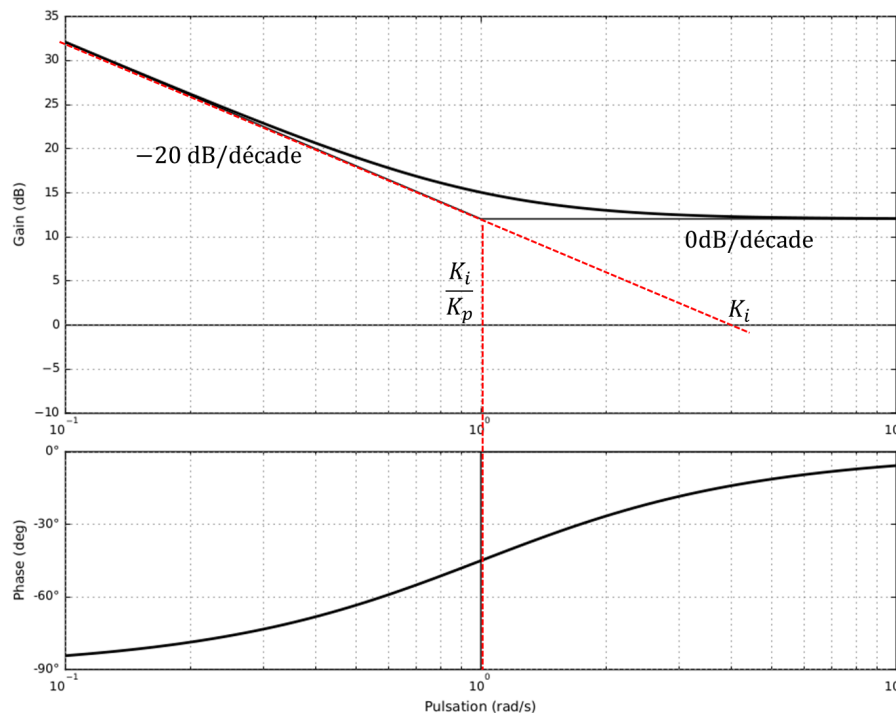
Question 1 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

On a $C(p) = \frac{K_i}{p} + K_p = \frac{K_i + p K_p}{p} = K_i \frac{1 + p \frac{K_p}{K_i}}{p}$.

Question 2 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

| | $\omega \rightarrow 0$ | $\omega = \frac{K_i}{K_p}$ | $\omega \rightarrow \infty$ |
|-------------------------|------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $\frac{K_i}{p}$ | -20dB/Décade -90° | -20dB/Décade -90° | -20dB/Décade -90° |
| $1 + p \frac{K_p}{K_i}$ | 0dB/Décade 0° | 0dB/Décade 0° | +20dB/Décade +90° |
| $C(p)$ | -20dB/Décade -90° | 0dB/Décade 0° | 0dB/Décade 0° |

Coupe l'axe des
abscisse en $\omega = K_i$



Question 3 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

Ce correcteur augmente la classe de la FTBO donc augmente la précision. Cependant, il réduit la phase. Il faut donc veiller à ce que la pulsation de cassure soit réglée de telle sorte que le système ne soit pas déstabilisé.

Question 4 Quelle valeur faut-il donner à ω_{0dB} pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

D'après la remarque, on a $t_e \omega_{0dB} = 3$ soit $\omega_{0dB} = 3/t_e = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 5 Déterminer analytiquement le rapport $T = \frac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

Calculons la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée : $F_{BO} = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}$.

Le correcteur doit être réglé pour que $\omega_{0dB} = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$.

Calculons la marge de phase. $\arg(F_{BO}) = -\arg(1 + T_1 p) - \arg(1 + T_2 p) = -\arctan T_1 \omega - \arctan T_2 \omega$. On a donc $\arg(F_{BO}(0,075)) = -\arctan(10 \times 0,075) - \arctan(5 \times 0,075) = -57^\circ$ soit une marge de phase de -123° .

Pour atteindre une marge de phase de 60° , on peut donc baisser la phase de 63° .

Calculons $\arg(C(j\omega)) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} \omega\right)$.

On cherche donc $\frac{K_p}{K_i}$ tel que $\arg(C(0,075)) = -63$ Soit $-90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} 0,075\right) = -63 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{K_p}{K_i} 0,075\right) = 27$

$\Rightarrow \frac{K_p}{K_i} 0,075 = 0,51 \Leftrightarrow \frac{K_p}{K_i} = 6,79$.

Question 6 En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

Il faut chercher K_i et K_p pour respecter ω_{0dB} . Recherchons le gain de la boucle ouverte non corrigée pour ω_{0dB} .

$$G_{dB}(F_{BO}) = 20 \log(K_{pom} K_m K_{cap}) - 20 \log(\sqrt{1^2 + T_1^2 \omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1^2 + T_2^2 \omega^2})$$

On a alors $G_{dB}(F_{BO})(0,075) = -0,004 - 1,94 - 0,57 = 2,52 \text{ dB}$.

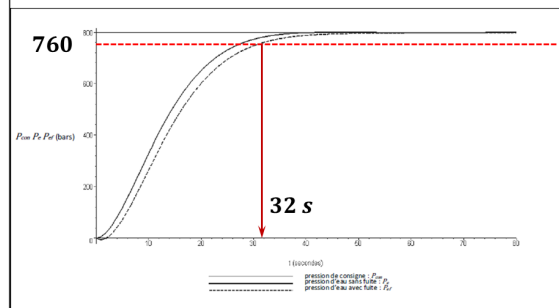
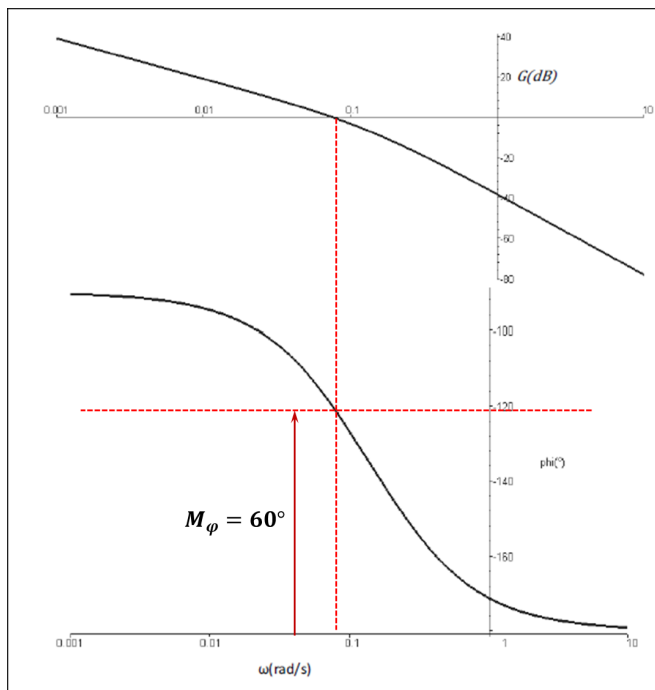
Il faut donc baisser le gain de 2,52 dB $G_{dB}(C(p)) = 20 \log K_i - 20 \log \omega + 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{K_p}{K_i} \right)^2 \omega^2} \right)$.

On a alors $G_{dB}(C(0,075)) = 20 \log K_i + 22,5 + 1 = -2,52$ soit $K_i = 10^{-\frac{2,52 + 1 + 22,5}{20}} = 0,05$.

Par suite, $K_p = 6,79 \times 0,05 = 0,34$.

(A vérifier).

Question 7 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.



- Stabilité :
 - Marge de phase mesurée : 60° **cdc ok**.
 - Marge de gain mesurée : infini **cdc ok**.
- Rapidité : $t_e = 32 \text{ s} < 40 \text{ s}$ **cdc ok**.
- Précision : écart statique nul **cdc ok**.
- Amortissement : nul **cdc ok**.

Exercice 157 – Mouvement II – *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Par dérivation vectorielle, on a : $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i}_0 + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j}_0$.

Par composition du torseur cinématique, on a : $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \overrightarrow{V}(C, 2/1) + \overrightarrow{V}(C, 1/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i}_0 + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j}_0$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i}_0 + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j}_0 \end{array} \right\}_{\mathcal{V}_P}$$

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$.

$$\vec{\Gamma}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(C, 2/0) \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0.$$

Exercice 156 – Palettisation – Stabilité ★

C2-03

On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$, que $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$ et que la FTBO est donnée par $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)} \left(k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N} \right)$.

On souhaite une marge de phase de 45° .

Question 1 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

On souhaite une marge de phase de 45° . On cherche donc ω_φ tel que $\varphi(\omega_\varphi) = -180 + 45 = -135^\circ$.

$$\varphi(\omega) = -90 - \arg(1 + \tau_m j\omega) = -90 - \arctan(\tau_m \omega).$$

$$\text{On a donc } \varphi(\omega_\varphi) = -135 \Leftrightarrow -90 - \arctan(\tau_m \omega_\varphi) = -135 \Leftrightarrow -\arctan(\tau_m \omega_\varphi) = -45 \Leftrightarrow \arctan(\tau_m \omega_\varphi) = 45$$

$$\Rightarrow \tau_m \omega_\varphi = 1 \Rightarrow \omega_\varphi = \frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \Rightarrow \omega_\varphi = 200 \text{ rad s}^{-1}.$$

Par suite, il faut que le gain soit nul en ω_φ .

$$\text{On a donc } G_{dB}(\omega) = 20 \log k_{BO} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau_m^2}. \text{ En } \omega_\varphi = \frac{1}{\tau_m} : G_{dB}(\omega_\varphi) = 0 \Leftrightarrow 20 \log k_{BO} - 20 \log \frac{1}{\tau_m} -$$

$$20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_m^2} \tau_m^2} = 0 \Leftrightarrow \log k_{BO} + \log \tau_m - \log \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \log \frac{k_{BO} \tau_m}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{k_{BO} \tau_m}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow k_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m}.$$

(A vérifier) $k_{BO} = 282,8$.

Question 2 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

$$k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}; \text{ donc } k_c = \frac{N k_{BO}}{k_m k_r} = \frac{200 \times 282,8}{4 \times 30} = 471.$$

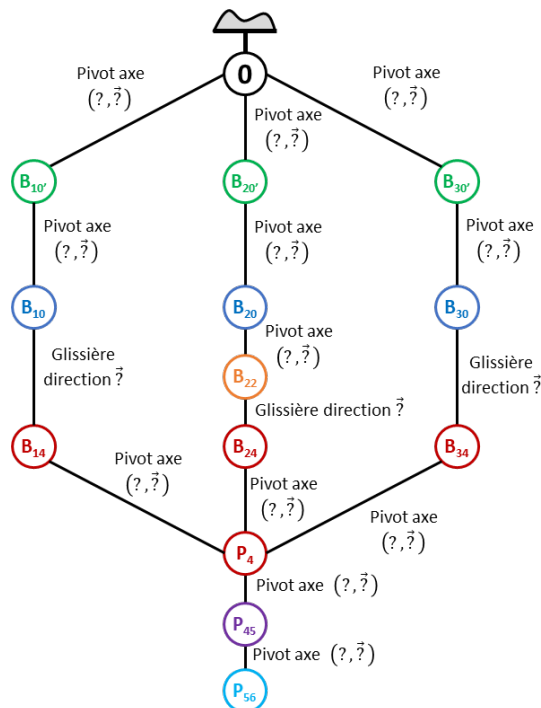
Question 3 Déterminer l'écart de position.

Il y a une intégration dans le correcteur. La FTBO est de classe 1 est le système est précis en position.

Exercice 155 – Triptéor ★

B2-16

Question 1 Réaliser le graphe de liaisons.



Question 2 Calculer le degré d'hyperstatisme.

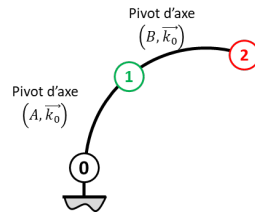
- $m = 5$: translations des 3 glissières et rotations des deux dernières pivot;
- $I_c = 15$;
- $E_c = 12$;

• $h = m - I_c + E_c = 5 - 15 + 12 = 2.$

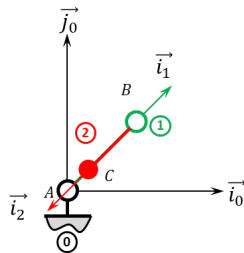
Exercice 154 – Mouvement RR *

B2-12

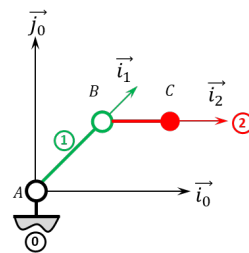
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



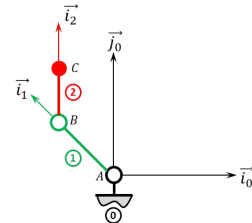
Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\varphi = \pi \text{ rad}$.



Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.



Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.



DDS

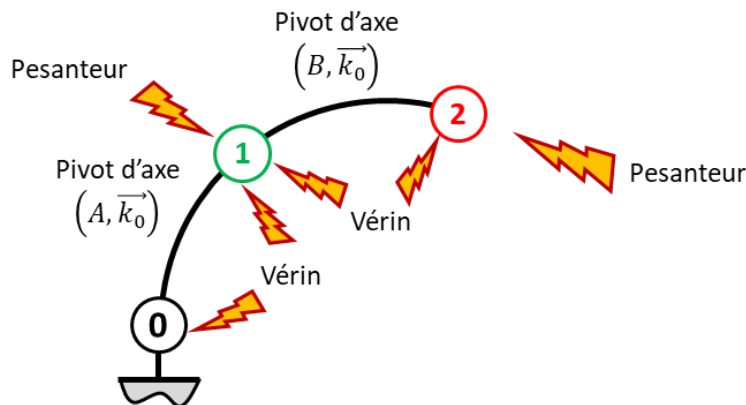
Exercice 153 – Mouvement RR *

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 + Z_{01} \vec{k}_0 \\ M_{01} \vec{j}_0 + N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 + Z_{12} \vec{k}_1 \\ M_{12} \vec{j}_1 + N_{12} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$.

- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

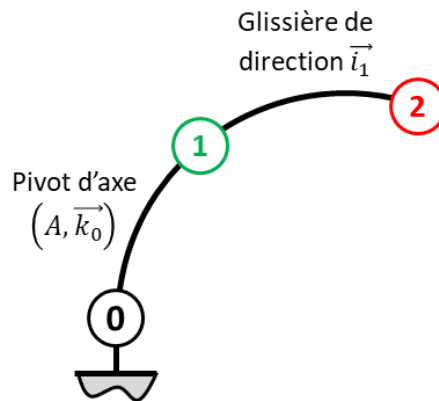
C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole 2 et on réalise le théorème du moment statique en A en projection sur \vec{k}_0 ;
- on isole 1+2 et on réalise le théorème du moment statique en B en projection sur \vec{k}_0 .

Exercice 152 – Mouvement RT *

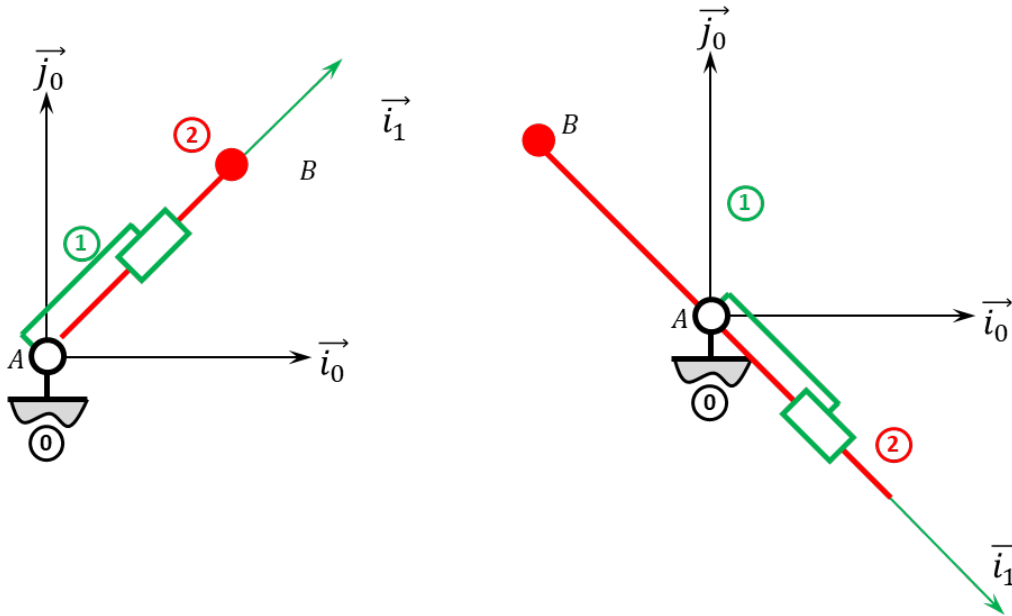
B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\lambda(t) = 20 \text{ mm}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{-\pi}{4} \text{ rad}$ et $\lambda(t) = -20 \text{ mm}$.



Exercice 151 – Quille pendulaire*

B2-07

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \frac{2B}{Vp} \frac{V}{S2B} =$

$\frac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.

Au final, $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

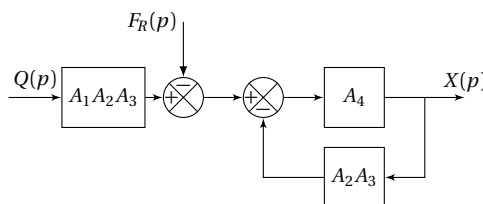
Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$ et $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$.

On a donc $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p) = \frac{2BS}{pV}$ et $H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}$.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Dans ce cas, $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$.

Exercice 150 – Mouvement I – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

1 est en translation de direction \vec{i}_0 par rapport à **0**.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$. La trajectoire du point **B** est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 149 – Mouvement I – *

B2-13

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point **B**.

$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \lambda(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
 $\vec{V}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\vec{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0$.

Question 2 Déterminer $\vec{\Gamma}(B, 1/0)$.

$\vec{\Gamma}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(B, 1/0)]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0$.

Exercice 148 – Calcul de FTBO*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

$FTBO(p) = BCDE$.

Question 2 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

$FTBO(p) = B(1+A)$.

Question 3 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

$FTBO(p) = A \frac{BCD}{1+BCD}$.

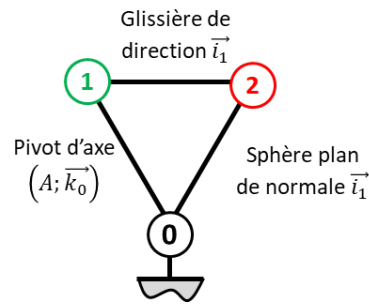
Question 4 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

$FTBO(p) = A \frac{\frac{B}{1+B} CD}{1 + \frac{B}{1+B} CD} = \frac{ABCD}{1+B+BCD}$.

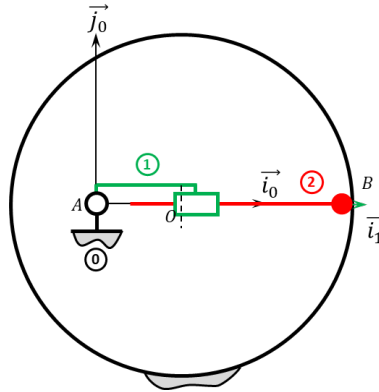
Exercice 147 – Pompe à palettes **

B2-12

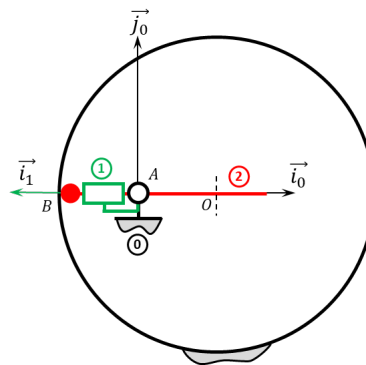
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 0 \text{ rad}$.



Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \pi \text{ rad}$.



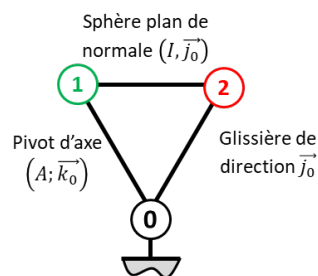
Question 4 En déduire la course de la pièce 2.

La course de la pièce 2 est donnée par la différence entre la longueur AB maximale et AB minimale : $c = 30 - 10 = 20 \text{ mm}$.

Exercice 146 – Pompe à pistons radiaux **

B2-12

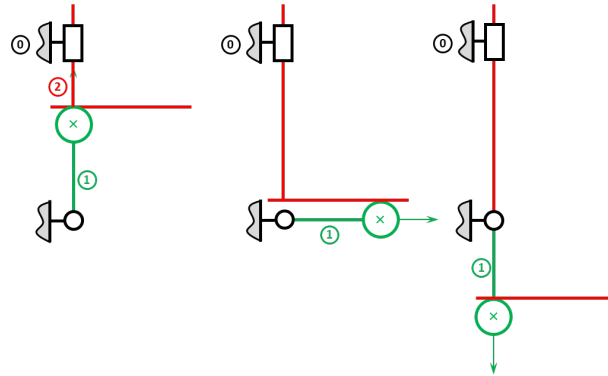
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 0 \text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.



Question 5 En déduire la course de la pièce 2.

La course est de

Exercice 145 – Parallélépipède*

B2-10

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Pour des raisons de symétrie, on a directement $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}$.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G , en A puis O .

Notons (1) le parallélépipède rectangle et (2) le cylindre (plein). On note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. On a $I_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$

et $I_G(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ (attention l'axe du cylindre est \overrightarrow{y}).

On a donc $I_G(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Par ailleurs, $m = m_1 - m_2$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{2} \overrightarrow{y}$; donc $I_A(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 + m \frac{b^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 + m \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Enfin, $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}$; donc $I_O(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Exercice 144 – Parallélépipède percé*

B2-10

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

On note m_C la masse du cylindre (plein) et m_P la masse du parallélépipède. On a alors $m = m_P - m_C$. De plus, $\overrightarrow{OG_P} = \frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{OG_C} = \frac{a}{3} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}$.

On a alors $m \overrightarrow{OG} = m_P \overrightarrow{OG_P} - m_C \overrightarrow{OG_C} = m_P \left(\frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z} \right) - m_C \left(\frac{a}{3} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z} \right)$.

Par suite, $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})} = \begin{pmatrix} \frac{a}{m_P - m_C} \left(\frac{m_P}{2} - \frac{m_C}{3} \right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G.

Les plans (G, \vec{x}, \vec{y}) et (G, \vec{z}, \vec{x}) sont des plans de symétrie. On a donc $I_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

On déplace la matrice du parallélépipède rectangle en G.

On a $I_{G_P}(P) = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et

$$\vec{G_P G} = \vec{G_P O} + \vec{OG} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} \frac{a}{m_P - m_C} \left(\frac{m_P}{2} - \frac{m_C}{3} \right) \\ \frac{b/2}{c/2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{m_P - m_C} \left(\frac{m_P}{2} - \frac{m_C}{3} \right) - \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$$\text{Ainsi, } I_G(P) = I_{G_P}(P) + m_P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On déplace la matrice du cylindre en G.

De même $I_{G_C}(C) = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C & 0 \\ 0 & 0 & A_C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et

$$\vec{G_C G} = \vec{G_C O} + \vec{OG} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3} \\ \frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} \frac{a}{m} \left(\frac{m_P}{2} - \frac{m_C}{3} \right) \\ \frac{b/2}{c/2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{m} \left(\frac{m_P}{2} - \frac{m_C}{3} \right) - \frac{a}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Delta'_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$$\text{Ainsi, } I_G(C) = I_{G_C}(C) + m_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C + m_C \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_C + m_C \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Bilan.

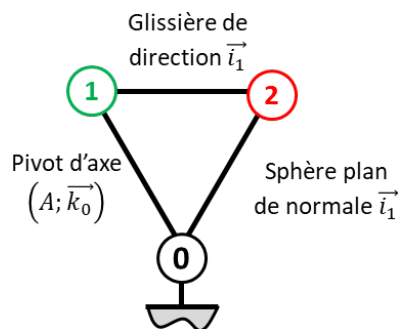
Au final, $I_G(E) = I_G(P) - I_G(C)$ et

$$I_G(E) = \begin{pmatrix} A_P - A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P \Delta_x^2 - B_C - m_C \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P \Delta_x^2 - A_C - m_C \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Exercice 143 – Pompe à piston radial *

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

On a $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$ soit $-e \vec{i}_0 + \lambda \vec{i}_1 - R \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow -e \vec{i}_0 + \lambda(t) \cos \theta(t) \vec{i}_0 + \lambda(t) \sin \theta(t) \vec{j}_0 - R \cos \varphi(t) \vec{i}_0 - R \sin \varphi(t) \vec{j}_0 = \vec{0}$.

En projetant les expressions sur \vec{i}_0 et \vec{j}_0 , on a :
$$\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) - R \cos \varphi(t) = 0 \\ \lambda(t) \sin \theta(t) - R \sin \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

On cherche à supprimer $\varphi(t)$; donc

$$\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) = R \cos \varphi(t) \\ \lambda(t) \sin \theta(t) = R \sin \varphi(t) \end{cases}.$$

En élevant au carré les expressions et en sommant, on obtient $R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t) \Rightarrow R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t)$

$$\Rightarrow R^2 = e^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + \lambda(t)^2.$$

Résolution de l'équation : $\lambda(t)^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + e^2 - R^2 = 0$.

$$\text{On a } \Delta = (-2e \cos \theta(t))^2 - 4(e^2 - R^2) = 4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2.$$

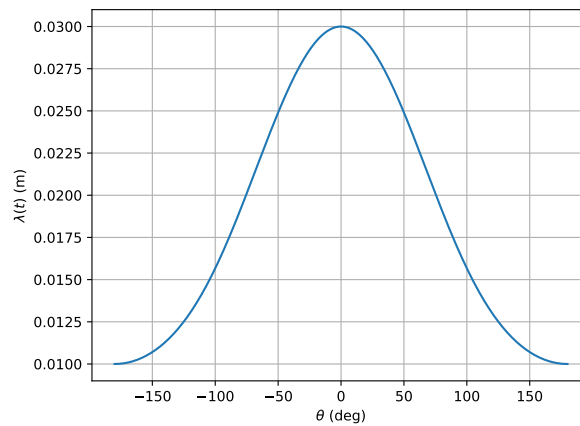
On a donc

$$\lambda(t) = \frac{2e \cos \theta(t) \pm \sqrt{4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2}}{2}$$

$$= e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$$

Question 3 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.

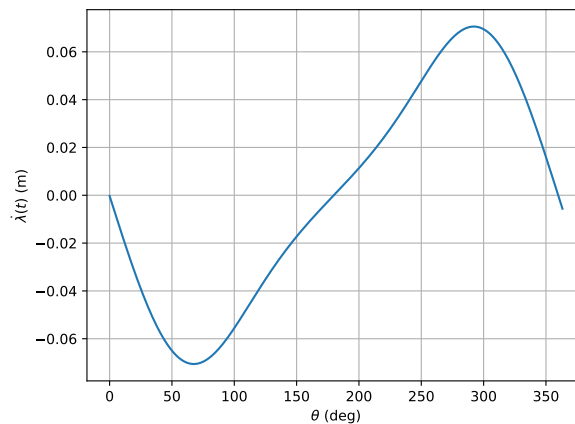


Question 4 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

$$\text{En dérivant l'expression précédente, on a } \dot{\lambda}_+(t) = -e\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \frac{1}{2} (e^2 \cos^2 \theta(t))' (e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -e\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) - \frac{e^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}}.$$

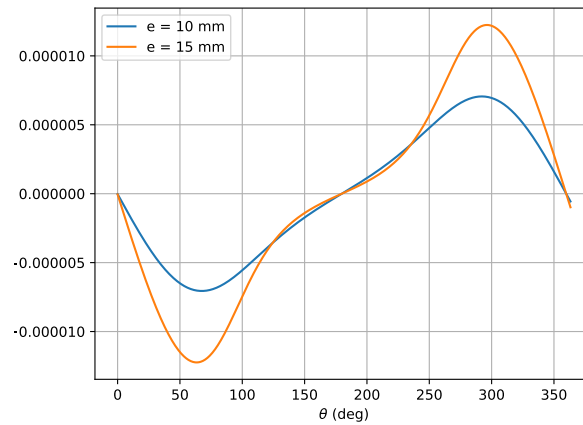
À revoir



Question 5 Exprimer le débit instantané de la pompe.

Le débit instantané de la pompe est donné par $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.

Question 6 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\text{ mm}$ et $e = 15\text{ mm}$.



Question 7 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\text{ mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t, les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m2

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200:]
    les_q3 = S*les_lambdap[400:]
    les_q4 = S*les_lambdap[600:]
    les_q5 = S*les_lambdap[800:]

    # On conserve que les valeurs que sur un tour
    les_q1 = les_q1[:1000]
    les_q2 = les_q2[:1000]
    les_q3 = les_q3[:1000]
    les_q4 = les_q4[:1000]
    les_q5 = les_q5[:1000]
    plt.grid()

    les_t = les_t[:1000]
    les_theta = les_theta[:1000]

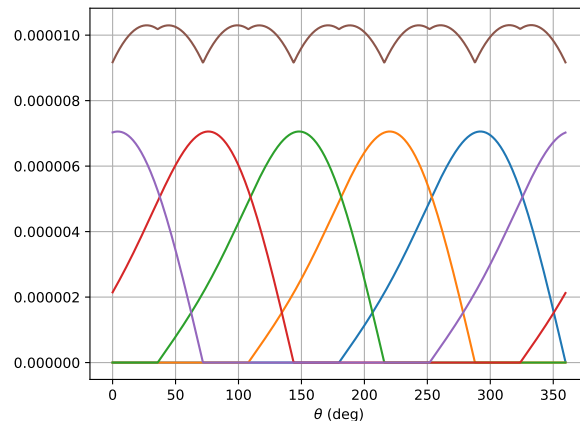
    plt.xlabel("$\\theta$ (deg)")
    plt.ylabel("Débit instantané $m^3s^{-1}$")

    # On conserve que les valeurs positives (débit)
    for i in range(len(les_q1)):
        if les_q1[i]<0:
            les_q1[i]=0
        if les_q2[i]<0:
            les_q2[i]=0
        if les_q3[i]<0:
            les_q3[i]=0
        if les_q4[i]<0:
            les_q4[i]=0
        if les_q5[i]<0:
```

```
les_q5[i]=0
```

```
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q5)

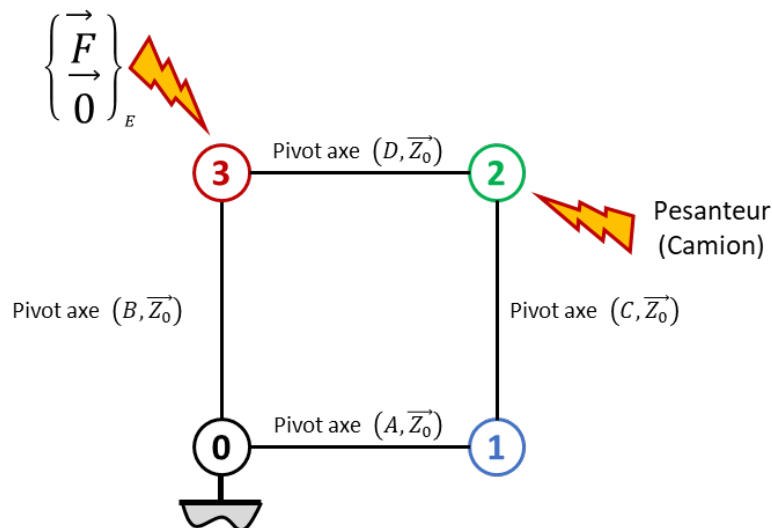
# Le débit instantané est la somme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
plt.show()
plt.savefig("10_05_c.pdf")
```



Exercice 142 – Pèse camion **

C1-05

Question 1 Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.



En faisant l'hypothèse de problème plan, on a 8 inconnues statiques.

Question 2 Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de F en fonction de M .

- On commence par isoler 1 soumis à 2 glisseurs. D'après le PFS, les actions mécaniques en A et en C sont dirigées suivant la direction \vec{x}_0 .
- On isole ensuite 2. Le solide 2 étant en translation circulaire, on réalise un TRS suivant \vec{y}_0 .
- On isole enfin 3. Le solide 3 étant en rotation autour de (B, \vec{z}_0) par rapport à 0, on réalise un TMS en B suivant \vec{z}_0 .

Exercice 141 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

1 est en rotation de centre A et d'axe \vec{k}_0 par rapport à 0.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

B est en rotation par rapport à 0 (cercle de centre A et de rayon R).

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

$$\text{On a } \vec{AB} = R \vec{i}_1 = R \cos \theta \vec{i}_0 + R \sin \theta \vec{j}_0. \text{ La trajectoire du point B est donc donnée par } \begin{cases} x_B(t) = R \cos \theta(t) \\ y_B(t) = R \sin \theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 140 – Mouvement R *

B2-13

Question 1 Déterminer $\vec{V}(B, 1/0)$ par dérivation vectorielle.

$$\vec{V}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\vec{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0}. \text{ Or } \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{i}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

$$\text{D'où } \vec{V}(B, 1/0) = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

Question 2 Déterminer $\vec{V}(B, 1/0)$ par une autre méthode.

$$\vec{V}(B, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} - R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

$$\text{On a directement } \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B.$$

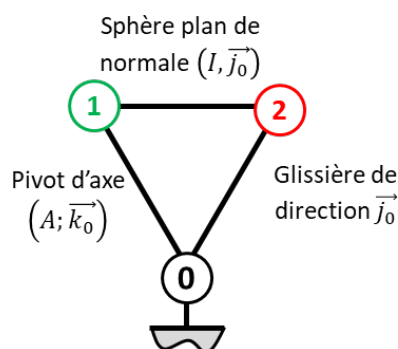
Question 4 Déterminer $\vec{\Gamma}(B, 1/0)$.

$$\vec{\Gamma}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(B, 1/0)]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1. \text{ (En effet, } \frac{d}{dt} [\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{j}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{j}_1 = -\dot{\theta} \vec{i}_1.)$$

Exercice 139 – Pompe à piston axial *

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

En écrivant la fermeture géométrique, on a $\vec{AB} + \vec{BI} + \vec{IC} + \vec{CA} = \vec{0}$.

On a donc, $e \vec{i}_1 + R \vec{j}_0 + \mu \vec{i}_0 - \lambda(t) \vec{j}_0 = \vec{0}$. En projetant l'expression sur \vec{j}_0 (dans ce cas, l'expression suivant \vec{i}_0 n'est pas utile) : $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$.

On a donc, $\lambda(t) = e \sin \theta + R$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.

Question 4 On note S la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

En notant $q(t)$ le débit instantané, $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.

Question 5 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10$ mm et $R = 10$ mm ainsi que pour $e = 20$ mm et $R = 5$ mm. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1 \text{ cm}^2$.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

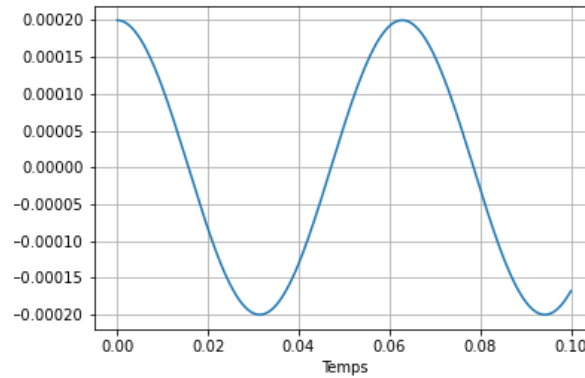
    return res

def calc_lambdap(theta,w):

    res = e*w*np.cos(theta)
    return res

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit ({m}^3s^{-1})")
    plt.grid()
    plt.savefig("11_02_c.png")
    plt.show()

plot_debit()
```



Exercice 138 – Banc Balafre ★

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Données et hypothèses

- On note $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$ où R_J est le rayon du joint avec $R_J = 175$ mm;
- la longueur du joint est $L_J = 150$ mm. La position du point B , centre du joint est $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$ avec $z_B = 425$ mm;
- Le cœur de butée a une masse $M_{CB} = 40$ kg et la position de son centre d'inertie G_{CB} est paramétrée par $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$ avec $L_{CB} = 193$ mm;
- L'ensemble $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$ a une masse $M_{JR} = 100$ kg et la position de son centre d'inertie

G_{JR} est paramétrée par $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0}$ avec $L_{JR} = 390$ mm. On notera $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$

la matrice d'inertie de l'ensemble JR au point G_{JR} exprimée dans une base $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$ liée à JR ;

- Les positions des points A_4 et A_8 sont paramétrées par $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$ avec $z_4 = 280$ mm et $R_{CB} = 150$ mm.

Question 1 Déterminer l'expression de la coordonnée z_G de \overrightarrow{OG} selon $\overrightarrow{z_0}$. Faire l'application numérique.

Question 2 Sachant que l'ensemble JR possède une symétrie de révolution par rapport à $(O, \overrightarrow{z_0})$, simplifier la matrice d'inertie $I_{G_{JR}}(JR)$.