DDS 2

Les ptits devoirs du soir

Xavier Pessoles

Exercice 169 – Fonctions de transfert★

B2-07

Question 1 *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.*

On a $\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)} = \dfrac{K^2}{Rf+RJp+Lfp+LJp^2} = \dfrac{K^2}{Rf\left(1+p\dfrac{RJ+Lf}{Rf}+\dfrac{LJ}{Rf}p^2\right)}$.

On a donc $K_{\mathrm{BO}} = \dfrac{K^2}{Rf}$, $\omega_{\mathrm{BO}} = \sqrt{\dfrac{Rf}{LJ}}$, $\dfrac{2\xi_{\mathrm{BO}}}{\omega_{\mathrm{BO}}} = \dfrac{RJ+Lf}{Rf} \Leftrightarrow \xi_{\mathrm{BO}} = \omega_{\mathrm{BO}}\dfrac{RJ+Lf}{2Rf} = \sqrt{\dfrac{Rf}{LJ}}\dfrac{RJ+Lf}{2Rf} = \dfrac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJRf}}$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.*

On a $\mathrm{FTBF}(p) = \dfrac{\dfrac{K}{(R+Lp)(f+Jp)}}{1+\dfrac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}} = \dfrac{K}{(R+Lp)(f+Jp)+K^2} = \dfrac{\dfrac{K}{K^2+Rf}}{\dfrac{RJ+Lf}{Rf+K^2}p+\dfrac{LJ}{Rf+K^2}p^2+1}$.

On a donc $K_{\mathrm{BF}} = \dfrac{K}{K^2+Rf}$, $\omega_{\mathrm{BF}} = \sqrt{\dfrac{Rf+K^2}{LJ}}$, $\dfrac{2\xi_{\mathrm{BF}}}{\omega_{\mathrm{BF}}} = \dfrac{RJ+Lf}{Rf+K^2} \Leftrightarrow \xi_{\mathrm{BO}} = \omega_{\mathrm{BF}}\dfrac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)} = \sqrt{\dfrac{Rf+K^2}{LJ}}\dfrac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)}$

$\xi_{\mathrm{BF}} = \dfrac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf+K^2}}$.

Question 3 *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramétres caractéristiques.*

Si on note $R(p)$ la seconde entrée du **premier comparateur** et $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur,

$\mathrm{FTBO(p)} = \dfrac{\varepsilon(p)}{R(p)} = A \times \dfrac{\dfrac{1}{p}}{1+\dfrac{B}{p}} \times C = \dfrac{AC}{B+p} = \dfrac{\dfrac{AC}{B}}{1+\dfrac{p}{B}}$. On a donc $K_{\mathrm{BO}} = \dfrac{AC}{B}$ et $\tau_{\mathrm{BO}} = \dfrac{1}{B}$.

Question 4 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramétres caractéristiques.*

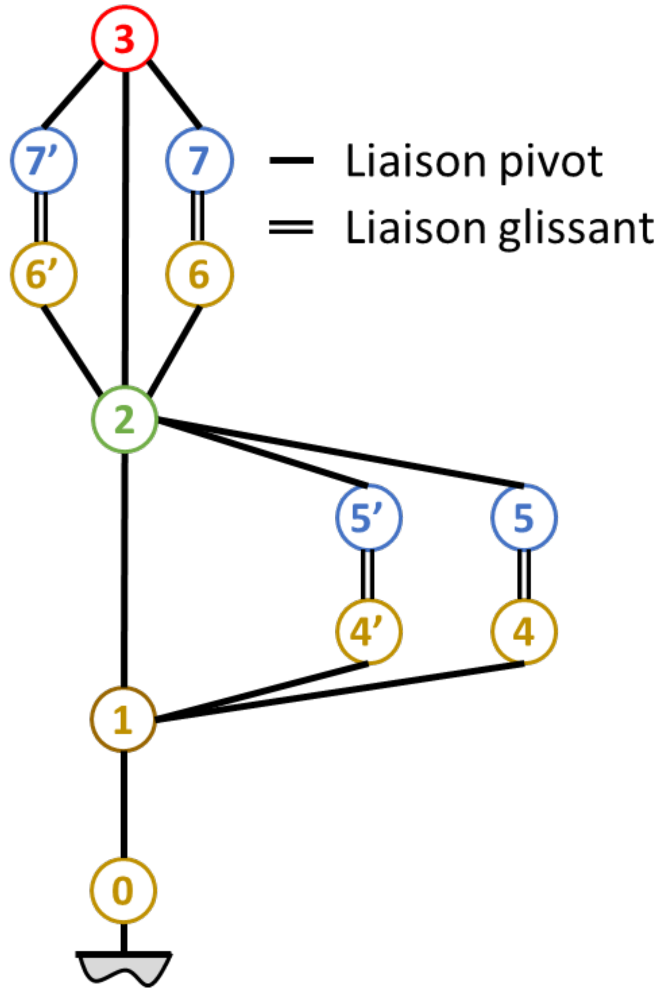
On a $\mathrm{FTBF(p)} = \dfrac{\dfrac{A}{B+p}}{1+\dfrac{AC}{B+p}} = \dfrac{A}{B+p+AC} = \dfrac{\dfrac{A}{B+AC}}{1+\dfrac{p}{B+AC}}$.

On a donc $K_{\mathrm{BF}} = \dfrac{A}{B+AC}$ et $\tau_{\mathrm{BF}} = \dfrac{1}{B+AC}$.

Exercice 168 – Système EPAS ★

B2-16

Question 1 *Réaliser le graphe des liaisons.*



Question 2 *Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.*

Détermination des mobilités :

- rotation de l'ensemble des pièces en rotation autour de $\overrightarrow{y}$ grâce à la pivot entre 0 et 1 ;
- rotation de la pivot entre 1 et 2 par mouvements opposés des pivots glissant 4–5 et 4'–5' ;
- rotation de la pivot entre 2 et 3 par mouvements simultanés des pivots glissant 6–7 et 6'–7'.

On a donc $m = 3$.

Méthode cinématique :

- nombre de cycles : 15 liaisons et 12 solides, $\gamma = L - S + 1 = 4$;
- nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6 \times 4 = 24$;
- nombre d'inconnues cinématiques : $I_c = 4 \times 2 + 11 \times 1 = 19$;
- hyperstaticité : $h = m - I_c + E_c = 3 - 19 + 24 = 8$.

Méthode statique :

- nombre d'équations statiques : $E_s = 6 \times 11 = 66$;
- nombre d'inconnues statiques : $I_s = 4 \times 4 + 11 \times 5 = 71$;
- hyperstaticité : $h = m - E_s + I_s = 3 - 66 + 71 = 8$.

Question 3 *Proposer des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.*

On va chercher à rendre le système isostatique tout en conservant une même architecture pour des branches en parallèles.

Dans le cycle 1–2–5–4–1 pris indépendamment du reste du mécanisme on a :

- $m = 1$;
- $I_c = 1 + 1 + 2 + 1 = 4$;
- $E_c = 6 \times 1$;
- $h_1 = m - I_c + E_c = 2 - 4 + 6 = 4$.

En remplaçant la pivot entre 1 et 4 par une linéaire annulaire, on ajoute 3 inconnues cinématiques et 1 mobilité. On a donc $h_1 = 2$. On peut faire le même changement pour les liaisons 4' – 5', 2 – 6, 2 – 6'.

On a donc :

- $m = 7$
- nombre de cycles : 15 liaisons et 12 solides, $\gamma = L - S + 1 = 4$;

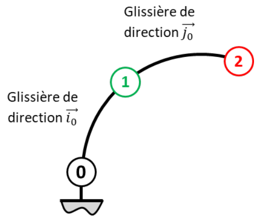
- nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6\times 4 = 24$;
- nombre d'inconnues cinématiques : $I_c = 4\times 2 + 7\times 1 + 4\times 4 = 31$;
- hyperstaticité : $h = m - I_c + E_c = 7 - 31 + 24 = 0$.

(Vérifier que les linéaires annulaires n'ajoutent pas des mobiltés supplémentaires...)

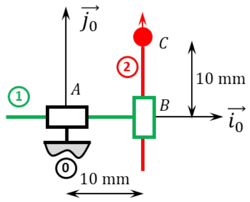
Exercice 167 – Mouvement TT – ⋆

B2-12

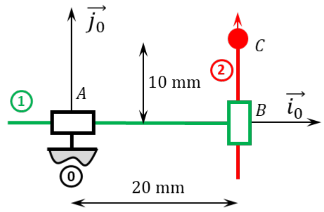
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 10\,\text{mm}$ et $\mu = 10\,\text{mm}$.*



Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 20\,\text{mm}$ et $\mu = 10\,\text{mm}$.*



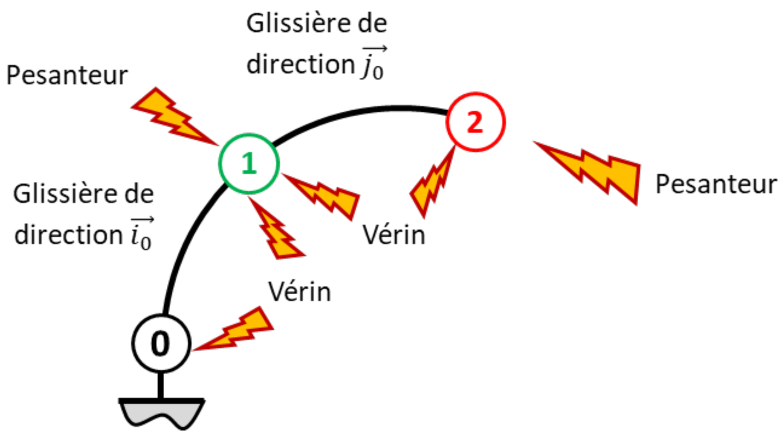
Exercice 166 – Mouvement TT – ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{j_0} + Z_{01}\overrightarrow{k_0} \\ L_{01}\overrightarrow{i_0} + M_{01}\overrightarrow{j_0} + N_{01}\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{A,\mathcal{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{12}\overrightarrow{i_0} + Z_{12}\overrightarrow{k_0} \\ L_{12}\overrightarrow{i_0} + M_{12}\overrightarrow{j_0} + N_{12}\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes}\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_2 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{C,\mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{v1}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_1\overrightarrow{i_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{v2}\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} F_2\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

DDS

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{j_0} \\ N_{01}\overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{12}\overrightarrow{i_0} \\ N_{12}\overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_2 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{C,\mathscr{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0_{v1} \rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_1\overrightarrow{i_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1_{v2} \rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} F_2\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.*

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole **2** et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{j_0}$;
- on isole **1+2** et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{i_0}$.

Exercice 165 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e\Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)r\rho_1 p\Omega_m(p) = \dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2\rho_1^2 p\Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \dfrac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8\theta_m = K_1 X_C - K_8\dfrac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \dfrac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

D'une part,

$$X(p) = \left(\left(X_C(p) - X(p)\right)C(p) - F_P(p)D\right)\frac{A}{p\left(Bp+1\right)}$$

$$X(p) = \frac{A\left(X_C(p) - X(p)\right)C(p)}{p\left(Bp+1\right)} - \frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)} = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)} - \frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)}. \Leftrightarrow X(p)\left(\frac{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}{p\left(Bp+1\right)}\right) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)} + \frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\left(Bp+1\right)+AC(p)} - \frac{AF_P(p)D}{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}.}$$

D'autre part, $X(p) = \Omega_m(p)H_4(p)K_5K_6$, $U_m(p) = \left(X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8\right)C(p)$, $\theta_m(p) = \Omega_m(p)H_4(p)$.

$\Omega_m(p) = \left(\left(U_m(p) - \Omega_m(p)K_7\right)K_2 - F_P(p)K_9\right)H_3(p)$

$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\left(1 + K_7K_2H_3(p)\right) = U_m(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9$

$$X(p)=\left(U_m(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)K_1-\theta_m(p)K_8\right)C(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)K_1-X(p)\frac{K_8}{K_5K_6}\right)C(p)H_3(p)K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)-X(p)\right)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+C(p)H_3(p)K_1K_2\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2H_3(p)+C(p)H_3(p)K_1K_2H_4(p)K_5K_6\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)H_4(p)K_5K_6}.$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2\frac{1}{p}K_5K_6\right)=\left(X_c(p)C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2-F_P(p)\frac{}{(M+}\right.$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)=\left(X_c(p)C(p)\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{1}\frac{k_t}{R}}{\left((M+m)r^2\rho_1^2p^2+\frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{(M+m)}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+\right.}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{1}}{\left((M+m)r\rho_1p^2+\frac{(M+m)r\rho_1p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{(M+m)r\rho}{(M+m)r}\right.}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2+\frac{pk_ek_t}{Rr\rho_1}+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(\frac{R}{k_ek_t}(M+m)r^2\rho_1^2p+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(\frac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_ek_t}p+1\right)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(Bp+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(Bp+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{R}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{R}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}\frac{R}{k_ek_t}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

DDS

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}\frac{k_e}{K_8}K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

On a donc $A=\dfrac{K_8}{k_e}$, $B=\dfrac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_ek_t}$ et $D=\dfrac{K_9Rr\rho_1}{K_8k_t}$.

Exercice 164 – Mouvement TT – ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

Le point C a un mouvement quelconque dans le plan $\left(A,\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0}\right)$.

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}+\mu(t)\overrightarrow{j_0}$ et donc, on a directement $\begin{cases} x_C(t)=\lambda(t)\\ y_C(t)=\mu(t)\\ z_C(t)=0\end{cases}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R=10\,\text{cm}$ à la vitesse $v=0{,}01\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Question 3 *Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R.*

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\overrightarrow{V(C,2/0)}=\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathcal{R}_0}=R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

On a $v=R\dot{\theta}(t)$. Par intégration, $\theta(t)=\dfrac{v}{R}t$ (avec $\theta(t)=0\,\text{rad}$ pour $t=0\,\text{s}$).

Question 4 *Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v, R et du temps.*

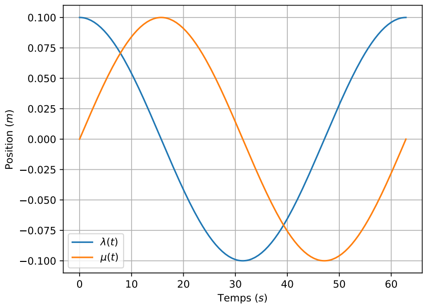
Exprimons la trajectoire du point C : $\overrightarrow{AC}=R\overrightarrow{e_r}=R\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0}+R\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0}$. Par identification $\lambda(t)=R\cos\theta(t)$ et $\mu(t)=R\sin\theta(t)$.

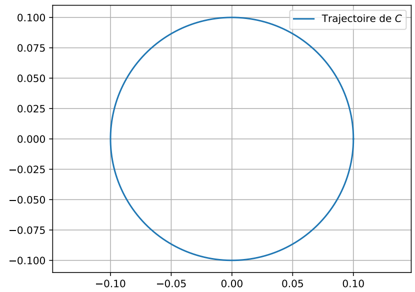
Au final, $\begin{cases}\lambda(t)=R\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right)\\ \mu(t)=R\sin\left(\dfrac{v}{R}t\right)\end{cases}$.

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.*

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0,T,200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t,les_lambda,label="$\\lambda(t)$")
plt.plot(les_t,les_mu,label="$\\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps ($s$)")
plt.ylabel("Position ($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()
```

```
plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda,les_mu,label="Trajectoire de $C$")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```





DDS

Exercice 163 – Banc hydraulique ⋆

C2-03

Question 1 *Déterminer, en fonction de K_p , ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.*

Le débit de fuite est nul ; donc $\Delta Q_e(p)=0$.

Cas 1 : cours sur la précision connu – ***Attention à avoir le même type d'entrée/sortie***

La FTBO est de classe nulle ($C(p)$ est un gain, $H_{\text{pom}}(p)$ et $H_{\text{pre}}(p)$ de classe 0). Le gain de la Boucle ouverte est $K_{\text{BO}}=K_p K_m K_{\text{pom}} K_{\text{cap}}$.

Si l'entrée est un échelon d'amplitude P_0, l'écart statique est donc donné par $\varepsilon_S=\dfrac{P_0}{1+K_{\text{BO}}}=\dfrac{P_0}{1+K_p K_m K_{\text{pom}} K_{\text{cap}}}$.

Cas 2 : cours sur la précision peu connu – À savoir faire, mais on perd un peu de temps... – ***Attention à avoir le même type d'entrée/sortie*** Si on connait quand même un petit peu son cours, on a $\varepsilon(p)=\dfrac{P_{\text{con}}(p)}{1+K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}K_{\text{cap}}}$.

On a alors, $\varepsilon_s=\lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{\dfrac{P_0}{p}}{1+K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}K_{\text{cap}}}=\dfrac{P_0}{1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}$

Cas 3 : cours sur la précision pas connu – À savoir faire, mais on perd beaucoup peu de temps...

En utilisant la formule de Black, on a $P_e(p)=P_{\text{con}}(p)K_{\text{cap}}\dfrac{K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}}{1+K_P\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_m}{1+T_1p}K_{\text{cap}}}$

$=P_{\text{con}}(p)K_{\text{cap}}(p)\dfrac{K_P K_{\text{pom}} K_m}{(1+T_2p)(1+T_1p)+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}$

En passant à la valeur finale avec une entrée échelon, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} P_e(t)=P_0 K_{\text{cap}}\dfrac{K_P K_{\text{pom}} K_m}{1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}$

L'écart statique est donc donné par $\varepsilon_S=P_0-P_0\dfrac{K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}{1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}=P_0\dfrac{1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}-K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}{1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}$

$=\dfrac{P_0}{1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}$

Question 2 *Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.*

On souhaite que l'écart statique soit inférieure à 5% soit 0,05 pour une entrée unitaire.

On cherche donc K_P tel que $\dfrac{1}{1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}<0,05 \Leftrightarrow 1<0,05\left(1+K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-0,05}{0,05K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}<K_P$

Soit $K_P>\dfrac{1-0,05}{0,05\times 1,234\times 10^7\times 3,24\times 2,5\times 10^{-8}} \Rightarrow K_P>19$.

Question 3 *Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p la fonction de transfert en régulation définie par : $H_{pert}(p)=\dfrac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$. En déduire, en fonction de K_p, ε_{pert} définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.*

Dans ce cas il n'y a pas d'intégrateur avant la perturbation échelon. Il faut savoir faire le calcul.

On peut utiliser la « lecture directe » : $P_e(p)=P_r(p)H_{\text{pre}}-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)=H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)\varepsilon(p)-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)$ $=-H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}P_e(p)-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)$.

$\Leftrightarrow P_e(p)\left(1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}\right)=-\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p)$

$\Leftrightarrow \dfrac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}=-\dfrac{H_{\text{fui}}(p)}{1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}}$

Calculons $\varepsilon_{\text{pert}}(p)=-\dfrac{H_{\text{fui}}(p)}{1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}}\Delta Q_e(p)K_{\text{cap}}$.

On a alors $\varepsilon_{\text{pert}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to 0}p\varepsilon(p)=\lim\limits_{p\to 0}-p\times\dfrac{H_{\text{fui}}(p)}{1+H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}}\dfrac{\Delta Q_0}{p}K_{\text{cap}}$

$=-\dfrac{K_f\Delta Q_0K_{\text{cap}}}{1+K_mK_{\text{pom}}K_PK_{\text{cap}}}$

Question 4 *Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{pert} à la valeur spécifiée au cahier des charges.*

Pour $\Delta Q_e=5\times10^{-4}\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$, il faut $\varepsilon_{\text{pert}}<40\times10^5$ (Pa) soit

$\dfrac{K_f\Delta Q_0K_{\text{cap}}}{1+K_mK_{\text{pom}}K_PK_{\text{cap}}}<40\times10^5\Rightarrow K_f\Delta Q_0K_{\text{cap}}<40\times10^5\left(1+K_mK_{\text{pom}}K_PK_{\text{cap}}\right)\Rightarrow\dfrac{K_f\Delta Q_0K_{\text{cap}}-40\times10^5}{40\times10^5K_mK_{\text{pom}}K_{\text{cap}}}<K_P\Rightarrow$ $K_P>-1$

Question 5 *Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.*

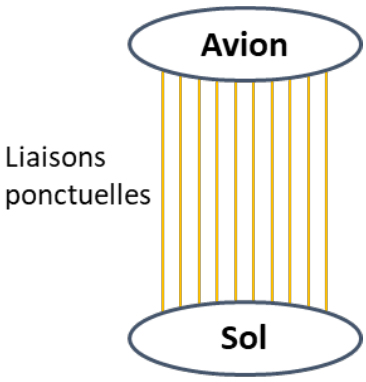
Je vous laisse faire le calcul... Il faut savoir le faire le plus vite possible. Il faut d'abord calculer la FTBF, la mettre sous forme canonique, déterminer $\xi_{\text{BF}}=\dfrac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T\left(1+K_PK_MK_{\text{Pom}}K_{\text{Cap}}\right)}}$ puis determiner K_P tel que $\xi_{\text{BF}}=1$.

Exercice 162 – ⋆

B2-16

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan).

Question 1 *Réaliser le graphe des liaisons.*



Question 2 *Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.*

La liaison de l'avion avec le sol est assimilabe à une liaison appui-plan de normale $\overrightarrow{z}$. Il y a donc 3 mobilités (1 rotation autour de $\overrightarrow{z}$, 1 translation selon $\overrightarrow{x}$ et 1 translation suivant $\overrightarrow{y}$.

En utilisant une méthode statique, on a $h=m-E_s+I_s$ avec :

- $m=3$;
- $E_s=1\times6=6$ (on ne peut isoler que l'avion) ;
- $I_s=10\times1=10$ (8 liaisons ponctuelles avec 1 inconnue statique par liaison).

En conséquences, $h=3-6+10=7$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h=m-I_c+E_c$ avec :

- $m=3$;
- $E_c=\gamma\times6=(10-2+1)\times6=54$ (on ne peut isoler que l'avion) ;
- $I_c=10\times5=50$ (8 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison).

En conséquences, $h=3-50+54=7$.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales $(A,\overrightarrow{z})$ (atterrisseur auxiliaire), $(P_g,\overrightarrow{z})$ (atterrisseur principal gauche) et $(P_d,\overrightarrow{z})$ (atterrisseur principal droit).

Question 3 *Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.*

En utilisant une méthode statique, on a $h=m-E_s+I_s$ avec :

- $m=3$;
- $E_s=1\times 6=6$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_s=3\times 1=3$.

En conséquences, $h=3-6+3=0$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h=m-I_c+E_c$ avec :

- $m=3$;
- $E_c=\gamma\times 6=(3-2+1)\times 6=12$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_c=3\times 5=15$ (3 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison);

En conséquences, $h=3-15+12=0$.

Exercice 161 – Mouvement RR ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.*

Le point C peut atteindre tous les points situés compris entre deux cercles de rayon 5 mm et de rayon 25 mm.

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC}=R\overrightarrow{i_1}+L\overrightarrow{i_2}$. On projetant ce vecteur dans le repère $\mathcal{R}_A i_0 j_0 k_0$ on a

$\overrightarrow{AC}=R\left(\cos\theta\overrightarrow{i_0}+\sin\theta\overrightarrow{j_0}\right)+L\left(\cos\left(\theta+\varphi\right)\overrightarrow{i_0}+\sin\left(\theta+\varphi\right)\overrightarrow{j_0}\right)$. On a donc : $\left\{\begin{array}{l} x_C(t)=R\cos\theta+L\cos\left(\theta+\varphi\right)\\ y_C(t)=R\sin\theta+L\sin\left(\theta+\varphi\right)\\ z_C(t)=0\end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Question 3 *Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.*

Distance à parcourir : 0,05 m. Durée du parcours : $T=\dfrac{0,05}{v}$.

Question 4 *Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.*

$\forall t\in\left[0,\dfrac{0,05}{v}\right]$, $y_C(t)=0,025$. Pour $t=0$, $x_C(0)=-0,025$. On a alors $x_C(t)=-0,025+vt$.

Au final, $\forall t\in\left[0,\dfrac{0,05}{v}\right]$, $\left\{\begin{array}{l} x_C(t)=-0,025+vt\\ y_C(t)=0,025\\ z_C(t)=0\end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Question 5 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v=0,01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.*

Afin que le point C suive un segment, il faut donc que $\left\{\begin{array}{l} -0,025+vt=R\cos\theta+L\cos\left(\theta+\varphi\right)\\ 0,025=R\sin\theta+L\sin\left(\theta+\varphi\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} -0,025+vt-R\cos\theta=L\cos\left(\theta+\varphi\right)\\ 0,025-R\sin\theta=L\sin\left(\theta+\varphi\right)\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} (-0,025+vt-R\cos\theta)^2=L^2\cos^2\left(\theta+\varphi\right)\\ (0,025-R\sin\theta)^2=L^2\sin^2\left(\theta+\varphi\right)\end{array}\right.$

$\Rightarrow(-0,025+vt-R\cos\theta)^2+(0,025-R\sin\theta)^2=L^2$

$\Rightarrow 0,025^2+v^2t^2+R^2\cos^2\theta-2\times 0,025vt+2R\cos\theta-vtR\cos\theta+0,025^2+R^2\sin^2\theta-2\times 0,025R\sin\theta=L^2$

$\Rightarrow(2-vt)\cos\theta-2\times 0,025\sin\theta=\dfrac{L^2}{R}-\dfrac{2\times 0,025^2}{R}-\dfrac{v^2t^2}{R}-R+2\times 0,025\dfrac{vt}{R}$

Équation trigonométrique de la forme $a\cos x+b\sin x=c$.

Il y a donc une solution analytique. On peut aussi résoudre l'équation numériquement.

Une fois $\theta(t)$ déterminée, on a $0,025-R\sin\theta=L\sin\left(\theta+\varphi\right)\Rightarrow\arcsin\left(\dfrac{0,025-R\sin\theta(t)}{L}\right)-\theta(t)=\varphi(t)$

DDS

Question 6 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.*

Exercice 160 – Mouvement RR ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} + L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2}$.

(Avec $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = \left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_2} = \left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2}$).

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*

On a $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$.

$\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -L\,\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_0} = L\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2}$.

$\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \left(-L\,\overrightarrow{i_2} - R\,\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}\left(L\,\overrightarrow{j_2} + R\,\overrightarrow{j_1}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}\left(L\,\overrightarrow{j_2} + R\,\overrightarrow{j_1}\right)$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \{\mathscr{V}(2/1)\} + \{\mathscr{V}(1/0)\}$. Pour sommer les torseurs, il faut écrire les vecteurs vitesses au même point, ici en C.

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{k_0} \\ R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2} \end{array}\right\}_C$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

De plus, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = \left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_2} = -\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{i_2}$.

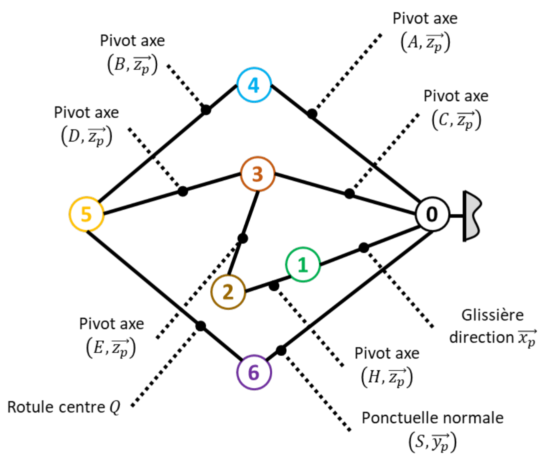
On a donc $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1} + L\left(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2} - L\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)^2\overrightarrow{i_2}$.

Exercice 159 – ⋆

B2-16

Question 1 *Calculer l'hyperstatisme du modèle plan du mécanisme global de la pince (**??**).*

Le graphe de liaisons est donné figure suivante.



- Dans le plan, on a $m=2$: mobilité correspondant au serrage de la pièce et rotation de 6 autour de l'axe $\left(Q,\overrightarrow{z_p}\right)$.
- $I_c = 6\times1+1\times1+1\times3 = 10$ (6 pivots, 1 glissière et 1 ponctuelle dans le plan) ;
- $E_c = 3\times3 = 9$
- $h = m - I_c + E_c = 2-10+9 = 1$.

Exercice 158 – Banc hydraulique ⋆

C2-03

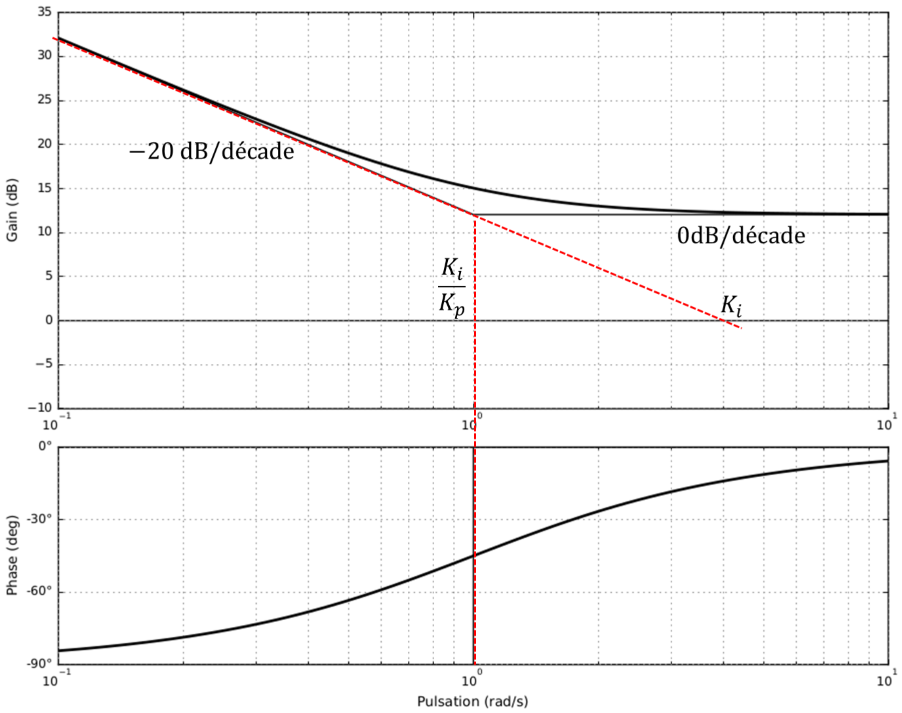
Question 1 *Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.*

On a $C(p)=\dfrac{K_i}{p}+K_p=\dfrac{K_i+pK_p}{p}=K_i\dfrac{1+p\dfrac{K_p}{K_i}}{p}$.

Question 2 *Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p.*

<table>
<tr><td></td><td>$\omega \to 0$</td><td colspan="2">$\omega = \dfrac{K_i}{K_p}$</td><td>$\omega \to \infty$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{K_i}{p}$</td><td colspan="2">-20dB/Décade
$-90°$</td><td colspan="2">-20dB/Décade
$-90°$</td></tr>
<tr><td>$1+\dfrac{K_p}{K_i}p$</td><td colspan="2">0dB/Décade
0°</td><td colspan="2">$+20$dB/Décade
$+90°$</td></tr>
<tr><td>$C(p)$</td><td colspan="2">-20dB/Décade
$-90°$</td><td colspan="2">0dB/Décade
0°</td></tr>
</table>

Coupe l'axe des abscisse en $\omega = K_i$



Question 3 *Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.*

Ce correcteur augmente la classe de la FTBO donc augmente la précision. Cependant, il réduit la phase. Il faut donc veiller à ce que la pulsation de cassure soit réglée de telle sorte que le système ne soit pas déstabilisé.

Question 4 *Quelle valeur faut-il donner à $\omega_{0\,\text{dB}}$ pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?*

D'après la remarque, on a $t_e\,\omega_{0\,\text{dB}}=3$ soit $\omega_{0\,\text{dB}}=3/t_e=0{,}075\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 5 *Déterminer analytiquement le rapport $T=\dfrac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.*

Calculons la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée : $F_{\text{BO}}=\dfrac{K_{\text{pom}}}{1+T_2p}\dfrac{K_{\text{m}}}{1+T_1p}K_{\text{cap}}$.

Le correcteur doit être réglé pour que $\omega_{0\,\text{dB}}=0{,}075\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Calculons la marge de phase. $\arg(F_{\text{BO}})=-\arg\left(1+T_1p\right)-\arg\left(1+T_2p\right)=-\arctan T_1\omega-\arctan T_2\omega +$ On a donc $\arg(F_{\text{BO}}(0,075))=-\arctan(10\times 0,075)-\arctan(5\times 0,075)=-57°$ soit une marge de phase de $-123°$.

Pour atteindre une marge de phase de 60°, on peut donc baisser la phase de 63°.

Calculons $\arg\left(C(j\omega)\right)=-90+\arctan\left(\dfrac{K_p}{K_i}\omega\right)$.

On cherche donc $\dfrac{K_i}{K_p}$ tel que $\arg(C(0,075))=-63$ Soit $-90+\arctan\left(\dfrac{K_p}{K_i}0,075\right)=-63 \Leftrightarrow \arctan\left(\dfrac{K_p}{K_i}0,075\right)=27$ $\Rightarrow \dfrac{K_p}{K_i}0,075=0,51 \Leftrightarrow \dfrac{K_p}{K_i}=6,79.$

DDS

Question 6 *En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.*

Il faut chercher K_i et K_p pour respecter $\omega_{0\,\text{dB}}$. Recherchons le gain de la boucle ouverte non corrigée pour $\omega_{0\,\text{dB}}$.

$G_{\text{dB}}\left(F_{\text{BO}}\right) = 20\log\left(K_{\text{pom}} K_{\text{m}} K_{\text{cap}}\right) - 20\log\left(\sqrt{1^2+T_1^2\omega^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1^2+T_2^2\omega^2}\right)$

On a alors $G_{\text{dB}}\left(F_{\text{BO}}\right)(0,075) = -0,004 - 1,94 - 0,57 = 2,52\,\text{dB}$.

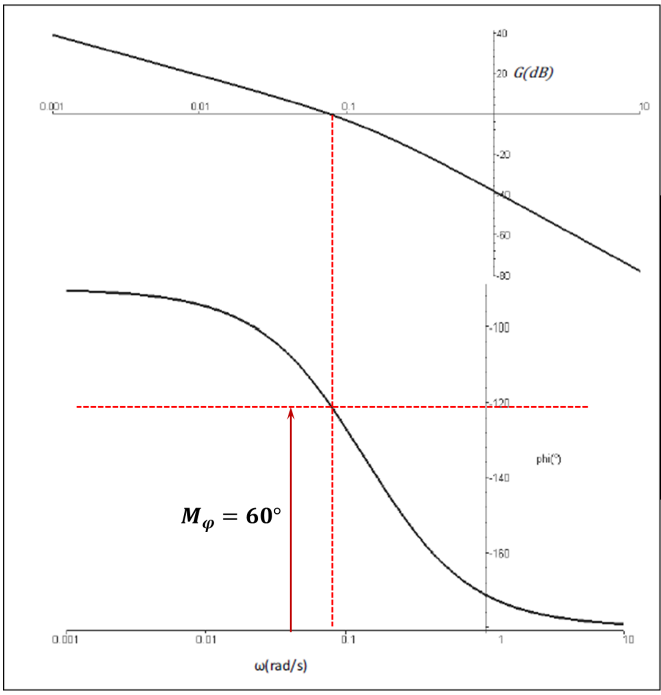
Il faut donc baisser le gain de 2,52 dB $G_{\text{dB}}\left(C(p)\right) = 20\log K_i - 20\log\omega + 20\log\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{K_p}{K_i}\right)^2\omega^2}\right)$.

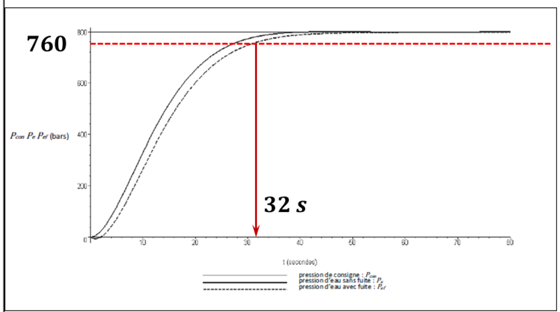
On a alors $G_{\text{dB}}\left(C(0,075)\right) = 20\log K_i + 22,5 + 1 = -2,52$ soit $K_i = 10^{-\dfrac{2,52+1+22,5}{20}} = 0,05$.

Par suite, $K_p = 6,79\times 0,05 = 0,34$.

(**A vérifier**).

Question 7 *La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.*





- Stabilité :
  - Marge de phase mesurée : 60° **cdc ok**.
  - Marge de gain mesurée : infini **cdc ok**.
- Rapidité : $t_e = 32\,\text{s} < 40\,\text{s}$ **cdc ok**.
- Précision : écart statique nul **cdc ok**.
- Amortissement : nul **cdc ok**.

Exercice 157 – Mouvement TT – ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Par dérivation vectorielle, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Par composition du torseur cinématique, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_1} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0}\end{array}\right\}_{\forall P}.$$

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + \ddot{\mu}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Exercice 156 – Palettisation – Stabilité ⋆

C2-03

On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p) = \dfrac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \dfrac{1}{Np}$, que $k_a = \dfrac{\pi}{180}k_r$ et que la FTBO est donnée par $T(p) = \dfrac{k_{BO}}{p\left(1+\tau_m p\right)}$ $\left(k_{BO} = \dfrac{k_c k_m k_r}{N}\right)$.

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 1 *Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.*

On souhaite une marge de phase de 45°. On cherche donc ω_φ tel que $\varphi\left(\omega_\varphi\right) = -180+45 = -135°$.

$\varphi(\omega) = -90 - \arg\left(1+\tau_m j\omega\right) = -90 - \arctan\left(\tau_m \omega\right)$.

On a donc $\varphi\left(\omega_\varphi\right) = -135 \Leftrightarrow -90 - \arctan\left(\tau_m\omega_\varphi\right) = -135 \Leftrightarrow -\arctan\left(\tau_m\omega_\varphi\right) = -45 \Leftrightarrow \arctan\left(\tau_m\omega_\varphi\right) = 45$ $\Rightarrow \tau_m\omega_\varphi = 1 \Rightarrow \omega_\varphi = \dfrac{1}{\tau_m} = \dfrac{1}{5\times 10^{-3}} \Rightarrow \omega_\varphi = 200\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Par suite, il faut que le gain soit nul en ω_φ.

On a donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log k_{BO} - 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau_m^2}$. En $\omega_\varphi = \dfrac{1}{\tau_m}$: $G_{\mathrm{dB}}(\omega_\varphi) = 0 \Leftrightarrow 20\log k_{BO} - 20\log\dfrac{1}{\tau_m} - 20\log\sqrt{1+\dfrac{1}{\tau_m^2}\tau_m^2} = 0 \Leftrightarrow \log k_{BO} + \log\tau_m - \log\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \log\dfrac{k_{BO}\tau_m}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{k_{BO}\tau_m}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow k_{BO} = \dfrac{\sqrt{2}}{\tau_m}$.

(**A vérifier**) $k_{BO} = 282,8$.

Question 2 *En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.*

$k_{BO} = \dfrac{k_c k_m k_r}{N}$; donc $k_c = \dfrac{N k_{BO}}{k_m k_r} = \dfrac{200\times 282,8}{4\times 30} = 471$.

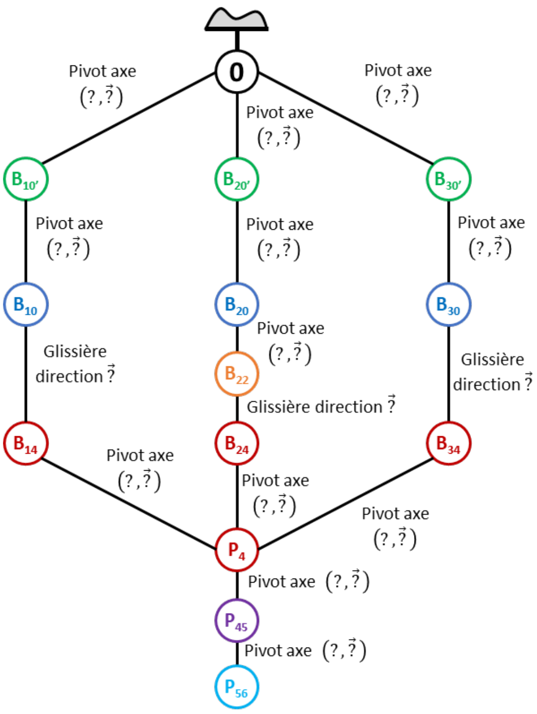
Question 3 *Déterminer l'écart de position.*

Il y a une intégration dans la correcteur. La FTBO est de classe 1 est le système est précis en position.

Exercice 155 – Triptéor ⋆

B2-16

Question 1 *Réaliser le graphe de liaisons.*



Question 2 *Calculer le degré d'hyperstatisme.*

- $m = 5$: translations des 3 glissières et rotations des deux dernières pivot ;
- $I_c = 15$;
- $E_c = 12$;

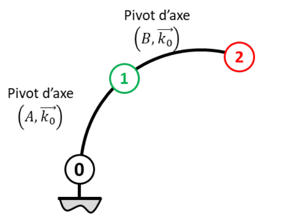
DDS

- $h = m - I_c + E_c = 5 - 15 + 12 = 2$.

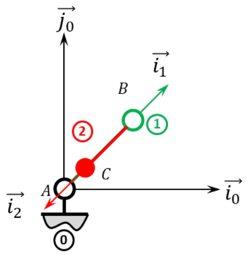
Exercice 154 – Mouvement RR ⋆

B2-12

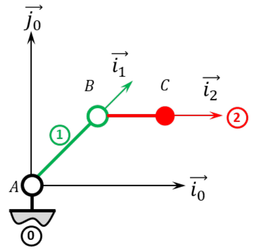
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



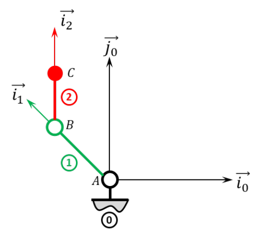
Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = \pi$ rad.*



Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.*



Question 4 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.*



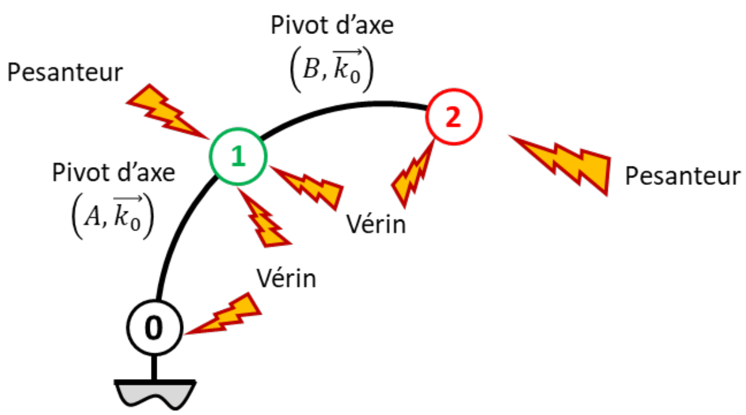
Exercice 153 – Mouvement RR ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\,\overrightarrow{i_0} + Y_{01}\,\overrightarrow{j_0} + Z_{01}\,\overrightarrow{k_0} \\ M_{01}\,\overrightarrow{j_0} + N_{01}\,\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12}\,\overrightarrow{i_1} + Y_{12}\,\overrightarrow{j_1} + Z_{12}\,\overrightarrow{k_1} \\ M_{12}\,\overrightarrow{j_1} + N_{12}\,\overrightarrow{k_1} \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_2,\mathscr{R}_0}$.

- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0_{m1}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_1\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1_{m2}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_2\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}X_{01}\overrightarrow{i_0}+Y_{01}\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c}X_{12}\overrightarrow{i_1}+Y_{12}\overrightarrow{j_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}-m_1 g\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_1,\mathscr{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c}-m_2 g\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_2,\mathscr{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathscr{T}(0_{m1}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_1\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathscr{T}(1_{m2}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_2\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_0}$.

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.*

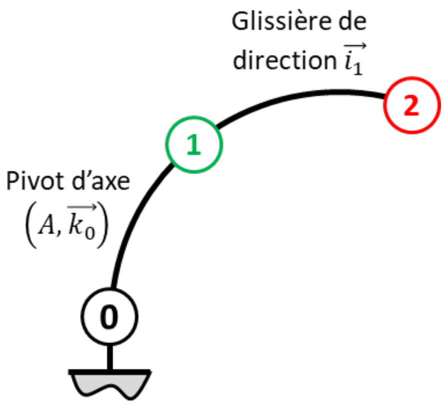
C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole **2** et on réalise le théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$;
- on isole **1+2** et on réalise le théorème du moment statique en B en projection sur $\overrightarrow{k_0}$.

Exercice 152 – Mouvement RT ⋆

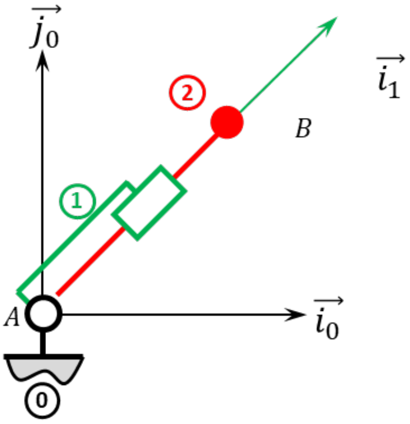
B2-12

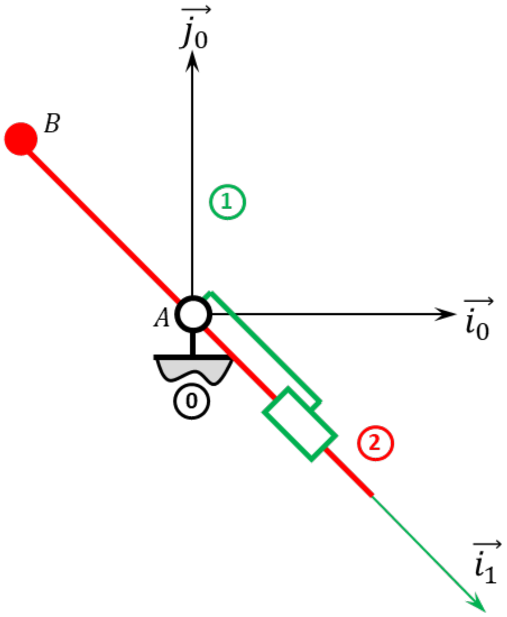
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ *rad et* $\lambda(t)=20\,\text{mm}$.

Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta=\dfrac{-\pi}{4}$ *rad et* $\lambda(t)=-20\,\text{mm}$.





Exercice 151 – Quille pendulaire★

B2-07

Question 1 *Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.*

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p)=SpX(p)+\dfrac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p)=S\Sigma(p)-kX(p)-\lambda pX(p)-F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p)=A_2\left(A_1Q(p)-X(p)\right)=A_1A_2Q(p)-A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p)=\dfrac{Q(p)-SpX(p)}{\dfrac{V}{2B}p}=Q(p)\dfrac{2B}{Vp}-X(p)\dfrac{S2B}{V}$. On a donc $A_2=\dfrac{S2B}{V}$, $A_1A_2=\dfrac{2B}{Vp}$ soit $A_1=\dfrac{2B}{Vp}\dfrac{V}{S2B}=\dfrac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p)=A_4\left(-F_R(p)+A_3\Sigma(p)\right)=-A_4F_R(p)+A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)\left(Mp^2+\lambda p+k\right)=S\Sigma(p)-F_R(p)\Leftrightarrow X(p)=\dfrac{S\Sigma(p)}{Mp^2+\lambda p+k}-\dfrac{F_R(p)}{Mp^2+\lambda p+k}$. On a donc : $A_4=\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}$ et $A_3=S$.

Au final, $A_1=\dfrac{1}{Sp}$, $A_2=\dfrac{S2B}{V}$, $A_3=S$ et $A_4=\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}$.

Question 2 *Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.*

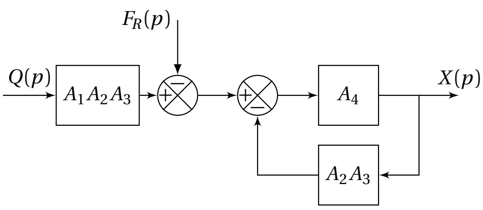
Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p)=\left(H_1Q(p)-F_R(p)\right)H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p)=A_4\left(-F_R(p)+A_3\Sigma(p)\right)$ et $\Sigma(p)=A_2\left(A_1Q(p)-X(p)\right)$.

On a donc $X(p)=A_4\left(-F_R(p)+A_3A_2\left(A_1Q(p)-X(p)\right)\right)\Leftrightarrow X(p)(1+A_2A_3A_4)=A_4\left(-F_R(p)+A_3A_2A_1Q(p)\right)$. On a donc $H_1(p)=A_1A_2A_3$ et $H_2=\dfrac{A_4}{1+A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$A_1=\dfrac{1}{Sp}$, $A_2=\dfrac{S2B}{V}$, $A_3=S$ et $A_4=\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p) = \dfrac{2BS}{pV}$ et $H_2 = \dfrac{\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}}{1+\dfrac{2BS^2}{V}\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}} = \dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k+\dfrac{2BS^2}{V}}$.

Question 3 *Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.*

Dans ce cas, $\dfrac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) = \dfrac{2BS}{p\left(MVp^2+\lambda pV+kV+2BS^2\right)}$.

Exercice 150 – Mouvement T – ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en translation de direction $\overrightarrow{i_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 149 – Mouvement T – ⋆

B2-13

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ au point B.*

$\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} \end{array}\right\}_{\forall P}$.

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.*

$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}$.

Exercice 148 – Calcul de FTBO⋆

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*
$\mathrm{FTBO}(p) = BCDE$.

Question 2 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*
$\mathrm{FTBO}(p) = B(1+A)$.

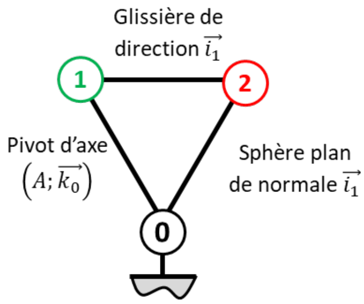
Question 3 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*
$\mathrm{FTBO}(p) = A\dfrac{BCD}{1+BCD}$.

Question 4 *Déterminer la FTBO dans la cas suivant.*
$\mathrm{FTBO}(p) = A\dfrac{\dfrac{B}{1+B}CD}{1+\dfrac{B}{1+B}CD} = \dfrac{ABCD}{1+B+BCD}$.

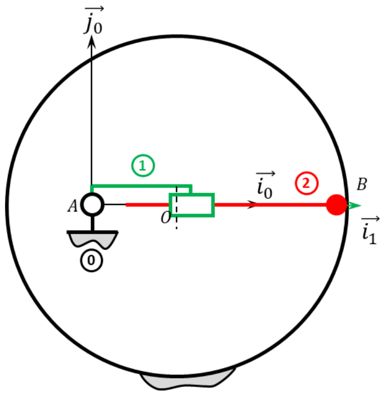
Exercice 147 – Pompe à palettes ⋆⋆

B2-12

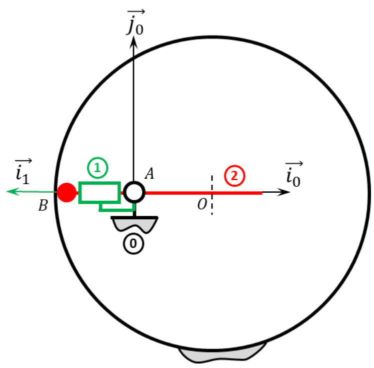
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=0$ rad.*



Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=\pi$ rad.*



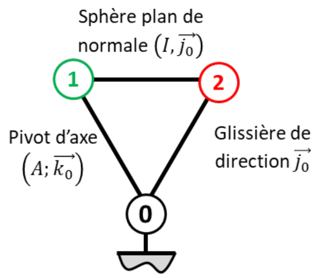
Question 4 *En déduire la course de la pièce **2**.*

La course de la pièce 2 est donnée par la différence entre la longueur AB maximale et AB minimale : $c=30-10=20\,\text{mm}$.

Exercice 146 – Pompe à pistons radiaux ⋆⋆

B2-12

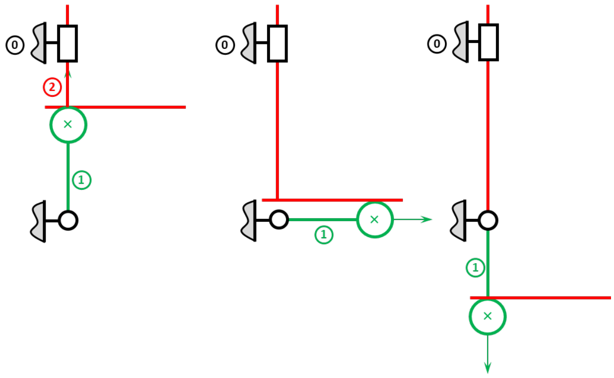
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=0$ rad.*

Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=\dfrac{\pi}{2}$ rad.*

Question 4 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=-\dfrac{\pi}{2}$ rad.*



Question 5 *En déduire la course de la pièce **2**.*

La course est de

Exercice 145 – Parallélépipède*

B2-10

Question 1 *Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.*

Pour des raisons de symétrie, on a directement $\overrightarrow{OG}=\dfrac{a}{2}\overrightarrow{x}+\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}+\dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$.

Question 2 *Déterminer la matrice d'inertie du solide en G, en A puis O.*

Notons (1) le parallélépipède rectangle et (2) le cylindre (plein). On note $\mathcal{B}_0=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ On a $I_G(1)=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & C_1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$

et $I_G(2)=\begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & A_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ (attention l'axe du cylindre est $\overrightarrow{y}$).

On a donc $I_G(S)=\begin{pmatrix}A_1-A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_1-B_2 & 0\\ 0 & 0 & C_1-A_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Par ailleurs, $m=m_1-m_2$ et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}$; donc $I_A(S)=\begin{pmatrix}A_1-A_2+m\dfrac{b^2}{4} & 0 & 0\\ 0 & B_1-B_2 & 0\\ 0 & 0 & C_1-A_2+m\dfrac{b^2}{4}\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Enfin, $\overrightarrow{OG}=\dfrac{a}{2}\overrightarrow{x}+\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}+\dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$; donc $I_O(S)=\begin{pmatrix}A_1-A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_1-B_2 & 0\\ 0 & 0 & C_1-A_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}+m\begin{pmatrix}\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{4} & -\dfrac{ab}{4} & -\dfrac{ac}{4}\\ -\dfrac{ab}{4} & \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{c^2}{4} & -\dfrac{bc}{4}\\ -\dfrac{ac}{4} & -\dfrac{bc}{4} & \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Exercice 144 – Parallélépipède percé*

B2-10

Question 1 *Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.*

On note m_C la masse du cylindre (plein) et m_P la masse du parallélépipède. On a alors $m=m_P-m_C$. De plus, $\overrightarrow{OG_P}=\dfrac{a}{2}\overrightarrow{x}+\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}+\dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{OG_C}=\dfrac{a}{3}\overrightarrow{x}+\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}+\dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$.

On a alors $m\overrightarrow{OG}=m_P\overrightarrow{OG_P}-m_C\overrightarrow{OG_C}=m_P\left(\dfrac{a}{2}\overrightarrow{x}+\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}+\dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}\right)-m_C\left(\dfrac{a}{3}\overrightarrow{x}+\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}+\dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}\right)$.

Par suite, $\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}x_G\\ y_G\\ z_G\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{m_P-m_C}\left(\dfrac{m_P}{2}-\dfrac{m_C}{3}\right)\\ b/2\\ c/2\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)}$.

Question 2 *Déterminer la matrice d'inertie du solide en G.*

Les plans $(G, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ et $(G, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x})$ sont des plans de symétrie. On a donc $I_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

On déplace la matrice du parallélépipède rectangle en G.

On a $I_{G_P}(P) = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et

$$\overrightarrow{G_P G} = \overrightarrow{G_P O} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) - \dfrac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Ainsi, $I_G(P) = I_{G_P}(P) + m_P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

On déplace la matrice du cylindre en G.

De même $I_{G_C}(C) = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C & 0 \\ 0 & 0 & A_C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et

$$\overrightarrow{G_C G} = \overrightarrow{G_C O} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{3} \\ -\dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) - \dfrac{a}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \Delta'_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Ainsi, $I_G(C) = I_{G_C}(C) + m_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C + m_C \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_C + m_C \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Bilan.

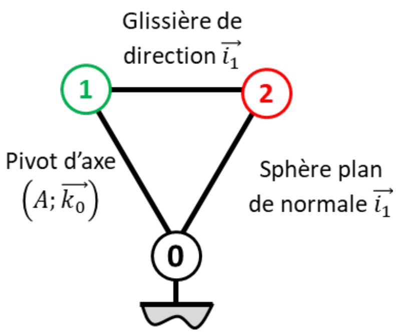
Au final, $I_G(E) = I_G(P) - I_G(C)$ et

$$I_G(E) = \begin{pmatrix} A_P - A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P \Delta_x^2 - B_C - m_C \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P \Delta_x^2 - A_C - m_C \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Exercice 143 – Pompe à piston radial ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$ soit $-e\,\overrightarrow{i_0} + \lambda\,\overrightarrow{i_1} - R\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -e\,\overrightarrow{i_0} + \lambda(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{i_0} + \lambda(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{j_0} - R\cos\varphi(t)\,\overrightarrow{i_0} - R\sin\varphi(t)\,\overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$.

En projetant les expressions sur $\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{j_0}$, on a : $\begin{cases} -e + \lambda(t)\cos\theta(t) - R\cos\varphi(t) = 0 \\ \lambda(t)\sin\theta(t) - R\sin\varphi(t) = 0 \end{cases}$

On cherche à supprimer $\varphi(t)$; donc

$$\begin{cases} -e+\lambda(t)\cos\theta(t) = R\cos\varphi(t) \\ \lambda(t)\sin\theta(t) = R\sin\varphi(t) \end{cases}.$$

En élevant au carré les expressions et en sommant, on obtient $R^2 = (-e+\lambda(t)\cos\theta(t))^2 + \lambda(t)^2\sin^2\theta(t) \Rightarrow R^2 = (-e+\lambda(t)\cos\theta(t))^2 + \lambda(t)^2\sin^2\theta(t)$

$\Rightarrow R^2 = e^2 - 2e\lambda(t)\cos\theta(t) + \lambda(t)^2$.

Résolution de l'équation : $\lambda(t)^2 - 2e\lambda(t)\cos\theta(t) + e^2 - R^2 = 0$.

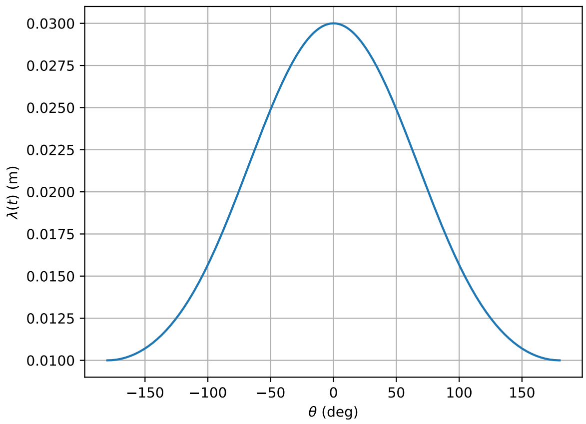
On a $\Delta = (-2e\cos\theta(t))^2 - 4\left(e^2 - R^2\right) = 4e^2\cos^2\theta(t) - 4e^2 + 4R^2$.

On a donc

$$\lambda(t) = \frac{2e\cos\theta(t) \pm \sqrt{4e^2\cos^2\theta(t) - 4e^2 + 4R^2}}{2}$$
$$= e\cos\theta(t) \pm \sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2}$$

Question 3 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.

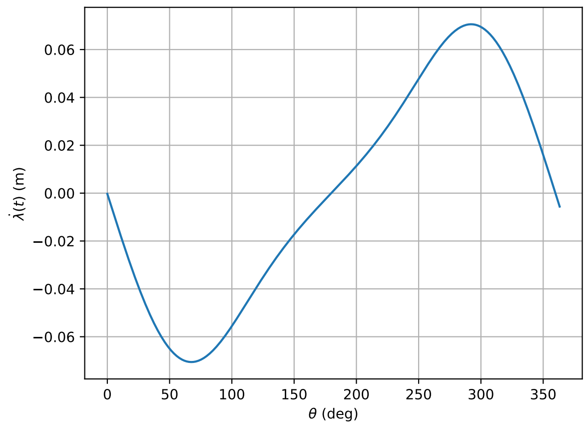


Question 4 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}_+(t) = -e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \frac{1}{2}\left(e^2\cos^2\theta(t)\right)'\left(e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$= -e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) - \frac{e^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2}}.$$

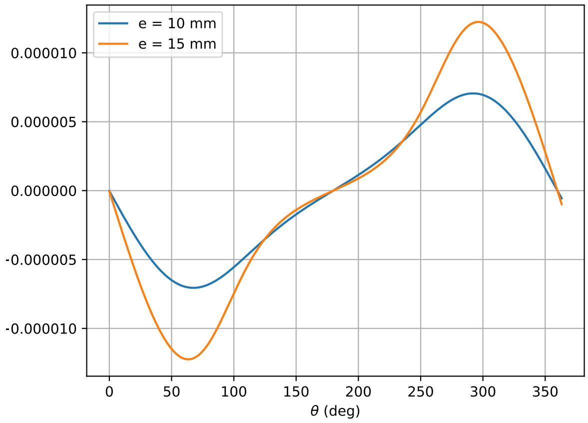
À revoir



Question 5 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*

Le débit instantané de la pompe est donné par $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.

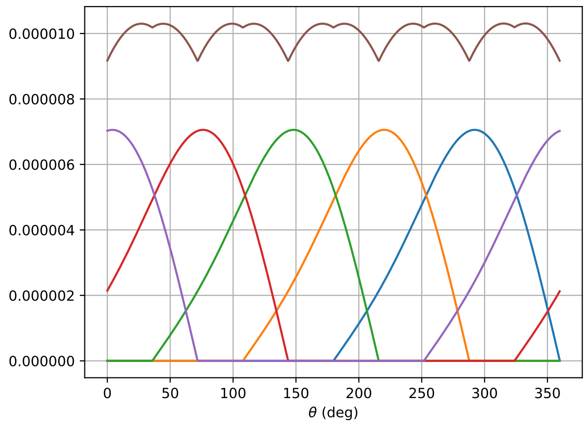
Question 6 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $e = 15\,\text{mm}$.*



Question 7 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour* $e = 10\,\text{mm}$ *pour une pompe à 5 pistons (5 branches* ***1+2****).*

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m2

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200:]
    les_q3 = S*les_lambdap[400:]
    les_q4 = S*les_lambdap[600:]
    les_q5 = S*les_lambdap[800:]

    # On conserve que les valeurs que sur un tour
    les_q1 = les_q1[:1000]
    les_q2 = les_q2[:1000]
    les_q3 = les_q3[:1000]
    les_q4 = les_q4[:1000]
    les_q5 = les_q5[:1000]
    plt.grid()

    les_t = les_t[:1000]
    les_theta = les_theta[:1000]

    plt.xlabel("$\\theta$ (deg)")
    plt.ylabel("Débit instantané $m^3s^{-1}$")

    # On conserve que les valeurs positives (débit)
    for i in range(len(les_q1)):
        if les_q1[i]<0:
            les_q1[i]=0
        if les_q2[i]<0:
            les_q2[i]=0
        if les_q3[i]<0:
            les_q3[i]=0
        if les_q4[i]<0:
            les_q4[i]=0
        if les_q5[i]<0:
```

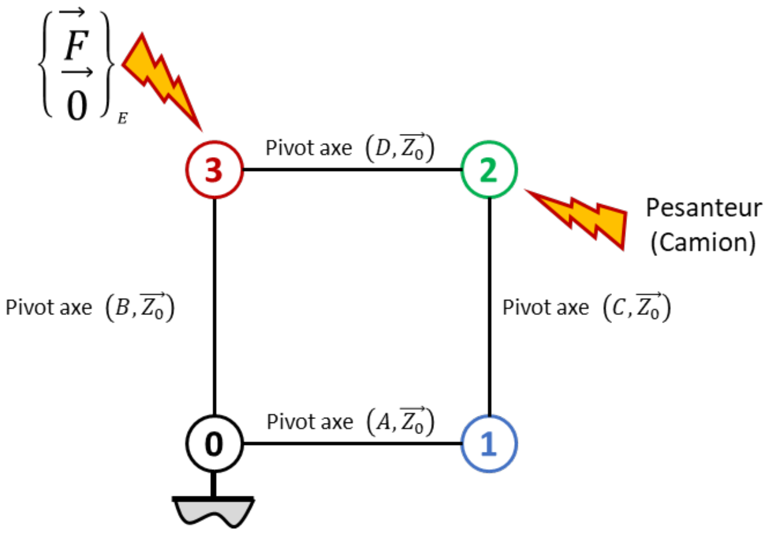
```
        les_q5[i]=0

plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q5)

# Le débit instantané est la sommme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
#plt.show()
#plt.savefig("10_05_c.pdf")
```



Exercice 142 – Pèse camion ⋆⋆

C1-05

Question 1 *Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.*



En faisant l'hypothèse de problème plan, on a 8 inconnues statiques.

Question 2 *Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de F en fonction de M.*

- On commence par isoler **1** soumis à 2 glisseurs. D'après le PFS, les actions mécaniques en A et en C sont dirigées suivant la direction $\overrightarrow{x_0}$.
- On isole ensuite **2**. Le solide **2** étant en translation circulaire, on réalise un TRS suivant $\overrightarrow{y_0}$.
- On isole enfint **3**. Le solide **3** étant en rotation autour de $\left(B,\overrightarrow{z_0}\right)$ par rapport à **0**, on réalise un TMS en B suivant $\overrightarrow{z_0}$.

Exercice 141 – Mouvement R ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en rotation de centre A et d'axe $\overrightarrow{k_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Quelle est la trajectoire du point B appartenant à **1** par rapport à **0**.*

B est est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre A et de rayon R).

Question 3 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1} = R\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} + R\sin\theta\,\overrightarrow{j_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t) = R\cos\theta(t) \\ y_B(t) = R\sin\theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 140 – Mouvement R ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0}$. Or $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta}\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

D'où $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par une autre méthode.*

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - R\overrightarrow{i_1}\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{k_0} = R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.*

On a directement $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \\ R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} \end{array}\right\}_B$.

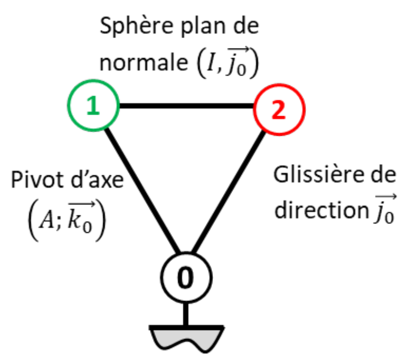
Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.*

$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}$. (En effet, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta}\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}$.)

Exercice 139 – Pompe à piston axial ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

En écrivant la fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

On a donc, $e\overrightarrow{i_1} + R\overrightarrow{j_0} + \mu\overrightarrow{i_0} - \lambda(t)\overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$. En projetant l'expression sur $\overrightarrow{j_0}$ (dans ce cas, l'expression suivant $\overrightarrow{i_0}$ n'est pas utile) : $e\sin\theta + R - \lambda(t) = 0$.

On a donc, $\lambda(t) = e\sin\theta + R$.

Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

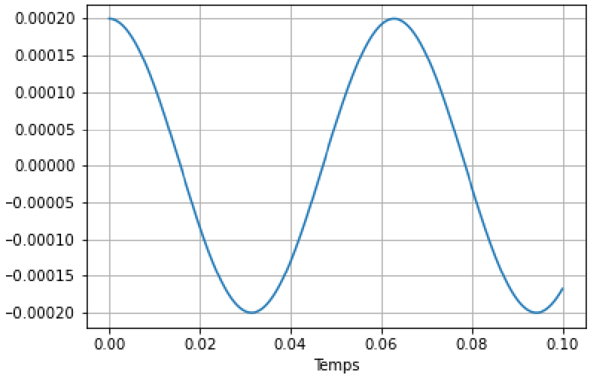
En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}(t) = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.

Question 4 *On note S la section du piston **2**. Exprimer le débit instantané de la pompe.*

En notant $q(t)$ le débit instantané, $q(t) = eS\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.

Question 5 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 10\,\text{mm}$ ainsi que pour $e = 20\,\text{mm}$ et $R = 5\,\text{mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1\,\text{cm}^2$.*

```python
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

    return res

def calc_lambdap(theta,w):

    res = e*w*np.cos(theta)
    return res

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit (${m}^3s^{-1}$)")
    plt.grid()
    plt.savefig("11_02_c.png")
    plt.show()

plot_debit()
```



Exercice 138 – Banc Balafre ⋆

B2-10 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Données et hypothèses

- On note $\overrightarrow{BM} = z\overrightarrow{z_0} + R_J\overrightarrow{u}(\theta)$ où R_J est le rayon du joint avec $R_J = 175\,\text{mm}$;
- la longueur du joint est $L_J = 150\,\text{mm}$. La position du point B, centre du joint est $\overrightarrow{OB} = z_B\overrightarrow{z_0}$ avec $z_B = 425\,\text{mm}$;
- Le coeur de butée a une masse $M_{CB} = 40\,\text{kg}$ et la position de son centre d'inertie G_{CB} est paramétrée par $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB}\overrightarrow{z_0}$ avec $L_{CB} = 193\,\text{mm}$;
- L'ensemble $JR = \{\text{Joint(rotor)+ Butée double}\}$ a une masse $M_{JR} = 100\,\text{kg}$ et la position de son centre d'inertie G_{JR} est paramétrée par $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR}\overrightarrow{z_0}$ avec $L_{JR} = 390\,\text{mm}$. On notera $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_{JR}}$ la matrice d'inertie de l'ensemble JR au point G_{JR} exprimée dans une base $\mathscr{B}_{JR} = \left(\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0}\right)$ liée à JR ;
- Les positions des points A_4 et A_8 sont paramétrées par $\overrightarrow{OA_4} = z_4\overrightarrow{z_0} - R_{CB}\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB}\overrightarrow{y_0}$ avec $z_4 = 280\,\text{mm}$ et $R_{CB} = 150\,\text{mm}$.

Question 1 *Déterminer l'expression de la coordonnée z_G de $\overrightarrow{OG}$ selon $\overrightarrow{z_0}$. Faire l'application numérique.*

Question 2 *Sachant que l'ensemble JR possède une symétrie de révolution par rapport à $\left(O, \overrightarrow{z_0}\right)$, simplifier la matrice d'inertie $I_{G_{JR}}(JR)$.*