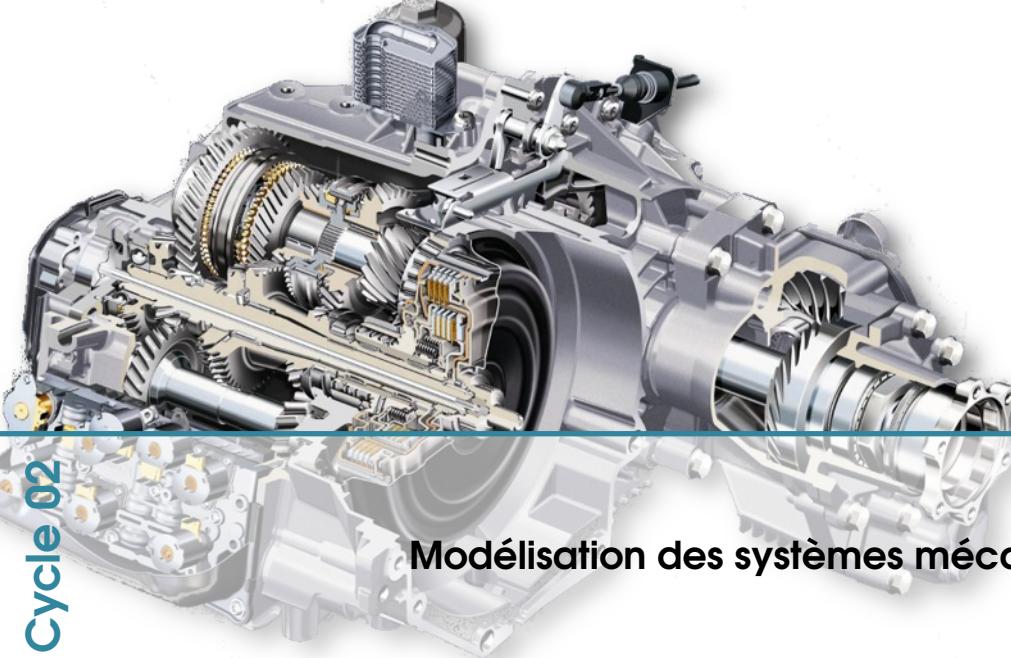


Cycle 02**Cours**

Modélisation des systèmes mécaniques.

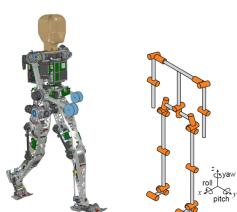
Sciences

Industrielles de
l'Ingénieur

Chapitre 2 Hyperstatisme

Savoirs et compétences :

- B2-16 : Modifier un modèle pour le rendre isostatique.

Robot humanoïde *Lola*Simulateur de vol *Lockheed Martin*

1	Degrés de mobilité	2
2	Hyperstatisme	2
2.1	Définition	2
2.2	Le système est hyperstatique... et alors?	3

1 Degrés de mobilité

Définition **Mobilité cinématique** On appelle $m_c = m_u + m_i$ le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

- m_u : le nombre de mobilités dites **utile**;
- m_i : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- $m_c = 0$: liaison complète ou rigide;
- $m_c > 0$: liaison mobile à m_c degrés de liberté.

(R)

Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.

Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.

Méthode Les mobilités utiles et internes peuvent être déterminées intuitivement. Cependant, il est possible de déterminer le nombre de mobilités analytiquement.

Méthode cinématique

Il faut commencer par écrire la (ou les) fermetures de chaînes cinématiques. Une fermeture de chaîne permet d'écrire un système de 6 équations. On note r_c le rang du système d'équations cinématiques.

On a alors $m_c = I_c - r_c$.

Méthode statique

Il faut commencer par appliquer le PFS à chacune des pièces du système. Un PFS permet d'écrire un système de 6 équations. On note r_s le rang du système d'équations statiques.

On a alors $m_c = E_S - r_s$.

2 Hyperstatisme

2.1 Définition

On appelle h le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme. Il traduit l'impossibilité à résoudre un problème de mécanique, par la redondance abusive des liaisons.

Définition **Degrés d'hyperstatisme** On peut définir le degré d'hyperstatisme par :

Méthode cinématique

$$h = m_c - I_c + E_c$$

Méthode statique

$$h = m_c - E_s + I_s$$

$h = 0$: liaison ou mécanisme **isostatique**;

- $h > 0$: liaison ou mécanisme **hyperstatique**.

Définition Notations

I_c et I_s sont respectivement les **nombres d'inconnues cinématiques et statiques** d'un système et ils dépendent du type de modélisation (2D ou 3D).

Méthode cinématique

On rappelle que le **nombre cyclomatique** γ est tel que $\gamma = L - S + 1$ (S nombre de classes d'équivalence et L le nombre de liaisons).

On note E_c le nombre d'équations cinématique :

- en 3D : $E_c = 6\gamma$;
- en 2D : $E_c = 3\gamma$.

Méthode statique

E_s est le nombre d'équations statique :

- en 3D : $E_s = 6(S - 1)$;
- en 2D : $E_s = 3(S - 1)$.

(R)

- Un système en **chaîne ouverte** est toujours **isostatique**.
- Une liaison hélicoïdale a 5 inconnues statiques et 1 inconnue cinématique.

2.2 Le système est hyperstatique... et alors ?

Tout d'abord, d'un point de vue calcul mécanique, l'intérêt d'un système isostatique est qu'il est possible de calculer les efforts dans chacune des liaisons. Un système isostatique sera de plus facile à assembler car le positionnement des pièces les unes avec les autres est « unique ».

Pour les systèmes hyperstatiques, il n'est pas possible de connaître chacun des efforts. En revanche, la détermination des lois de mouvement des systèmes reste possible. Les systèmes hyperstatiques sont plus rigides que des systèmes isostatiques mais nécessitent de prendre des précautions au montage ou à la fabrication des pièces :

- les dimensions des pièces fabriquées doivent être maîtrisées;
- du jeu doit être prévu pour garantir l'assemblage;
- des dispositifs de réglage peuvent être proposés.

Un système hyperstatique peut donc être plus cher à réaliser, mais peut être plus rigide et d'une plus grande durée de vie.

Pour calculer les efforts dans un système hyperstatique, plusieurs solutions sont possibles : on peut par exemple faire des hypothèses sur une répartition d'efforts.

Méthode Conditions de montage Pour déterminer les conditions de montage, il est possible d'exploiter les équations $0 = 0$ issues des fermetures de chaînes cinématiques. En effet, le nombre d'équations $0 = 0$ correspond au degré d'hyperstatisme.

- une équation de type $0 = 0$ issue de la fermeture des vecteurs taux de rotation impose de spécifier un parallélisme;
- une équation de type $0 = 0$ issue de la fermeture des vecteurs vitesse impose de spécifier une distance.

Il est parfois demandé de diminuer le degré d'hyperstatisme d'un système. Pour cela, il faut rajouter des degrés de liberté à certaines liaisons, sans pour autant modifier le comportement du système.

Activation 1

Activation – Pompe à pistons axiaux

É. Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides.

Présentation

Nous prendrons comme exemple dans ce cours, la pompe à pistons axiaux. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti :

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : poussoir.

On note n le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici $n = 3$). Dans cette étude, on se place directement dans la base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ qui est en rotation par rapport à la base $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ avec le paramètre de rotation θ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$ qui est en rotation par rapport au repère $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe \vec{y}_0 avec le paramètre angulaire α . On introduit le repère $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$ directement obtenu à partir de R_{0*} par une rotation autour de \vec{z}_{0*} et d'angle θ . On donne également : $\overrightarrow{AB} = L_1 \vec{z}_0$, $\overrightarrow{BC} = -R \vec{x}_1$, $\overrightarrow{CD} = \lambda \vec{z}_1$, $\overrightarrow{DE} = h \vec{z}_{1*}$.

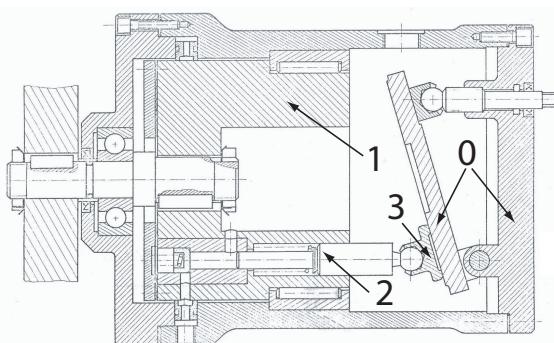


Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central (C, \vec{z}_1) et qui a pour résultante en effort : $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

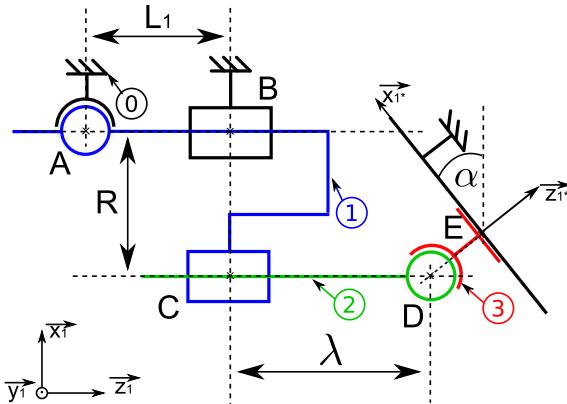


Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

Etude préliminaire

Question 1 Tracer le graphe de structure du mécanisme.

Question 2 En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

Etude statique

Question 3 Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B, C et D.

Question 4 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Etude cinématique

Question 5 Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

Question 6 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Hyperstatisme

Question 7 Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

Question 8 Proposer une modèle isostatique cinétiquement équivalent.

Cycle 02

Application 1

Application 01

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

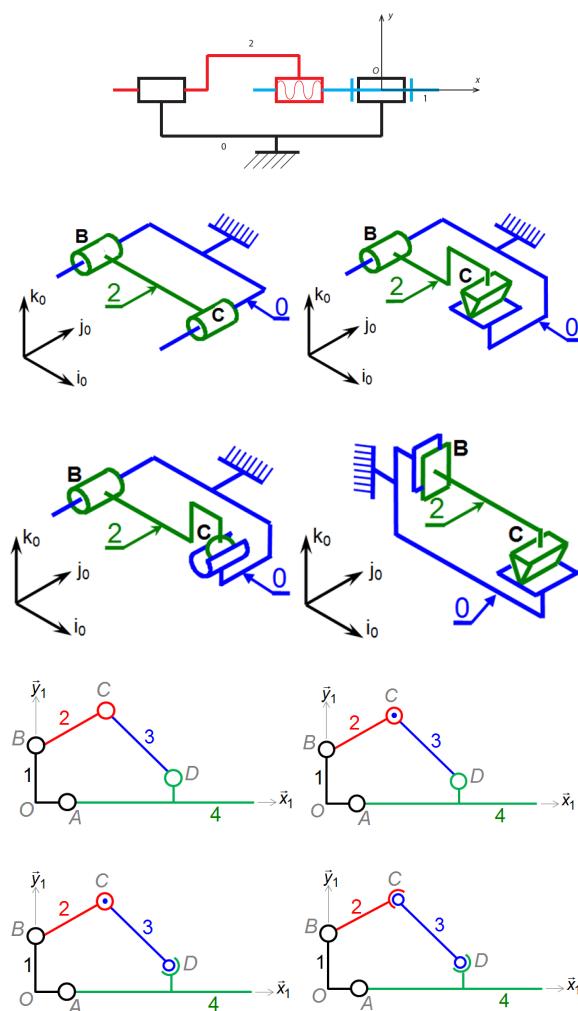
Exercice 1 – Applications directes

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

Question 1 Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

Question 2 Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

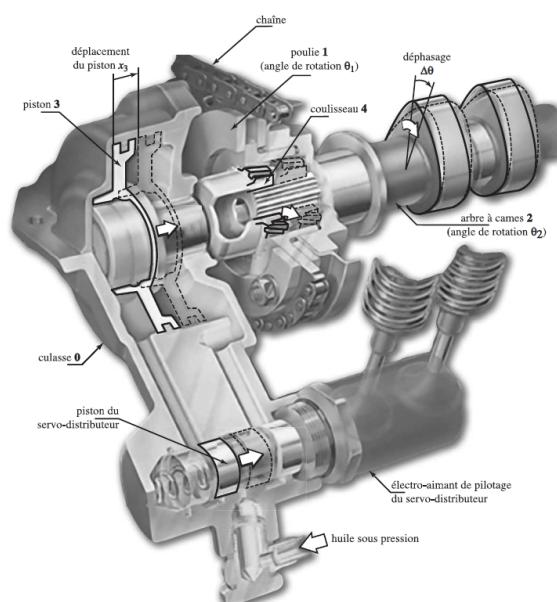
- des conditions d'assemblage (intuitivement);
- un modèle isostatique.



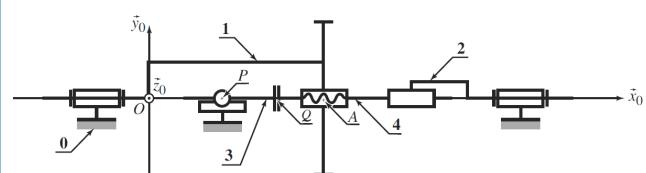
Exercice 2 – Déphasage d'arbre à cames

Banque PT SIA – 2008.

L'optimisation d'un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie **1** (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l'arbre à came **2** un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.



On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse **0**, la poulie d' entraînement **1**, l' arbre à cames **2**, le piston **3** et le coulisseau **4**.



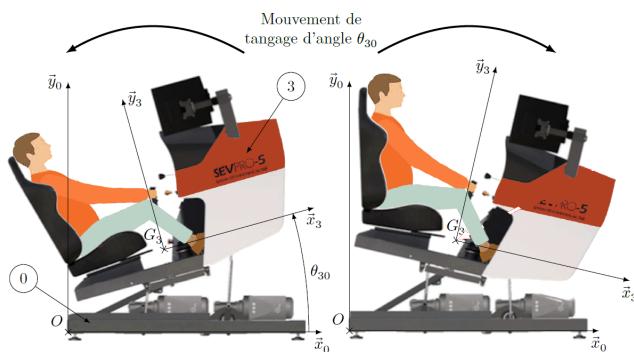
Question 3 Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

Question 4 Déterminer le degré d'hyperstatisme en précisant la démarche utilisée. (On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

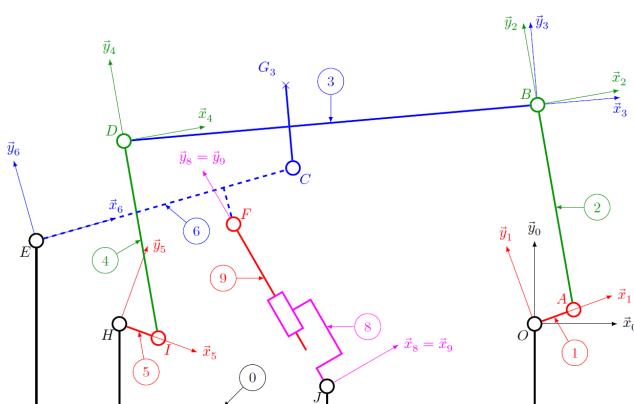
Centrale Supelec 2017 – PSI.

On s'intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d'assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres H et O .



On propose le modèle plan suivant (la pièce 6 est en traits pointillés pour la démarquer des autres pièces).

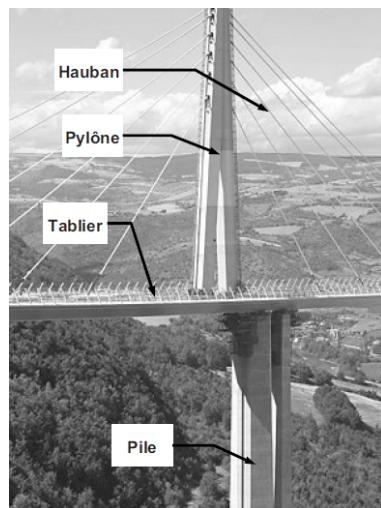
Question 5 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.



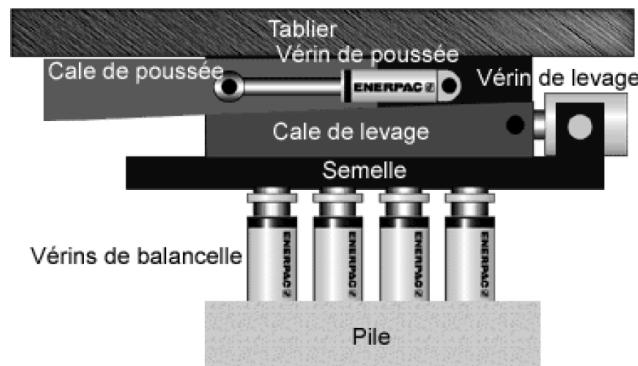
Exercice 5 – Pousseur de tablier

Banque PT 2008 – SIC.

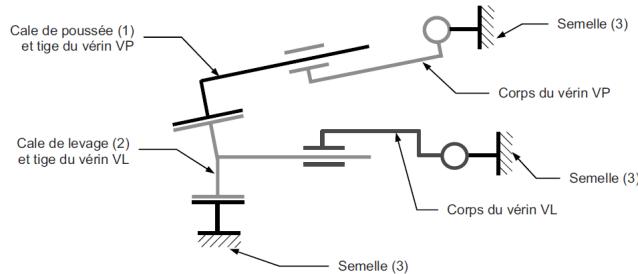
Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».



Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.



On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.



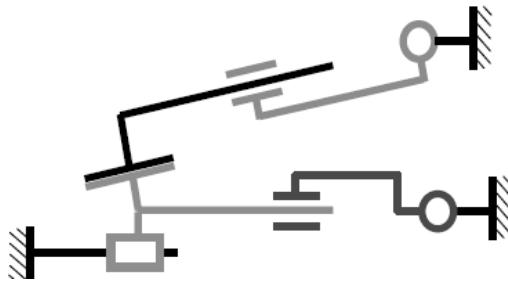
Question 6 Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

Question 7 Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

Question 8 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

Question 9 Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

Question 10 Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique?

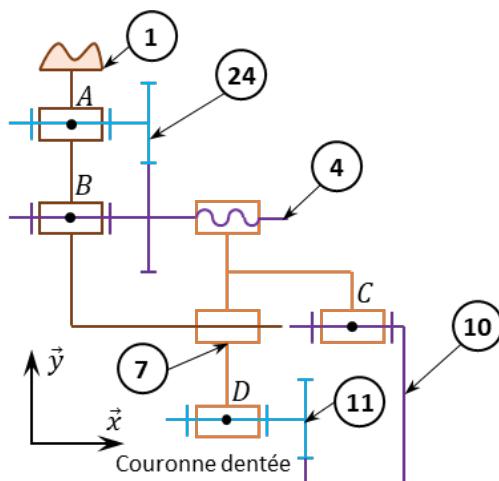
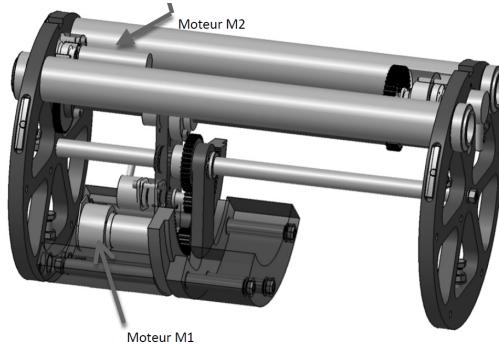


Exercice 6 – Planeur sous marin

Banque PT 2012 – SIC.

Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédéfini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement **24** et radialement **11**.



Question 11 Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

On supposera que la liaison entre deux roues dentées est une liaison ponctuelle.

Question 12 Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

TD 1



Suspension de l'AddBike

Agrégation Sciences Industrielles de l'Ingénieur – 2018

Savoirs et compétences :

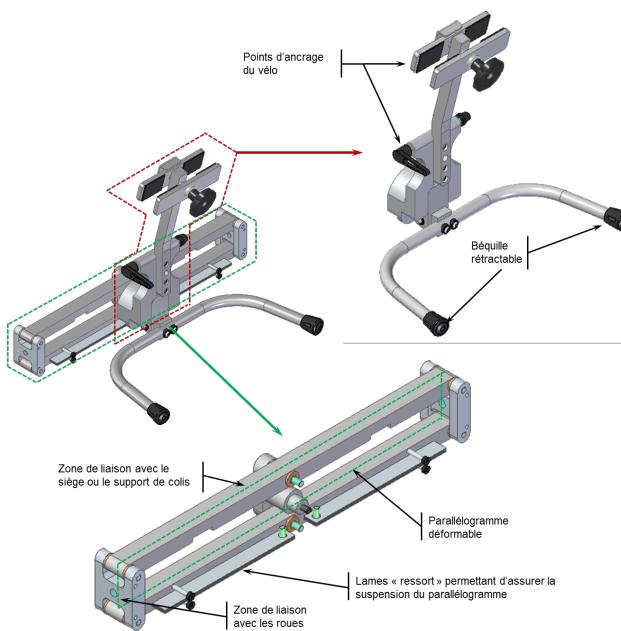
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Présentation

L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

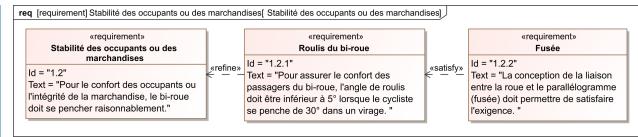


Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

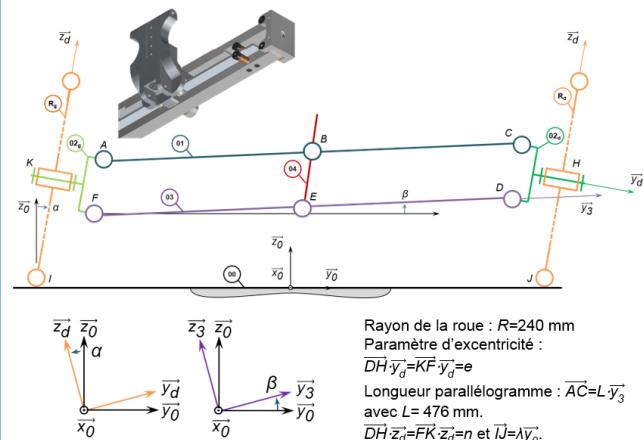


Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

Objectif Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser $\beta = 5^\circ$ lorsque le cycliste penche le mât vertical de $\alpha = 30^\circ$.



Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme $ACDF$ donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal \vec{x}_0 . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales ; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal \vec{x}_0 .



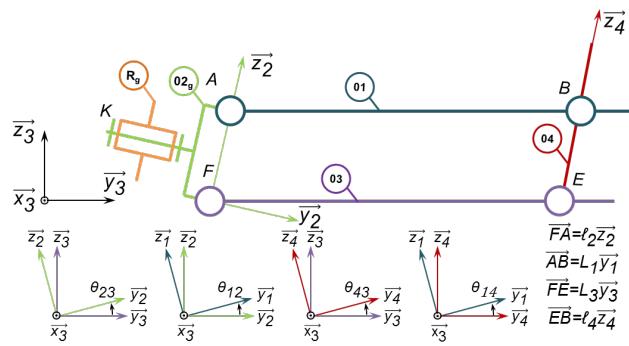
L'angle β correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

Question 1 En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle β et l'excentricité e des fusées 02g et 02d.

Question 2 En déduire une valeur de l'excentricité e permettant de valider l'exigence 1.2.1.

Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

Objectif Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.



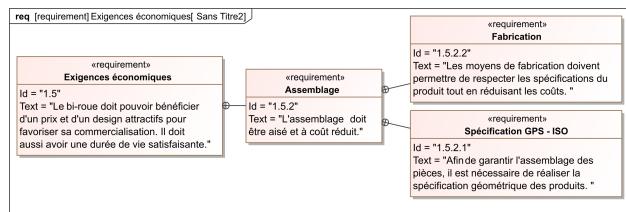
Question 4 Donner les torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}(2/3)\}, \{\mathcal{V}(1/2)\}, \{\mathcal{V}(4/3)\}, \{\mathcal{V}(1/4)\}$.

Question 5 En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

Question 6 En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

Synthèse

Question 7 Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.



Question 3 Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.

TD 2

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

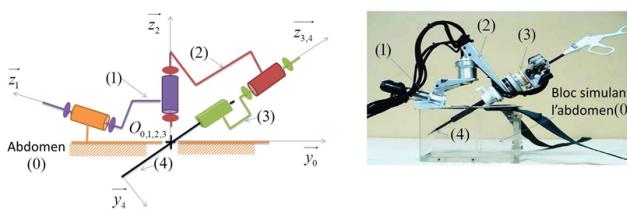
Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

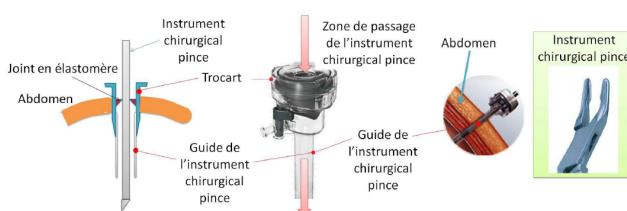
Mise en situation

Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.



On appelle trocart la pièce qui fait l'interface avec l'abdomen du patient et qui va guider l'ensemble des instruments.



La figure au verso donne un extrait du cahier des charges.

Travail demandé

On s'intéresse à la phase de vie pendant laquelle la pince est introduite dans le trocart au travers d'un guide (étanche). Une phase de calibration du robot démarre ensuite.

Objectif

- Modéliser la liaison entre l'abdomen et la pince (4) en analysant la chaîne ouverte de solides du robot.
- Analyser les conséquences de la fermeture de la chaîne par la liaison peau-trocart.

Dans cette phase, la pince du MC²E est dans l'abdomen du patient, via le trocart. On souhaite étudier ici quelques aspects de la géométrie et de la cinématique du robot liés notamment à la nécessité que le point d'incision $O_0 = O_{0,1,2,3}$ soit un point fixe.

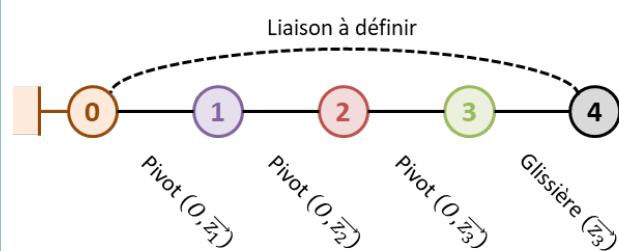
Le torseur cinématique du solide (i) par rapport au solide (j), réduit en P, sera noté :

$$\{\mathcal{V}(i/j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(i/j)} \\ \overrightarrow{V(P, i/j)} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{xij} & V_{xij} \\ \omega_{yij} & V_{yij} \\ \omega_{zij} & V_{zij} \end{array} \right\}_{P, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k}} .$$

Hypothèses

- L'abdomen (0) est supposé fixe.
- La pince (4) est déjà introduite dans l'abdomen (0) du patient.
- Il n'y a pas encore de contact avec l'organe.

On donne le graphe des liaisons du mécanisme ainsi modélisé.



La liaison entre la pince (4) et l'abdomen (0) n'est pas définie ici car elle est complexe : elle est notamment imposée par la forme du trocart, que l'on suppose lié à l'abdomen du patient. On va dans un premier temps considérer la chaîne ouverte de solides allant de (0) à (4) par l'intermédiaire des trois liaisons pivot et de la liaison glissière.

Question 1 On considère la chaîne ouverte de solides (0+1+2+3+4). Par la méthode de votre choix, définir le torseur cinématique de la liaison équivalente 4/0 noté $\{\mathcal{V}^{eq}(4/0)\}$. En déduire la mobilité cinématique m_c de cette chaîne de solides.

On envisage deux modélisations pour la liaison entre la pince (4) et la peau de l'abdomen par l'intermédiaire du trocart :

- modélisation 1 : liaison sphère-cylindre en O_0 d'axe (O_0, \vec{z}_3);
- modélisation 2 : liaison libre : pas de liaison entre le bâti et la pince.

Question 2 Dans le cadre des deux modélisations retenues, quels sont alors le degré d'hyperstatisme et la mobilité cinématique de la chaîne fermée. Compléter le tableau du document réponse concernant les implications du modèle retenu sur le robot et les interactions patient / robot. Quelle modélisation vous paraît la plus proche de la réalité? Argumenter votre réponse.

	Liaison linéaire annulaire	Liaison libre
$m_c =$		
$h =$		
Efforts au point d'insertion*		
Facilité de montage?*		
Rigidité du robot*		

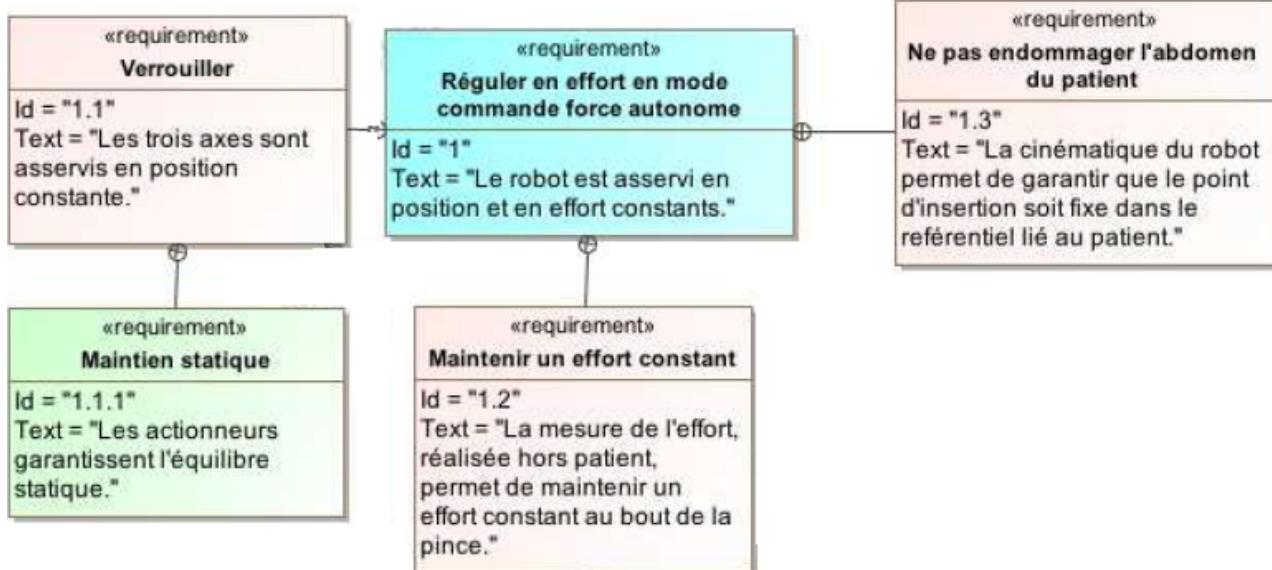
* : Remplir par oui ou non

Retour sur le cahier des charges

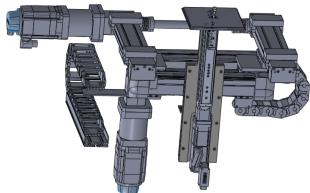
Question 3 Quelle exigence le mécanisme utilisé permet-il de satisfaire? Expliquer en 2 lignes comment cette exigence est satisfaite.

Corrigé résumé

- Liaison sphère cylindre d'axe (O, \vec{z}_3).
- Cas 1 : $m_c = 4, h = 2$. Cas 2 : $m_c = 4, h = 0$.
- Exigence 1.3.



TD 3



Système de dépose de poudre

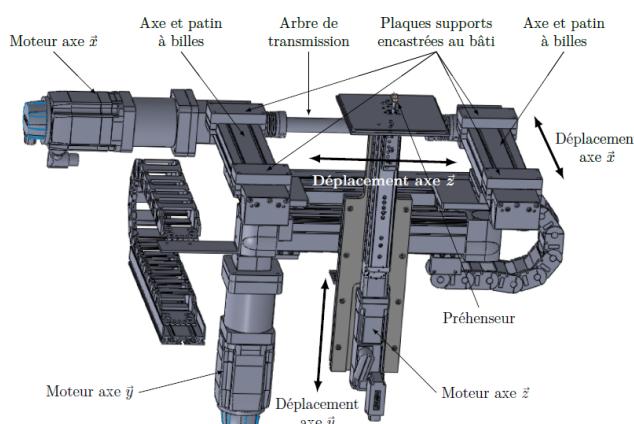
Concours Centrale Supelec – TSI 2016

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Mise en situation

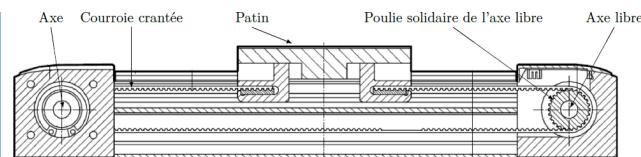
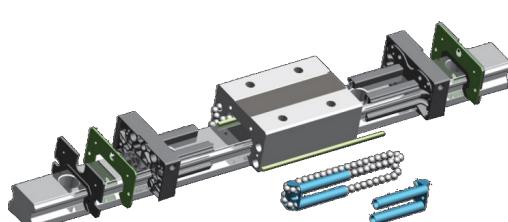
On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.



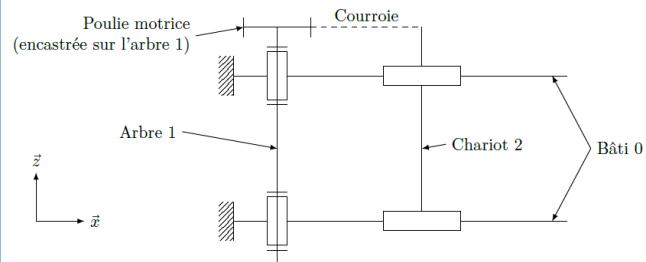
Objectif L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe \vec{x} et de justifier certains choix technologiques.

Le préhenseur repose sur des plaques support qui le lient en liaison encastrement au bâti. Les rails guidant le préhenseur suivant l'axe \vec{x} supportent les autres rails guidant les déplacement du préhenseur suivant les axes \vec{y} et \vec{z} .

Le guidage est réalisé par deux axes munis de patins à billes.



Le moteur actionnant l'axe \vec{x} est lié à un réducteur qui entraîne deux ensembles poulies-courroies. Les poulies motrices sont guidées chacune par deux roulements à billes. Les deux poulies motrices sont liées par un arbre de transmission (Arbre 1). La figure suivante représente le schéma cinématique de l'ensemble.

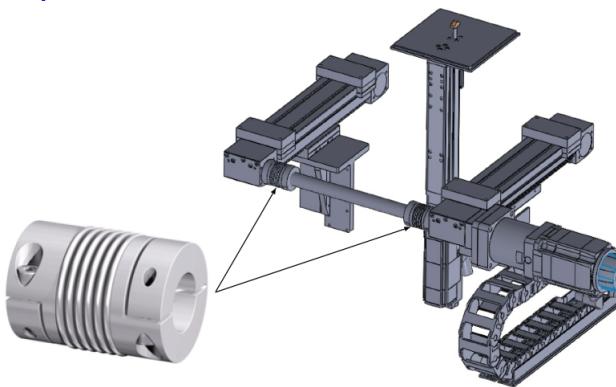


Travail demandé

La courroie étant un élément déformable, on n'en tiendra pas compte dans l'étude suivante.

Question 1 Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

Pour lever l'hyperstatisme de cette liaison, le constructeur a mis en place deux soufflets métalliques en les implantant de part et d'autre de l'arbre de transmission (figure suivante).



Un soufflet métallique est un joint d'accouplement autorisant des défauts d'alignement radiaux, axiaux et angulaires. Ainsi, pour un soufflet liant deux solides S_1 et S_2 positionné en un point P et dont l'axe du soufflet est (P, \vec{u}) :

- le torseur statique transmissible est de la forme

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})};$$
- le torseur cinétique du mouvement de S_1 par rapport à S_2 est de la forme $\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x12} \\ q_{12} & v_{y12} \\ r_{12} & v_{z12} \end{Bmatrix}_{P(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$.

L'introduction des deux soufflets métalliques impose de décomposer l'arbre 1 de la question 1 en 3 solides dis-

tincts 1_A , 1_B et 1_C , le solide 1_B étant lié aux deux solides 1_A et 1_C par les deux soufflets métalliques.

Question 2 Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

Question 3 Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

Question 4 En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

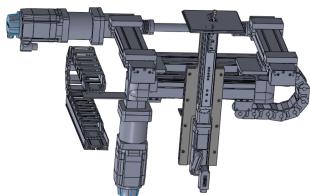
Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

Corrigé résumé

1. $h = 5$.
2. ...
3. $m = 6$.
4. $h = 0$.
5. ...

TD 3



Système de dépose de poudre

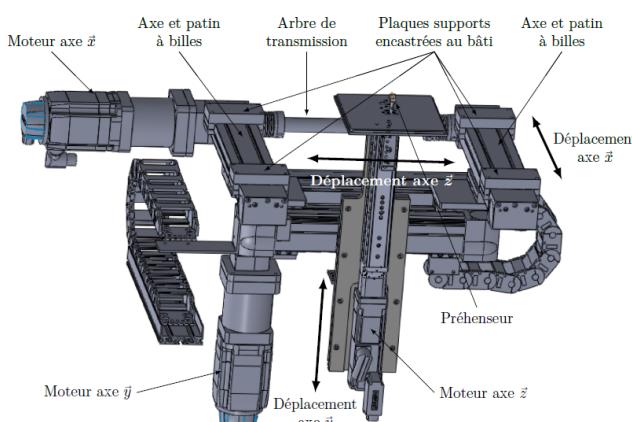
Concours Centrale Supelec – TSI 2016

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Mise en situation

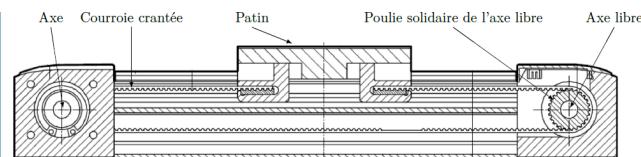
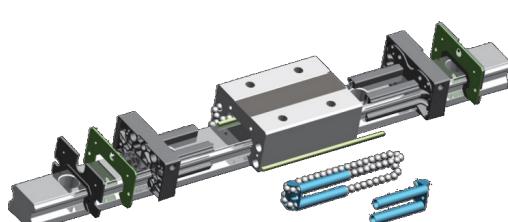
On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.



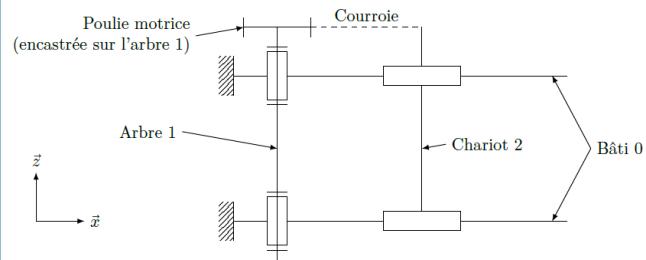
Objectif L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe \vec{x} et de justifier certains choix technologiques.

Le préhenseur repose sur des plaques support qui le lient en liaison encastrement au bâti. Les rails guidant le préhenseur suivant l'axe \vec{x} supportent les autres rails guidant les déplacement du préhenseur suivant les axes \vec{y} et \vec{z} .

Le guidage est réalisé par deux axes munis de patins à billes.



Le moteur actionnant l'axe \vec{x} est lié à un réducteur qui entraîne deux ensembles poulies-courroies. Les poulies motrices sont guidées chacune par deux roulements à billes. Les deux poulies motrices sont liées par un arbre de transmission (Arbre 1). La figure suivante représente le schéma cinématique de l'ensemble.

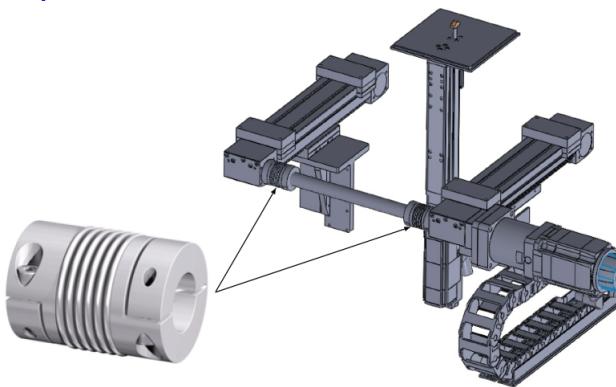


Travail demandé

La courroie étant un élément déformable, on n'en tiendra pas compte dans l'étude suivante.

Question 1 Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

Pour lever l'hyperstatisme de cette liaison, le constructeur a mis en place deux soufflets métalliques en les implantant de part et d'autre de l'arbre de transmission (figure suivante).



Un soufflet métallique est un joint d'accouplement autorisant des défauts d'alignement radiaux, axiaux et angulaires. Ainsi, pour un soufflet liant deux solides S_1 et S_2 positionné en un point P et dont l'axe du soufflet est (P, \vec{u}) :

- le torseur statique transmissible est de la forme

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})};$$
- le torseur cinématique du mouvement de S_1 par rapport à S_2 est de la forme $\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x12} \\ q_{12} & v_{y12} \\ r_{12} & v_{z12} \end{Bmatrix}_{P(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$.

L'introduction des deux soufflets métalliques impose de décomposer l'arbre 1 de la question 1 en 3 solides dis-

tincts 1_A , 1_B et 1_C , le solide 1_B étant lié aux deux solides 1_A et 1_C par les deux soufflets métalliques.

Question 2 Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

Question 3 Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

Question 4 En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

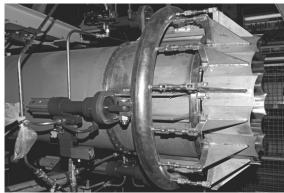
Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

Corrigé résumé

1. $h = 5$.
2. ...
3. $m = 6$.
4. $h = 0$.
5. ...

TD 4



Tuyère à ouverture variable

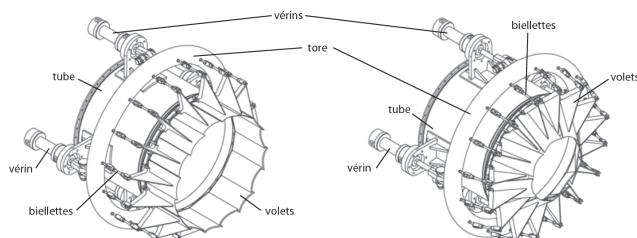
Banque PT – SIA 2011

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

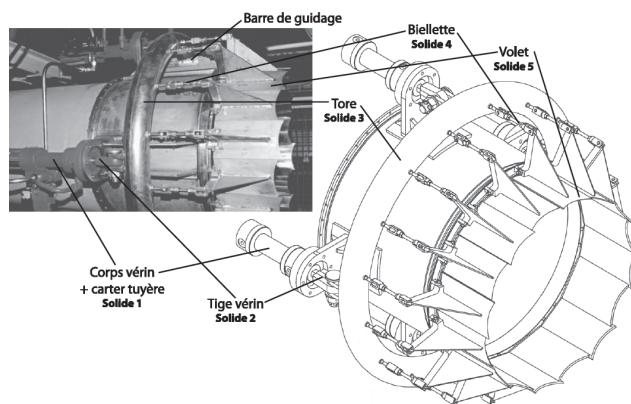


Objectif L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
 - position de l'axe de rotation : orthogonal;
 - débattement angulaire : $40^\circ \pm 0,5^\circ$;
 - précision angulaire : $0,2^\circ$;
- commande simultanée des 16 volets :
 - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère;
 - nombre d'actionneurs : minimum;
 - rigidité globale : $\Delta x < 0,2 \text{ mm}$;
 - temps de montée en vitesse : inférieur à 0,1 s.
- adaptation aux efforts aérodynamiques :
 - résistance : 50% de la limite élastique;
 - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.



Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide i : $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison L_k , d'un solide j par rapport à un solide i (ou par rapport au référentiel \mathcal{R}_i lié à celui-ci) réduit en A , sera noté $\{\gamma_k\} = \left\{ \begin{array}{c} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$ où $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée associée à la liaison L_k .

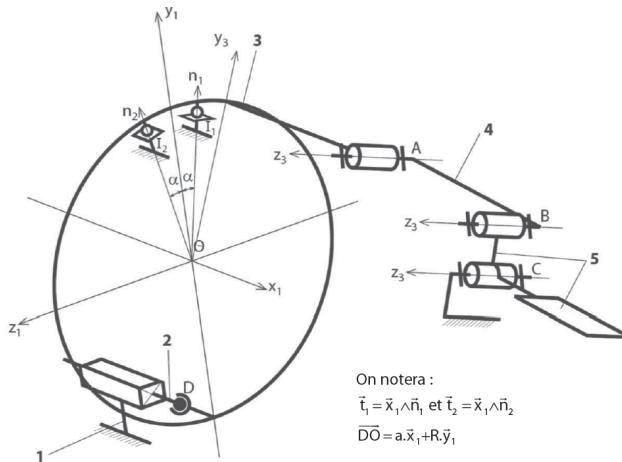
Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison L_k du solide i sur le solide j , réduit en A sera noté $\{\mathcal{T}_k\} = \left\{ \begin{array}{c} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$ où $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée associée à la liaison L_k .

Étude d'une commande avec un seul actionneur

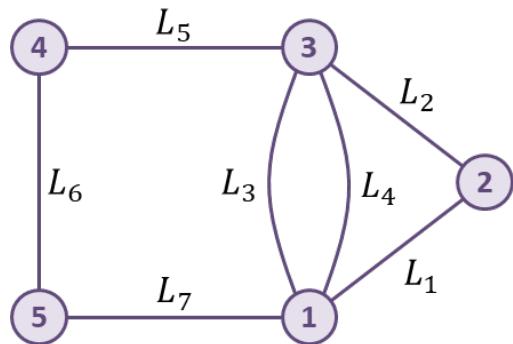
Objectif On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

On précise que le solide 2 représente la tige du vérin

et que les liaisons en I_1 et I_2 représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.



Question 6 Compléter le graphe de structure.



Question 7 Le modèle proposé est-il isostatique ?

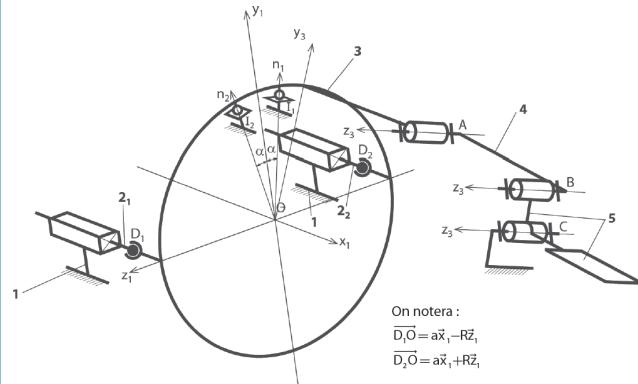
Question 8 Déterminer la liaison équivalente L_{eq34} aux deux liaisons L_3 et L_4 situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq34} .

Question 9 Déterminer la liaison équivalente L_{eq12} aux deux liaisons L_1 et L_2 situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq12} .

Question 10 Déterminer la liaison équivalente L_{eq12} aux deux liaisons L_{eq34} et L_{eq12} situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq} . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

Étude d'une commande avec deux actionneurs

Objectif On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.



Question 11 À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente L_{eq1} aux liaisons L_{11} , L_{21} et la liaison équivalente L_{eq2} aux liaisons L_{12} et L_{22} entre les solides 1 et 3.

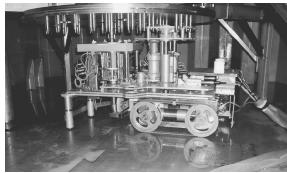
Question 12 Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente L_{eq1} aux deux liaisons L_{eq34} , L_{eq1} et L_{eq2} situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}'_{eq} puis le torseur cinématique cinématique \mathcal{V}'_{eq} . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins ?

Étude de la structure adoptée par le constructeur

Objectif On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

Question 13 Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière ? Vous expliquez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez-vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure ?

TD 5



Système d'inspection pour tubes de guidage

Banque PT – SIA 2009

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Mise en situation

Objectif L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Les figures suivantes donnent quelques éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude. On y trouve notamment l'extrémité de la perche sur laquelle est fixée à la tête d'accrochage. La liaison démontable est réalisée par trois griffes pivotantes qui viennent se loger dans une gorge de la pièce insérée dans le corps de l'outil d'inspection. Le pivotement des griffes est commandé par une tige coulissant dans la perche sur toute sa longueur puisque la commande pneumatique ou manuelle est effectuée en haut de la perche, hors d'eau. On souhaite valider deux des critères d'appréciation :

- critère 1 : la commande par obstacle dans les deux sens (accrochage et décrochage);
- critère 2 : la durée de l'accrochage.

Les notations adoptées sont les suivantes.

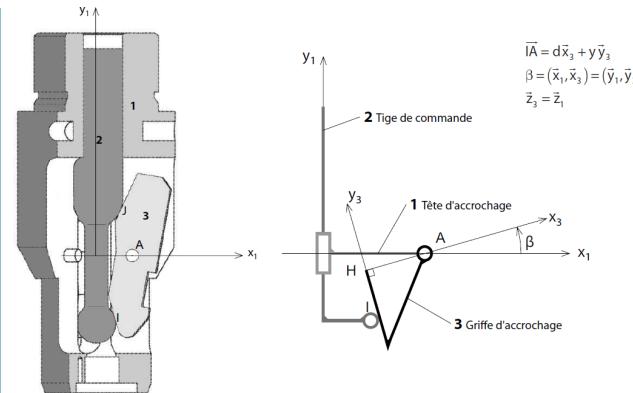
La base orthonormée directe liée au solide i est notée $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Le torseur cinématique du mouvement d'un solide j par rapport à un solide i (ou par rapport au référentiel \mathcal{R}_i lié à celui-ci), réduit en A , sera noté $\{\mathcal{V}(j/i)\} = \left\{ \frac{\Omega(j/i)}{V(A, j/i)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} p_{ji} \vec{x} + q_{ji} \vec{y} + r_{ji} \vec{z} \\ u_{ji} \vec{x} + v_{ji} \vec{y} + w_{ji} \vec{z} \end{array} \right\}_A$.

Le torseur des actions mécaniques exercées par un solide i sur un solide j , réduit en A sera noté $\{\{\mathcal{F}(i \rightarrow j)\}\} = \left\{ \frac{R(i \rightarrow j)}{M(A, i \rightarrow j)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_A$.

Validation de la transmission du mouvement de commande

Étude préliminaire d'un modèle simplifié

On adopte dans un premier temps, un modèle simplifié, pour une seule griffe, défini par le schéma cinématique donné dans la figure suivante.



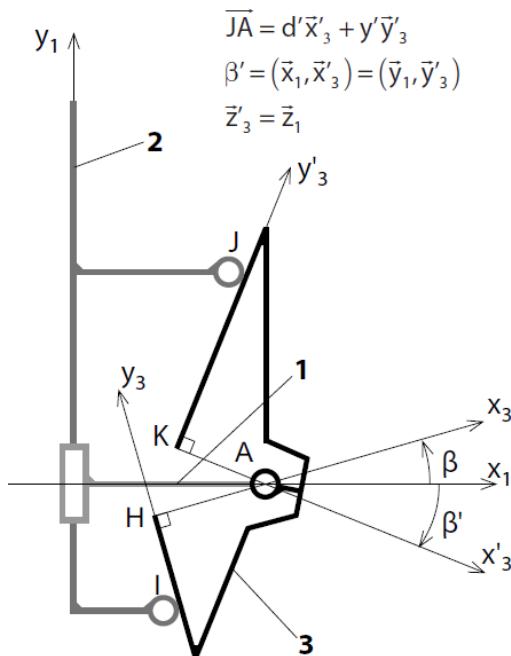
Question 1 En considérant que le modèle est spatial, donner le graphe de structure (graphe des liaisons) associé au schéma cinématique proposé en précisant les éléments géométriques caractéristiques de chaque liaison puis la forme de leur torseur cinématique $\{\mathcal{V}(j/i)\}$, c'est-à-dire l'expression des éléments de réduction en fonction des paramètres p_{ij} , q_{ij} , r_{ij} , u_{ij} , v_{ij} et w_{ij} dans la base locale de la liaison.

Question 2 Établir le système de six équations, en projection dans la base \mathcal{B}_3 liée au solide 3, traduisant la fermeture cinématique du mécanisme, en fonction des paramètres cinématiques introduits à la question précédente et des paramètres géométriques définis sur la figure précédente.

Question 3 Évaluer le rang du système d'équations obtenu et en déduire le degré de mobilité du mécanisme. On supposera que le paramètre cinématique d'entrée w_{21} est connu et que l'angle β est différent de zéro. Si on fait l'hypothèse que les liaisons sont parfaites, ce modèle est-il hyperstatique ?

Étude du modèle associé à la commande d'une griffe

Afin d'obtenir une commande par obstacle dans les deux sens de commande, le modèle est complété par une seconde liaison sphère-plan, telle que le schéma cinématique devienne celui de la figure suivante.



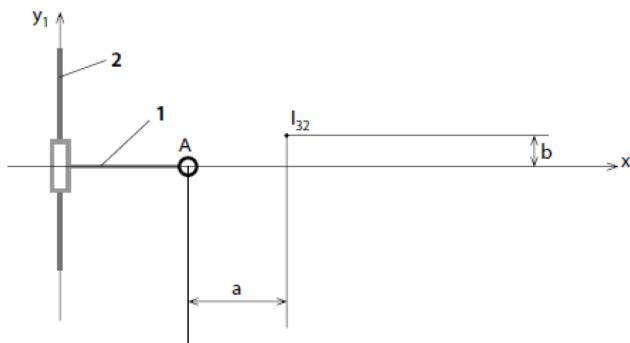
$$\begin{aligned}\overrightarrow{JA} &= d' \vec{x}_3 + y' \vec{y}_3 \\ \beta' &= (\vec{x}_1, \vec{x}'_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}'_3) \\ \vec{z}'_3 &= \vec{z}_1\end{aligned}$$

Objectif On cherche ici à montrer qu'il est impossible d'obtenir ce double contact avec la géométrie actuelle.

Question 4 En vous appuyant sur les résultats précédents et en supposant que les angles β et β' sont différents de zéro, donner la valeur du degré de mobilité de ce modèle puis son degré d'hyperstatisme. Que concluez-vous de ces résultats? On notera $\{\mathcal{V}(3/2)\}$ le torseur cinématique de la liaison sphère-plan de centre J dont on précisera la normale.

Question 5 En supposant que les normales, à préciser, aux liaisons sphère-plan, de centres I et J , sont concourantes au point que l'on notera I_{32} , déterminer, en utilisant l'équivalence statique, la liaison équivalente entre les solides 3 et 2 au point I_{32} .

Question 6 Compléter le schéma cinématique avec la liaison équivalente.



Question 7 Calculer le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé et comparer cette valeur à celle trouvée à la question ??, en supposant les valeurs de a et b quelconques, définies par $\overrightarrow{AI}_{32} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1$.

Question 8 Indiquer à quelle condition sur a et/ou b , le degré de mobilité serait égal à 1. Commentez ce résultat en regard de l'objectif énoncé plus haut.

Les valeurs de a et b étant des fonctions du temps, on constate que la condition trouvée ne peut être réalisée à chaque instant du mouvement d'accrochage, en conservant, sur la pièce 3, deux rampes rectilignes pour les contacts ponctuels en I et J .

Une simulation informatique du mécanisme montre que si on décide de conserver la rampe rectiligne uniquement au contact en I , il est nécessaire d'avoir un profil bombé, donné sur la figure suivante, pour le contact en J .



Question 9 Expliquer et effectuer, le tracé permettant de trouver exactement la position du point de contact J , entre la surface sphérique de la tige de commande et le profil bombé de la griffe, obtenu dans la position représentée.

Question 10 Le bureau d'étude a finalement décidé de conserver les deux rampes rectilignes repérées ΔI et ΔJ sur la figure. Quelle conséquence a ce choix sur le fonctionnement du mécanisme d'accrochage? Peut-on valider le critère étudié de la FT 2.1.1?

Validation de la transmission de l'effort de commande

On souhaite vérifier que le mouvement de commande de la griffe est toujours possible. Pour cela, on se place dans la configuration du modèle simplifié donné figure 5 de l'Annexe 4. On suppose que seule la liaison sphère-plan de centre I n'est pas parfaite avec un coefficient de frottement au contact f de 0,2. On suppose négligeable le poids de la griffe 3 devant les actions mécaniques transmises. On précise que $d = 10\text{ mm}$ et que y varie entre 20 et 32 mm.

Question 11 Préciser, en justifiant votre réponse, si un phénomène d'arc-boutement peut se produire au cours du mouvement de la griffe? Peut-on valider la solution proposée?