

## Colle 1



### Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

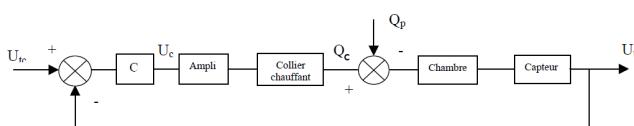
**Objectif** La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- temps de montée en température : 3 min maxi;
- précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- $U_{tc}$  : tension de consigne;
- $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$ .

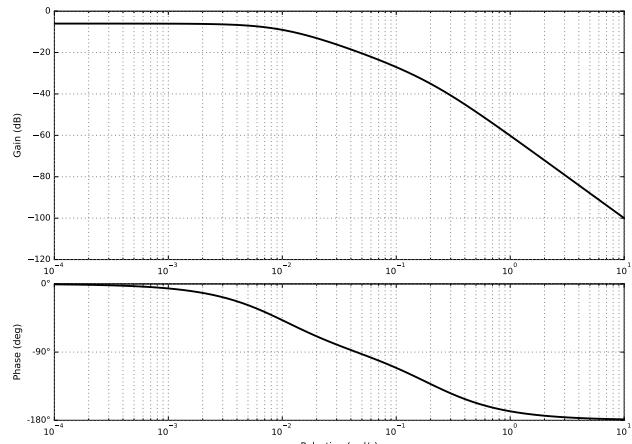
#### Analyse des performances

On considère ici que  $C(p)=1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.



**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

#### Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p)=K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

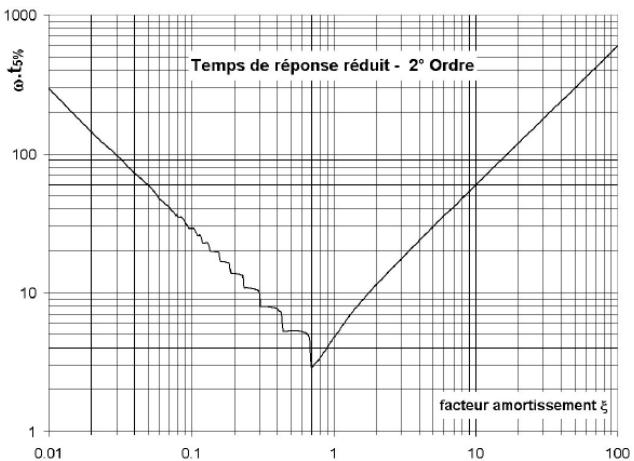
**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.



## Conception de la commande des SLCI

### Chapitre 1 – Correction des systèmes

## Colle 2



### Machine de rééducation SysReeduc

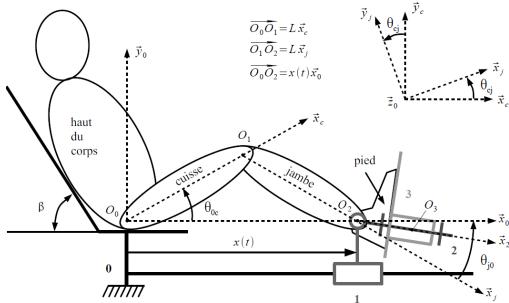
CCP PSI 2013

#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

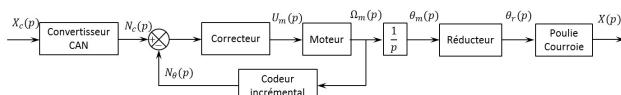


**Objectif** L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

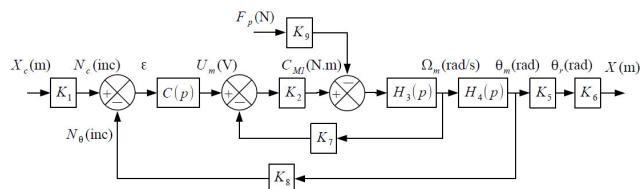
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s <sup>-1</sup>

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



#### Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$  et  $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

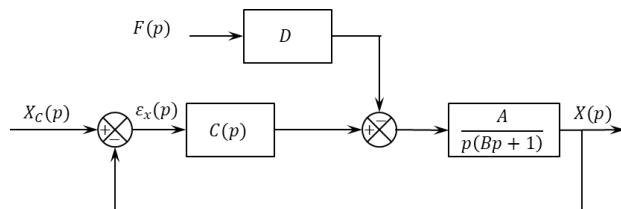
$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec :  $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied,  $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur,  $r = 46,1 \text{ mm}$  le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie,  $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes  $A$ ,  $B$  et  $D$ , avec  $A = 6700 \text{ m/V}$ ,  $B = 0,01 \text{ s}$  et  $D = 6 \text{ V/N}$ .

## Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

**Question 5** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_i$ .

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système FTBO( $p$ ) =  $\frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

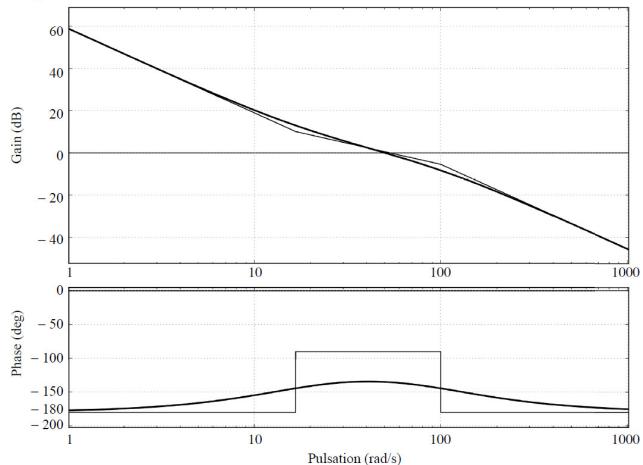
**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer

la pulsation au gain unité souhaitée.

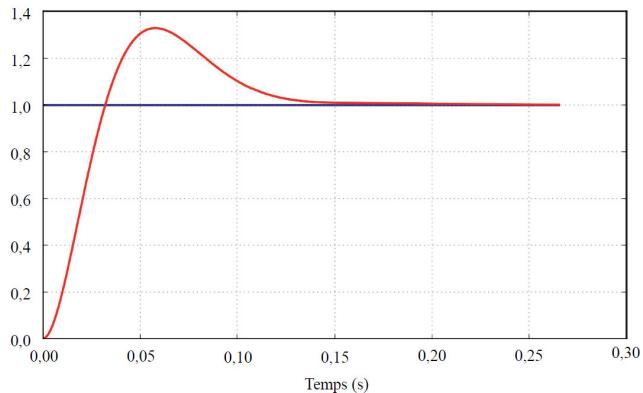
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Diagramme de Bode de la FTBO :



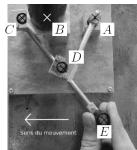
Réponse indicielle unitaire sur le déplacement /  $F_p = 0$ . Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



## Conception de la commande des SLCI

### Chapitre 1 – Correction des systèmes

## Colle 3



### Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

CCP – PSI 2015

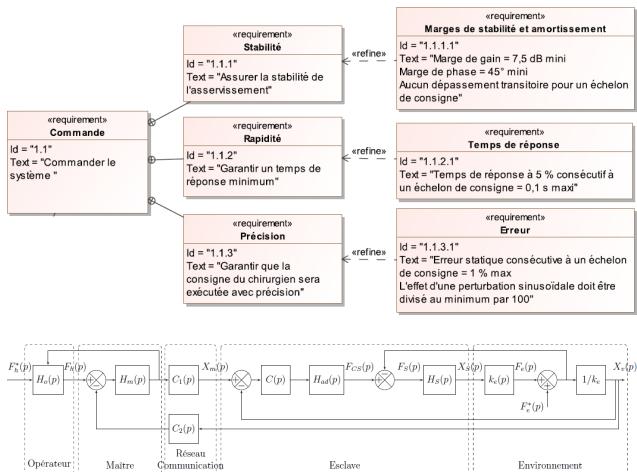
#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Présentation

#### Réalisation de la commande de l'esclave

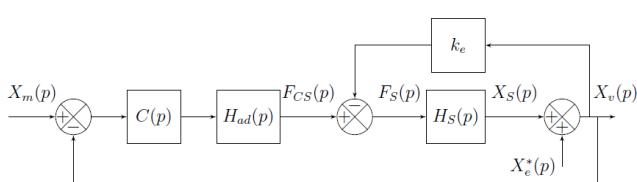
**Objectif** Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).



#### Modélisation et étude des performances du système sans correction

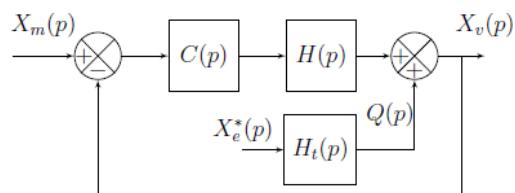
**Objectif** Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_s}{p(m_s + b_s)}$  avec  $k_s = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_s = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_s = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_S(p)$ .

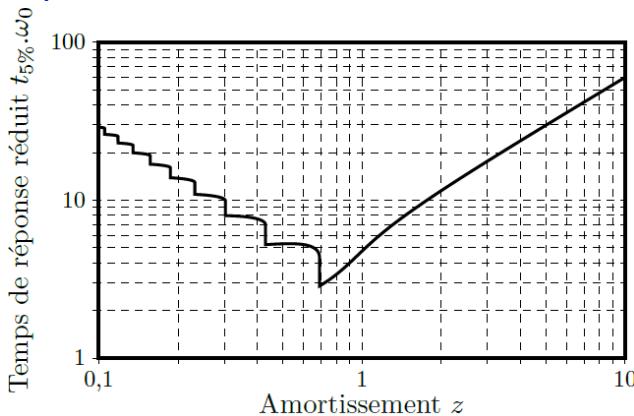


Pour la suite du problème, on prendra :  $H(p) = \frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e}$ .

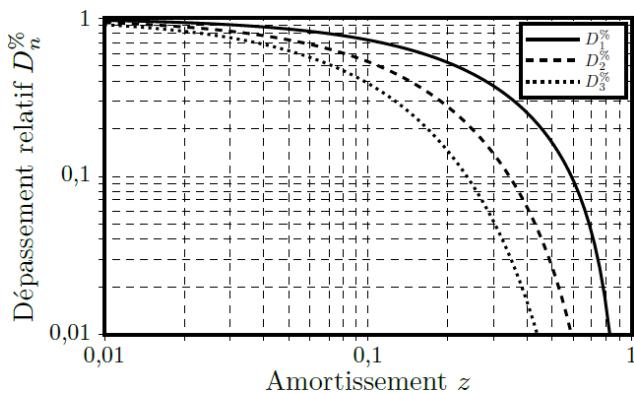
**Vérification des exigences sans correction :**  
 $C(p) = 1$

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  
 $F_{BFI}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amortissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassesments relatifs

**Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale :**  $C(p) = \frac{K_i}{p}$

**Objectif** Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

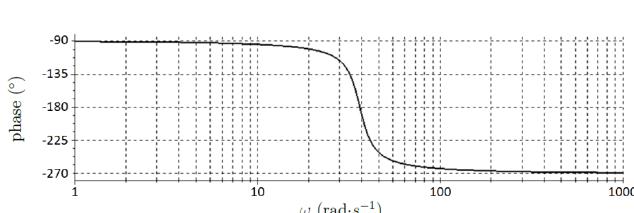
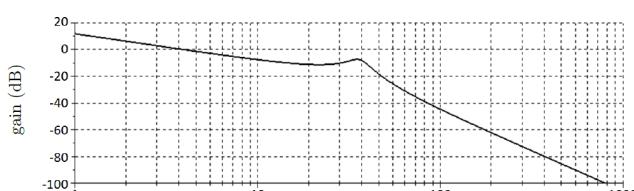
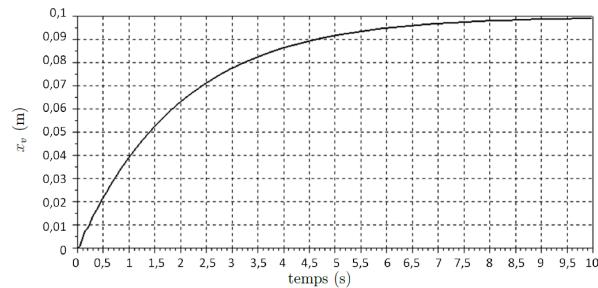


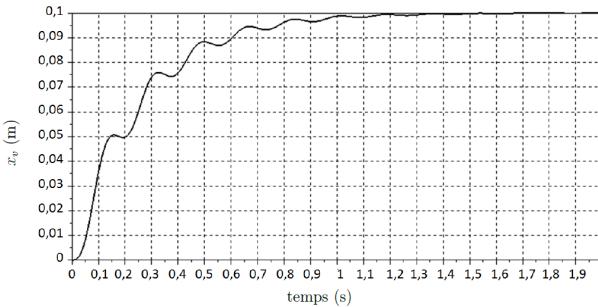
Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $K_i = 100$



Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et  $K_i = 100$

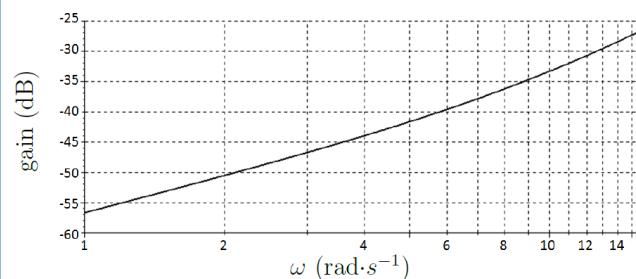
**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{imax}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

**Question 7** En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».



Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm avec le réglage  $K_{imax}$

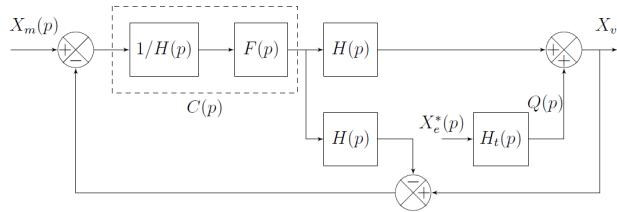
**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$  pour  $K_i = K_{imax}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{BF2}(j\omega)|_{min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».



**Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC**

**Objectif** Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.



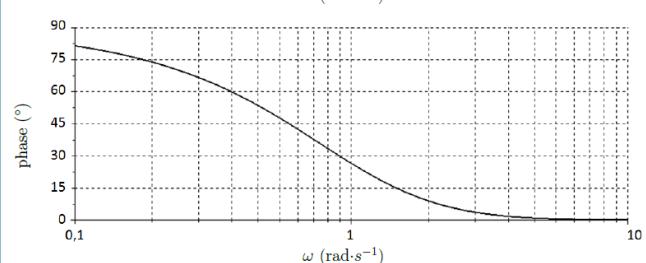
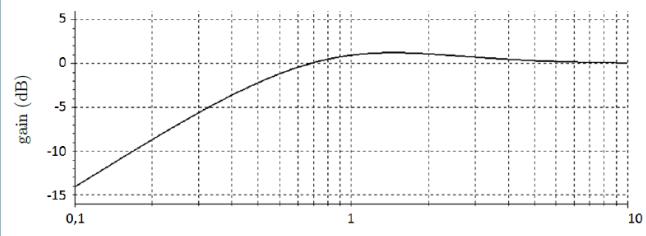
Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$

pour  $T = 1\text{s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}; 12,5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



## Colle 4



### Avance de Phase – Train d'atterrissement d'hélicoptère

Banque PT – SIA 2014

#### Savoirs et compétences :

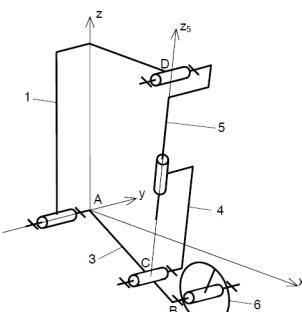
- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Mise en situation

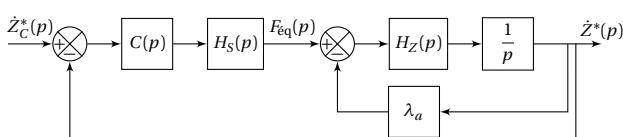
Lors d'atterrissages d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de  $2 \text{ m s}^{-1}$  mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée  $\dot{Z}^*(p)$ . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne  $\dot{Z}_c^*(p)$ . On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{Z}^*(p)$  la transformée de  $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$  avec  $V_0$  la vitesse d'impact et  $\dot{z}(t)$  la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;

- $F_{\text{eq}}(p)$  l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- $\lambda_a$  le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$  la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra :  $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$  et  $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$  la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

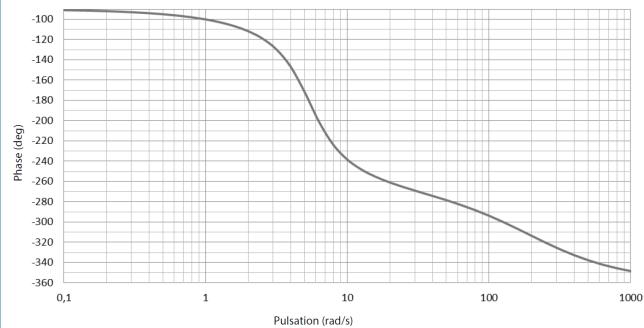
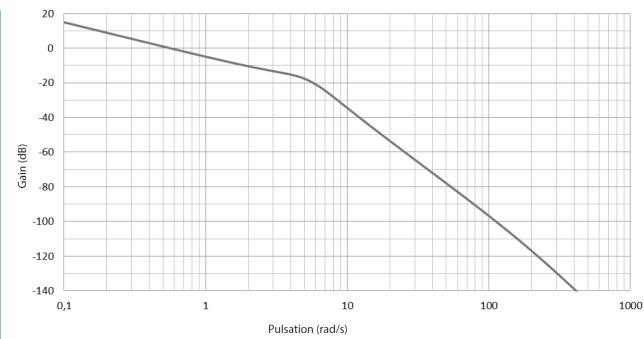
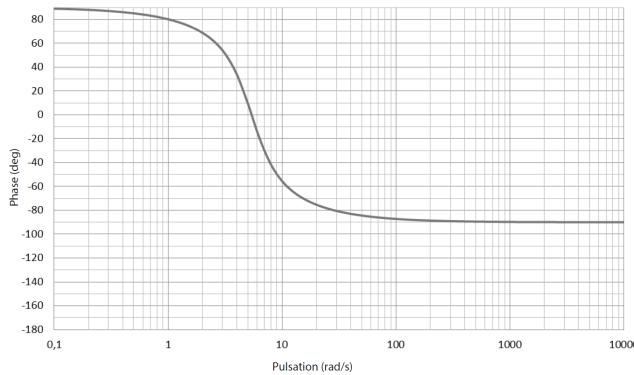
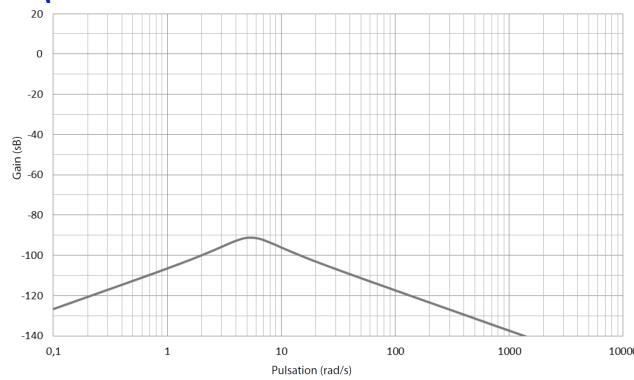
#### Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{\text{eq}}(p)}$ .

**Question 2** Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

On donne le diagramme de Bode de  $H_F(p)$ .



**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \simeq 100 \text{ dB}$ .

### Choix et réglage de la correction

**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

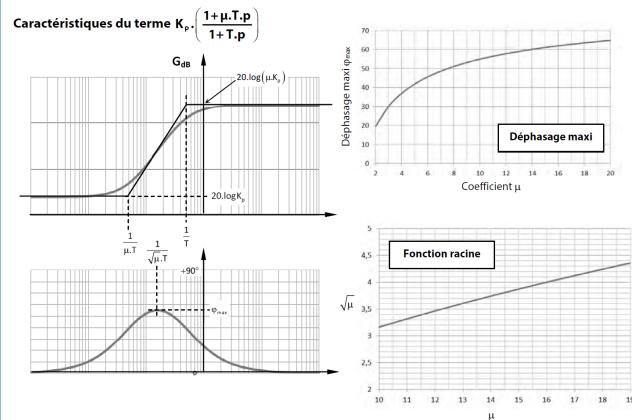
- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et  $\omega_{0\text{dB}} = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- marge de phase  $M\varphi = 45^\circ$ ;
- marge de gain  $MG > 6 \text{ dB}$ .

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$ . On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour  $K_p = 1$ .

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  avec  $\mu > 1$ . Les caractéristiques du terme en  $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

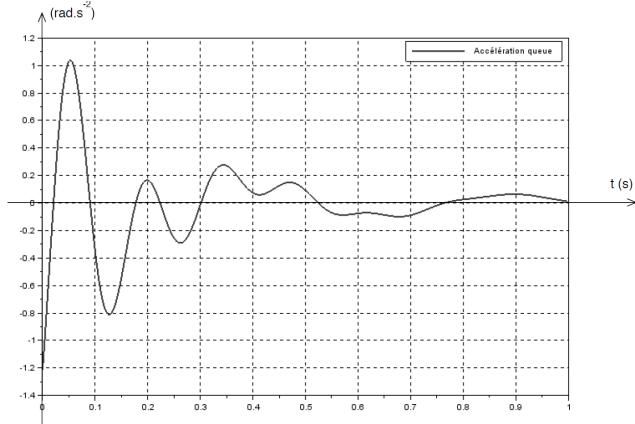
**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

## Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



## Colle 5



### Quille pendulaire

Concours Commun Mines Ponts 2014

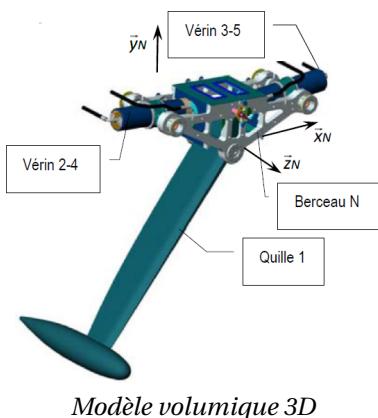
#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe ( $O, \vec{z}'_N$ ) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

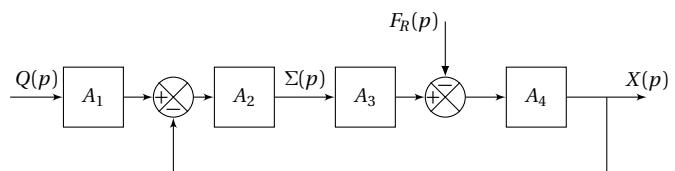
**Objectif** L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

#### Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le

déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo-valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$  (a);
- $M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$  (b).

On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

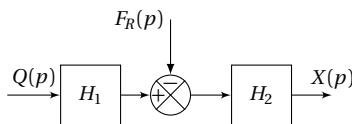
Les constantes sont les suivantes :

- $S$  : section du vérin [ $m^2$ ];
- $k$  : raideur mécanique du vérin [ $N m^{-1}$ ];
- $V$  : volume d'huile de référence [ $m^3$ ];
- $B$  : coefficient de compressibilité de l'huile [ $N m^{-2}$ ];
- $M$  : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];

- $\lambda$  : coefficient de frottement visqueux [ $N m^{-1}s$ ].

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

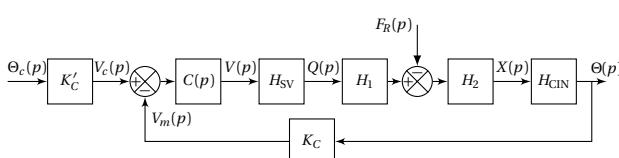
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^{\circ}$ ];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^{\circ}$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

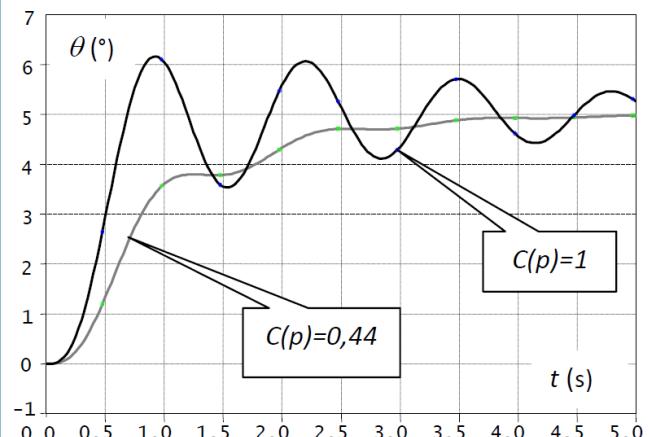
- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^{\circ}$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1 V/^{\circ}$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  $H_{CIN} = K_\theta [^{\circ}.m^{-1}]$ ;
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.

### Comportement pour une commande de faible amplitude

On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^{\circ}$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1+0,12p+0,04p^2)}$ .

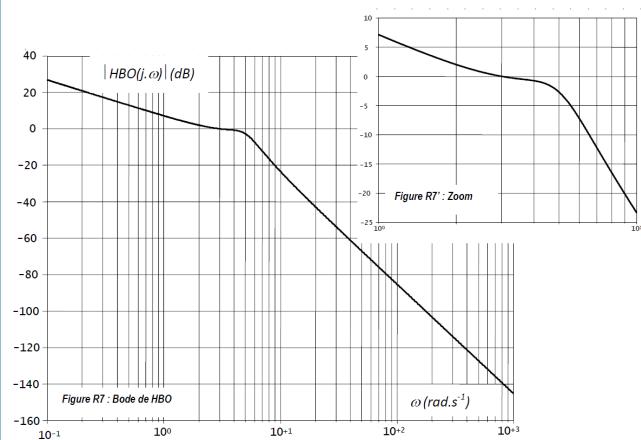
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^{\circ}$ d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).



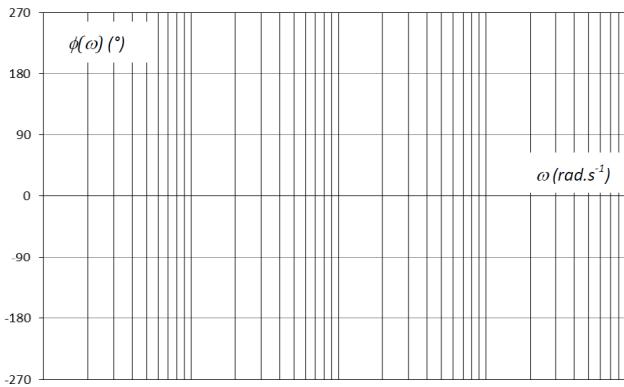
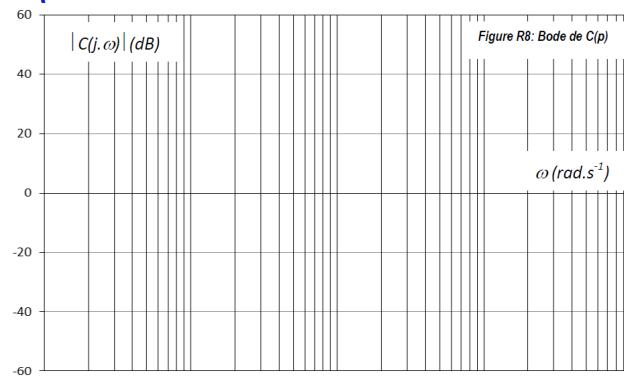
À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation généreraient dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 4** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



**Question 5** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 6** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.



Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ . Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :  $\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$  et  $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ .

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 7** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 8** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 9** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

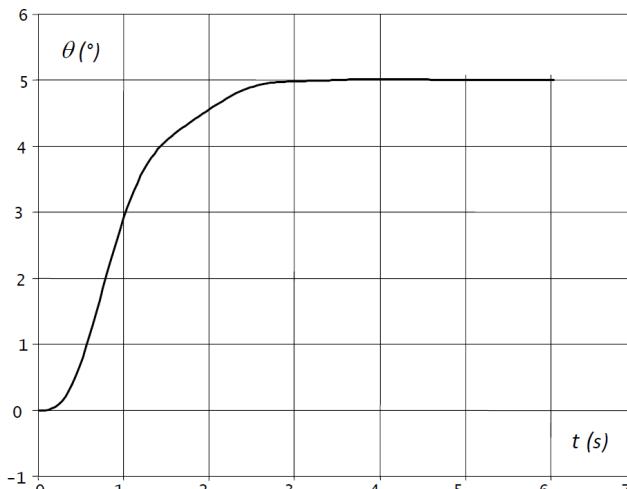
- calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

### Validation du cahier des charges

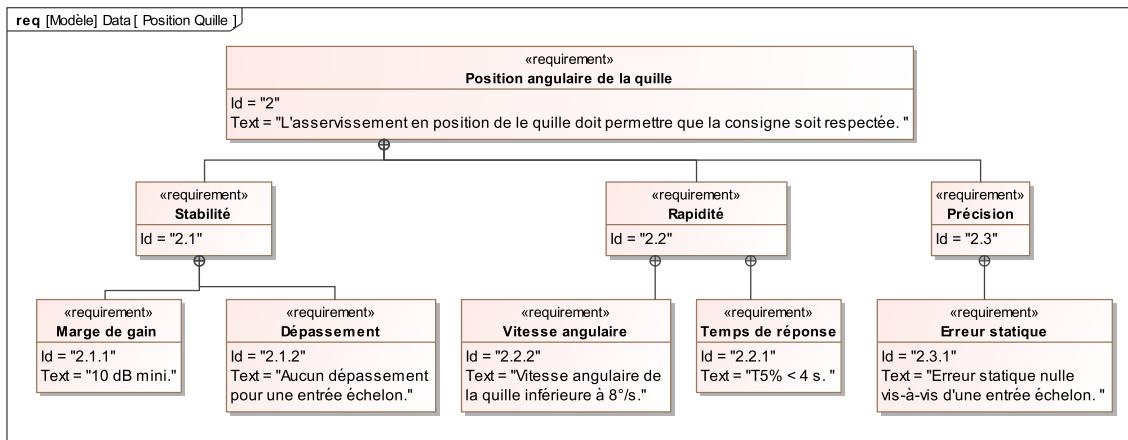
La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{COR}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

**Question 10** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

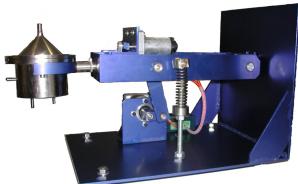
**Question 11** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



Domaine du client	Domaine de la modélisation		
<b>«requirement»</b> <b>Vitesse angulaire</b> Id = "2.2.2" Text = "Vitesse angulaire de la quille inférieure à 8°/s."	<b>Modèle initial</b> <b>Hypothèse de linéarisation du modèle</b>	<b>Modèle linéaire</b> <b>Correcteur proportionnel</b> $C(p) =$ $\omega_{quille} =$ <b>Ecart = .....</b>	<b>Modèle linéaire</b> <b>Correcteur retard de phase</b> $C(p) =$ $\omega_{quille} =$ <b>Ecart = .....</b>
<b>«requirement»</b> <b>Temps de réponse</b> Id = "2.2.1" Text = "T5% < 4 s. "		$T_{5\%} =$ <b>Ecart = .....</b>	$T_{5\%} =$ <b>Ecart = .....</b>



## Colle 1 – Corrigé



### Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

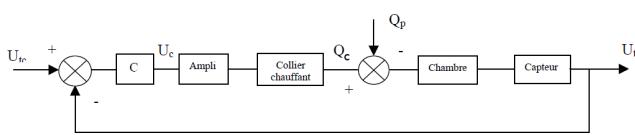
**Objectif** La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- temps de montée en température : 3 min maxi;
- précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- $U_{tc}$  : tension de consigne;
- $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$ .

#### Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

#### Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

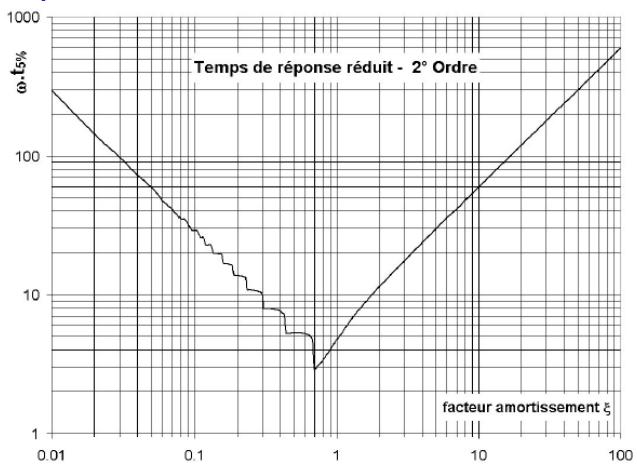
**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.



## O20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{re}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre  $\omega_n$  telle que :  $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement  $\xi$  tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \# 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$  **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

## O21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro)  $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{array} \right.$$

$\varepsilon_p = 0,66$  66 % **Incompatible** avec le cahier des charges.

## O22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition :  $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure  $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$  ;  $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6dB - 10 \cdot \log(1+25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \log(1+10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\arctan(5 \cdot \omega) - \arctan(100 \cdot \omega)$$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	-9	-27	-60
$\varphi$ ( $^\circ$ )	-48	-115	-169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante

### O23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain :  $M_G = \infty$

Marge de phase :  $M_\varphi = 180^\circ$

### O 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler  $K$  afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à  $2,3$  dB, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

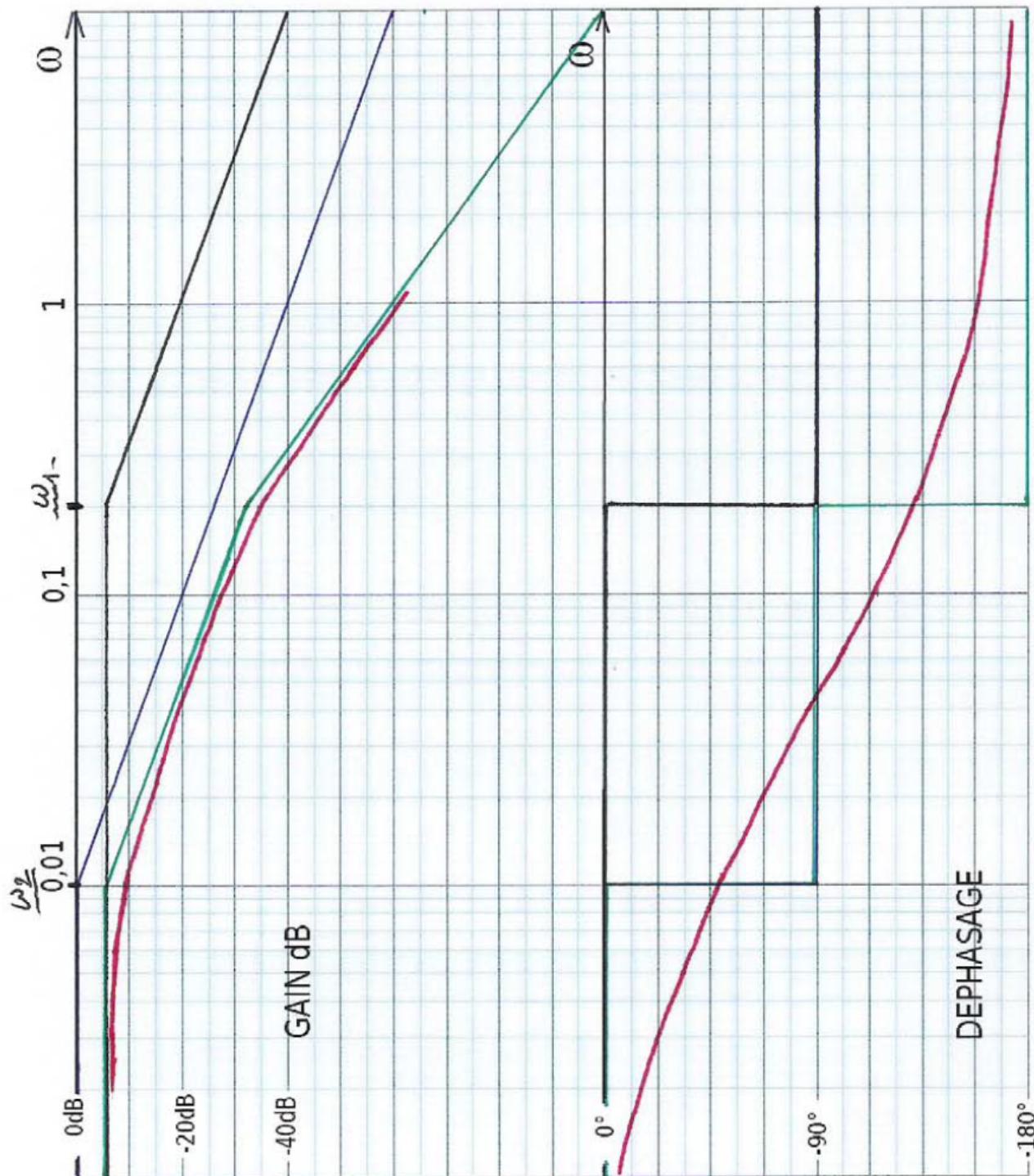
On règle  $K$  de telle sorte que  $\xi \geq 1$ ; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

Question 22 : Tracé de Bode



Pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot K}{500}}$

Facteur d'amortissement, il est tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1+0,5 \cdot K}$ ,

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1+0,5 \cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** :  $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$

On choisit **K=9** alors  **$\xi \approx 1$**  la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de 20 Log 9, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

### O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>bo2</sub>)

La marge de gain est inchangée :  **$M_G = \infty$**

On relève :  **$M_\phi = 90^\circ$**

**La stabilité est assurée.**

Pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow t_{5\%} = 50 \text{ s}$  **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

Fonction de transfert de classe 0 (zéro)  $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1+G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

**$\varepsilon_p = 0,55 \quad 55\%$**  **Incompatible** avec le cahier des charges.

### O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U<sub>tc</sub> est de 5 V

A 17° C correspond  $U_c = 0 \text{ V}$ , donc  $U_t = 0 \text{ V}$ .

Si  $U_{tc} = 5 \text{ V} \Rightarrow U_c = 45 \text{ V}$ . ( $U_c = K \cdot \varepsilon$ )

Alors  **$U_a = 450 \text{ V}$**  Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

## O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait par **compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps  $T_i$  du correcteur égale à la **constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain  $K$  du correcteur afin que la **réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit  $\xi = 1$ ). Le choix de  $T_i$  devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors :  $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors :  $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors :  $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors :  $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit  $\xi = 1$  la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors :  $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours :  $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$  puisque  $\xi = 1$

*Tableau des valeurs de  $K$ ,  $\omega_n$ ,  $t_{5\%}$  en fonction du choix de  $T_i$*

$T_i$	$K$	$\omega_n$	$t_{5\%}$	Commentaires
5 s	$25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$ rd/s	1 000 s	A rejeter
<b>100 s</b>	10	0,1 rd/s	<b>50 s</b>	<b>A RETENIR</b>

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100\omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain :  $G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \text{Log}\omega - 10 \cdot \text{Log}(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument :  $\varphi = -90^\circ - \text{Arc tan}(5\omega)$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
$\varphi$ ( $^\circ$ )	- 93	- 117 $^\circ$	- 135	- 169

### Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O., le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations  $\varphi = -90^\circ$  et  $\varphi = -180^\circ$ .

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>bo3</sub>)

La marge de gain est inchangée :  $M_G = \infty$

On relève :  $M_\varphi \approx 77^\circ$

**La stabilité est assurée.**

### O 28 – Nouvel écart de position

Le système est de classe 1  $\Rightarrow \varepsilon_p = 0$

## Colle 2 – Corrigé



### Machine de rééducation SysReeduc

CCP PSI 2013

#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Mise en situation

##### Éléments de modélisation

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

#### Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$  et  $C_{M1}(p) = k_t I(p)$  donc  $K_2 = \frac{k_t}{R}$  ;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$  et donc  $K_7 = k_e$  ;
- $(M + m)r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$  et donc  $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M + m)r^2 \rho_1^2 p}$  ;
- $H_4(p)$  permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et  $H_4(p) = \frac{1}{p}$  ;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit  $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$  ;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement  $K_5 = \rho_1$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres) ;
- enfin,  $K_1$  convertit des mètres en incrément.  $X_c$  est la consigne que doit respectée  $X$ . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc  $\varepsilon = 0$  et  $X = X_c$  soit  $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$ . Au final,  $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système  $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$  et  $K_8$ .

#### Correction

On montre  $A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$  et  $D = \frac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}$ .

#### Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes A, B, D et  $K_c$ .

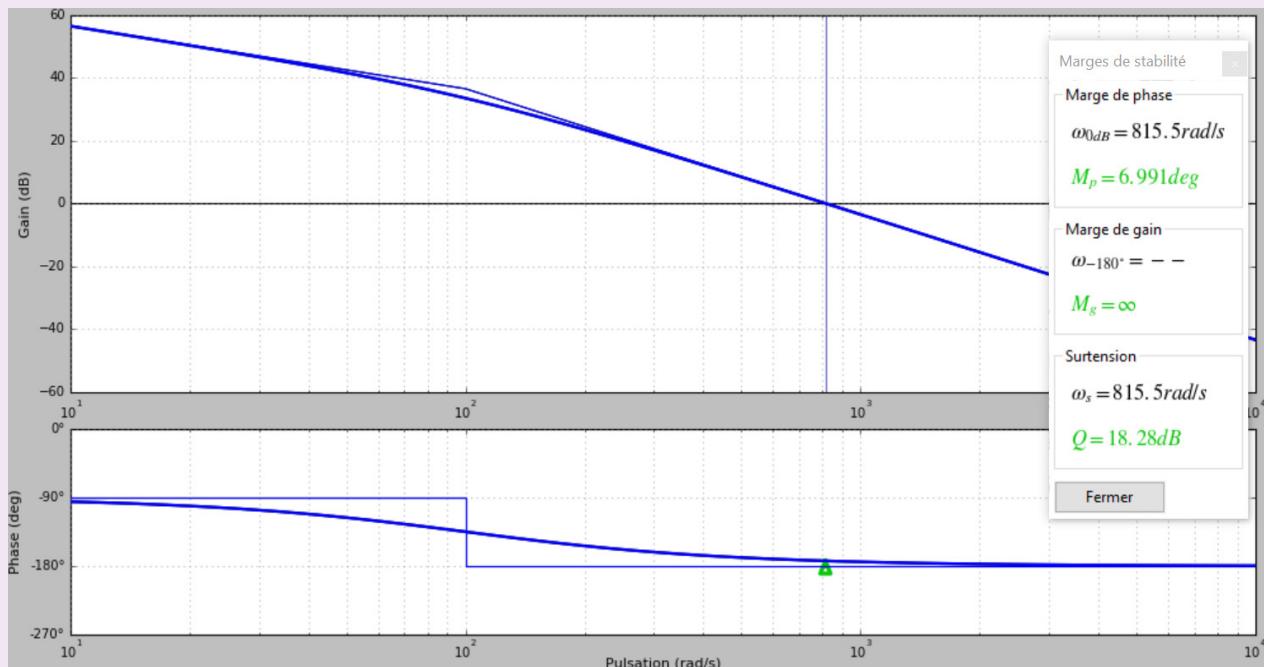
#### Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \varepsilon_x(p) &= X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left( (C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( 1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( \frac{p(Bp+1)+AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)+AC(p)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &= \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} F(p)
 \end{aligned}$$

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

#### Correction

$$\text{On a } \text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}.$$



La marge de phase n'est pas respectée.

**Question 5** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

#### Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} F_p \\
 &= \frac{D}{K_C} F_p
 \end{aligned}$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

#### Correction proportionnelle intégrale

$$\text{On suppose maintenant que } C(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_i$ .

**Correction**

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}F(p)$$

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p T_i p (Bp+1)}{p T_i p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} X_0 + \frac{AD T_i p}{T_i p p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système  $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Correction**

$$FTBO(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \left( 1 + \frac{1}{T_ip} \right) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Correction**

On souhaite que pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi(\omega) = -135^\circ$ .

$$\begin{aligned} \arg(FTBO(j\omega)) &= \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1+T_ip) \\ &= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega. \text{ En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \\ &\arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s}. \end{aligned}$$

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

**Correction**

On souhaite que  $|FTBO(j\omega)| = 1$  pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$|FTBO(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2\omega^2+1}} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2+1}}.$$

$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i\omega^2 \sqrt{B^2\omega^2+1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

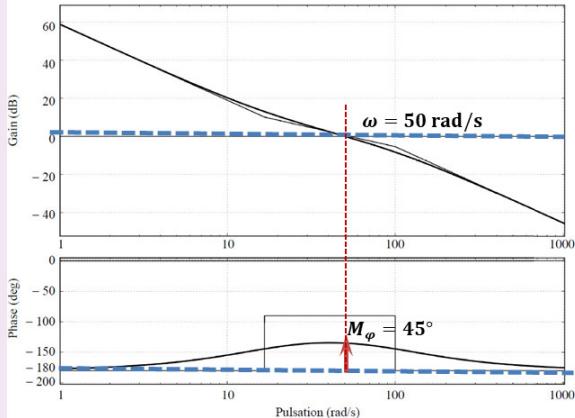
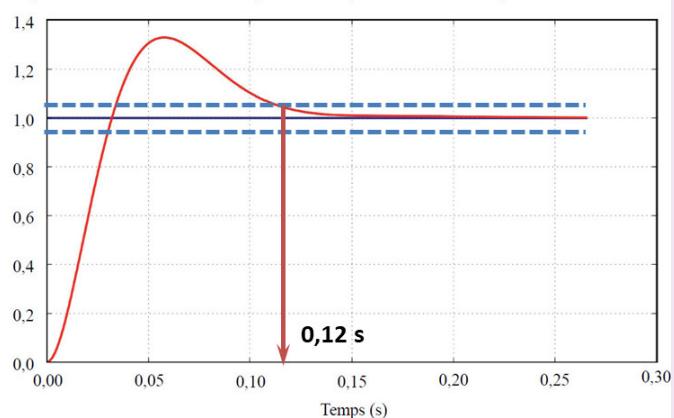
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

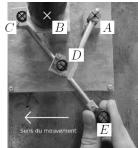
**Correction**

- Ecart de position : nul  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de gain : infine  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de phase :  $\simeq 45^\circ$   $\Rightarrow$  Exigence OK.

Diagramme de Bode de la FTBO :


 Réponse indicielle unitaire sur le déplacement /  $F_p = 0$ . Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.


## Colle 3 – Corrigé



### Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

CCP – PSI 2015

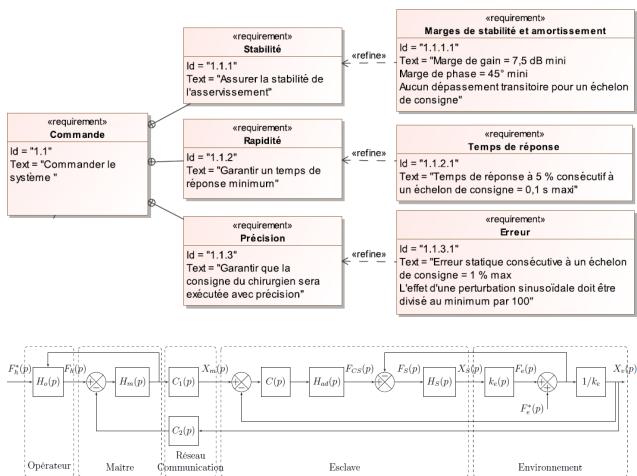
#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Présentation

#### Réalisation de la commande de l'esclave

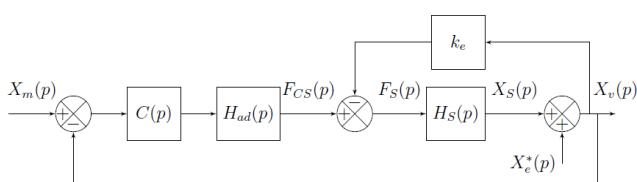
**Objectif** Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).



#### Modélisation et étude des performances du système sans correction

**Objectif** Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_s(p) = \frac{X_s(p)}{F_s(p)} = \frac{k_s}{p(m_s + b_s)}$  avec  $k_s = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_s = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_s = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_s(p)$ .

**Correction** (Il faudrait faire un schéma :) On commence par décaler le sommeteur de droite vers la gauche. Il faut donc ajouter un bloc  $\frac{1}{H_s(p)}$  dans la perturbation.

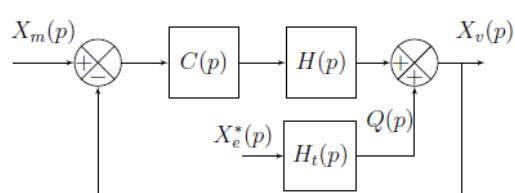
On a alors le bloc  $C(p)$ , le bloc  $H_{ad}(p)$ , le sommeteur et une FTBF :  $F(p) = \frac{H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$ .

On redécale le sommeteur vers la gauche.

On a donc  $H(p) = H_{ad}(p)F(p) = \frac{H_{ad}(p)H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$  et le bloc  $\frac{1}{H_s(p)H_{ad}(p)}$  dans la perturbation.

On redécale la perturbation vers la droite et  $H_t(p) = \frac{1}{H(p)} = \frac{1}{H_s(p)H_{ad}(p)} = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$ .

Conclusion :  $H(p) = \frac{H_{ad}(p)H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$  et  $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$ .



Pour la suite du problème, on prendra :  $H(p) = \frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e}$ .

**Vérification des exigences sans correction :**  $C(p) = 1$

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  $F_{BFI}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amor-

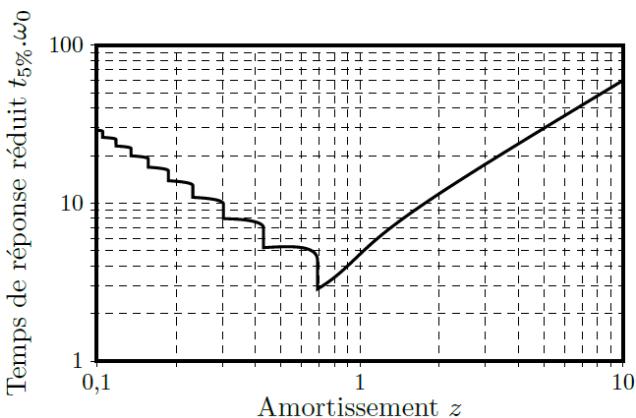
tissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

**Correction** On a  $F_{\text{BF1}}(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e} = \frac{1}{1 + \frac{m_S p^2 + b_S p + k_e}{m_S p^2 + b_S p + k_e + 1}} = \frac{1}{\frac{1 + k_e}{k_e + 1} + \frac{b_S}{k_e + 1} p + 1}$ .

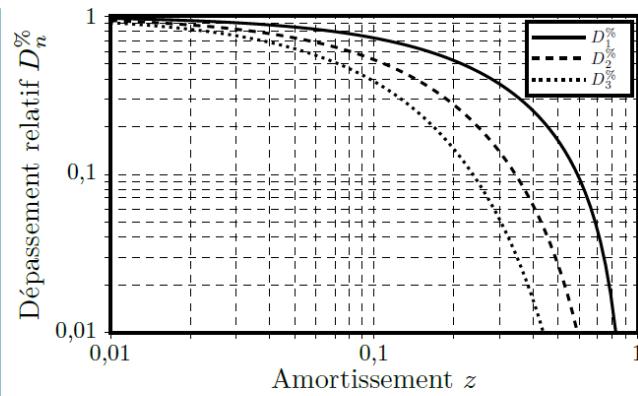
On a donc  $K = \frac{1}{1 + k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_e + 1}{m_S}}$  et  $2\xi/\omega_0 = \frac{b_S}{k_e + 1}$  soit  $\xi = \frac{1}{2} \frac{b_S}{k_e + 1} \sqrt{\frac{k_e + 1}{m_S}} = \frac{b_S}{2\sqrt{m_S(k_e + 1)}}$ .  
Application numériques :  $K = \frac{1}{1 + 200} = 0,005$ ,  $\xi = \frac{1,426}{2 \times \sqrt{0,152 \times (200 + 1)}} = 0,13$  et  $\omega_0 = 36,4 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

- Correction**
- Stabilité :
    - Amortissement : pas de dépassement : **Non respecté** :  $\xi < 1$ .
    - Marge de gain : 7,5 dB mini.
    - Marge de phase : 45°
  - Rapidité : temps de réponse à 5% : inférieur à 0,1 s :  $\xi = 0,1 \Rightarrow t_{5\%} = 30$  soit  $t_{5\%} = 30/36,4 = 0,8 \text{ s}$  **Non respecté**.
  - Précision : erreur statique inférieur à 1% : **Système de classe 0**,  $\varepsilon_s = \frac{1}{1 + K} = 0,995 \Rightarrow 0,1$ , **non respecté**.



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

**Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale** :  $C(p) = \frac{K_i}{p}$

**Objectif** Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

### Correction

**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

### Correction

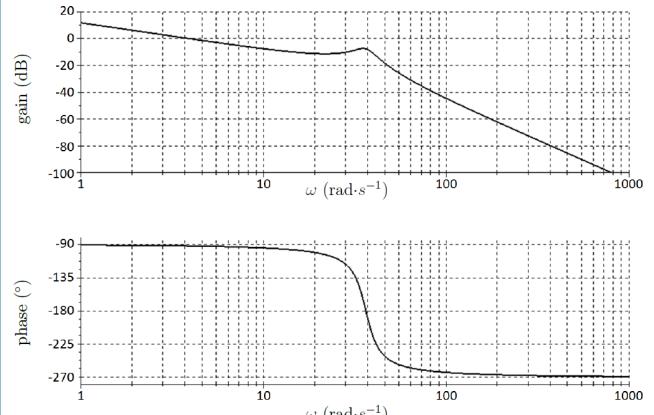
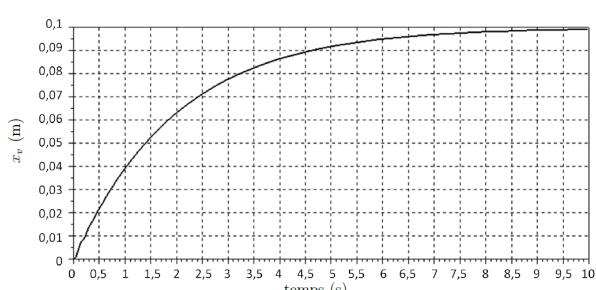


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $K_i = 100$



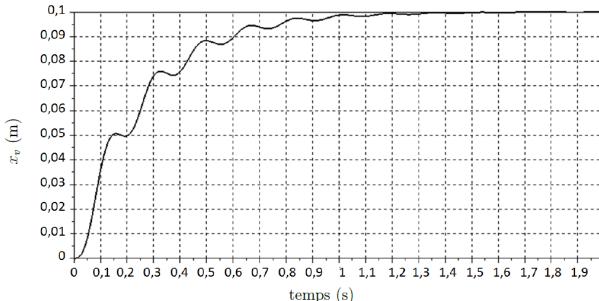
Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et  $K_i = 100$

**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{imax}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

### Correction

**Question 7** En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».

### Correction

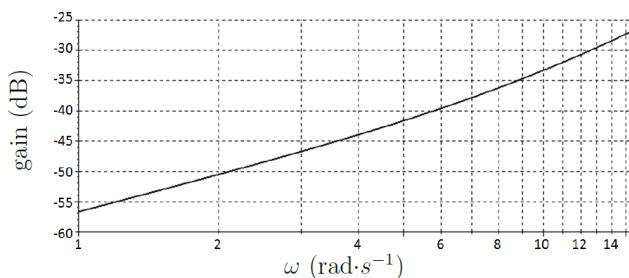


Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm avec le réglage  $K_{imax}$

**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$  pour  $K_i = K_{imax}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{BF2}(j\omega)|_{min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

**Correction** En  $1,25 \text{ rad s}^{-1}$  l'atténuation est de  $-55 \text{ dB}$ . On a  $20 \log K = -55$  soit  $K = 0,002$  (inférieur à 1%). En  $12,5 \text{ rad s}^{-1}$  l'atténuation est de  $-30 \text{ dB}$ . On a  $20 \log K = -30$  soit  $K = 0,03$  (supérieur à 1%).

Le critère d'atténuation n'est pas vérifié sur l'ensemble de l'intervalle.

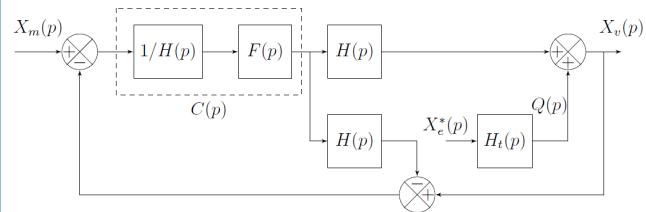


### Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

**Objectif** Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal

Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.



Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1 + Tp)^2}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1 + Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2 + Tp)}{(1 + Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

**Correction** En utilisant la formulation proposée, on a  $X_v(p) = A(p)X_m(p) = \frac{X_m(p)}{(1 + Tp)^2}$ .

Pour améliorer le temps de réponse du système, il faut diminuer  $T$ .

**Justification** On a  $G(p) = \frac{1}{1 + T^2 p^2 + 2Tp}$ . On a donc  $\frac{1}{\omega_0^2} = T^2$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 2T$ . On a donc  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  et  $\xi = 1$ .

Pour  $\xi = 1$ ,  $t_{5\%}\omega_0 = 5$ . Ainsi pour réduire le temps de réponse à 5% il faut augmenter  $\omega_0$  et donc diminuer  $T$ .

Pour un temps de réponse à 5% de 0,1 s, il faut  $\omega_0 = \frac{5}{0,1} = 50 \text{ rad s}^{-1}$  et  $T = 0,02 \text{ s}$  (valeur maximale).

**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$  pour  $T = 1 \text{ s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.

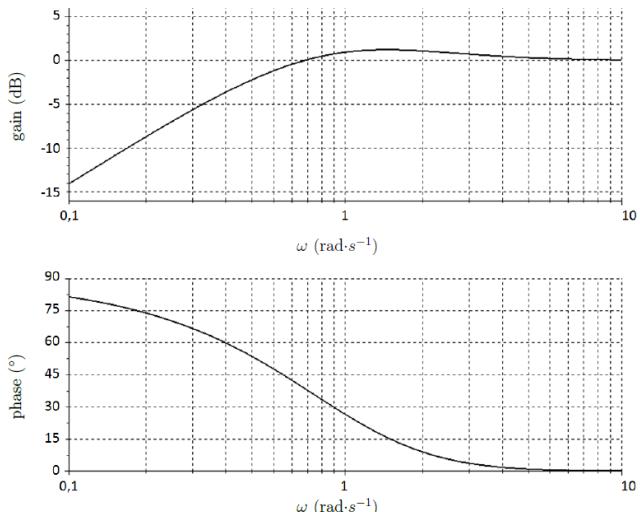
**Correction** On a  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

Pour minimiser l'effet de la perturbation, il faut que décaler la cassure vers la droite. D'après le cahier des charges, l'effet de la perturbation doit être divisé par 100. L'atténuation en dB doit donc être de  $20\log \frac{1}{100} = -40$  dB.

Il faut donc chercher  $T$  pour lequel le gain est de

$-40$  dB. En passant  $B(p)$  sous forme canonique et en se plaçant en basse fréquence, on a  $B(p) \approx 2Tp$ . On a donc  $B_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(2T\omega)$ .

On veut  $B_{\text{dB}}(12,5) = 20 \log(2T \times 12,5) < -40$  soit  $\log(2T \times 12,5) < -2 \Rightarrow 2T \times 12,5 < e^{-2} \Rightarrow T < e^{-2}/25$  et  $T < 0,005$  s.



## Colle 4 – Corrigé



### Avance de Phase – Train d'atterrissement d'hélicoptère

Banque PT – SIA 2014

#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

#### Mise en situation

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

#### Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

#### Correction

$$H_F(p) = \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{\frac{K_Z p^2}{p \left( 1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2} \right) + \lambda_a K_Z p^2}}{\frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}}.$$

**Question 2** Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

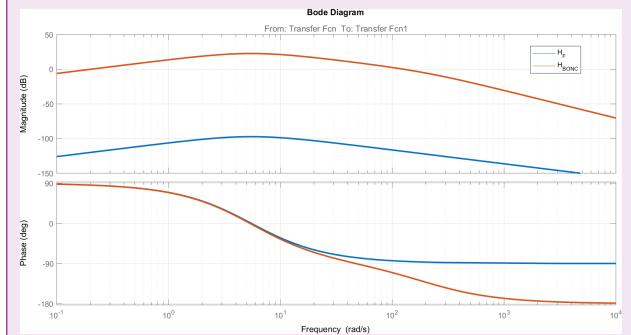
**Correction**  $H_{BONC}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}$ .

**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les dia-

grammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$ .

**Correction**  $H_F$  est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement  $\xi_F$  et de pulsation propre  $\omega_Z$ . Ne pouvant pas calculer  $\xi_F$ , l'allure du diagramme de Bode suggère que  $\xi_F < 1$  car il y a une seule rupture de pente à  $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour  $\omega < \omega_Z <$  l'asymptote du second ordre à un gain de 0 dB. Seul le déivateur est influent. En conséquence, pour  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a donc  $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20 \log K_Z = -106$ . On a donc  $K_Z = 5 \times 10^{-6}$ .



#### Choix et réglage de la correction

**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

**Correction** Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

**Correction** La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 85°.

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de  $6 \text{ rad s}^{-1}$ , il faut relever le gain de 20 dB soit  $K_p = 10$ . Dans ces conditions, la marge de phase est de  $-15^\circ$  et la marge de gain est  $-2 \text{ dB}$ .

En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Correction** L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

**Correction** Cas 1 : on conserve  $K_p = 10$ . Le correcteur doit ajouter  $60^\circ$  de phase pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc  $\mu = 14$ .

Cas 2 : on reprend  $K_p = 1$ . Dans ce cas, on souhaite que lorsque  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi$  soit égal à  $45^\circ$ . Il faut donc ajouter  $65^\circ$  de phase à cette pulsation. Dans ces conditions,  $\mu = 20$ .

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

**Correction** Dans le cas 1 :  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$ . Le gain  $K_p$  déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à  $\omega_{0\text{dB}}$ .

Il faut donc que  $\frac{1}{2}(20\log(\mu K'_p) + 20\log K'_p) = 0 \Rightarrow \log(\mu K'^2_p) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_p = 1 \Rightarrow K'_p = \sqrt{1/\mu} = 0,267$ .

Dans le cas 2 :  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$ .

Actuellement, le gain est de  $-20 \text{ dB}$  pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc augmenter le gain de 20 dB pour la pulsation  $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$ . Ceci revient donc à résoudre  $20\log K_p + \frac{1}{2}(20\log \mu K_p - 20\log K_p) = 20 \Rightarrow \log K_p + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_p \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_p = 10/\sqrt{20} = 2,6$ .

**Remarque :** dans le cas 1 le gain du correcteur est  $K_p \times K'_p = 2,6$ . Dans le cas 2  $K_p = 2,6$ .

## Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

**Correction** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ ms}^{-1}$  l'accélération reste bien inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

## Colle 5 – Corrigé



### Quille pendulaire

Concours Commun Mines Ponts 2014

#### Savoirs et compétences :

- C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

### Mise en situation

**Objectif** L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

### Modélisation du vérin

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

**Correction** D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ . En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ . Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ . On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ . Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .

**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

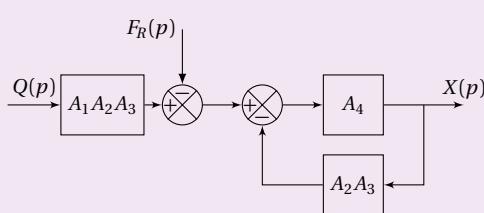
**Correction Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$ .

Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1A_2A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S^2 B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) = \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}.$$

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

**Correction** Dans ce cas,  $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}.$

### Comportement pour une commande de faible amplitude

**Question 4** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Correction** On a :  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1+0,12p+0,04p^2)}$ . En conséquences,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$  et  $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$ .

On a donc une asymptote de  $-20 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $-60 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$ .

De plus, pour  $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$ .

**Question 5** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Correction** On a  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 6** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

**Correction** L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) :  $\Delta K = 20 \log \left( \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{2 \times 0,3 \sqrt{1 - 0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB}$ .

**Question 7** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Correction** On a  $b > 1$  donc  $T < bT$  et  $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$ .

Pour  $\omega < \frac{1}{bT}$  on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour  $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente  $-20 \text{ dB/decade}$  et un déphasage de  $-180^\circ$ .

Pour  $\omega > \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente  $0 \text{ dB/decade}$  et un déphasage de  $0^\circ$ .

**Question 8** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Correction**  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1 + b}{1 + b} = -10 \log b.$

**Question 9** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

- calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

**Correction** D'une part, on veut que  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = -4,8$  soit  $10 \log b = 4,8$  et  $b = 3,02$ . D'autre part,  $\omega^* = \omega_r$  et  $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127 \text{ s}$ .

Par ailleurs, on a donc  $\phi(\omega^*) = \arcsin\left(\frac{1-b}{1+b}\right) = \arcsin\left(\frac{1-3,02}{1+3,02}\right) \simeq -28,79^\circ$ .

### Validation du cahier des charges

**Question 10** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Correction** En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a apporximativement  $2/0,5 \simeq 4^\circ/\text{s}$ .  
 $t_5\% \simeq 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s} \quad 4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .  
 CDCF validé.

**Question 11** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

