Application 4 – Corrigé

Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

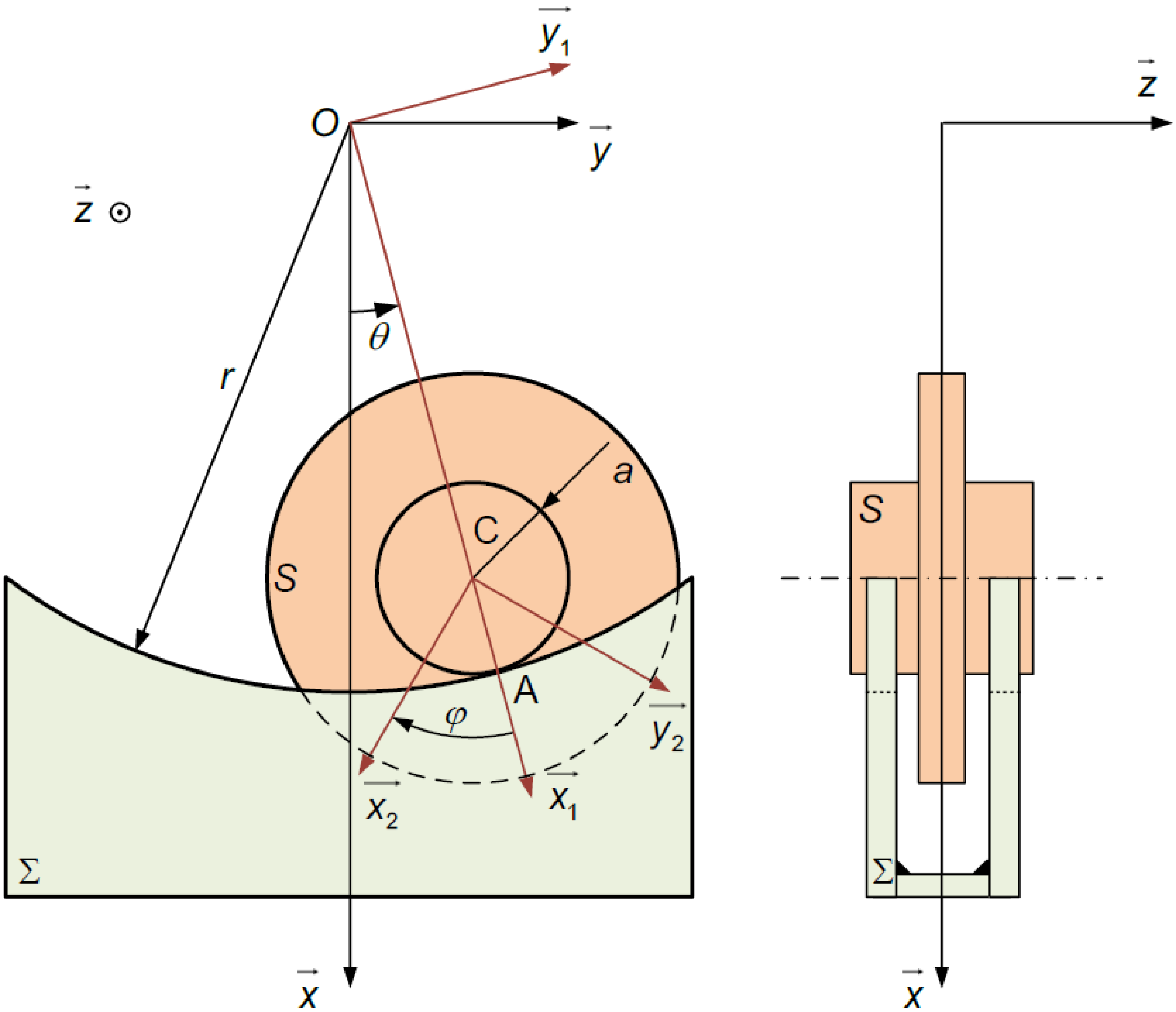
Sources multiples

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C34 : chaînes de solides;*
- *Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;*
- *Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;*

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ.



Soit $\left(O;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ un repère galiléen lié au bâti Σ. On désigne par $\overrightarrow{g}=g\,\overrightarrow{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$, de rayon r . Le solide S de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a ($a<r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon S, de centre C, roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ;
- soit $\mathscr{R}_1\left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z}\right)$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_1}\right)$. $\theta=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- soit $\mathscr{R}_2\left(C;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z}\right)$ un repère lié à S. On pose $\varphi=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose $\varphi=0$ lorsque $\theta=0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie $\left(C,\overrightarrow{z}\right)$ et f le coefficient de frottement entre S et Σ.

On donne $a=12{,}3\,\text{mm}$; $r=141{,}1\,\text{mm}$; $g=9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m=7217\,\text{g}$; $f=0,15$.

Question 1 *Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.*

Question 2 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R. En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ.*

Question 3 *En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S.*

Question 4 *En déduire le moment d'inertie I de S, sachant que $T=5\,\text{s}$.*

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta=\theta_0\cos(\omega t)$ avec $\omega=\sqrt{\dfrac{mg}{(r-a)\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t=0$, tel que $\theta=\theta_0$ et $\dot{\theta}=0$.

Question 5 *Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ.*

Colle – Corrigé

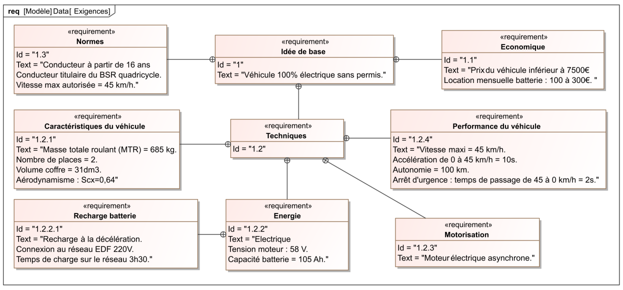
Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

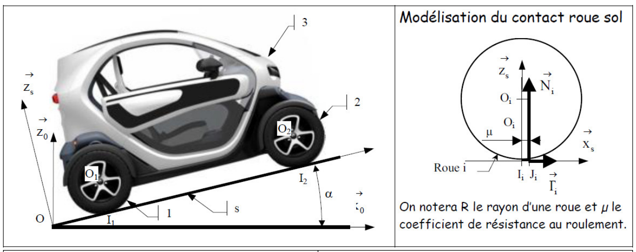
Mise en situation

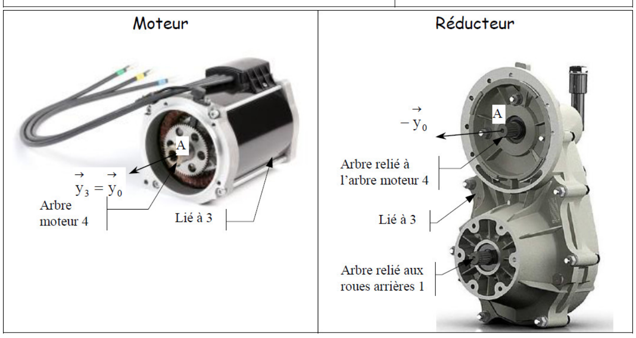


Choix du motoréducteur

Objectif Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.





Hypothèses générales :

- le vecteur $\overrightarrow{z_0}$ est vertical ascendant et on notera g l'accélération de la pesanteur;
- le repère $\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture $\left(O,\overrightarrow{z_s},\overrightarrow{x_s}\right)$;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en I_i;
- le coefficient de résistance au roulement μ est identique pour tous les contacts roue – sol : $\mu = 3\times 10^{-3}$ m. On pose $\overrightarrow{I_1J_1}=\mu\overrightarrow{x_s}$, avec $\mu>0$ si le déplacement du véhicule est suivant $+\overrightarrow{x_s}$;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

Actions mécaniques Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est : $\{\mathscr{T}(s\rightarrow i)\}=\left\{\begin{array}{c} T_i\overrightarrow{x_s}+N_i\overrightarrow{z_s}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{J_i}$ avec $J_i\in\left(O,\overrightarrow{x_s},\overrightarrow{y_s}\right)$ et $i=1$ (roues arrières) ou 2 (roues avants). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que $\{\mathscr{T}(3\rightarrow 4)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_m\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{-}$.

Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe $\left(A,\overrightarrow{y_0}\right)$: $J_m=6\times 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe $\left(O_i,\overrightarrow{y_0}\right)$: $J_R=0{,}1\,\text{kg}\,\text{m}^2$ (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge : $m=685\,\text{kg}$;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté G;
- les autres inerties seront négligées.

Grandeurs cinématiques : Soit ω_m la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3, ω_{13} la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et ω_{23} la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera r le rapport de transmission du réducteur tel que $\omega_m = r\omega_{13}$. On appellera $\overrightarrow{V(G,3/0)}=\overrightarrow{V}_{3/0}=v\overrightarrow{x_s}$ la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon $R=280\,\text{mm}$.

Choix de l'ensemble moto-réducteur

Équation de mouvement du véhicule

Objectif Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

Notations :

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide i sur le solide j dans le mouvement de i par rapport à 0 : $\mathscr{P}\left(i \rightarrow j/0\right)$;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide i et le solide j : $\mathscr{P}\left(i \longleftrightarrow j\right)$;
- énergie cinétique du solide i dans son mouvement par rapport à 0 : $\mathscr{E}_c\left(i/0\right)$.

Question 1 *Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :*

- *écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;*
- *déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;*
- *déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;*
- *déterminer explicitement les énergies cinétiques ;*
- *en déduire une équation faisant intervenir C_m, N_1, N_2, v, ω_m, $\omega_{1/0}$, $\omega_{2/0}$ ...... ;*
- *expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.*

Correction

Question 2 *À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer (N_1+N_2). Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.*

Correction

Question 3 *Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre (v,ω_{10}), (v,ω_{20}) et (ω_m,ω_{10}). Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme $\dfrac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq}\dfrac{dv(t)}{dt}$ avec $F_r(t)$ fonction de m, μ, g, R et α et M_{eq} fonction m, J_m, J_R, R et r.*

Correction

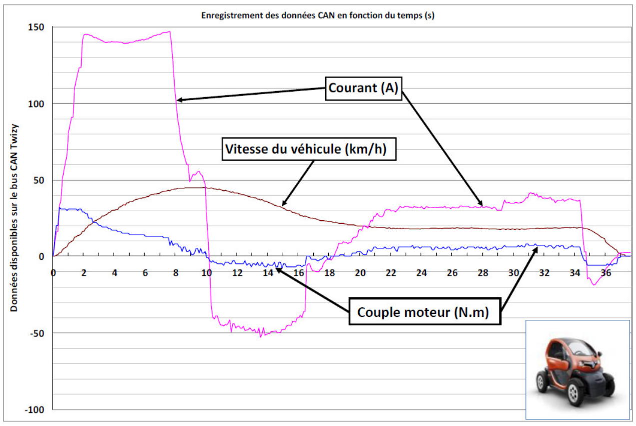
Détermination du coefficient de résistance au roulement μ

Objectif Déterminer le coefficient de résistance au roulement μ suite à une expérimentation.

Question 4 *En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement μ. Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :*

- *justifier dans quelle phase se placer ;*
- *définir la variable mesurée ;*
- *définir les hypothèses nécessaires ;*
- *énoncer les équations utilisées pour déterminer μ.*

Correction



Choix du moto-réducteur

Objectif Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale $\dfrac{dv(t)}{dt}$ du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission r issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

Question 5 *Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission r_{mini} pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.*

Correction

Question 6 *Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission r_{max} qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.*

Correction

Question 7 *À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.*

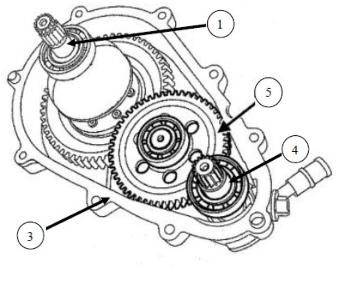
Correction

Correction

Validation du choix constructeur du moto-réducteur

Objectif Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

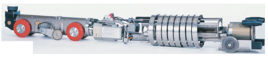
Question 8 *À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission* $r = \dfrac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$ *et conclure.*



vue 3D (sans le 1/2 carter supérieur) du réducteur

Z_4 = 17 dents
Z_{5a} = 57 dents
Z_{5b} = 17 dents
Z_1 = 68 dents

TD 4 – Corrigé



Robot de dépose de fibres optiques

Mines Ponts – PSI – 2004

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Présentation

Objectif En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14°$ et $\dot{\delta} \leq 50°.s^{-1}$.

Hypothèses

Repères et paramétrage

Cahier des charges

Modélisation dynamique

Question 1 *Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1+2+3+4\}$, puis la calculer.*

Correction Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.
$2\,E_c(\Sigma/R_0) = \{\mathscr{C}(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(1/0)\\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1} \otimes \left\{\begin{array}{c} m_1\,\overrightarrow{V}(G_1,1/0)\\ \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1} = m_1\left(\overrightarrow{V}(G_1,1/0)\right)^2 + \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)$.

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\delta}\,\overrightarrow{z_0}$.
- Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{V}(G_1,1/0) = \overrightarrow{V}(I,1/0) + \overrightarrow{G_1 I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -\left(R\,\overrightarrow{y_0} + \frac{L_1}{2}\,\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \dot{\delta}\,\overrightarrow{z_0} = -R\,\dot{\delta}\,\overrightarrow{x_0} + \frac{L_1}{2}\,\dot{\delta}\,\overrightarrow{y_1}$.
- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant $\overrightarrow{x_1}$. Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant $\overrightarrow{z_0}$ est $C_1 = \frac{m_1\,L_1^2}{12}$.
- Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0) = \overline{\overline{I}}_{G_1}(1)\cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \frac{m_1\,L_1^2}{12}\,\dot{\delta}\,\overrightarrow{z_0}$.
- On en déduit $E_c(1/0)$: $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R\,L_1\,\sin\delta\right) + \frac{m_1\,L_1^2}{12}\,\dot{\delta}^2$
$= \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\,L_1 \sin\delta\right)$.

Question 2 *Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ.*

Correction $\mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathscr{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$

- Actions de la pesanteur :
$\mathscr{P}(\text{pes} \rightarrow \Sigma/0) = \mathscr{P}(\text{pes} \rightarrow 1/0) = \{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1\,g\,\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_1} \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(1/0\\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1}$
$= -m_1\,g\,\overrightarrow{y_0}\cdot \overrightarrow{V}(G_1,1/0) = -m_1\,g\,\frac{L_1}{2}\,\dot{\delta}\,\cos\delta$.
- Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :
$\mathscr{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathscr{T}(0 \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathscr{V}(4/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{04}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(4/0)\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I = 0.$
- Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :

$\mathscr{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\} \otimes \{\mathscr{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{02}\,\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(2/0) \\ \overrightarrow{V}(E,2/0) \end{array} \right\}_E = R_{02}\,\overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(E,2/0) = 0.$

Question 3 *Donner la puissance intérieure à Σ.*

Correction

- Les liaisons sont supposées comme parfaites donc : $\mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Pivot}}{\longleftrightarrow} 2\right) = \mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Pivot Gl.}}{\longleftrightarrow} 3\right) = \mathscr{P}\left(3 \overset{\text{Pivot}}{\longleftrightarrow} 2\right) = 0.$
- Action du vérin entre 1 et 3 :
  $\mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\longleftrightarrow} 3\right) = \{\mathscr{T}(1\rightarrow 3)\} \otimes \{\mathscr{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}(N,3/1) \end{array} \right\}_N = F\,\overrightarrow{V}(N,3/1)\cdot\overrightarrow{x_1}.$
  En considérant que $\overrightarrow{MN}$ est porté par $\overrightarrow{x_1}$ (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :
  $\overrightarrow{V}(N,3/1)\cdot\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{V}(M,3/1)\cdot\overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{V}(M,3/2) + \overrightarrow{V}(M,2/1)\right)\cdot\overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(B,2/1) + \overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)}\right)\cdot\overrightarrow{x_1} = \left(-b\,\overrightarrow{x_2}\wedge\left(\dot\beta-\dot\delta\right)\overrightarrow{z_0}\right)\cdot\overrightarrow{x_1} = b\,\left(\dot\beta-\dot\delta\right)\cdot\overrightarrow{y_2}\cdot\overrightarrow{x_1} = -b\,\left(\dot\beta-\dot\delta\right)\sin(\beta-\delta).$
  On en déduit : $\mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\longleftrightarrow} 3\right) = -F\,b\,\left(\dot\beta-\dot\delta\right)\sin(\beta-\delta).$

Question 4 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F, δ, et β.*

Correction On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathscr{P}(\text{ext}\rightarrow\Sigma/0) + \mathscr{P}_{\text{int}}(\Sigma).$
Or, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\,m_1\,\dot\delta^2\left(R^2+\frac{L_1^2}{3}+R\,L_1\sin\delta\right)\right] = m_1\,\dot\delta\left[\ddot\delta\left(R^2+\frac{L_1^2}{3}+R\,L_1\sin\delta\right)+\frac{1}{2}\dot\delta^2\,R\,L_1\cos\delta\right].$
Ainsi on obtient, l'équation :

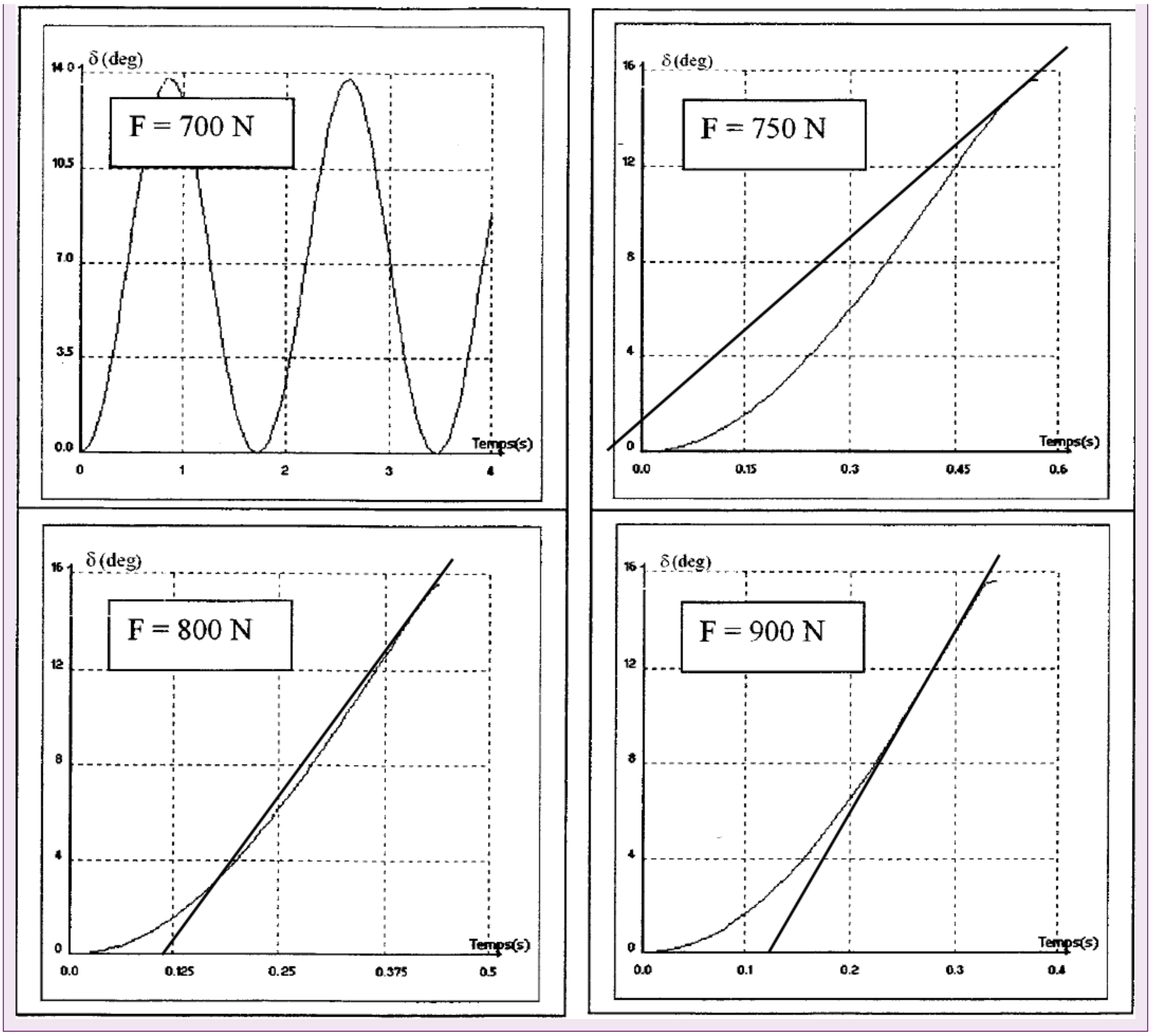
$$\boxed{m_1\,\dot\delta\left[\ddot\delta\left(R^2+\frac{L_1^2}{3}+R\,L_1\sin\delta\right)+\frac{1}{2}\dot\delta^2\,R\,L_1\cos\delta\right] = -F\,b\,\left(\dot\beta-\dot\delta\right)\sin(\beta-\delta) - m_1\,g\,\frac{L_1}{2}\dot\delta\,\cos\delta.}$$

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 *Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot\delta$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.*

Correction

- $F = 700\,\text{N}$: le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14°. Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement). Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- $F = 750\,\text{N}$: le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ 37.5°/s ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de 700 N étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de 750 N devienne insuffisant en réalité.
  Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- $F = 800\,\text{N}$: Le système atteint les 14° La pente à l'accostage vaut environ 45°/s ce qui est inférieur à la limite de 50°/s imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.
  Cette valeur est satisfaisante.
- $F = 950\,\text{N}$: Le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ 75°/s ce qui est supérieur à la limite de 50°/s imposée par le cahier des charges.
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.


F = 700 N
δ (deg)
14.0
10.5
7.0
3.5
0.0
Temps(s)
0
1
2
3
4
F = 750 N
δ (deg)
16
12
8
4
0
Temps(s)
0.0
0.15
0.3
0.45
0.6
F = 800 N
δ (deg)
16
12
8
4
0
Temps(s)
0.0
0.125
0.25
0.375
0.5
F = 900 N
δ (deg)
16
12
8
4
0
Temps(s)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4

Activation 2 – Corrigé

Télécabine à stabilité accrue : le funitel

Mines Ponts PSI – 2003

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Objectif On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de $0{,}15\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. On se place à l'instant ou la vitesse de $7{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

Question 1 *Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{c_T}, des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c, M_p, μ, L, V, D_P et I_M.*

Correction

- Énergie cinétique des 4 brins de câbles : $\mathscr{E}_c\,(\text{cables}/0) = \dfrac{1}{2} 4 L \mu V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines montantes : $\mathscr{E}_c\,(C_m/0) = \dfrac{1}{2} 8 \left(M_c + M_p\right) V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines descendantes : $\mathscr{E}_c\,(C_d/0) = \dfrac{1}{2} 8 M_c V^2$.
- Énergie cinétique de la motorisation : $\mathscr{E}_c\,(\text{M}/0) = \dfrac{1}{2} I_M \omega_M^2$.

On a par ailleurs $V = \omega_M \cdot \dfrac{D_p}{2}$.

On a donc $\mathscr{E}_c\,(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}\left(4L\mu + 16 M_c + 8 M_p + I_M \dfrac{4}{D_p^2}\right) V^2$.

On a donc $M_{\text{eq}} = 4L\mu + 16 M_c + 8 M_p + I_M \dfrac{4}{D_p^2} = 4 \times 1669 \times 8{,}47 + 16 \times 2500 + 8 \times 2080 + 575 \times 10^3 \dfrac{4}{16} = 256\,936\,\mathrm{kg}$ et $\mathscr{E}_c\,(\Sigma/0) = 6{,}7\,\mathrm{MJ}$.

Question 2 *Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p, des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p, V, h, g et L.*

Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$\mathscr{P}\,(\text{pes} \rightarrow C_m/0) = \{\mathscr{T}\,(\text{pes} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathscr{V}\,(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -\left(M_c + M_p\right) g \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V \overrightarrow{i} \end{array} \right\}_{G_c}$
$= -8\left(M_c + M_p\right) g V \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{i} = -8\left(M_c + M_p\right) g V \sin\alpha$.

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$\mathscr{P}\,(\text{pes} \rightarrow C_d/0) = \{\mathscr{T}\,(\text{pes} \rightarrow C_d)\} \otimes \{\mathscr{V}\,(C_d/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -M_c g \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -V \overrightarrow{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8 M_c g V \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{i}$

$= 8 M_c g V \sin\alpha$.

Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.

Ainsi, $\mathscr{P}(\text{pes} \to C_d + C_m/0) = 8M_c g V \sin\alpha - 8\left(M_c + M_p\right) g V \sin\alpha = -8M_p g V \sin\alpha = -359\,289\,\text{W}$.

Question 3 *Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée P_v des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ, S_f, V, V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.*

Correction Le vent va dans le sens de la descente. En montée, $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_m/0)} = -V_e \overrightarrow{i} - V \overrightarrow{i}$.

En descente, $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_d/0)} = -V_e \overrightarrow{i} + V \overrightarrow{i}$.

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \dfrac{1}{2}\rho V_a^2 = \dfrac{1}{2}\rho(-V - V_e)^2$ $\mathscr{P}(\text{vent} \to C_m/0) = \{\mathscr{T}(\text{vent} \to C_m)\} \otimes \{\mathscr{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -pS_f \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V \overrightarrow{i} \end{array} \right\}_{G_c} = -8S_f V \dfrac{1}{2}\rho(V + V_e)^2 \cos\alpha$.

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \dfrac{1}{2}\rho V_a^2 = \dfrac{1}{2}\rho(V - V_e)^2$ $\mathscr{P}(\text{vent} \to C_m/0) = \{\mathscr{T}(\text{vent} \to C_m)\} \otimes \{\mathscr{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -pS_f \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -V \overrightarrow{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8S_f V \dfrac{1}{2}\rho(V - V_e)^2 \cos\alpha$.

Au final, $\mathscr{P}(\text{vent} \to C_m + C_d/0) = 8S_f V \dfrac{1}{2}\rho\left((V - V_e)^2 - (V + V_e)^2\right)\cos\alpha = 8S_f V \dfrac{1}{2}\rho(-4V V_e)\cos\alpha$
$= -16 S_f \rho V^2 V_e \cos\alpha$. On a donc $\mathscr{P}(\text{vent} \to C_m + C_d/0) = -218\,677\,\text{W}$

Question 4 *En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entrainement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.*

Correction On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\Sigma/0)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\text{vent} \to C_m + C_d/0) + \mathscr{P}(\text{pes} \to C_m + C_d/0) + \mathscr{P}(\text{frottement} \to \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{moteur} \to \Sigma/0)$.

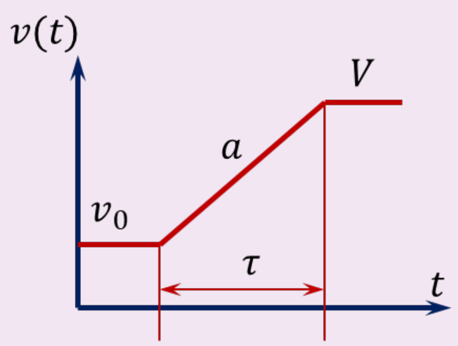
On a donc, en régime permanent : $0 = -229672 - 359289 - 400000 + P_T$ $P_T = 218677 + 359289 + 400000 = 977\,966\,\text{W} \simeq 1000\,\text{kW}$.

En tenant compte de l'accélération, on a $P_T = 1000\,\text{kW} + M_{\text{eq}} V \dot{V} = 1000\,\text{kW} + M_{\text{eq}} 7{,}2 \cdot 0{,}15 \simeq 1266\,\text{kW}$.

Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

Question 5 *Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a, v_0, t et V. Pour que l'accélération de $1{,}3\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ permette le lancement des cabines de $v_0 = 0{,}3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ à $V = 7{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, l'application numérique donne environ : $x = 20\,\text{m}$.*

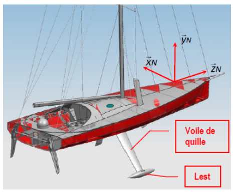
Correction



On a $v(t) = at + k$. Par ailleurs, $v(t_2) = V = at_2 + k$ et $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$. On a donc $V - v_0 = a\tau$ soit $\tau = \dfrac{V - v_0}{a} = \dfrac{6{,}9}{1{,}3} = 5{,}3\,\text{s}$.

La distance parcourue pendant la durée τ correspond à l'intégrale de la vitesse soir à l'aire sous la courbe. On a donc $x = \tau \cdot \dfrac{1}{2}(V + v_0) = 5{,}3 \times 0{,}5 \times 7{,}5 = 19{,}875\,\text{m}$.

TD 2 – Corrigé



Quille pendulaire ⋆

Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

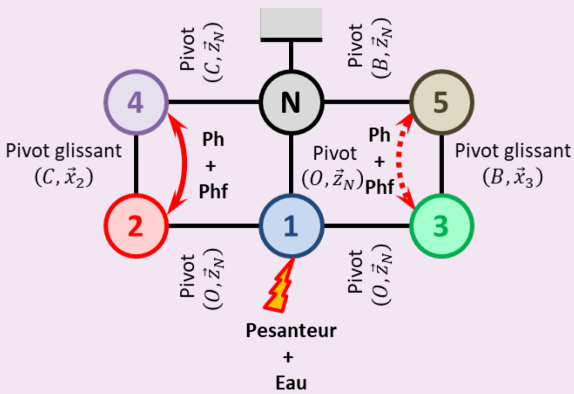
Mise en situation

Objectif L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Vecteurs vitesse

Question 1 *Tracer le graphe de liaisons.*

Correction



Question 2 *Exprimer les vitesses suivantes :*

1. $\overrightarrow{V(G_1,1/N)}$ *en fonction de* $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ *et des paramètres géométriques utiles ;*
2. $\overrightarrow{V(G_2,2/N)}$ *en fonction de* $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} *et des paramètres géométriques utiles ;*
3. $\overrightarrow{V(G_3,3/N)}$ *en fonction de* $\dfrac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} *et des paramètres géométriques utiles ;*
4. $\overrightarrow{V(A,2/4)}$ *en fonction de* $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Correction

1. $\overrightarrow{V(G_1,1/N)}=\overrightarrow{V(O,1/N)}+\overrightarrow{G_1O}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/N)}=L_1\overrightarrow{y_1}\wedge\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N}=L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}$.
2. $\overrightarrow{V(G_2,2/N)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(R\overrightarrow{y_1}-L_2\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=-R\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}-L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{y_2}$.

On a aussi $\overrightarrow{V(G_2,2/N)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}-L_2\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}$.

3. $\overrightarrow{V(G_3,3/N)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(R\overrightarrow{y_1}+L_2\overrightarrow{x_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=-R\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}+L_2\dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3}$.

On a aussi $\overrightarrow{V(G_3,3/N)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(-x_{35}(t)\overrightarrow{x_3}+L_2\overrightarrow{x_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N}=-\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3}+\dot{\theta}_3\left(-x_{35}(t)+L_2\right)\overrightarrow{y_3}$.

4. $\overrightarrow{V(A,2/4)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{CA}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_4}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_4}=\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}$.

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.
On note $\mathscr{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N.

Question 3 *Exprimer les énergies cinétiques suivantes :*

1. *$\mathscr{E}_c(1/N)$, en fonction de $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles;*
2. *$\mathscr{E}_c(2/N)$, en fonction de $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.*
3. *$\mathscr{E}_c(4/N)$, en fonction de $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.*

Correction

1. $\mathscr{E}_c(1/N)=\dfrac{1}{2}\{\mathscr{V}(1/N)\}\otimes\{\mathscr{C}(1/N)\}=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(1/N)}\\ \overrightarrow{V(G_1,1/N)}\end{array}\right\}_{G_1}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_1\overrightarrow{V(G_1,1/N)}\\ \overrightarrow{\sigma(G_1,1/N)}\end{array}\right\}_{G_1}=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N}\\ L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\end{array}\right\}_{G_1}\otimes$ $\left\{\begin{array}{c}M_1L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\\ \dot{\theta}_1\left(-D_1\overrightarrow{y_N}+C_1\overrightarrow{z_N}\right)\end{array}\right\}_{G_1}=\dfrac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2\left(-D_1\overrightarrow{y_N}+C_1\overrightarrow{z_N}\right)\overrightarrow{z_N}+M_1L_1^2\dot{\theta}_1^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2C_1+M_1L_1^2\dot{\theta}_1^2\right)=\dfrac{1}{2}\dot{\theta}_1^2\left(C_1+M_1L_1^2\right)$.
2. $\mathscr{E}_c(2/N)=\dfrac{1}{2}\{\mathscr{V}(2/N)\}\otimes\{\mathscr{C}(2/N)\}=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(2/N)}\\ \overrightarrow{V(G_2,2/N)}\end{array}\right\}_{G_2}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_2\overrightarrow{V(G_2,2/N)}\\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/N)}\end{array}\right\}_{G_2}$
$=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_N}\\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\end{array}\right\}_{G_2}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_2\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right)\\ \dot{\theta}_2B_2\overrightarrow{z_N}\end{array}\right\}_{G_1}$
$=\dfrac{1}{2}\left(B_2\dot{\theta}_2^2+M_2\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right)^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(B_2\dot{\theta}_2^2+M_2\left(\dot{x}_{24}(t)^2+\dot{\theta}_2^2\left(x_{24}(t)-L_2\right)^2\right)\right)$.
3. $\mathscr{E}_c(4/N)=\dfrac{1}{2}C_4\dot{\theta}_2^2$.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 *Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathscr{P}\left(i\longleftrightarrow j\right)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.*

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathscr{P}\left(4\overset{\text{Ph}}{\longleftrightarrow}2\right)=\{\mathscr{T}(4\rightarrow 2)\}\otimes\{\mathscr{V}(2/4)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(4\rightarrow 2)}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,4\rightarrow 2)}\end{array}\right\}_A\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(2/4)}\\ \overrightarrow{V(A,2/4)}\end{array}\right\}_A$
$=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(4\rightarrow 2)}\\ -\end{array}\right\}_A\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V(A,2/4)}\end{array}\right\}_A=\left\{\begin{array}{c}F_{h2}\overrightarrow{x_2}\\ -\end{array}\right\}_A\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}\end{array}\right\}_A=F_{h2}\dot{x}_{24}$;

- $\mathscr{P}\left(4 \overset{\text{Phf}}{\longleftrightarrow} 2\right) = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(4\rightarrow 2)}\\ -\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V(A,2/4)}\end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c}-k\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}\\ -\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}\end{array}\right\}_A = -k\dot{x}_{24}^2(t)$;
- $\mathscr{P}\left(3 \overset{\text{Ph}}{\longleftrightarrow} 5\right) = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(5\rightarrow 3)}\\ -\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V(A,3/5)}\end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c}F_h\overrightarrow{x_3}\\ -\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3}\end{array}\right\}_A = F_h\dot{x}_{35}(t)$;
- $\mathscr{P}\left(3 \overset{\text{Phf}}{\longleftrightarrow} 5\right) = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(5\rightarrow 3)}\\ -\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V(A,3/5)}\end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c}-k\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3}\\ -\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3}\end{array}\right\}_A = -k\dot{x}_{35}^2(t)$.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 *Recenser, puis exprimer les puissances galiliéennes non nulles (notées $\mathscr{P}\left(i\rightarrow j/k\right)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.*

Correction Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathscr{P}\left(\text{pes}\rightarrow 1/R_N\right) = \left\{\mathscr{T}\left(\text{pes}\rightarrow 1\right)\right\}\otimes\left\{\mathscr{V}\left(1/R_N\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}-M_1 g\overrightarrow{y_N}\\ 0\end{array}\right\}_{G_1} \otimes \left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N}\\ \overrightarrow{V(G_1,1/R_N)} = L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\end{array}\right\}_{G_1}$
  $= -M_1 g L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{y_N} = -M_1 g L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1$;
- $\mathscr{P}\left(\text{pes}\rightarrow 2/R_N\right) = \left\{\mathscr{T}\left(\text{pes}\rightarrow 2\right)\right\}\otimes\left\{\mathscr{V}\left(2/R_N\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}-M_2 g\overrightarrow{y_N}\\ 0\end{array}\right\}_{G_2} \otimes \left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N}\\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\end{array}\right\}_{G_1}$
  $= -M_2 g\overrightarrow{y_N}\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right) = -M_2 g\dot{x}_{24}(t)\sin\theta_2 - M_2 g\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\cos\theta_2$;
- $\mathscr{P}\left(\text{pes}\rightarrow 3/R_N\right) = -M_3 g\overrightarrow{y_N}\left(-\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3}+\dot{\theta}_3\left(-x_{35}(t)+L_2\right)\overrightarrow{y_3}\right)$
  $= -M_3 g\left(-\dot{x}_{35}(t)\sin\theta_3+\dot{\theta}_3\left(-x_{35}(t)+L_2\right)\cos\theta_3\right)$;
- $\mathscr{P}\left(\text{eau}\rightarrow 1/R_N\right) = \left\{\mathscr{T}\left(\text{eau}\rightarrow 1\right)\right\}\otimes\left\{\mathscr{V}\left(1/R_N\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}F_p\overrightarrow{z_1}+F_t\overrightarrow{x_1}\\ 0\end{array}\right\}_P \otimes \left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N}\\ h\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\end{array}\right\}_P$
  $= F_t h\dot{\theta}_1$;

Question 6 *Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).*

Correction On a : $\mathscr{P}\left(\bar{E}\rightarrow E/R_N\right)+\sum\mathscr{P}\left(i\longleftrightarrow j\right) = \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c\left(E/R_N\right)}{\mathrm{d}t}$

Question 7 *Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t=0\,\text{s}$, $t=1\,\text{s}$, $t=3\,\text{s}$ et $t=4\,\text{s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\,\text{s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.*

Correction D'après UPSTI. À 1 s, $2200+5800+2500+4000 = 14\,500\,\text{W}$ à 3 s $0+4000+2500+16000 = 22\,500\,\text{W}$ Maximum à environ 22,5 kW. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur $[5\,\text{s}; 8\,\text{s}]$).

Question 8 *Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de* 30 kW. *Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.*

Correction D'après UPSTI. La différence est de 7,5 kW. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...

TD 5 – Corrigé

RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain⋆

Concours Commun Mines Ponts 2009

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Question 1 *Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble Σ au point C_1 dans la base $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.*

Correction

Question 2 *En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$ en I_1 en projection sur $\overrightarrow{x_L}$, déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact $Z_{2d}+Z_{2g}$, entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir $\left(Z_{2d}+Z_{2g}\right)_{Repos} = (m_2+2m_r)g$ avec $m_2 = 52\,\text{kg}$ la masse du pode arrière **2**.*

Correction

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur C_m par une approche énergétique.

Question 3 *Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme $\dfrac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$ où J est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.*

Correction

Question 4 *Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme $C_m = k_2\left(J\ddot{\varphi}+k_1\left(T_{2d}+T_{2g}\right)\right)$ où k_1 et k_2 sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.*

Correction

Pour la question suivante, vous prendrez $J = 34\,\text{kg}\,\text{m}^2$, $k_1 = 0{,}65\,\text{m}$ et $k_2 = 1{,}3\times10^{-2}$ sans unité.

Question 5 *Calculer le couple moteur maximal : C_m maxi. À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.*

Correction

Exercice 1 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

En bloquant le porte satellite, on a : $\dfrac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$.

On a donc, $\dfrac{\omega_{40}+\omega_{03}}{\omega_{10}+\omega_{03}} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40}+\omega_{03} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\left(\omega_{10}+\omega_{03}\right) \Leftrightarrow \omega_{40} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\left(\omega_{10}+\omega_{03}\right) - \omega_{03}$ $\Leftrightarrow \omega_{40} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\left(\omega_{10}+\omega_{03}\right) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10} + \omega_{30}\left(1+\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$.

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

$$0 = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10} + \omega_{30}\left(1+\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10} = \omega_{30}\left(1+\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{1+\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4 + Z_1 Z_{22}}.$$

Exercice 2 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

En bloquant le porte satellite, on a : $\dfrac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$.
On a donc, $\dfrac{\omega_{40}+\omega_{03}}{\omega_{10}+\omega_{03}} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40}+\omega_{03} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\left(\omega_{10}+\omega_{03}\right) \Leftrightarrow \omega_{40} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\left(\omega_{10}-\omega_{30}\right)+\omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10}+\left(1-\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)\omega_{30}$.

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10}+\left(1-\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)\omega_{30} \Leftrightarrow \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10} = -\left(1-\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)\omega_{30} \Leftrightarrow \dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \dfrac{\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}-1} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22}-Z_{21} Z_4}$.

Exercice 3 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

En bloquant le porte satellite, on a : $\dfrac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$.

On a donc, $\dfrac{\omega_{40}+\omega_{03}}{\omega_{10}+\omega_{03}} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40}+\omega_{03} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\left(\omega_{10}+\omega_{03}\right) \Leftrightarrow \omega_{40} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\left(\omega_{10}-\omega_{30}\right)+\omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10}+\left(1-\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)\omega_{30}$.

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10}+\left(1-\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)\omega_{30} \Leftrightarrow \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\omega_{10} = -\left(1-\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)\omega_{30} \Leftrightarrow \dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \dfrac{\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}-1} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22}-Z_{21} Z_4}$.

Exercice 4 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer* $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

En bloquant le porte satellite, on a : $\dfrac{\omega_{03}}{\omega_{13}} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}$. On a donc, $\dfrac{\omega_{03}}{\omega_{10}+\omega_{03}} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}$
$\Leftrightarrow \dfrac{\omega_{30}}{\omega_{30}-\omega_{10}} = -\dfrac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \omega_{30} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}\omega_{30} + \dfrac{Z_1}{Z_0}\omega_{10}$
$\Leftrightarrow \omega_{30}\left(1+\dfrac{Z_1}{Z_0}\right) = \dfrac{Z_1}{Z_0}\omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} = \dfrac{Z_1}{Z_0+Z_1}\omega_{10}$.