

## TD 01



## Drone quadri-rotor

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

## Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe ( $O, \vec{x}$ )) et en tangage (rotation autour de l'axe ( $O, \vec{y}$ )) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (en valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35° Dépassement maximal <5%
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s

## Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

## Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.



Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

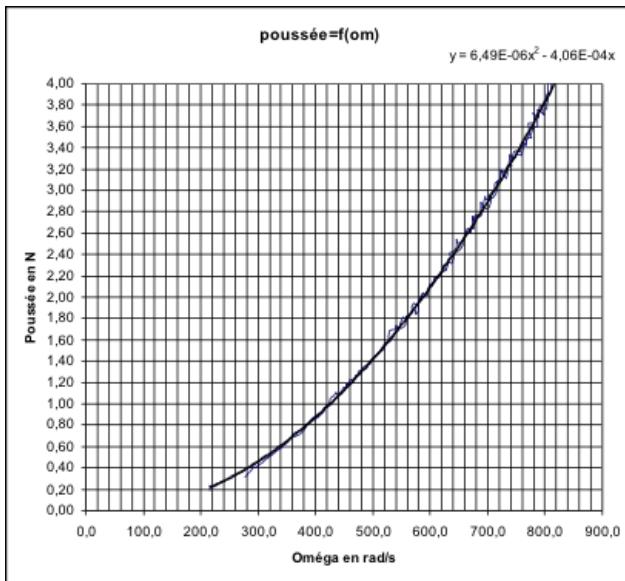
On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

Recherche du point de fonctionnement  $\omega_0$ 

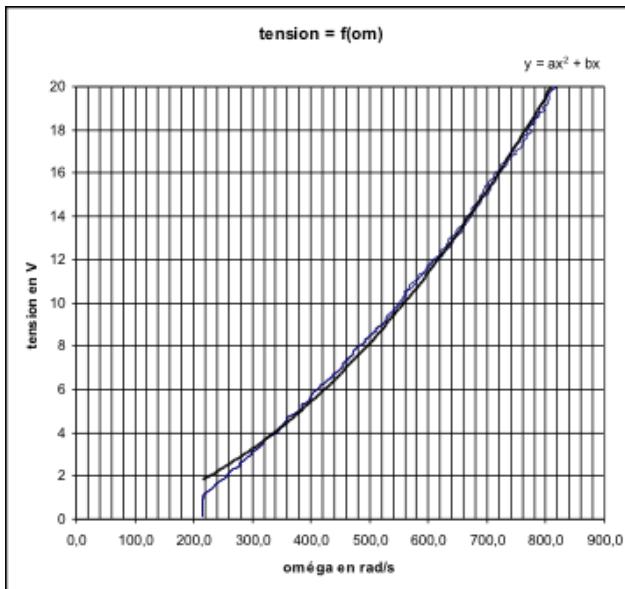
Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240$  g. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ . La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.



**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$  et la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s en régime permanent lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125 \text{ ms}$ .

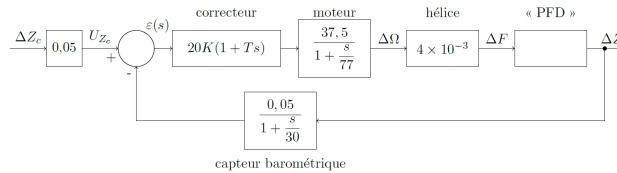


**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :



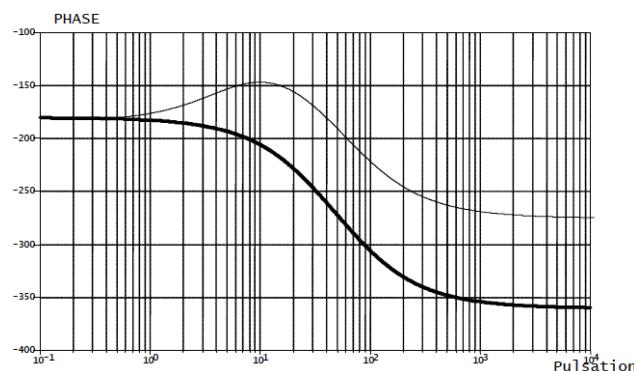
Le gain du capteur barométrique est de  $0,05 \text{ V m}^{-1}$ . On pose  $z(t) = z_0 + \delta z(t)$ ,  $\Delta Z(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta z(t)$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :

$$m\ddot{z} = 4F - mg.$$

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\Delta Z(p)$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée ci-dessous, en gras avec un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2s$ ).



**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2 \text{ s}$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et  $1000 \text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120 \text{ dB}$  et  $10 \text{ dB}$ .

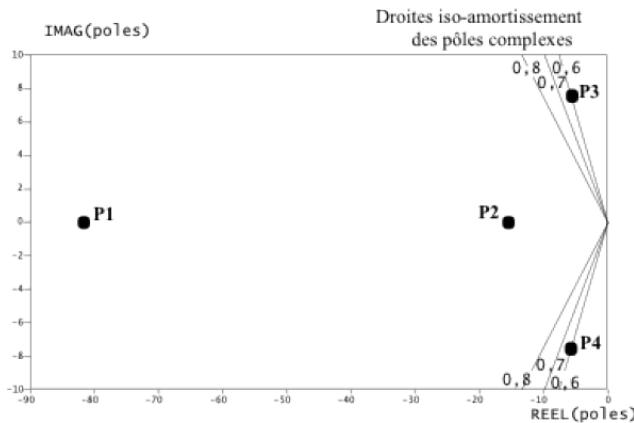
**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega_{c0dB} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase

pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure suivante représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.



**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

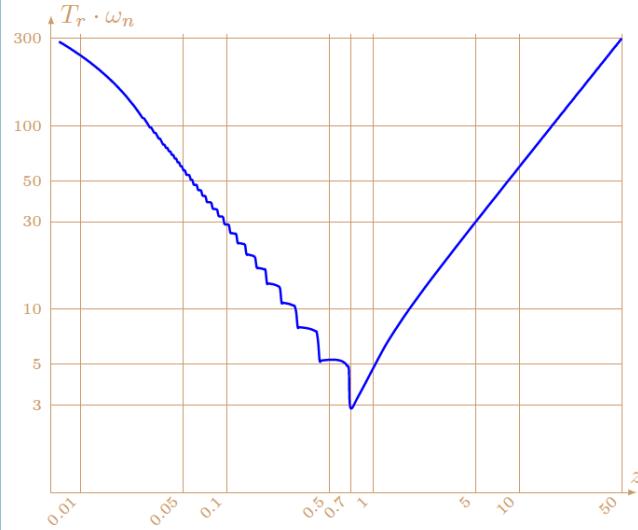
**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$

et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.



Pour éventuellement vous aider....

1.  $-\frac{1}{\tau} \omega_0 - k_q \omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau} u_0 = 0;$
2.  $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q \omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}$ .
3.  $K_m = \frac{k_v}{1+2\tau k_q \omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1+2\tau k_q \omega_0}$ .
4.  $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}$ .
5.  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$ .
6.  $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$  et  $k_b = \frac{a}{b\tau}$ .
7.  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$ .
- 8.
- 9.

10.  $K = 17,9$ .
11. La FTBO est de classe 2, l'erreur de position est donc nulle.
12.  $p_2 = -15$ ,  $p_3 = -5 + 8j$ ,  $p_4 = -5 - 8j$ .
13.  $\xi = 0,6$ .
- 14.
15.  $p = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ .  $\omega_n \approx 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16.  $t_{5\%} \approx 0,61 \text{ s}$ .





## TD 02

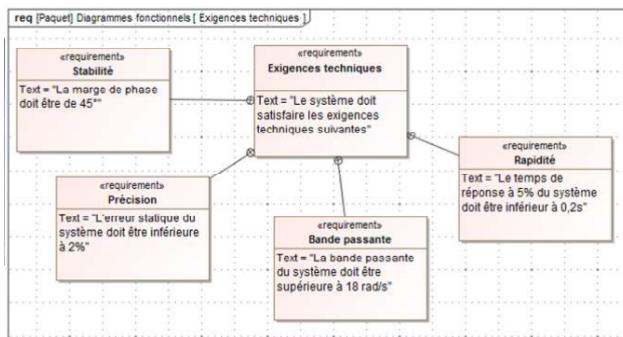


## Radar d'avion

F. Mathurin

## Savoirs et compétences :

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.



On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est  $\theta_c(t)$ , l'angle réel du radar est  $\theta_r(t)$ . La différence des deux angles est transformée en une tension  $u_m(t)$ , selon la loi  $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$ . La tension  $u_m(t)$  engendre, via un moteur de fonction de transfert  $H_m(p)$ , une vitesse angulaire  $\omega_m(t)$ . Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation  $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$  ( $B < 1$ ),  $\omega_r(t)$  étant la vitesse angulaire du radar.

## Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes :

$$u_m(t) = e(t) + Ri(t) \quad e(t) = k_e \omega_m(t)$$

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \quad c_m(t) = k_m i(t)$$

Avec :

- $u(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur) ;
- $e(t)$  : force contre-électromotrice (en V) ;
- $i(t)$  : intensité (en A) ;
- $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s) ;
- $C_m(t)$  : couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner) ;
- $J$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ) ;
- $R$  : résistance électrique du moteur ;

- $k_e$  : constante de force contre-électromotrice ;
- $k_m$  : constante de couple.

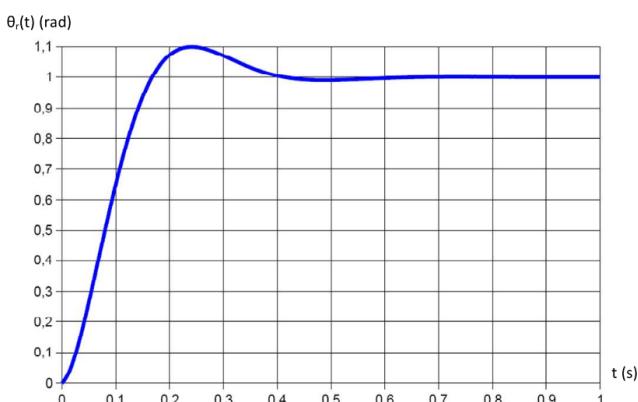
**Question 2** Déterminer la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $H_m(p)$  peut se mettre sous la forme canonique  $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  et déterminer les valeurs littérales de  $K_m$  et  $T_m$ .

**Question 4** En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de  $\omega_m(t)$  à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de  $\omega_m(t)$  et la valeur finale atteinte par  $\omega_m(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$ . Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de  $H(p)$  à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :



**Question 6** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite :  $K = 1$ ,  $z = 0,5$  et  $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$ .

**Question 7** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :  

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}$$
.

**Question 8** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

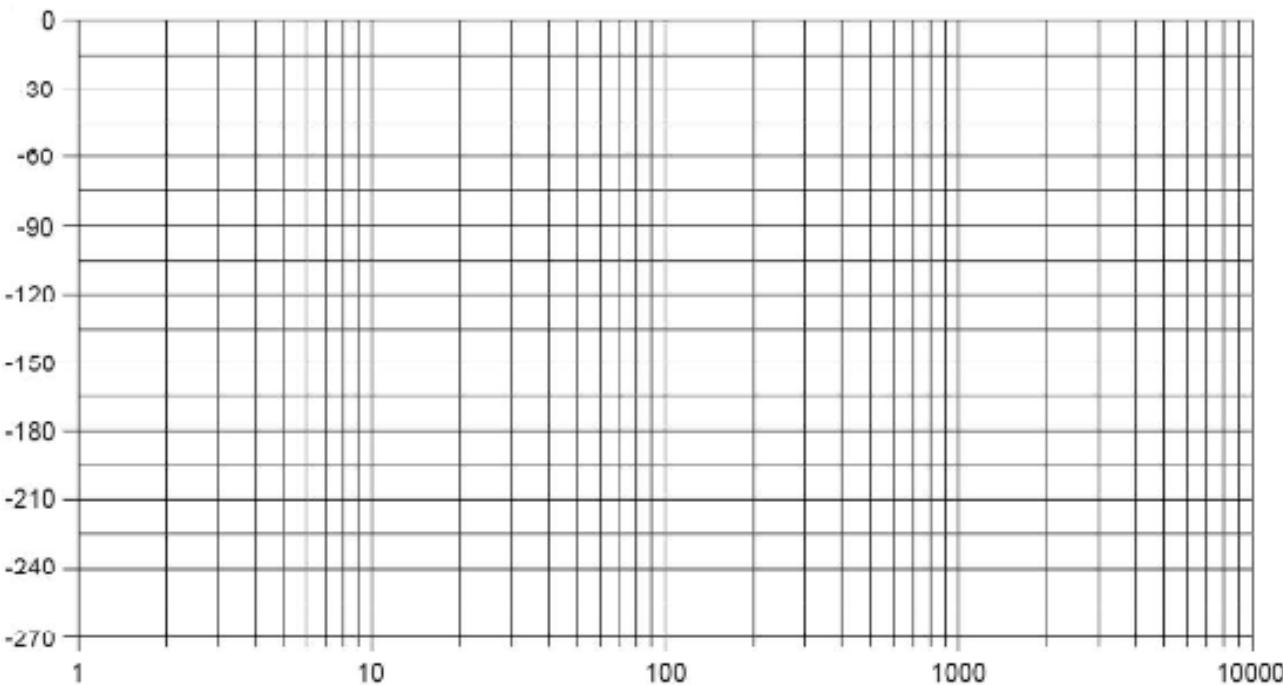
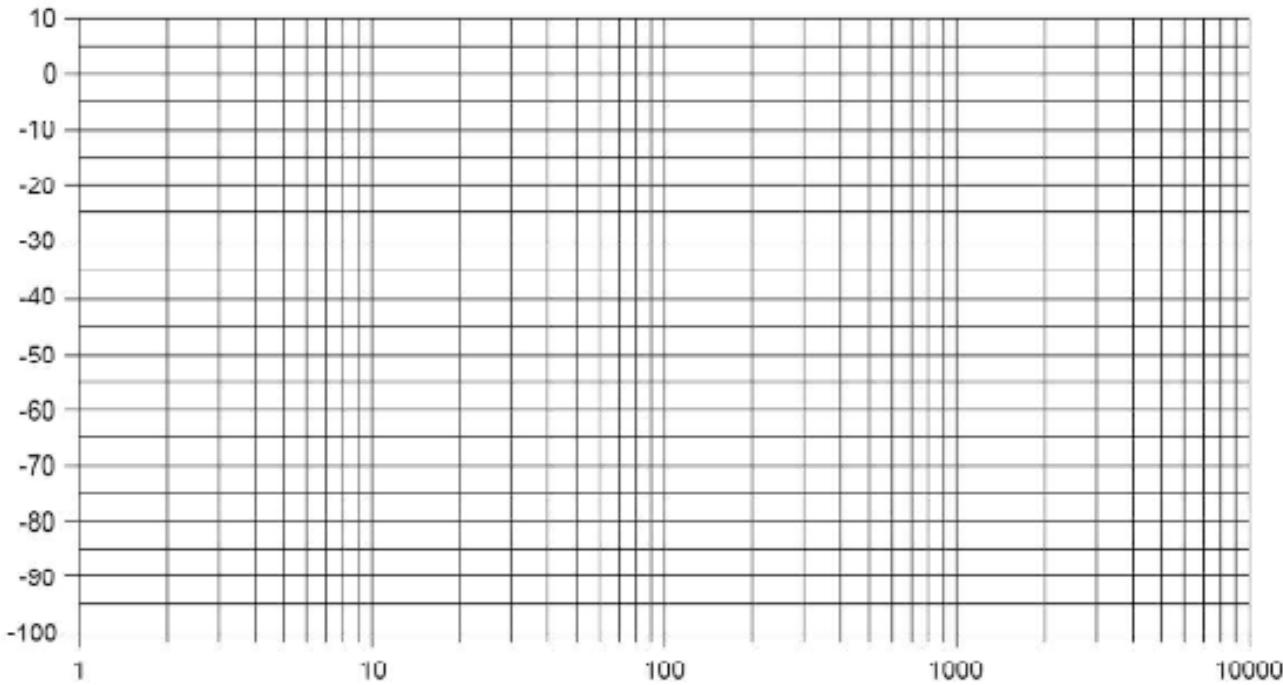
**Question 9** Déterminer  $G$  et  $\varphi$  pour  $\omega = 10$  rad/s.

**Question 10** Déterminer, en régime permanent,  $\theta_r(t)$  pour une entrée  $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$ .

Pour  $\omega < 20$  rad/s, on a  $H(p) \simeq \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

**Question 11** Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

**Question 12** Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.





## TD 02



## Base TC200 Teclotron

Centrale Supelec TSI 2021

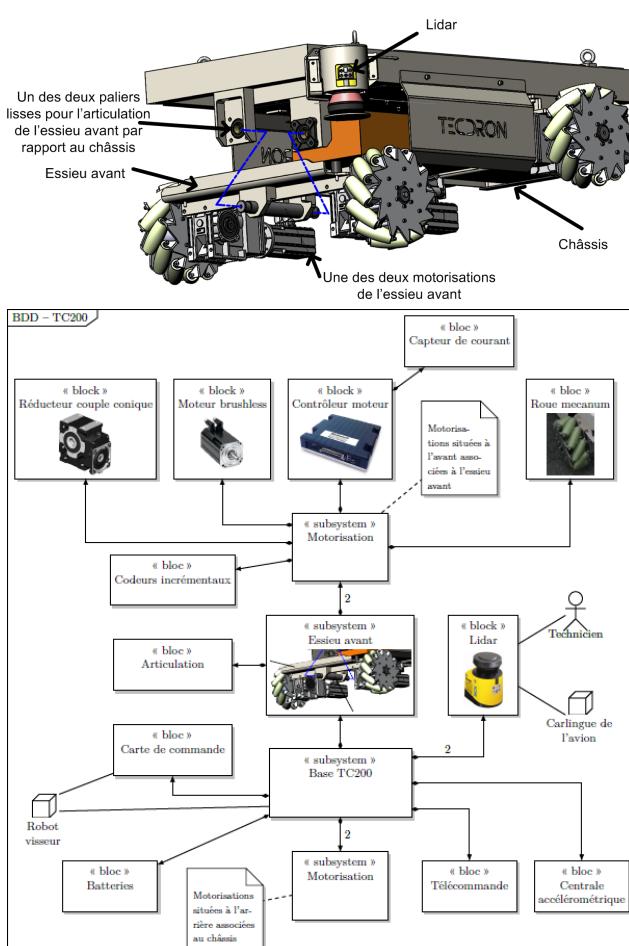
## Savoirs et compétences :

- C2-03 : Déterminer les performances d'un système asservi.

## Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Teclotron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-dessous donnent la structure du robot étudié.



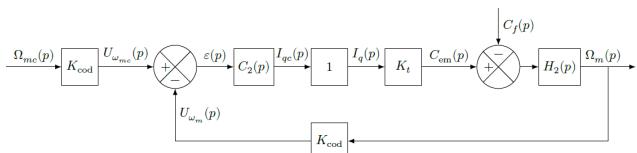
## Validation de l'asservissement du moteur

**Objectif** Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude $\omega_{mc0}$	$\mu_{v\infty} \leq 1\%$
	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ pour une pente de $1800 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$
Rapidité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} \leq 180 \text{ ms}$
Stabilité	Dépassage maximal	$\leq 10\%$
	Marge de phase	$\geq 60^\circ$

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma bloc de la figure 19 correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire  $C_f(p) = 0$ .



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	$K_{cod}$	$0,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$
Constante de couple	$K_t$	$0,09 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$
Correcteur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{eq}p}$	$J_{eq} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

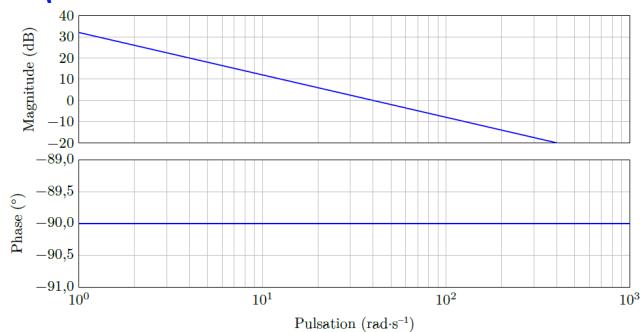
**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$  pour  $C_f(p) = 0$ .

**Question 2** Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

**Question 3** Déterminer la condition sur  $K_2$  afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

**Question 4** Calculer l'erreur relative en régime permanent  $\mu_{v\infty}$  pour une consigne de vitesse en échelon de valeur  $\omega_{mc0}$ .

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



**Question 5** Identifier la valeur de  $K_2$  qui a été réellement choisie par le constructeur.

**Question 6** À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent  $\Delta\omega_\infty$  pour une consigne de vitesse en rampe de pente  $a$  et valider le critère de précision des exigences.

## TD 02



## Segway

Editions Vuibert.

## Savoirs et compétences :

## Analyser le besoin et la structure du système

Le Segway® est un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En terme de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La conduite du Segway® se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement. Les virages à droite et à gauche sont, quant à eux, commandés par l'inclinaison du guidon.

La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation, avec son centre de gravité situé au-dessus de l'axe commun des roues, si bien qu'on se demande comment rester à l'équilibre une fois monté sur la plate-forme. Tout comme le cerveau permet à l'homme de tenir debout sans tomber grâce à l'oreille interne, le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison, maintenant la plate-forme du véhicule à l'horizontale ou encore la barre d'appui, supposée orthogonale à cette plate-forme, à la verticale.

## Cahier des charges

Les exigences attendues pour le Segway® sont listées sur le diagramme de la figure suivante.

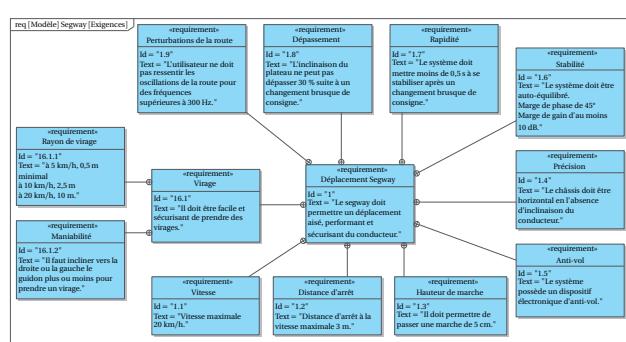


Diagramme des exigences du Segway®.

Le diagramme BDD de la figure ci-après montre les constituants du Segway®.

**Objectif** La difficulté essentielle de ce système est d'être capable de maintenir le chariot stable tout en ayant de bonnes performances. L'objectif du travail proposé est de vérifier qu'un asservissement correctement réglé permet de respecter les critères de stabilité, précision et rapidité définis dans le diagramme des exigences.

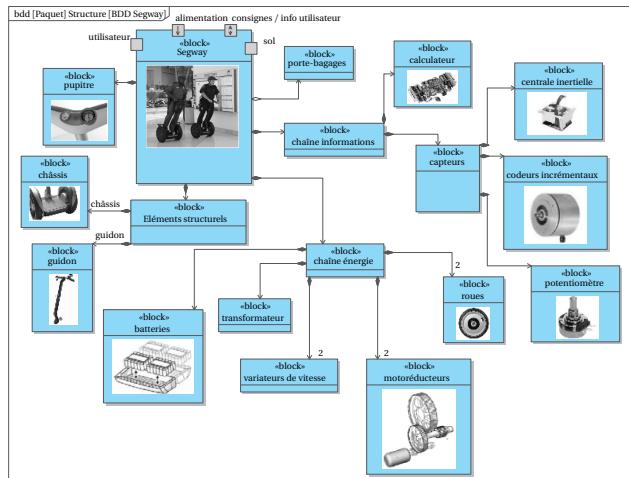


Diagramme de définition des blocs du Segway®.

## Modéliser le système

On donne le schéma-blocs proche de l'architecture retenue pour le système.

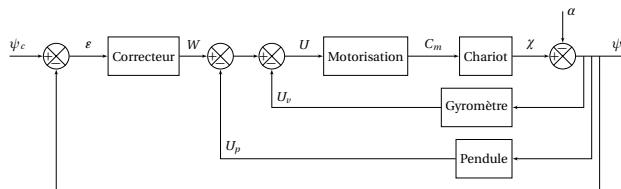


Schéma-blocs fonctionnel du Segway®.

Les équations (simplifiées) caractérisant les différents sous-systèmes sont les suivantes :

- ensemble amplificateur et motoréducteur :  $C_m(t) = K_m u(t)$  avec  $K_m = 2 \text{ NmV}^{-1}$ ;
- ensemble chariot + conducteur :  $a \frac{d^2 \chi(t)}{dt^2} = b C_m(t) + c \chi(t)$  (avec  $a, b$  et  $c$  constantes positives);

- gyromètre :  $u_v(t) = k_v \frac{d\chi(t)}{dt}$ ;
- pendule :  $u_p(t) = k_p \chi(t)$ .

**Question 1** Déterminer, à l'aide des équations de chaque constituant, les fonctions de transfert de chaque bloc du schéma-blocs.

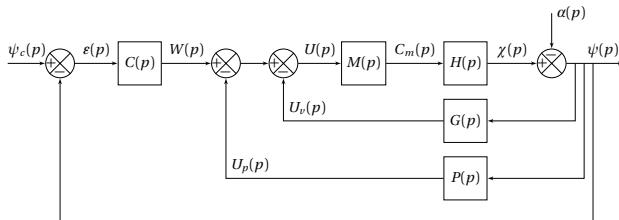
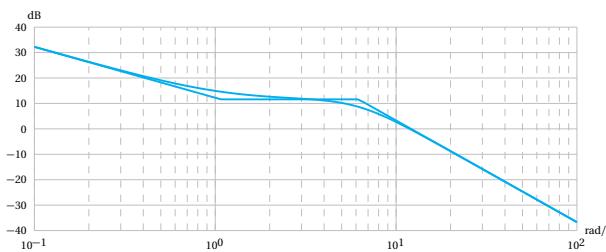


Schéma-blocs du Segway®.

**Question 2** Mettre la fonction de transfert du chariot  $H(p)$  sous la forme canonique  $H(p) = \frac{K_1}{p^2 - \omega_1^2}$ . On prendra pour la suite  $K_1 = 0,12 \text{ rad N m}^{-1}$  et  $\omega_1 = 4,1 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 3** Justifier que le chariot seul est un système instable.



Diagrammes de Bode de la FTBO corrigée.

**Question 5** Calculer l'inclinaison  $\psi$  du châssis en régime permanent, lorsque la perturbation  $a$  est un échelon d'amplitude  $a_0 = 20^\circ$  pour le correcteur  $K_c$  défini précédemment. Le cahier des charges est-il satisfait ?

**Question 6** On utilise alors un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}$  (le réglage d'un tel correcteur sera vu dans un chapitre ultérieur) avec  $K_i = 31,7$  et  $T_i = 0,93 \text{ s}$ . Justifier que ce correcteur améliore la robustesse ainsi que la précision.

Les diagrammes de Bode de la nouvelle FTBO sont donnés sur la figure suivante.

**Question 7** Vérifier que la stabilité est toujours respectée avec ce réglage de correcteur.

## Paramétrier la FTBO

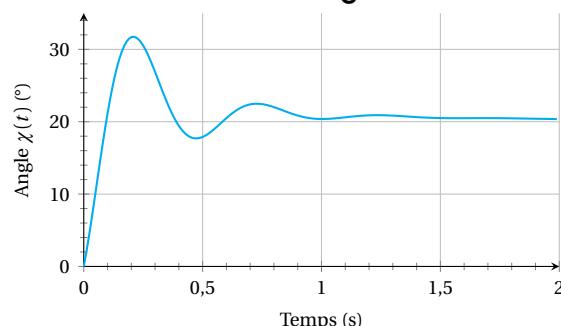
On prend  $F(p) = \frac{0,12}{1+0,23p+0,026p^2}$  et  $K_C = 5,47$  (permettant de garantir la marge de  $-135^\circ$ ).

## Caractériser les performances du système complet

Afin d'assurer l'asservissement, la régulation d'inclinaison du Segway® délivre une consigne  $\psi_c$  nulle. Cette régulation est satisfaisante si, quelle que soit l'inclinaison  $\alpha$  du conducteur, la sortie  $\psi$  converge vers  $\psi_c$ , de valeur nulle ici. Le paramètre  $\alpha$  peut donc être considéré comme une perturbation.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert  $H_r(p) = \frac{\psi(p)}{\alpha(p)}$ .

## Retour sur le cahier des charges



Réponse temporelle  $\chi(t)$  pour une entrée en échelon  $\alpha = 20^\circ$ .

La courbe précédente correspond à l'évolution de l'angle  $\chi(t)$  au cours du temps pour une consigne en échelon  $\alpha = 20^\circ$  pour le correcteur retenu. Vérifier que les critères de stabilité, rapidité, précision et dépassement du cahier des charges sont respectés.