

## Concevoir la commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

### Chapitre 1 Correction des SLCI

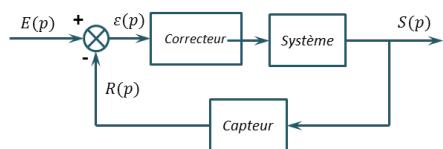
Savoirs et compétences :

- Res1.C4 : correction;
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase,
- Con.C2 : correction d'un système asservi;
- Con.C2.SF1 : choisir un type de correcteur adapté.

1	Pourquoi corriger un système ?	2
2	Le correcteur proportionnel	3
3	Les correcteurs à action intégrale	4
3.1	Le correcteur intégral pur . . . . .	4
3.2	Le correcteur proportionnel intégral . . . . .	4
4	Le correcteur à avance de phase	5
5	Bilan sur l'influence des correcteurs	6

## 1 Pourquoi corriger un système ?

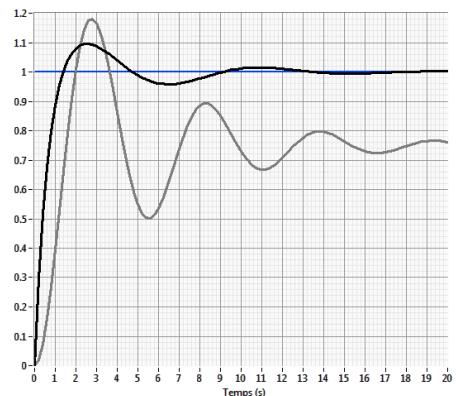
Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.



Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- plus précis;
- plus amorti;
- plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.



### Résultat

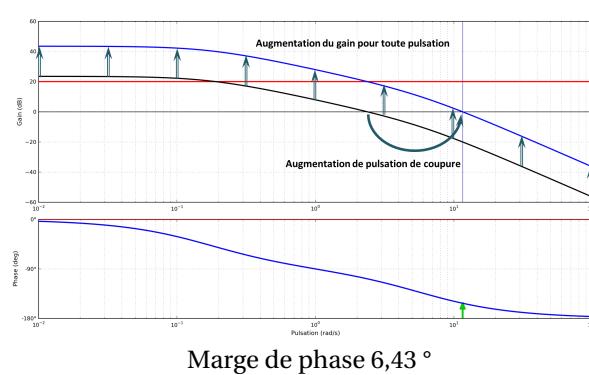
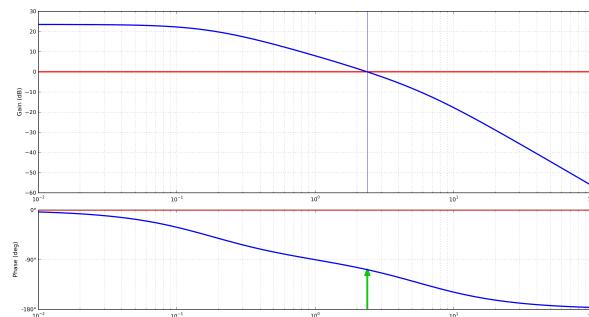
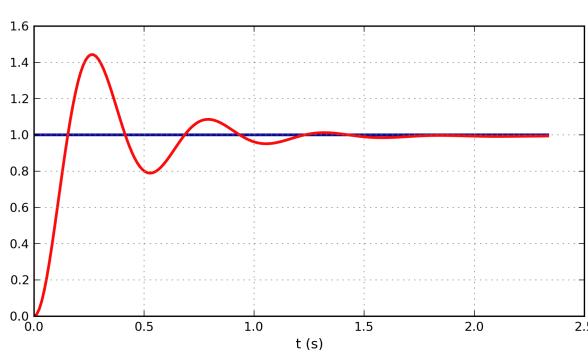
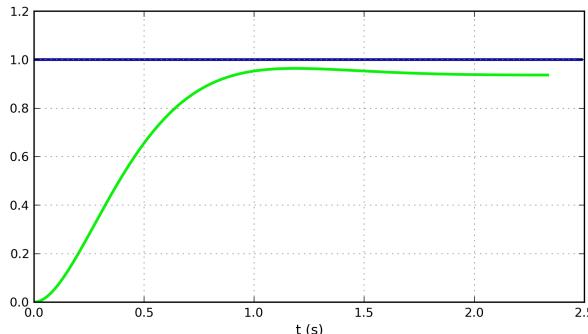
- D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

## 2 Le correcteur proportionnel

**Définition** Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



### Résultat

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- d'améliorer la précision;
- d'augmenter la vivacité;
- d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- de diminuer l'amortissement;
- de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode

#### Réglage de la marge de phase :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0\text{dB}}$  tel que  $\varphi(\omega_{0\text{dB}})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}})$ .
- On cherche  $K_p$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$ .
- On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

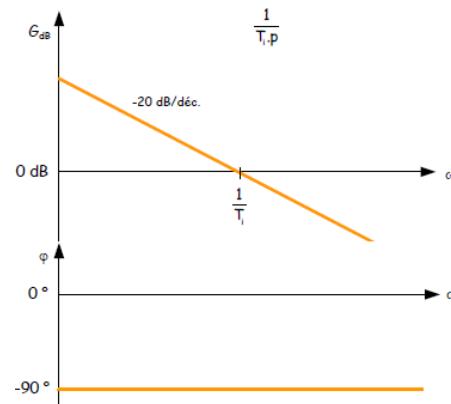
### 3 Les correcteurs à action intégrale

#### 3.1 Le correcteur intégral pur

##### Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\epsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau$ .



##### Résultat

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

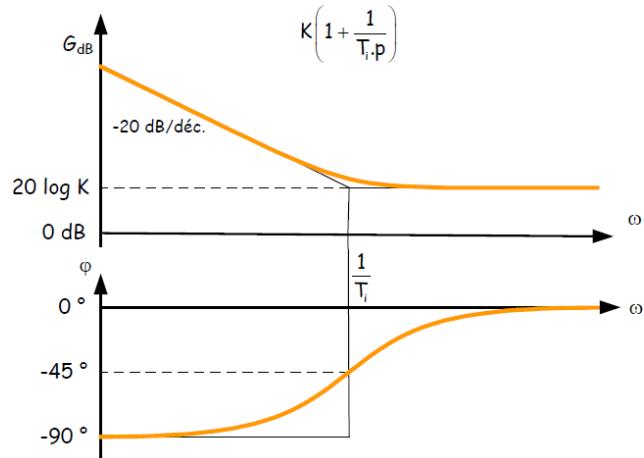
#### 3.2 Le correcteur proportionnel intégral

##### Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\epsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \epsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \right)$ .

En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.



**Résultat** Le correcteur proportionnel intégral :

**augmente l'amortissement,      augmente la rapidité,      augmente la précision.**

##### Méthode

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$ .
- La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{0dB}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$ .



Une autre possibilité pour régler  $T_i$  est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$  avec  $\tau_1 \gg \tau_2$ ,  $\tau_1$  ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre  $T_i = \tau_1$  afin de supprimer l'effet du pôle associé à  $\tau_1$ .

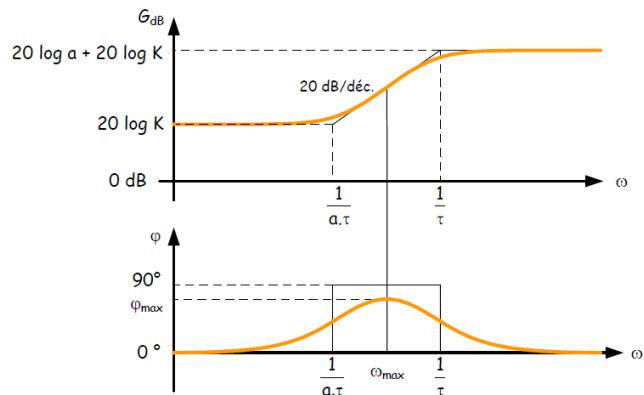
## 4 Le correcteur à avance de phase

### Définition

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \frac{1 + \alpha \tau p}{1 + \tau p}$  avec  $\alpha > 1$ .

**Résultat** Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{\alpha \tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

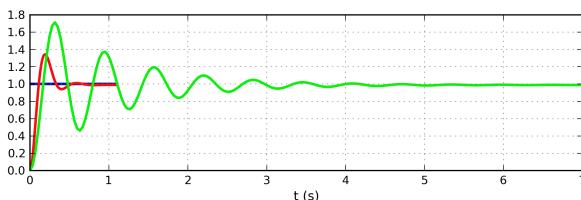
**R** On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.



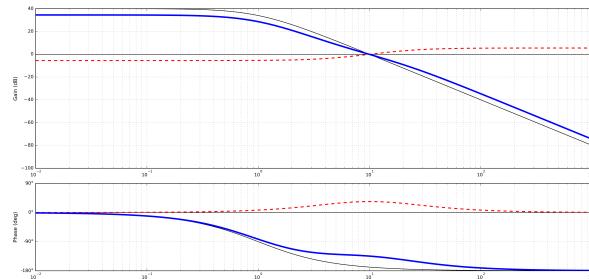
**Démonstration** Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha\tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{\alpha\tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau\sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ . D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé

$$(G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}, \alpha = 3,54, T = 0,053 \text{ s}).$$



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.



### Méthode

- En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0\text{dB}}$  tel que le gain est nul.
- On calcule  $\varphi(\omega_{0\text{dB}})$ .
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule  $a$ .
- On calcule  $\tau$ .
- On calcule  $K$ .

## 5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction	
Proportionnel $K_p$	Marges	←
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Précision	→
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Rapidité	→
	Si $K_p$ augmente	
	Marges	←
	Précision	→ (Cf: classe)
	Rapidité	←
	Si mal réglé	
	Marges	→
	Précision	↔
	Rapidité	→

## Références

- [1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*
- [2] Florestan Mathurin, *Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.*
- [3] Damien Iceta, David Violeau, Alain Caignot, Xavier Pessoles, Vincent Boyer, François Golanski, *Sciences industrielles de l'ingénieur MP/MP\* PSI/PSI\* PT/PT\*, Méthodes. Exercices. Problèmes. Sujets de concours. Vuibert Prépas.*

## Activation 1

### Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

**Savoirs et compétences :**

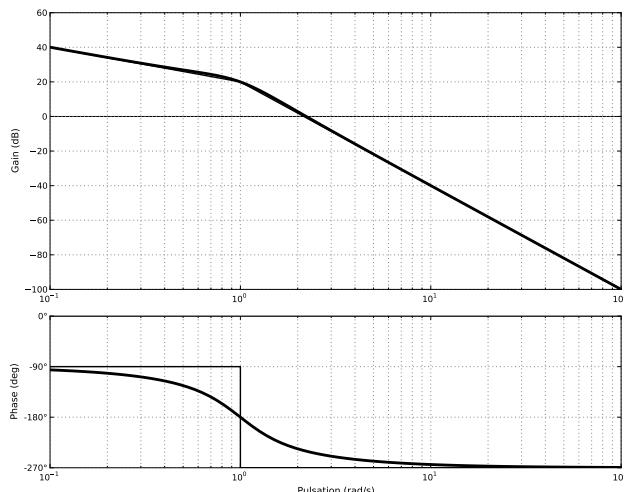
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20$  dB.
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35$  dB.
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

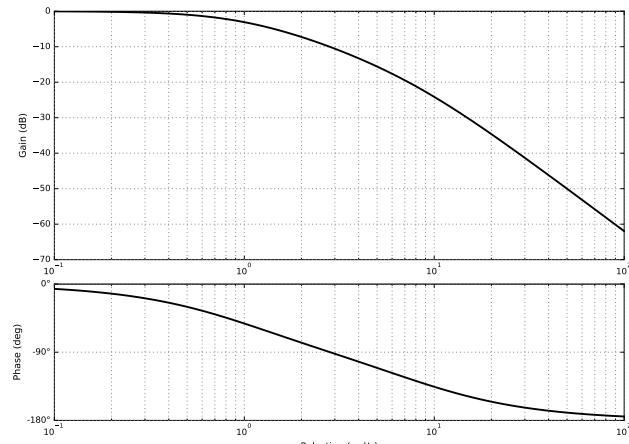
#### Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 1** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Question 2** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.

## Activation 2

### Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

**Savoirs et compétences :**

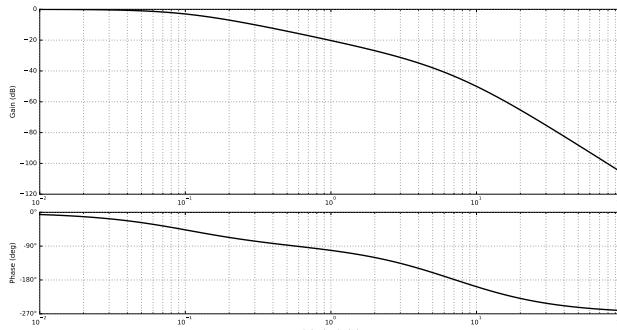
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

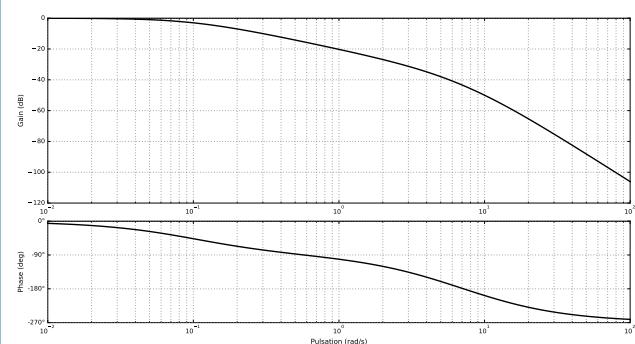
**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_{0\text{dB}} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .

#### Correcteur à avance de phase

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme  $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ .

**Question 1** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .



**Question 2** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.

## Application 1

### Réglage de correcteurs P

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCPM MP 2010.

#### Savoirs et compétences :

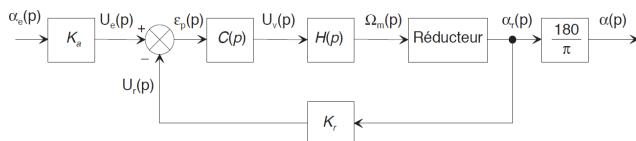
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$  ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$  ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

#### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105 \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$ .



#### Question 1

Déterminer la fonction de transfert

$$R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$$

du réducteur.

#### Question 2

Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

#### Question 3

Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $\tau'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

#### Question 4

Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

#### Question 5

En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

#### Question 6

Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105 \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$ .

#### Question 7

Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105 \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

#### Question 8

La valeur de  $K_{BO}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

$$1. R(p) = \frac{1}{Np}.$$

$$2. K_a = \frac{\pi}{180} K_r.$$

$$3. T(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau'_m p)} \text{ avec } K_{BO} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}.$$

$$4. K_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}.$$

$$5. K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_m K_r}.$$

$$6. \varepsilon_S = 0.$$

$$7. \alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}.$$

$$8. \varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{BO}}.$$

## TD 1

## Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée \*

Concours CCP – PSI 2018

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation du prototype de canne robotisée étudié

L'objectif de cette canne est de prendre en charge une partie des efforts normaux supportés par une jambe handicapée.

Le prototype de canne robotisée envisagé conserve une forme longiligne, un point d'appui au sol ainsi qu'un encombrement et un poids réduits. La canne robotisée, dont la structure mécanique est présentée en 1, se compose d'un axe linéaire motorisé et d'une roue motorisée située à son extrémité.

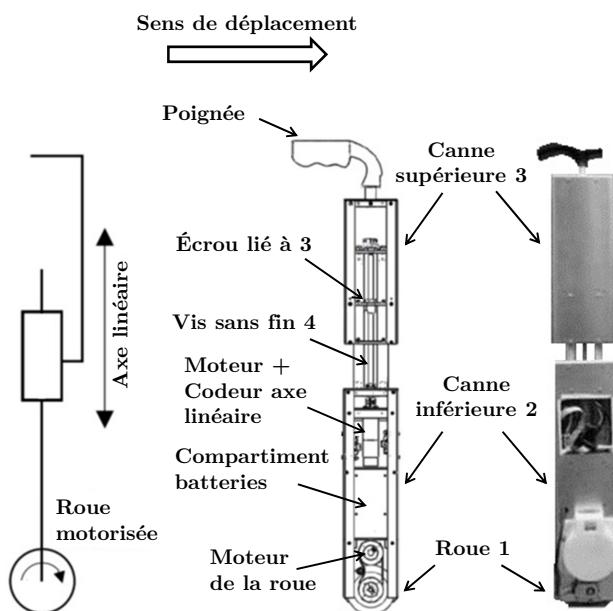


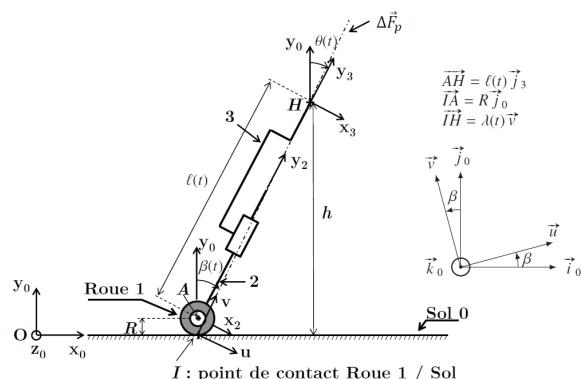
FIGURE 1 – Schéma cinématique et photographie du prototype de canne robotisée

Les deux degrés de mobilité, rendus possibles par cette structure, permettent de suivre la marche d'un sujet et lui offre un point d'appui. L'avantage est d'éviter aux utilisateurs la manipulation de la canne (levée et positionnement) pendant la marche, la roue restant toujours en contact avec le sol.

#### Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

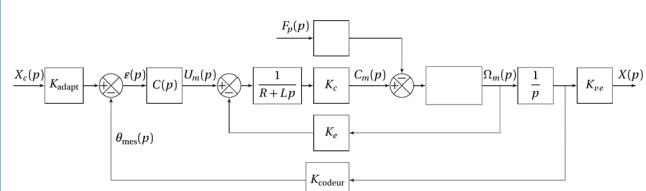
Le maintien d'une hauteur constante lors de la phase d'appui revient finalement à asservir en position le dé-

placement  $x(t)$  de la canne supérieure 3 par rapport à la canne inférieure 2.



Le modèle causal retenu pour l'étude du comportement de l'axe linéaire perturbé est représenté par le schéma-blocs ci-dessous. Dans ce modèle, on note :

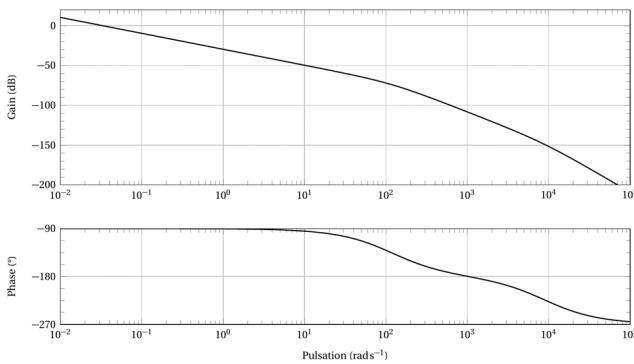
- $X_c(p)$  la transformée de Laplace de la consigne de déplacement  $x_c(t)$  en mètre,
- $X(p)$  la transformée de Laplace du déplacement  $x(t)$  en mètre,
- $F_p(p)$  la transformée de Laplace de l'effort exercé par le patient sur la canne  $F_p(t)$  en N,
- $\Omega_m(p)$  la transformée de Laplace de la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m(t)$  en rad/s,
- $C_m(p)$  la transformée de Laplace du couple moteur  $C_m(t)$  en N m,
- $C(p)$  la fonction de transfert du bloc correcteur.



#### Modèle comportemental

Afin de proposer une modélisation simplifiée de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire, une simulation du modèle précédent en boucle ouverte, non perturbé, a été réalisée. Le document réponse présente la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte à l'aide du diagramme de Bode (courbe de gain  $G_{BO}(\omega)$  et courbe de phase  $\varphi_{BO}(\omega)$ ).

**Question 1** À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit  $H_{BO\_1}(p)$  cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient  $T_1$  et  $T_2$ , telles que  $T_1 < T_2$ , les constantes de temps introduites et  $K_{BO}$  le gain de  $H_{BO\_1}(p)$ , préciser les valeurs numériques et unités de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_{BO}$ . Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.



Lors d'une marche saine à allure rapide la cadence moyenne est de 113 pas par minute.

**Question 2** Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

Pour la suite, on considérera que la fréquence maximale de déplacement de l'axe linéaire de la canne (liée au mouvement de la marche) est fixée à  $F_{MAX} = 4$  Hz. On propose alors en première approximation une modélisation du comportement du système en boucle ouverte par une fonction de transfert  $H_{BO}(p)$  de la forme  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ .

**Question 3** Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

### Correction proportionnelle

Pour la suite, on modélise le comportement du système en boucle ouverte par  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ . On considère un correcteur à action proportionnelle tel que  $C(p) = K_{corr} = 1$ .

Le schéma-blocs du système non perturbé correspond alors à celui de la figure 2.

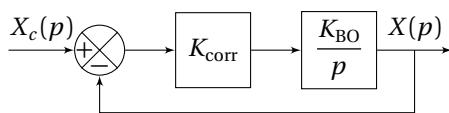


FIGURE 2 – Schéma-bloc simplifié du système non perturbé avec  $C(p) = K_{corr}$

**Question 4** Déterminer l'expression de  $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la 2. Déterminer les paramètres caractéristiques de  $H_{BF}(p)$  et en déduire les performances de cette

modélisation pour  $C(p) = K_{corr} = 1$ . Conclure vis-à-vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

On se propose de modifier la valeur de  $K_{corr}$  de manière à vérifier l'exigence de rapidité de l'asservissement.

**Question 5** Déterminer la valeur numérique à donner à  $K_{corr}$  pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

La 3 donne l'évolution de la réponse temporelle  $x(t)$  du système réel non perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10$  mm, pour une correction proportionnelle  $K_{corr} = 1500$ .

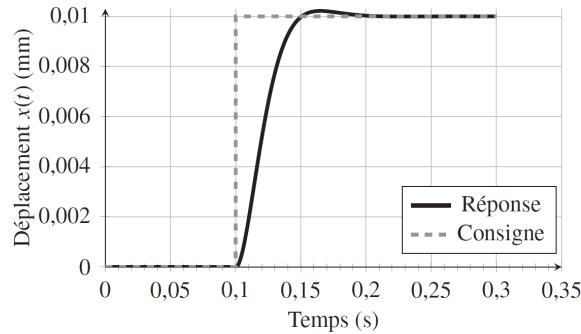


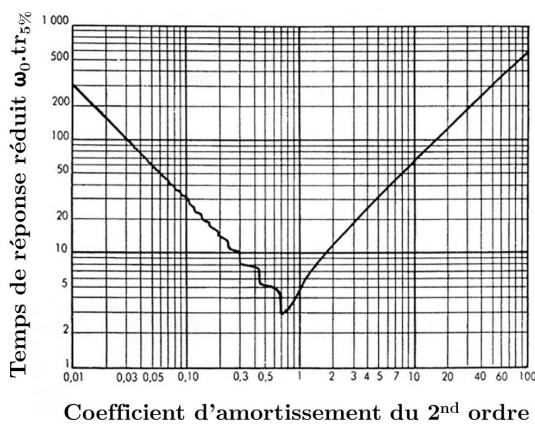
FIGURE 3 – Évolution de la réponse temporelle  $x(t)$  du système réel non perturbé à un échelon de valeur  $X_c = 10$  mm, pour  $K_{corr} = 1500$

**Question 6** L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

Pour la suite, on modélise la fonction de transfert en boucle ouverte du système par  $H_{BO}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_{BO}}{1+\tau_{BO}p}$  avec  $K_{BO} = 1/30$  (unité en  $s^{-1}$ ) et  $\tau_{BO} = 9$  ms.

**Question 7** Quelle valeur maximale de  $K_{corr}$ , notée  $K_{corr}^{MAX}$ , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

**Question 8** Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %,  $t_{r5\%}$  de ce modèle pour  $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$  à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.



La figure 4 donne les évolutions des réponses temporelles  $x(t)$  du système réel avec prise en compte de la perturbation ( $F_p$  constante et égale à 175 N) à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10$  mm, pour une correction proportionnelle  $K_{corr} = 1500$  et pour  $K = K_{corr}^{\text{MAX}}$ .

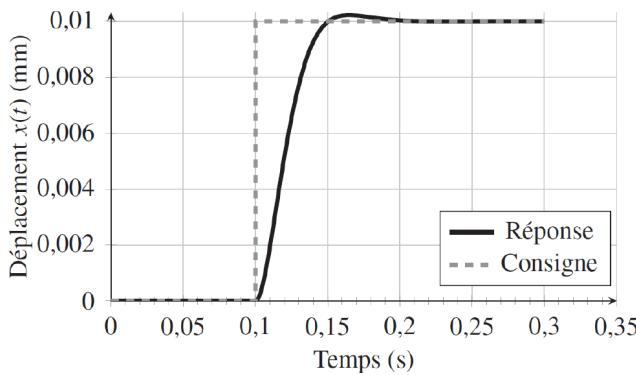


FIGURE 4 – Réponses temporelles  $x(t)$  du système réel perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10$  mm, pour une correction proportionnelle  $K_{corr} = 1500$  et pour  $K = K_{corr}^{\text{MAX}}$

**Question 9** Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

### Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée – correcteur PI généralisé

Le correcteur finalement retenu est un correcteur avec action proportionnelle et intégrale généralisée. La fonction de transfert  $C(p)$  prend alors la forme suivante :

$$C(p) = K_{corr} \cdot \frac{1 + T_d p}{p} \quad \text{avec } K_{corr} > 1 \text{ et } T_d < 1 \text{ s.}$$

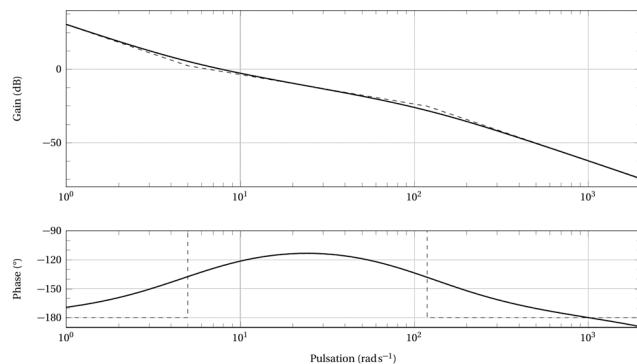
On donne dans le document réponse le diagramme de Bode (courbe de Gain et de Phase) du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé pour  $K_{corr} = 1000$  et  $T_d = 0,2$  s.

**Question 10** Représenter sur le document réponse les marges de Gain  $M_G$  et de Phase  $M_\phi$  du système corrigé.

Avec cette correction, le système est précis mais les valeurs des marges de gain et de phase sont telles que le système n'est pas assez rapide. Il est donc nécessaire d'augmenter la valeur de  $K_{corr}$ , tout en conservant  $T_d = 0,2$  s, de manière à augmenter la bande passante du système et

ainsi se rapprocher des valeurs limites de marge de Gain et de Phase autorisées.

**Question 11** En déduire la valeur maximale à donner au gain  $K_{corr}$ , en conservant  $T_d = 0,2$  s, afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.



Les figures 5 donnent la réponse temporelle à un échelon de consigne  $X_c = 10$  mm du système simulé, perturbé et corrigé du déplacement  $x(t)$  (en mm) ainsi que l'évolution de l'intensité simulée (en Ampères) circulant au sein du moteur.

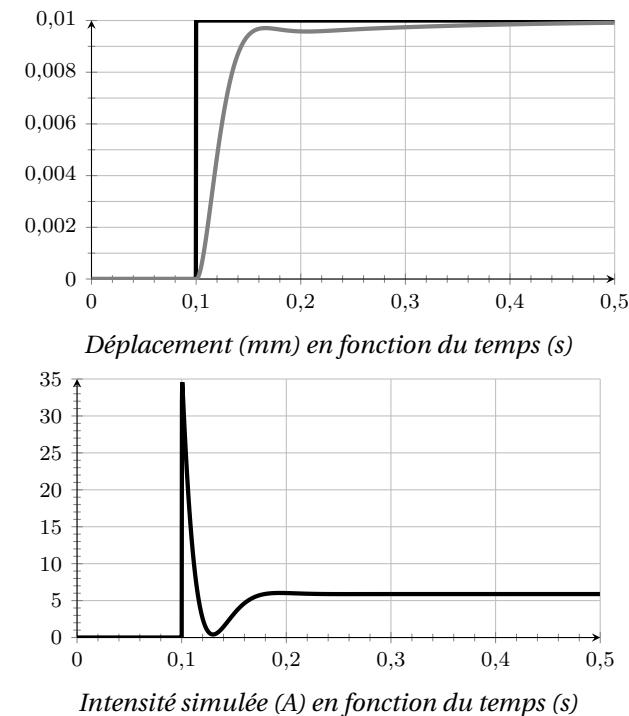


FIGURE 5 – Réponses temporelles à un échelon d'amplitude  $X_c = 10$  mm du système simulé, perturbé et corrigé

**Question 12** Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

## Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

L'objectif de cette synthèse est de vérifier que les paramètres d'asservissement mis finalement en place sur la commande de l'axe linéaire et sur la commande de la roue permettent d'atteindre les performances de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche ».

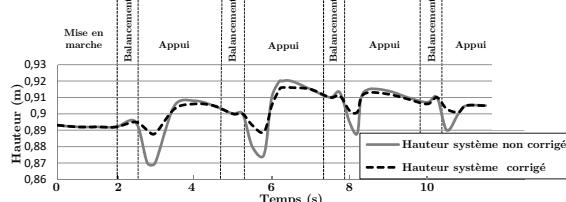


FIGURE 6 – Hauteur de la main au cours de la marche pour  $V = 0,22 \text{ m/s}$

La 6 donne les évolutions de la hauteur de main mesurées lors d'une marche assistée avec le prototype de canne à la vitesse  $V = 0,22 \text{ m/s}$ . La courbe grise en trait continu correspond au cas où l'axe linéaire est sans correction ( $C(p) = 1$ ).

La courbe noire en trait pointillé correspond au cas où l'axe linéaire est corrigé (correction PI généralisée avec paramètres optimisés). Il est à remarquer que lors de cet essai, le patient avait pour consigne de conserver sa main immobile lors du déplacement. Cette condition est difficilement vérifiable en pratique car le patient ne peut pas vraiment se concentrer sur la position de sa main pendant la marche.

**Question 13** Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

Les figures 7 et 8 donnent pour  $V = 0,22 \text{ m/s}$  (allure normale), respectivement pour  $V = 0,29 \text{ m/s}$  (allure rapide), le suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol et le suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ ).

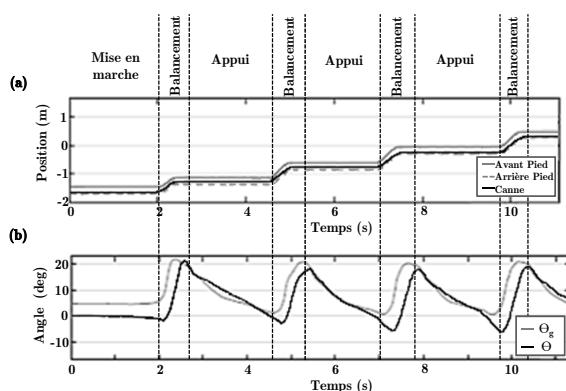


FIGURE 7 –  $V = 0,22 \text{ m/s}$ , allure normale – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ )

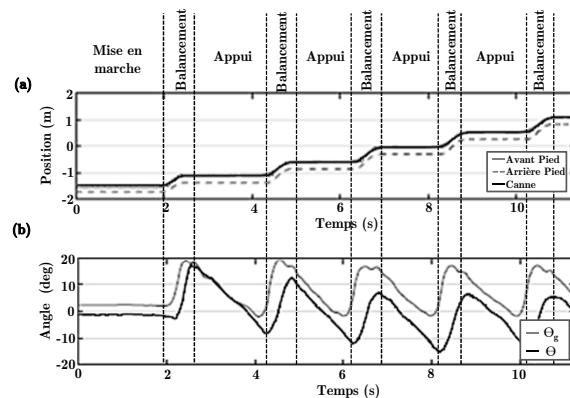


FIGURE 8 –  $V = 0,29 \text{ m/s}$ , allure rapide – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ )

**Question 14** Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

## Annexes – Diagramme partiel des exigences

« requirement »	
Commande de l'axe linéaire	
<b>Id</b> = "3.1.6.2"	
<b>Text</b> = "Performances de l'asservissement :	
<b>Précision</b> : 5 %	
<b>Dépassement autorisé</b> : 5 %	
<b>Temps de réponse</b> : $t_{r5\%} = 60 \text{ ms}$	
<b>Stabilité</b> :	
<b>Marge de Gain</b> = 45dB	
<b>Marge de Phase</b> = 35°."	

1.  $H_{BO\_1}(p) = K_{BO} \frac{1}{p} \frac{1}{1+T_1 p} \frac{1}{1+T_2 p}$  avec  $\omega_{c1} \approx 1 \times 10^4 \text{ rad/s}$  et  $T_1 = 0,1 \text{ ms}$ ,  $\omega_{c2} \approx 1 \times 10^2 \text{ rad/s}$  et  $T_2 = 10 \text{ ms}$ .  $K_{BO} = 10^{-30/20} \approx 0,032 \text{ s}^{-1}$ .
2. 1,88Hz.
3. .
4.  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} p}$  et  $1/K_{BO} = 30 \text{ s}$ .
5.  $K_{corr} \geq 1500$ .
6. .
7.  $K_{corr} \leq 1700$ .
8.  $t_{r5\%} \approx 38 \text{ ms} < 60 \text{ ms}$ .
9. .
10.  $M_G \approx 60 \text{ dB}$  et une marge de Phase  $M_\varphi \approx 50^\circ$ .
11.  $K_{corr}^{\text{new}} \approx 5620$ .
12. .
13. .
14. .

## TD 2

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

**L'axe en translation du MC<sup>2</sup>E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC<sup>2</sup>E.**

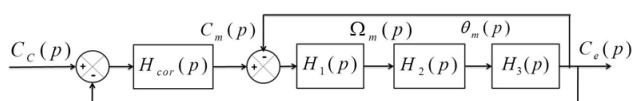
**Objectif** Modéliser et valider l'asservissement en effort. On cherche à savoir si l'asservissement réalisé permet d'obtenir un effort constant sur l'effecteur.

## Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;

- $C_c(p)$ , couple de consigne;
- $C_m(p)$ , couple moteur;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

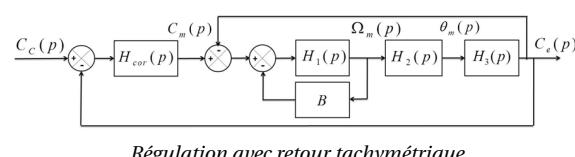
Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



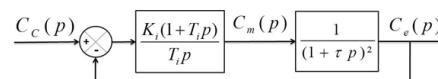
Régulation avec retour tachymétrique

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



Régulation avec correcteur PI.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

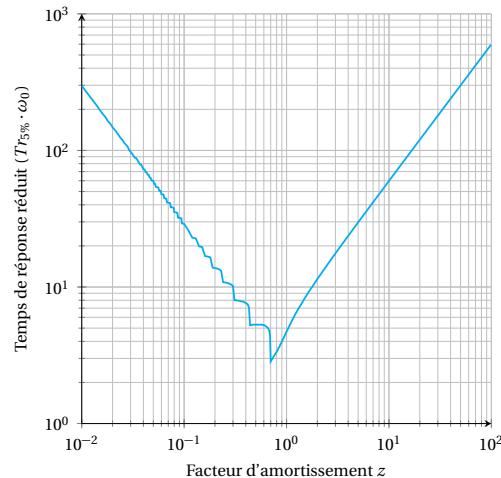
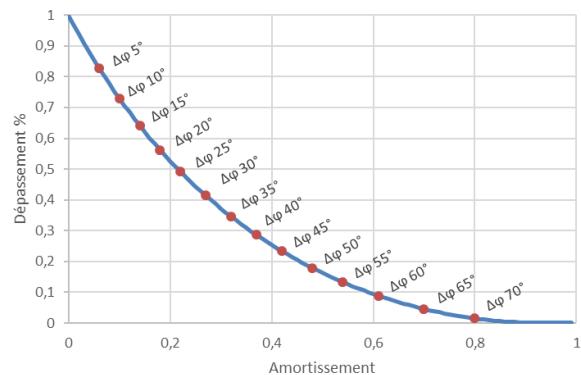
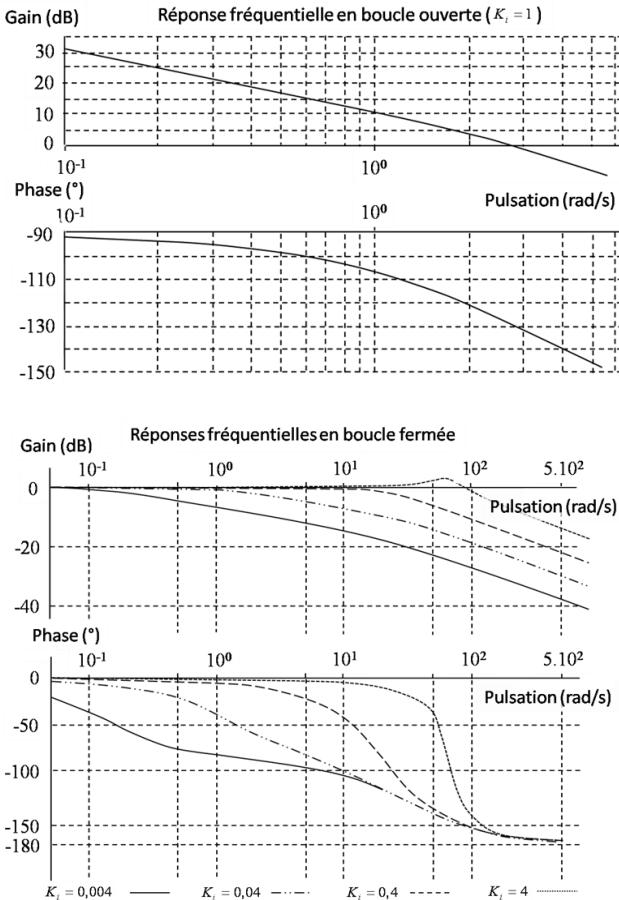
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :  $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$ .

$$1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour  $K_i = 1$  et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K_i$  sont données ci-dessous.

**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



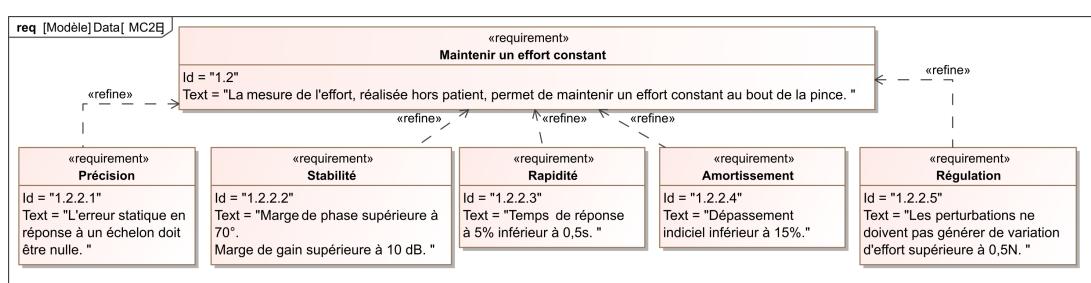
## Retour sur le cahier des charges

**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

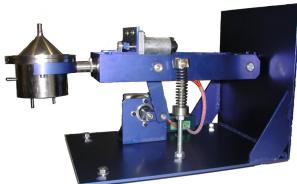
Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			

### Corrigé résumé

- $H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p}, H_3(p) = K_{C\theta}$ .
- $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$ .
- Sinus d'amplitude  $C_0/2$  de pulsation  $\omega_0$ .
- $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} \text{ et } B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .
- Erreur statique nulle.
- $\tau = T_i$ .
- $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .
- ...



## TD 3



## Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

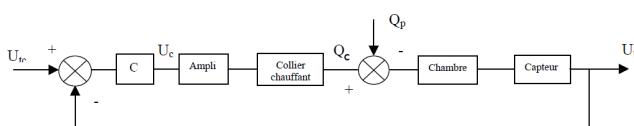
**Objectif** La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- temps de montée en température : 3 min maxi;
- précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- $U_{tc}$  : tension de consigne;
- $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$ .

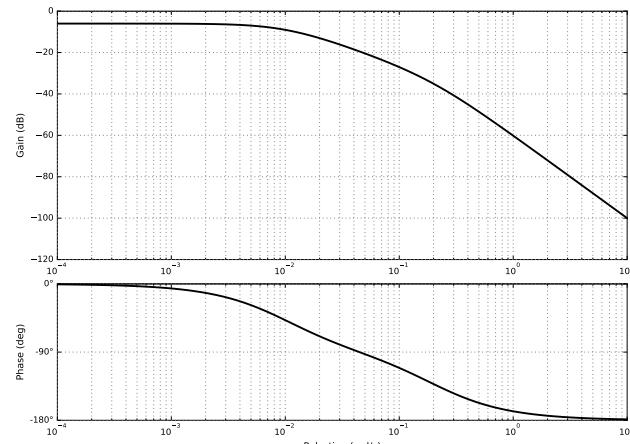
## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p)=1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.



**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p)=K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

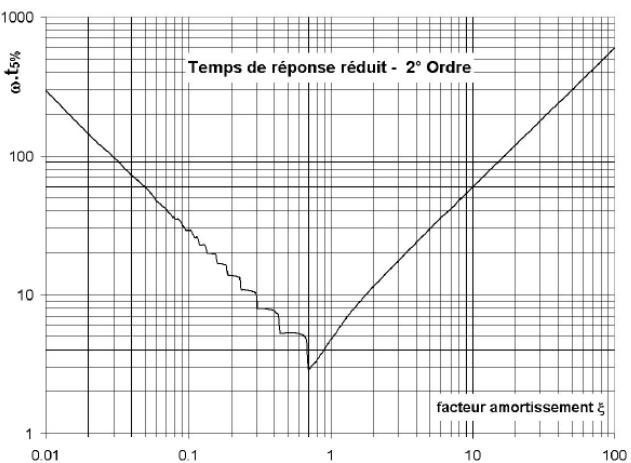
**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.



1. 218 s.
2.  $\varepsilon_P = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ( $M_G \rightarrow \infty$ ,  $M_\varphi$  non définie).
5.  $K = 9$ .
6. 50 s,
7.  $\varepsilon_P = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
8.  $U_a = 450 \text{ V}$ .
9.  $K = 10$  et  $T_i = 100 \text{ s}$ .
10.  $\varepsilon_P = 0$ .

## TD 4



## Machine de rééducation SysReeduc

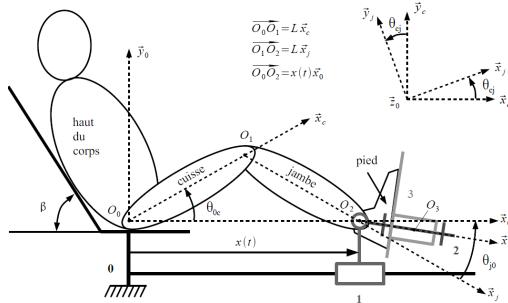
CCP PSI 2013

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

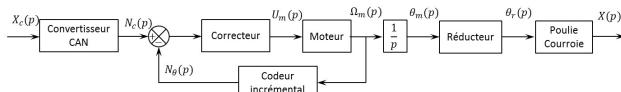


**Objectif** L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

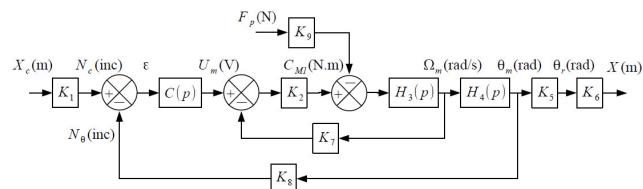
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s <sup>-1</sup>

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



## Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$  et  $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

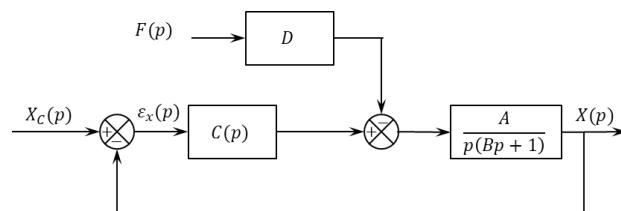
$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec :  $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied,  $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur,  $r = 46,1 \text{ mm}$  le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie,  $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes  $A$ ,  $B$  et  $D$ , avec  $A = 6700 \text{ m/V}$ ,  $B = 0,01 \text{ s}$  et  $D = 6 \text{ V/N}$ .

## Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

**Question 5** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_i$ .

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système FTBO( $p$ ) =  $\frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

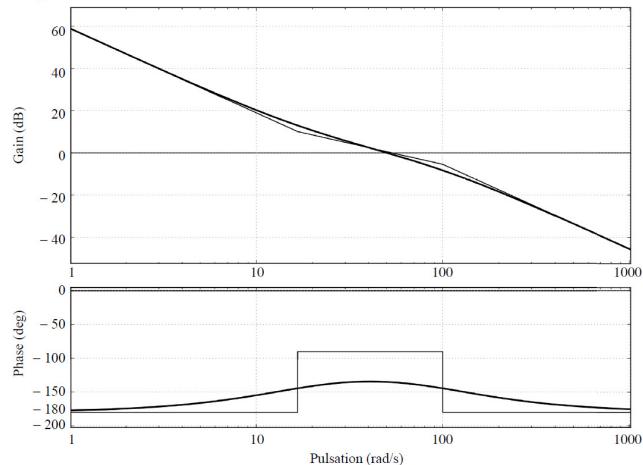
**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer

la pulsation au gain unité souhaitée.

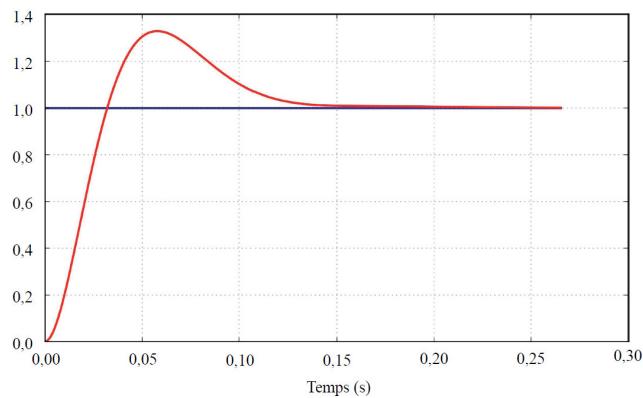
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

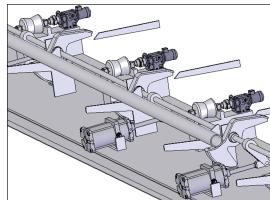
Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement /  $F_p = 0$ . Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



## TD 5



## Banc d'épreuve hydraulique

CCP – PSI – 2010

## Savoirs et compétences :

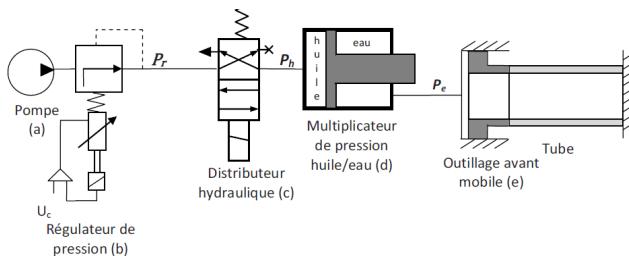
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation

Vallourec & Mannesmann Tubes (V&M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

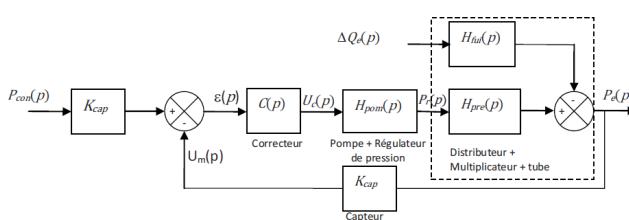
Afin de valider la caractéristique de tenue en pression des tubes, ceux-ci sont soumis à une pression hydraulique donnée durant un temps spécifié. Ces paramètres dépendent de la taille des tubes et de leur future utilisation.

Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante :



## Mise en place d'un asservissement de pression.

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. L'objectif est ici de proposer un réglage du correcteur pour répondre aux critères du cahier des charges. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression. Le schéma-blocs de l'asservissement est défini ci-dessous.



- $P_{con}(p)$  : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa) ;
- $P_e(p)$  : pression d'eau dans le tube (Pa) ;
- $U_c(p)$  : tension de commande du régulateur de pression (V) ;
- $P_r(p)$  : pression d'huile régulée (Pa) ;
- $\Delta Q_e(p)$  : débit de fuite ( $m^3/s$ ) ;
- $U_m(p)$  : tension de mesure du capteur (V).

## Hypothèses :

- quels que soient les résultats précédents, l'ensemble de mise sous pression {tube + distributeur + multiplicateur de pression} est défini par les transmittances suivantes :  $H_{pre}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{fui}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \cdot 10^{10} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})$ ;  $T_1 = 10 \text{ s}$ ;
- l'ensemble {pompe+régulateur de pression} est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{pom}(p) = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{pom} = 1,234 \cdot 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5 \text{ s}$ ;
- le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{cap} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{con} = 800$  bars et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

On rappelle que le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant :

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{con} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{pert} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \omega_{0dB} = 3$  où  $\omega_{0dB}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1<sup>er</sup> maximum si le dépassement est supérieur à 5% ;
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5% si le dépassement est nul ou inférieur à 5%.

## Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

**Question 2** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{con}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{con}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Question 3** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{con}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 4** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$   $\varepsilon_{pert}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

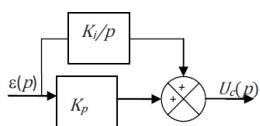
**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{pert}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

**Question 6** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement.

**Question 7** À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

### Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :



**Question 8** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Question 9** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

**Question 10** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

**Question 11** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_{0dB}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

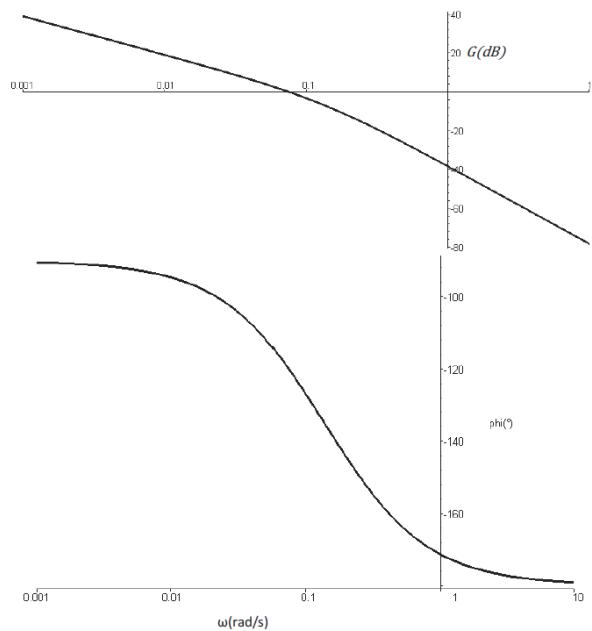
**Question 12** Déterminer alors le rapport  $T = K_p/K_i$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le

cahier des charges.

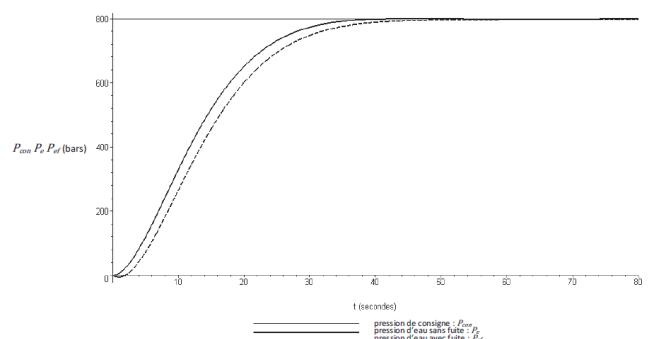
**Question 13** En déduire les valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

### Bilan

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.



On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.



**Question 14** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.

## TD 6

## Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie

Emilien Durif

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

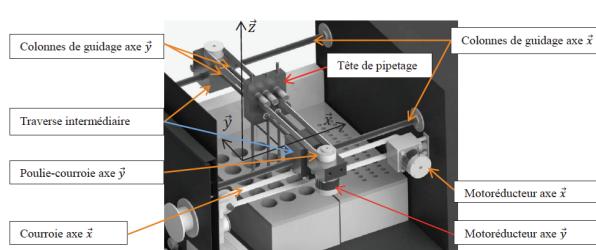
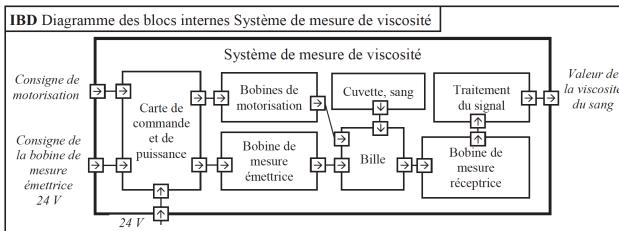
## Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti.

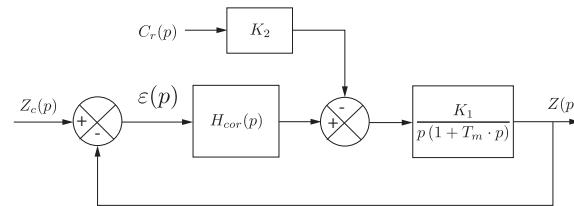
Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.



## Réglage de l'asservissement

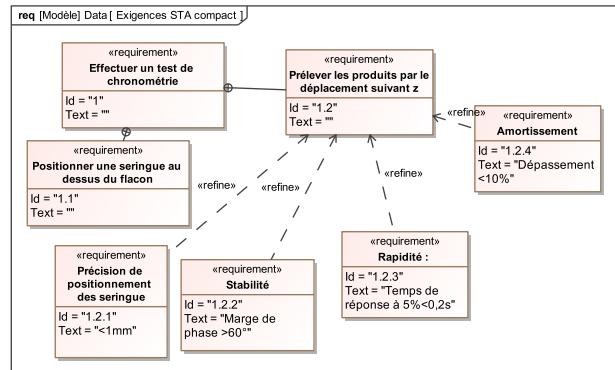
La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ .



On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{cor}(p) = K_p$ .

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.



**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour saisir le critère de précision du cahier des charges.

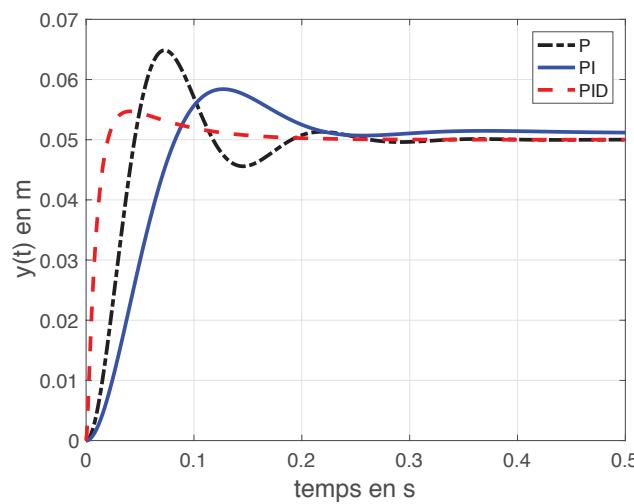
**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i p)}{T_i p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

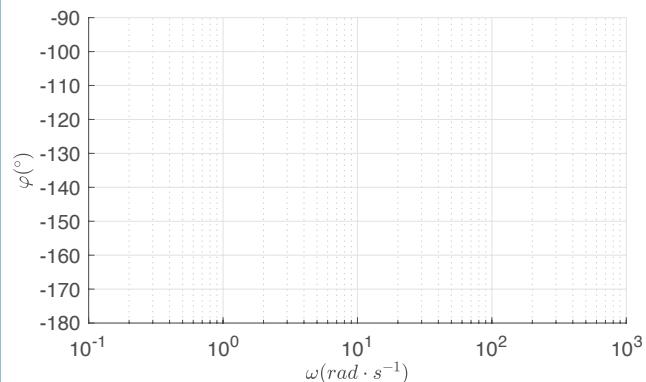
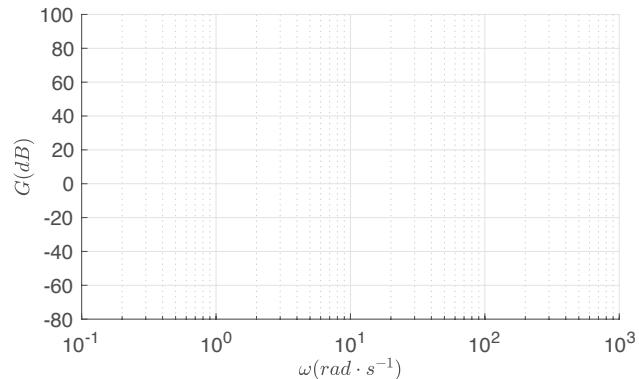
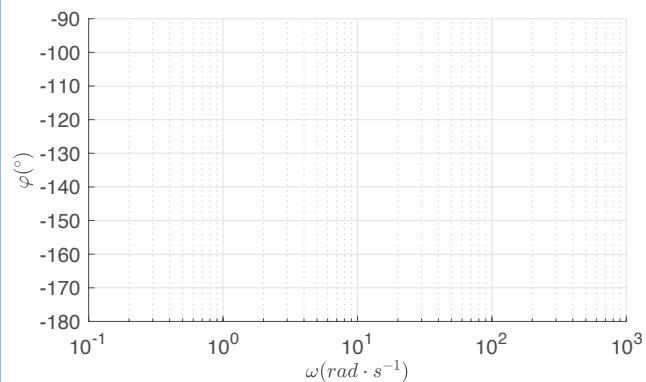
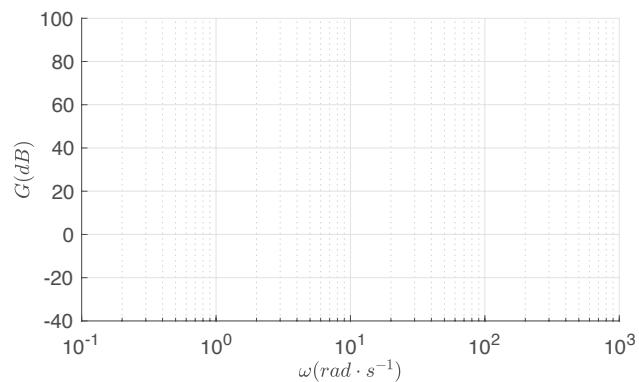
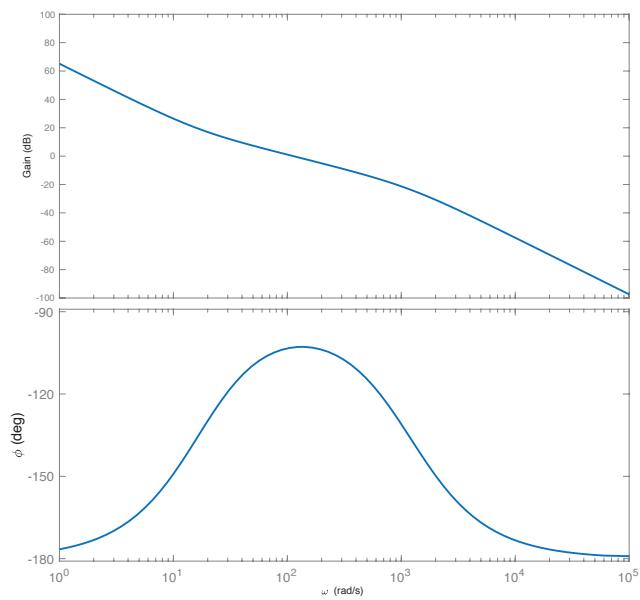
**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.



**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



## TD 7



## La robotique au service du handicap

Centrale Supélec – PSI 2010

## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation

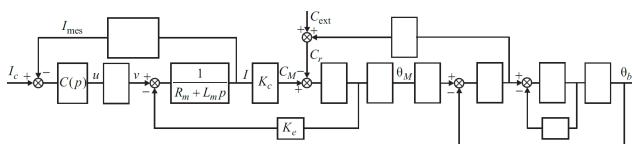
On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

## Objectif

- Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple :  $t \leq 2\text{ ms}$ .
- Erreur statique pour un couple de référence constant  $C_{\text{ref}0}$  :  $|\epsilon_0| \leq 0,05C_{\text{ref}0}$ .
- Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation  $C_{\text{max}} = 50\text{ Nm}$ .

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :  $C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ . On adopte sans aucune justification que  $T_i = 0,3\text{ ms}$ . Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left( 1 + \frac{2 \times 0,08}{463}p + \frac{p^2}{463^2} \right)}{\left( 1 + \frac{p}{122} \right) \left( 1 + \frac{2 \times 0,09}{464}p + \frac{p^2}{464^2} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^3} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^4} \right)}$$

est donné en fin de document.  $i_{\text{mes}}(t)$  est la mesure du courant du moteur et  $u(t)$  la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

## Syntèse du régulateur PI de la boucle de courant

**Question 1** Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction

 $H(p)$ .

**Question 2** En adoptant  $K = 1$ , tracer le diagramme de Bode (module et phase) de  $C(p)$  : diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

**Question 3** En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation  $\omega_1$  telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à  $-135^\circ$  et la valeur numérique du gain statique.

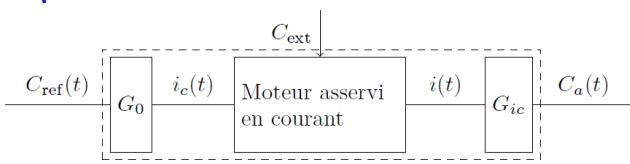
**Question 4** Déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer une marge de phase de  $45^\circ$ .

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur  $C(p)$  qui vient d'être déterminé.

**Question 5** Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

**Question 6** Déterminer l'écart statique  $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$  en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne  $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$  d'amplitude  $I_0$  et l'exprimer sous la forme  $\Delta i_0 = k I_0$  en précisant la valeur numérique de  $k$ .

La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) :  $i_c$  et  $i$  sont respectivement la consigne et le courant moteur,  $C_{\text{ref}}$  est le couple de référence souhaité,  $C_a$  est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et  $G_{ic}$  est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple  $C_a$ . On suppose pour toute cette question que le couple de référence  $C_{\text{ref}}(t)$  est constant d'amplitude  $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$ .



**Question 7** Exprimer  $G_{ic}$  en fonction de  $K_c$  et de  $N$ .

**Question 8** En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle  $\Delta i_0 = 0$ , donner la valeur du gain  $G_0$  permettant d'assurer l'égalité des couples de référence  $C_{ref0}$  et appliqués  $C_a$ .

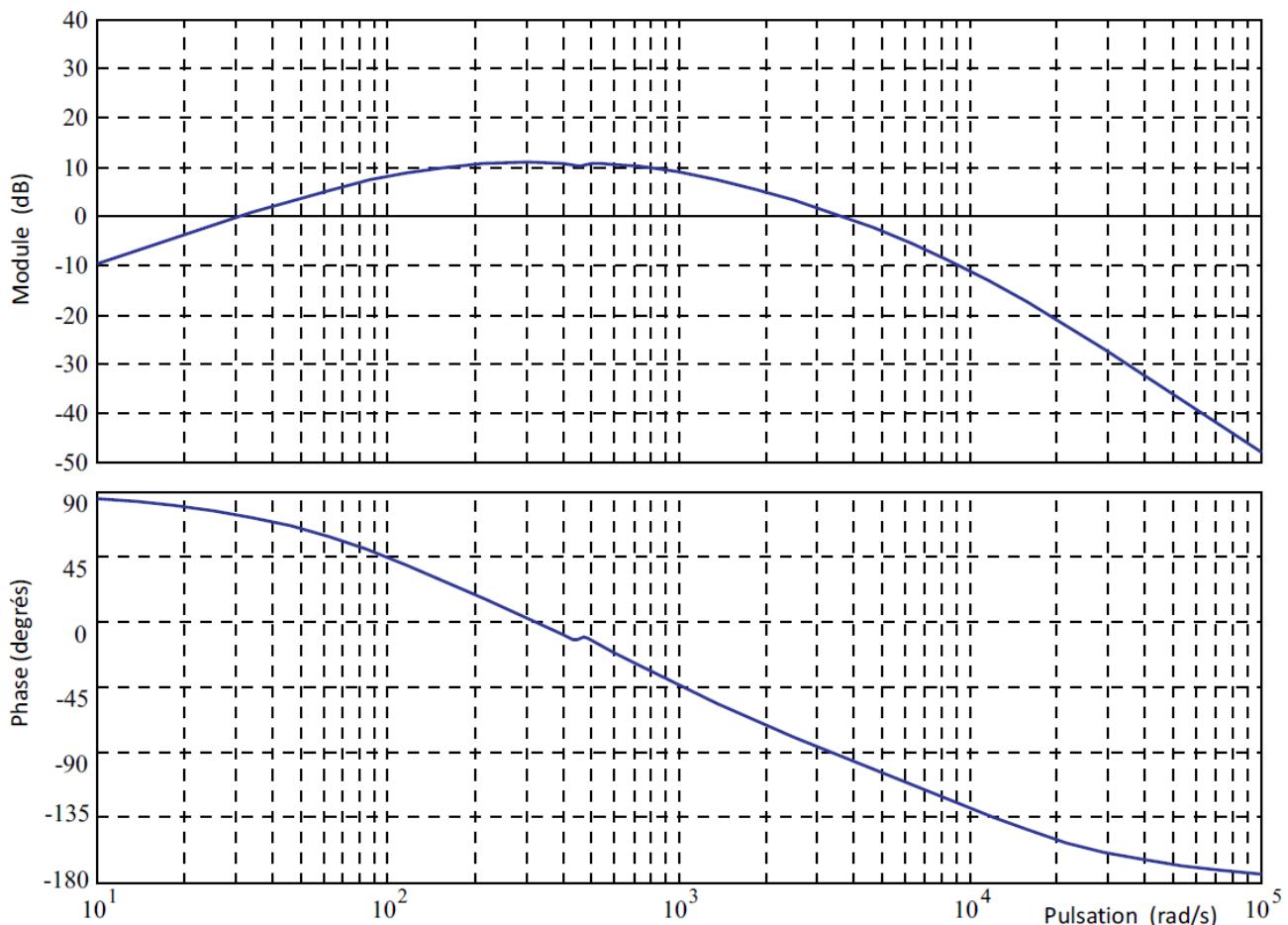
**Question 9** En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur  $\Delta C = C_{ref} - C_a$  entre le couple de référence

et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est  $\Delta C = k_1 C_{ref0}$ . Déterminer  $k_1$  en fonction de  $k$ .

**Question 10** Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative  $\omega_c Tr \simeq 3$ .

1. .
2. .
3.  $\omega_1 = 3300 \text{ rad/s}^{-1}$  et gain statique de 1,4.
4.  $K = 0,7$ .
5. Marge de gain infinie, marge de phase positive.
6.  $\Delta i_0 = \frac{1}{1 + K_{bo}} I_0$ .
7.  $G_{ic} = K_c N$ .
8.  $G_0 = \frac{1}{G_{ic}}$ .
9.  $k_1 = k$ .
10. OK.



## TD 8



## Avance de Phase – Train d'atterrissement d'hélicoptère \*

Banque PT – SIA 2014

## Savoirs et compétences :

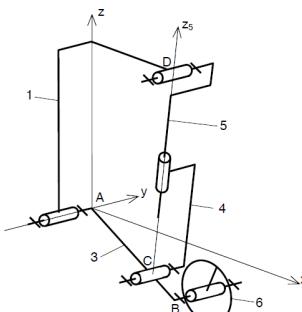
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Mise en situation

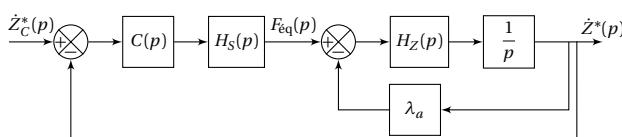
Lors d'atterrissages d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de  $2 \text{ m s}^{-1}$  mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée  $Z^*$ . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne  $\dot{Z}_c^*(p)$ . On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{Z}^*(p)$  la transformée de  $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$  avec  $V_0$  la vitesse d'impact et  $\dot{z}(t)$  la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;

- $F_{eq}(p)$  l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- $\lambda_a$  le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$  la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra :  $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$  et  $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$  la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

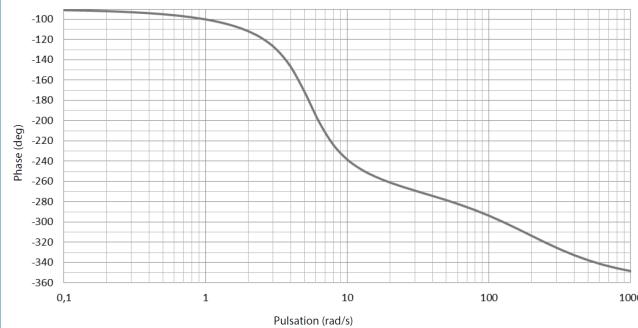
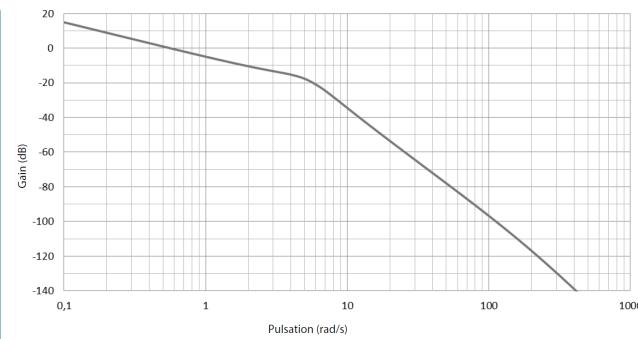
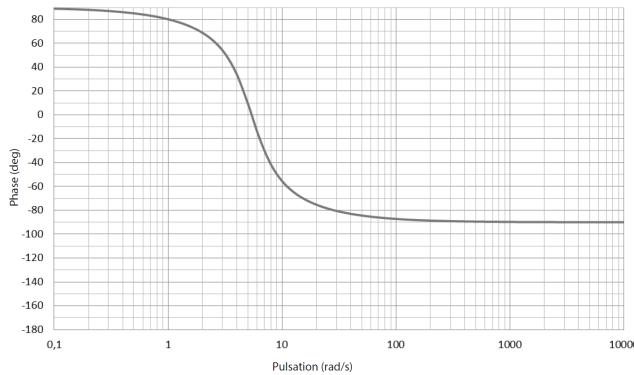
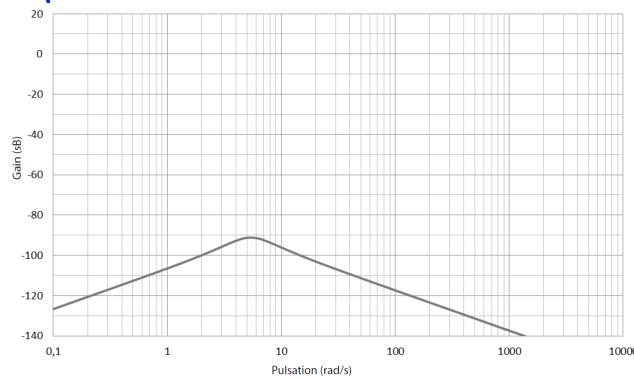
## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

**Question 2** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

On donne le diagramme de Bode de  $H_F(p)$ .



**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \simeq 100 \text{ dB}$ .

### Choix et réglage de la correction

**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

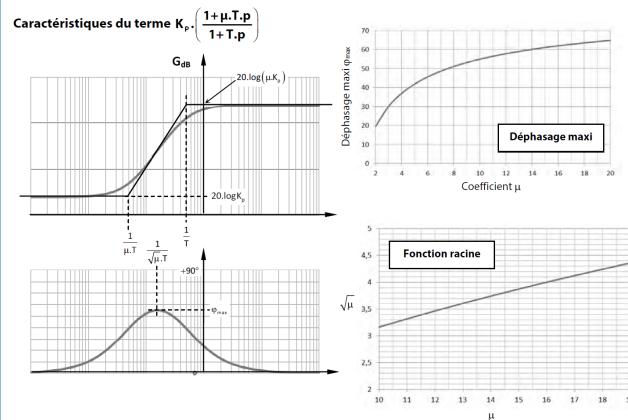
- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et  $\omega_{0\text{dB}} = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- marge de phase  $M\varphi = 45^\circ$ ;
- marge de gain  $MG > 6 \text{ dB}$ .

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$ . On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour  $K_p = 1$ .

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  avec  $\mu > 1$ . Les caractéristiques du terme en  $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

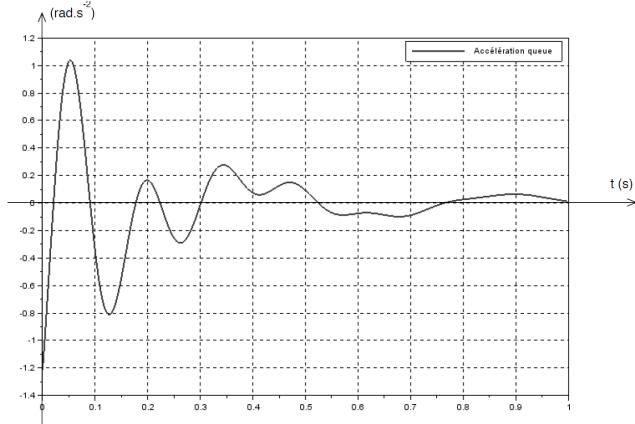
**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

## Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



## TD 9



## Quille pendulaire \*

Concours Commun Mines Ponts 2014

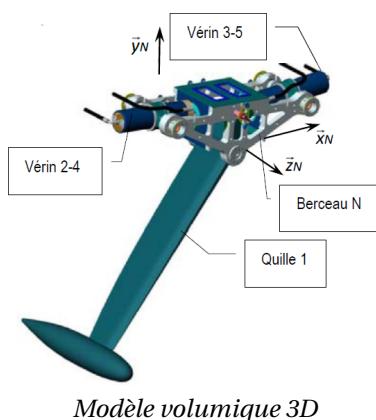
## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe ( $O, \vec{z}'_N$ ) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

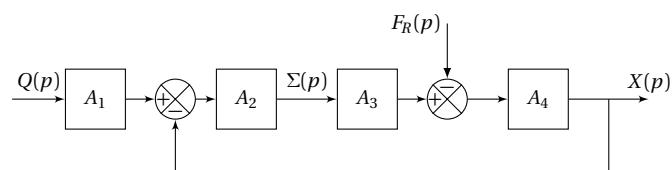
**Objectif** L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

## Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le

déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo-valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$  (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$  (b).

On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

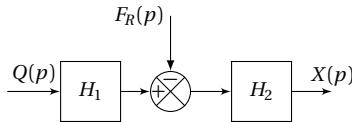
Les constantes sont les suivantes :

- $S$  : section du vérin [ $m^2$ ];
- $k$  : raideur mécanique du vérin [ $N m^{-1}$ ];
- $V$  : volume d'huile de référence [ $m^3$ ];
- $B$  : coefficient de compressibilité de l'huile [ $N m^{-2}$ ];
- $M$  : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];

- $\lambda$  : coefficient de frottement visqueux [ $N m^{-1}s$ ].

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

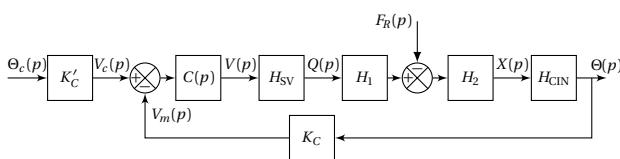
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

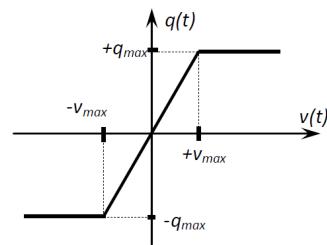
- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1 V/^{\circ}$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  $H_{CIN} = K_\theta [{}^{\circ}.m^{-1}]$ ;
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.

### Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

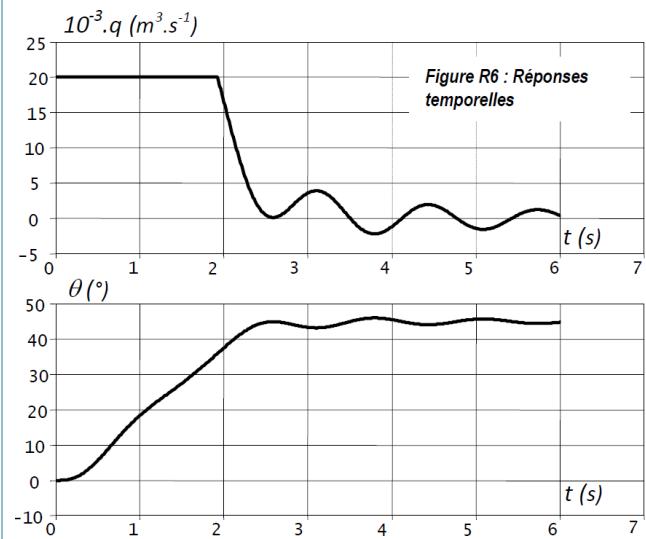
La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe de la figure suivante donnant les évolutions du débit  $q(t)$  fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande  $v(t)$ .



Ainsi :

- pour  $v(t) > -v_{\max}$  et  $v(t) < v_{\max}$  :  $H_{SV} = K_{SV} [m^3 s^{-1} V^{-1}]$
- pour  $v(t) < -v_{\max}$  :  $q(t) = -q_{\max}$ ;
- pour  $v(t) > v_{\max}$  :  $q(t) = +q_{\max}$ ,  $v_{\max} = 10V$ .

Le système n'est pas encore corrigé,  $C(p) = 1$  et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de  $45^\circ$ . Cette demande est modélisée par une consigne  $\theta_c(t)$  en échelon, soit :  $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$  avec  $\theta_0 = 45^\circ$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t > 0$ . La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve  $q(t)$  et la position angulaire de la quille  $\theta(t)$ .



Sur la figure précédente, la courbe représentative de  $q(t)$  présente un palier où  $q(t)$  garde une valeur constante.

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{SV}$ ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

## Comportement pour une commande de faible amplitude

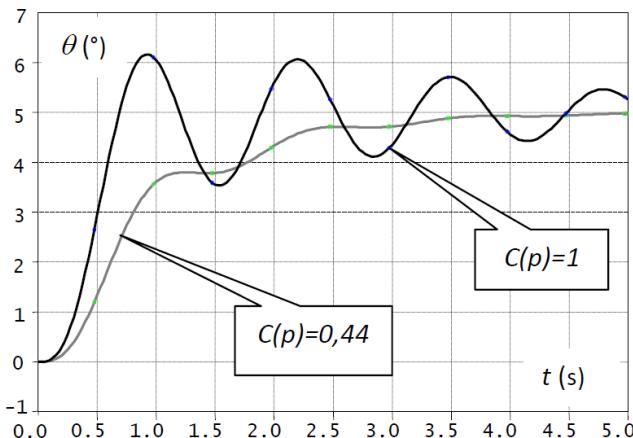
On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^\circ$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1+0,12p+0,04p^2)}$ .

**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il?

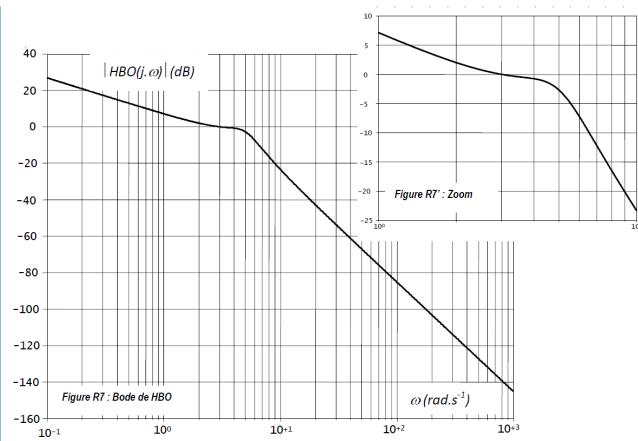
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^\circ$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).



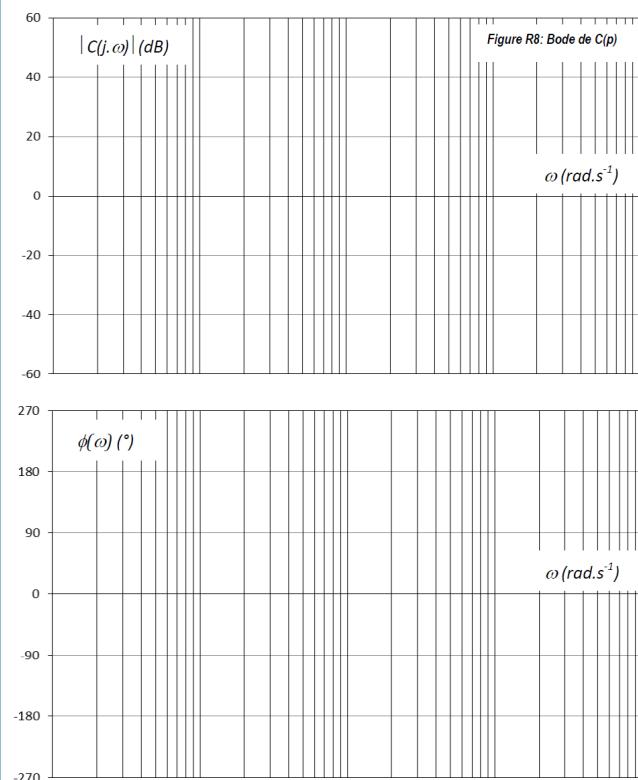
À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation généreraient dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.



Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1+Tp}{1+bTp}$  avec  $b > 1$ . Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :  $\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$  et  $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ .

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur

pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 13** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

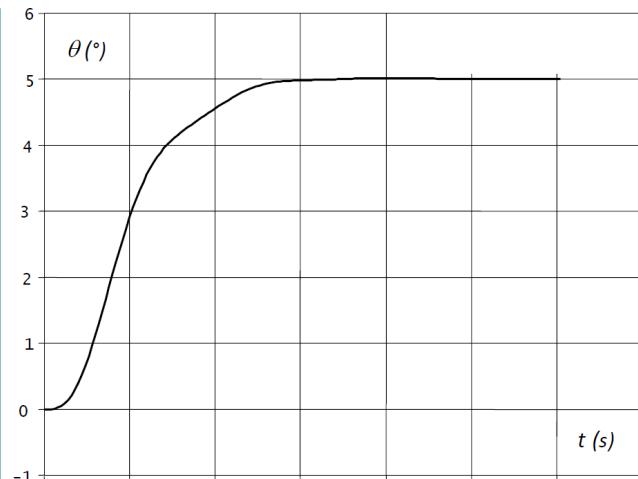
- calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

### Validation du cahier des charges

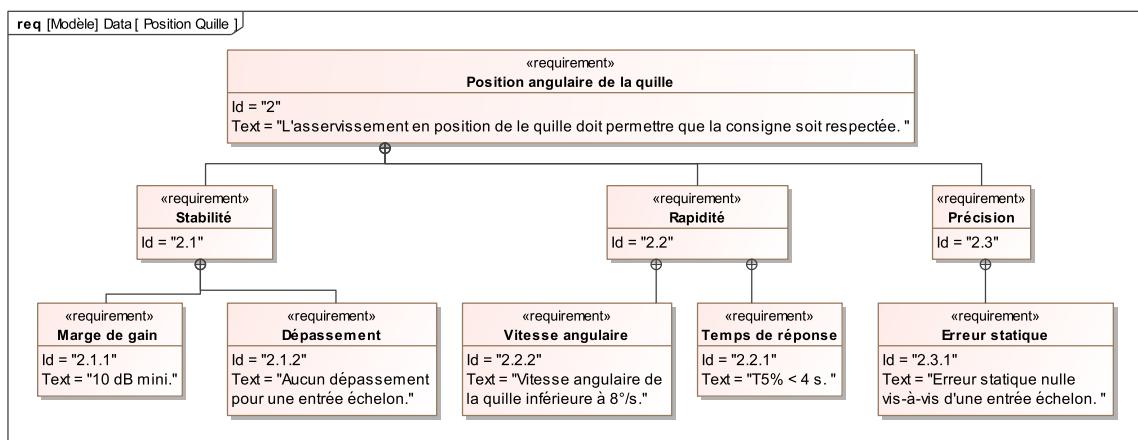
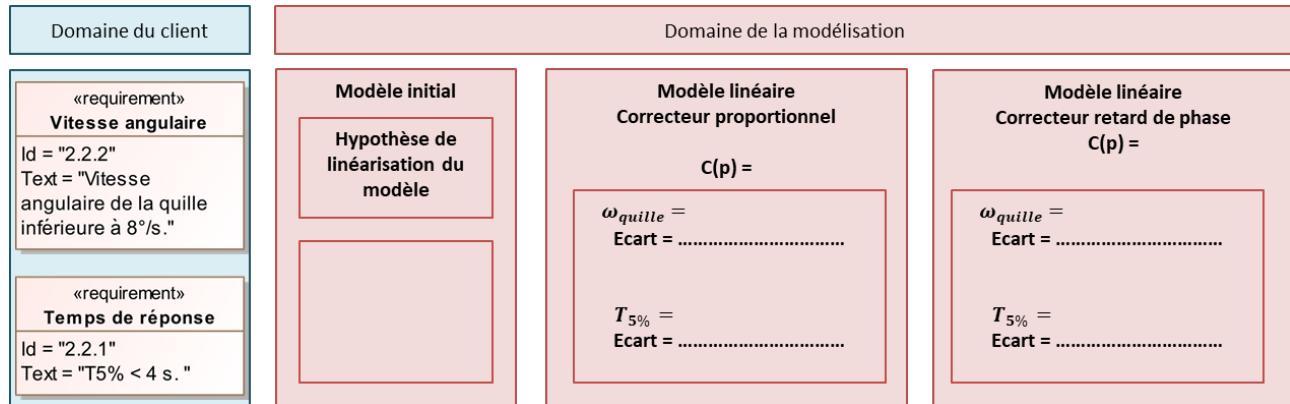
La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{COR}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $X(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2)}$ .
4.  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ . Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02$ ,  $T = 0,127 \text{ s}$ ,  $\phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$ .
14.  $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .



## TD 10



## La robotique au service du handicap

Centrale Supélec – PSI 2010

## Savoirs et compétences :

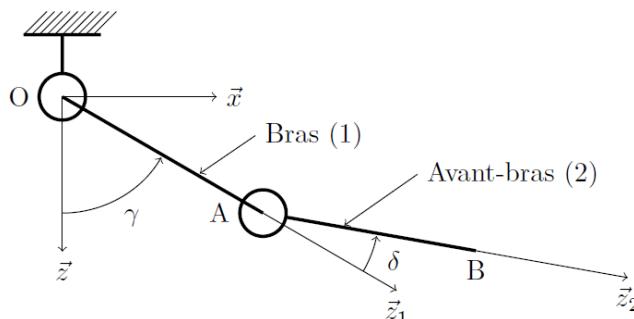
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

**Objectif** L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force pré-déterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion. La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Le cahier des charges est rappelé partiellement par les exigences données dans le tableau suivant. Les actionneurs peuvent fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent.

La structure des axes étudiés est donnée dans la figure suivante.

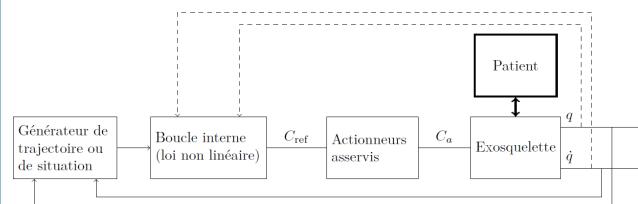


On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant-bras  $(\gamma, \delta)$  et de la variation de force  $Z_F$  exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs  $(K_1, K_2)$ .

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée)	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations ;
- une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail ;
- une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire ;
- un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{ref}$ .



## Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

**Objectif** Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

L'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_B$ . L'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps. Les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps.

En utilisant le PFD on peut établir les lois de commandes suivantes pour piloter chacun des deux axes :

$$C_1(t) = (B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\gamma} + (B_2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\delta} + m_2 l_1 (\lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta) + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin(\gamma + \delta)) - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos(\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta))$$

$$C_2(t) = -l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) + l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) + \ddot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta$$

Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie $G_1$ tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1$ , $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_1 = 2,3 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_1 = 2,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie $G_2$ tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$ , $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_2 = 4,3 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**5.0.0.0.1** Montrer que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Z_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A$ ,  $B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement  $(\gamma, \delta)$  et de leurs dérivées premières  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ .

**Question 1** Calculer les couples  $(C_1, C_2)$  exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 2** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

### Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

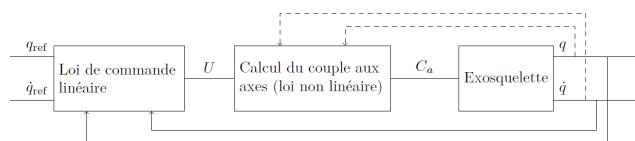
**Objectif** L'objectif de cette partie est de déterminer une loi de commande afin que la relation entre les variations des positions  ${}^t(\gamma, \delta)$  du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $Z_F$  exercée par le patient soit celle d'une raideur en torsion de valeurs  $(K_1, K_2)$  données dans le cahier des charges. La raideur comparativement à la force  $X_F$  ne sera pas à vérifier dans ce cas d'étude.

L'équation dynamique décrivant le comportement de l'exosquelette est de la forme  $A(q, \dot{q})\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + Q(q, \dot{q})F = C_a$  où  $C_a = {}^t(C_1 \ C_2)$ ,  $q = {}^t(\gamma \ \delta)$  et  $F = {}^t(X_F \ Z_F)$ . On note sous forme vectorielle  $q_{\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}} \ \delta_{\text{ref}})$  les consignes de positions angulaires. La loi de commande adoptée est organisée selon deux boucles :

- une boucle externe linéaire ;
- une boucle interne non linéaire qui détermine le couple  $C_a$  par la relation  $C_a = B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + A(q, \dot{q})U$ .

où  $U = {}^t(U_1 \ U_2)$  sont les deux nouvelles commandes issues du correcteur linéaire de la boucle externe.

Le principe de cette loi de commande est donné par la structure représentée par le schéma suivant.



**Question 3** Donner au moins un argument, en particulier vis-à-vis du cahier des charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

Pour la synthèse de la loi de commande, il est nécessaire de linéariser le modèle dynamique autour d'un point de fonctionnement défini par les positions articulaires  ${}^t(\gamma_0 \ \delta_0)$  et les forces  ${}^t(X_{F0} \ Z_{F0})$ . On note autour de ce point de fonctionnement :

- $u = {}^t(u_1 \ u_2)$  les variations des grandeurs de commande autour de  $U_0 = {}^t(U_{10} \ U_{20})$ ;
- $q_1 = {}^t(\gamma_1 \ \delta_1)$  les variations des positions angulaires des deux articulations autour de  $q_0 = {}^t(\gamma_0 \ \delta_0)$ ;
- $f = {}^t(x_F \ z_F)$  les variations des efforts exercés par le patient autour de  $F_0 = {}^t(X_{F0} \ Z_{F0})$ .

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme  $\ddot{q} = U + N(q, \dot{q}, F)$ , où  $N(q, \dot{q}, F) = M(q, \dot{q})F$ .

**Question 4** Préciser l'expression de la matrice  $M$  en fonction de  $A$  et de  $Q$ .

**Question 5** Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme  $\ddot{q}_1 = \tilde{A}q_1 + \tilde{B}\dot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f$  où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

Indication : la démarche de linéarisation fait intervenir  $\frac{\partial N}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial N}{\partial F}$ ; l'expression explicite du modèle linéarisé en fonction de  $M$  n'est pas demandée.

On admet pour la suite que le modèle linéarisé, décrivant les variations des positions  ${}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  du bras, autour du point de fonctionnement  $q_0 = {}^t(0, 60, 7)$  rad et  $F_0 = {}^t(0 \quad -5)$  N, est représenté par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1 \\ \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18,4 & -33 \\ 4 & -56,5 \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,9 \\ -45,4 \end{pmatrix} z_F.$$

On note  $q_{1\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}}, \delta_{\text{ref}})$  les variations de consignes de position. L'objectif des questions suivantes est la synthèse d'une loi de commande linéaire en vue d'assurer la raideur souhaitée entre les variations des positions  ${}^t(\gamma_1, \delta_1)$  des deux articulations et la variation de l'effort  $z_F$  exercé par le patient. L'adaptation de la loi de commande au point de fonctionnement ne fait pas partie du cadre de cette étude.

**Question 6** En justifiant la réponse, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

**Question 7** En utilisant un raisonnement qualitatif (sans calcul), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :

$\frac{U_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1 \left( 1 + \frac{1}{T_1 p} \right)$  et  $\frac{U_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_2 p} \right)$  où  $\varepsilon_1(p) = \gamma_{1\text{ref}} - \gamma_1$  et  $\varepsilon_2(p) = \delta_{1\text{ref}} - \delta_1$  sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif

escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions  $\gamma_1$  et  $\delta_1$ , du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $z_F$  exercée par le patient.

Pour la suite, on adopte la loi de commande  $u(t) = K_p(q_{1\text{ref}} - q_1) + K_v(\dot{q}_{1\text{ref}} - \dot{q}_1)$  avec :

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_v = \begin{pmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v22} \end{pmatrix}.$$

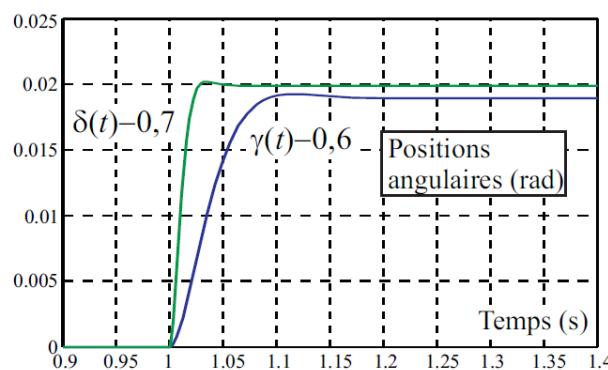
Par souci de simplicité, on pourra utiliser  $q_{1\text{ref}} = 0$  et  $\dot{q}_{1\text{ref}} = 0$ .

**Question 8** Déterminer les coefficients des matrices  $K_p$  et  $K_v$  afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :  $\frac{\gamma_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_1} p + \frac{p^2}{\omega_1^2}}$  et  $\frac{\delta_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_2} p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$  permettant d'obtenir les valeurs des raideurs souhaitées et caractérisées par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,7$ . Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

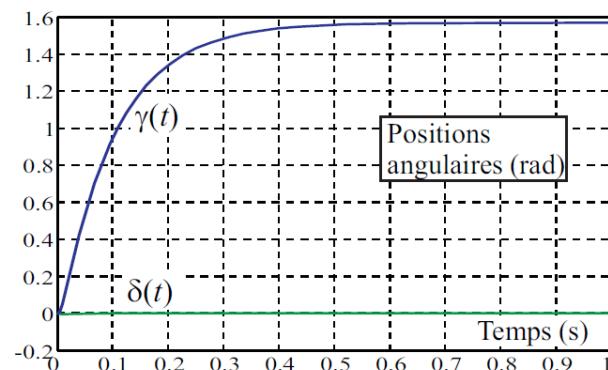
Les figures suivantes montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

- pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question précédente, la première figure suivante montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement  ${}^t(0,6 \quad 0,7)$  rad) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à  $t_0 = 1$  s de la force  $z_F = \Delta Z_F = -1$  N;
- la seconde figure montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants,  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N en partant de conditions initiales nulles.

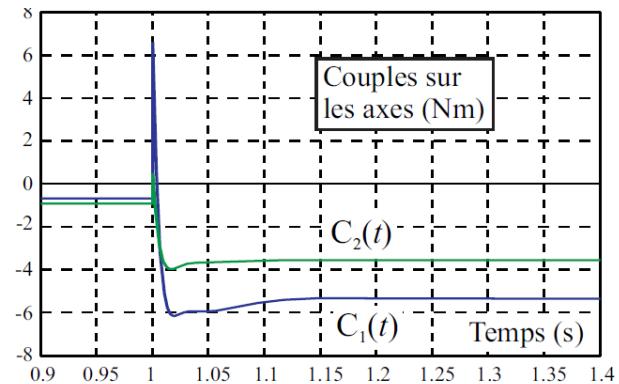
**Question 9** Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.



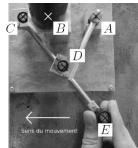
Réponses temporelles (angles des articulations et couples sur les axes) pour une variation de force  $z_F = -1$  N



Ralliement à une position de référence  
avec des efforts constants  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N



## TD 11



## Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

CCP – PSI 2015

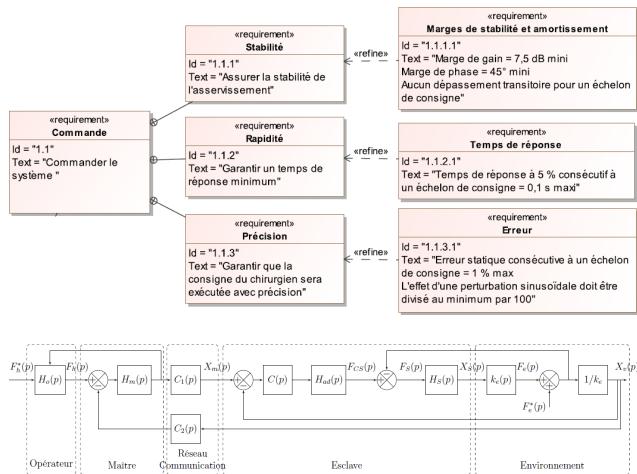
## Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

## Présentation

## Réalisation de la commande de l'esclave

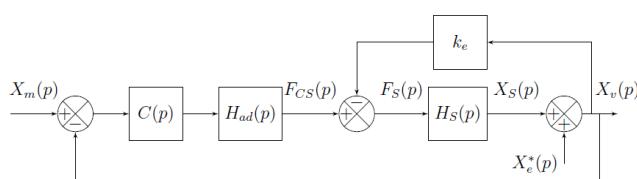
**Objectif** Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).



## Modélisation et étude des performances du système sans correction

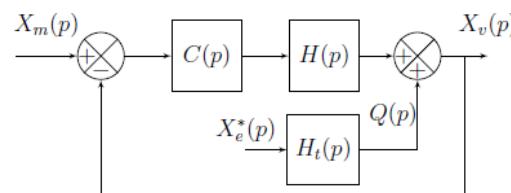
**Objectif** Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_s}{p(m_s + b_s)}$  avec  $k_s = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_s = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_s = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_S(p)$ .

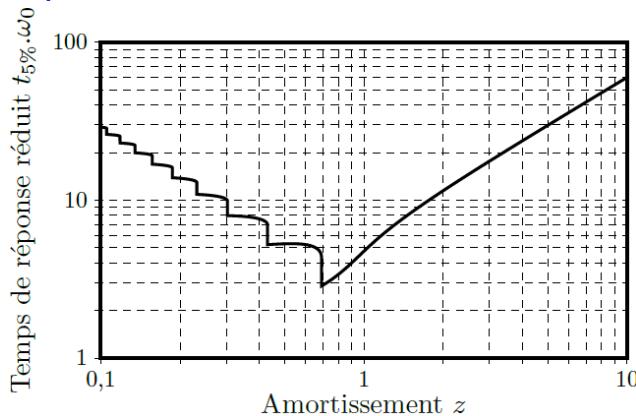


Pour la suite du problème, on prendra :  $H(p) = \frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e}$ .

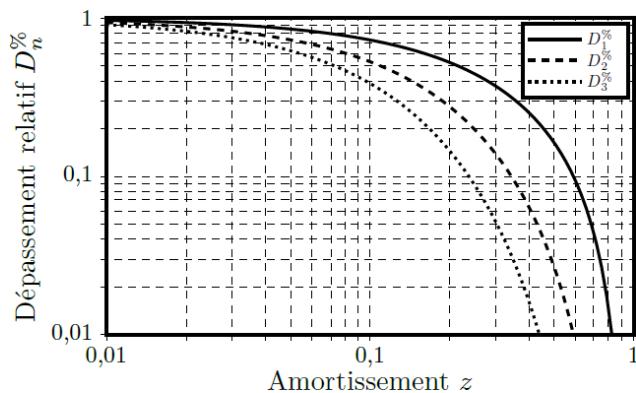
**Vérification des exigences sans correction :**  
 $C(p) = 1$

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  
 $F_{BFI}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amortissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassesments relatifs

**Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale :**  $C(p) = \frac{K_i}{p}$

**Objectif** Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

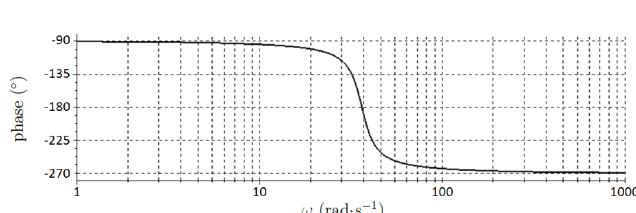
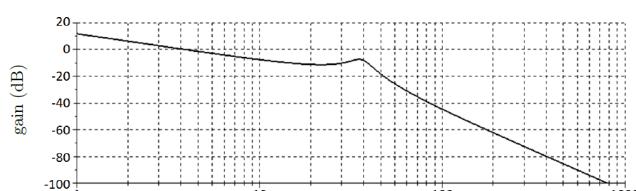
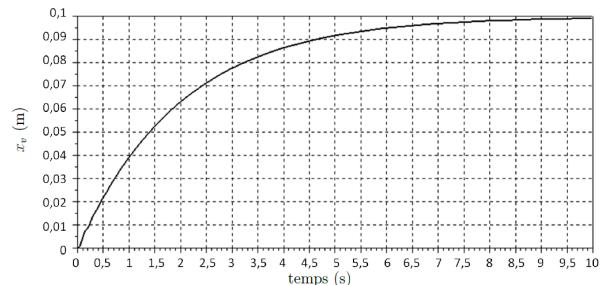


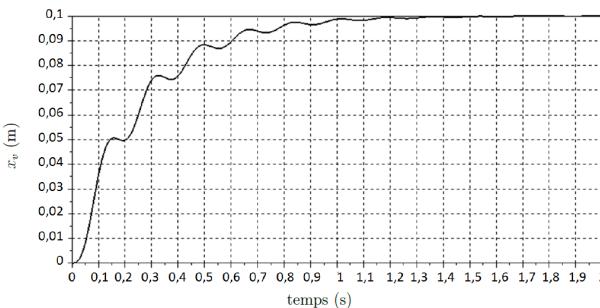
Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $K_i = 100$



Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et  $K_i = 100$

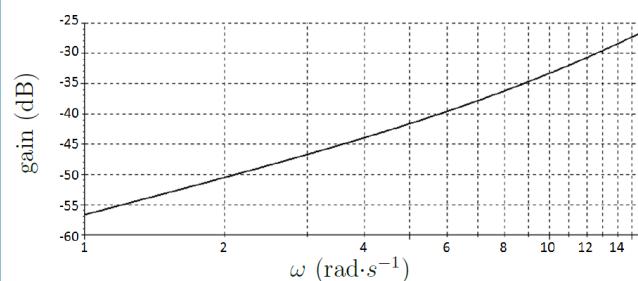
**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{imax}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

**Question 7** En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».



Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm avec le réglage  $K_{imax}$

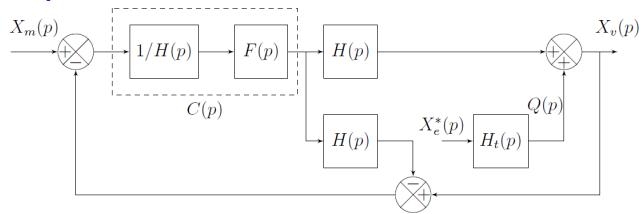
**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$  pour  $K_i = K_{imax}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{BF2}(j\omega)|_{min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rads}^{-1}; 12,5 \text{ rads}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».



**Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC**

**Objectif** Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.



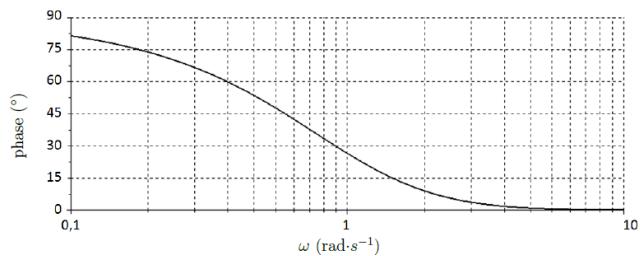
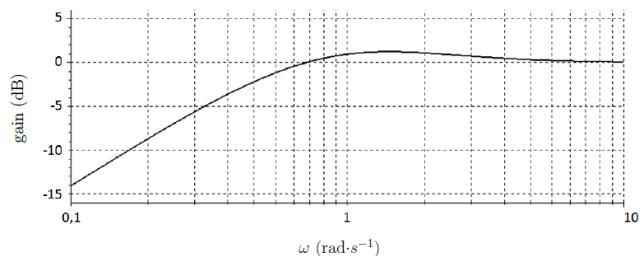
Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$  pour  $T = 1\text{s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25\text{ rad s}^{-1}; 12,5\text{ rad s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.

continuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



1.  $H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$  et  $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$ .
2.  $K = \frac{1}{1 + k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}}$ ,  $\xi = \frac{b_s}{2\sqrt{m_s(1 + k_e)}}$ .
3. .
4. .
5. .
6.  $K_{i\max} = 133$ .
7.  $G_{\text{dB max}} = -30 \text{ dB}$ .
8.  $T \leq 0,02 \text{ s}$ .
9.  $T \leq 0,4 \text{ ms}$ .