

## DDS 4

### Les p'tits devoirs du soir Xavier Pessoles

#### Exercice 118 – Robot de maraîchage Oz 440 \*

A3-01

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** À l'aide du diagramme de définition de blocs disponible, réaliser le diagramme correspondant à la chaîne fonctionnelle de l'ensemble groupe propulsion droit du robot.

#### Exercice 117 – Train simple \*

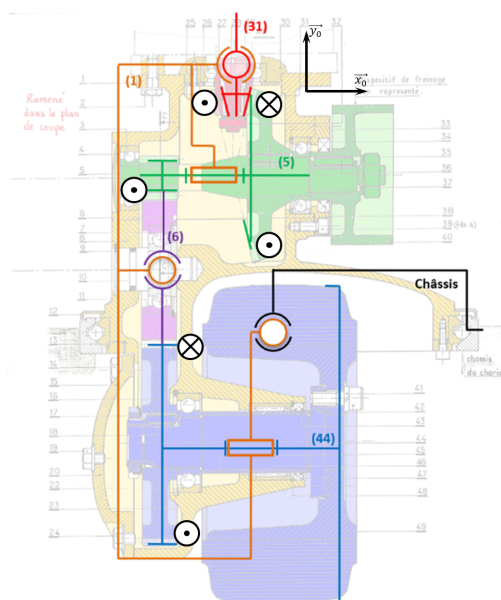
D'après Florestan Mathurin.

A3-05

C2-06

**Question 1** Identifier les classes d'équivalence cinématique sur le dessin d'ensemble.

**Question 2** Construire le schéma cinématique du réducteur dans le même plan que le dessin.



**Question 3** Compléter le tableau donnant les caractéristiques des roues et pignons.

Repère de la roue	Module $m$ (mm)	Nombre de dents $Z$	Diamètre primitif $D$ (mm)
27	1,5	16	24
35	1,5	84	126
5	1,5	14	21
11	1,5	56	84
16	1,5	75	112,5

**Question 4** Après avoir proposé un paramétrage, indiquer dans quel sens tourne la roue si le moteur 28 (31) tourne dans le sens positif.

Voir figure précédente. Si le moteur tourne dans le sens positif, la roue tourne dans le sens négatif.

**Question 5** Pour une vitesse de 1500 tr/min en sortie de moteur, déterminer la vitesse de rotation de la roue. Le rayon de la roue est de 150 mm. Quelle est la vitesse du véhicule ?

Le rapport de réduction de la transmission est le suivant :  $k = \frac{Z_{27}Z_5Z_{11}}{Z_{35}Z_{11}Z_{16}} = \frac{16 \cdot 14}{84 \cdot 75} = 0,0355$ .

La vitesse de rotation de la roue est donc de  $53,33 \text{ tr min}^{-1}$  soit  $5,59 \text{ rad s}^{-1}$ . On en déduit la vitesse du véhicule :  $5,59 \times 0,15 = 0,84 \text{ m s}^{-1} \simeq 3 \text{ km h}^{-1}$ .

#### Exercice 116 – Mouvement R \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer la loi du mouvement de 1 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 115 – Mouvement TT – \*

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur  $\vec{j}_0$  puis le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0$

#### Exercice 114 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(B, F)$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, F)$ .

#### Exercice 113 – Mouvement RR \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 112 – Train simple \*

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{03}}{\omega_{13}} = -\frac{Z_1}{Z_0}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = -\frac{Z_1}{Z_0}$   
 $\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{30} - \omega_{10}} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \omega_{30} = -\frac{Z_1}{Z_0} \omega_{30} + \frac{Z_1}{Z_0} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right) = \frac{Z_1}{Z_0} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \omega_{10}$ .

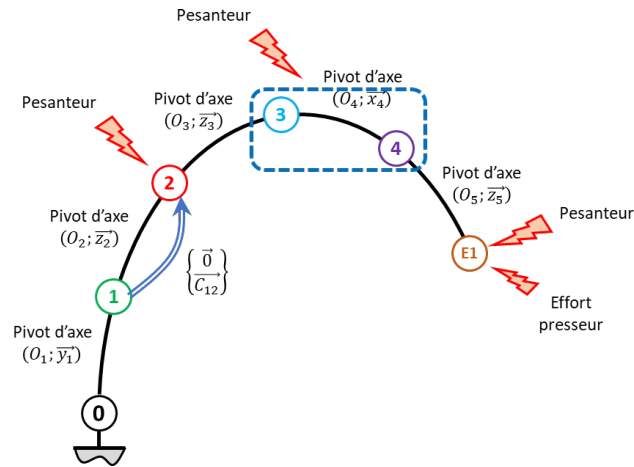
#### Exercice 111 – Mouvement RT \*

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur  $\vec{i}_1$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$

#### Exercice 110 – Robot avion \*\*

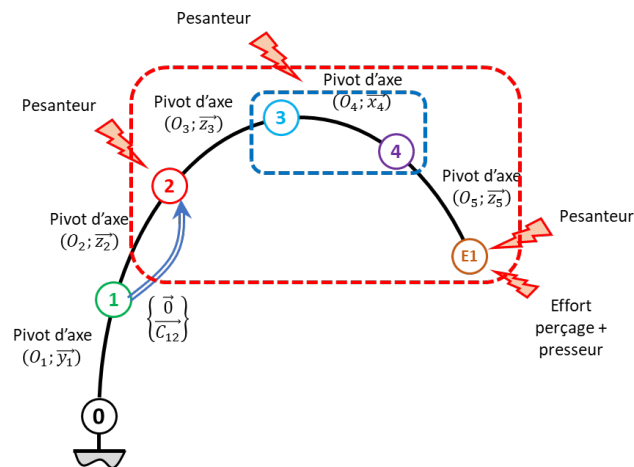
**Question 1** Réaliser le graphe de structure de l'ensemble en précisant les liaisons et les actions mécaniques extérieures.



**Question 2** Quel est l'ensemble  $\Sigma$  à isoler afin de déterminer le couple  $C_{12}$ .

En isolant l'ensemble  $\Sigma = \{2 + 3 + 4 + E1\}$  on ne fera apparaître **QUE**  $C_{12}$  et les actions mécaniques extérieures. Les actions de liaison 2-3, 3-4, 4-E1 **n'interviennent pas**.

**Question 3** Réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à  $\Sigma$  et écrire les éléments de réduction de chaque torseur d'actions mécaniques.



Bilan des actions mécaniques :

- pivot 1-2 et couple moteur de 1 sur 2;
- pesanteur sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_2 g \vec{y}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2}$ . On a par ailleurs  $\overline{\mathcal{M}}(O_2, \text{pes} \rightarrow 2) = \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge -M_2 g \vec{y}_1 = \frac{1}{2} L_3 \vec{x}_2 \wedge -M_2 g \vec{y}_1 = -\frac{1}{2} M_2 g L_3 \cos \theta_{12} \vec{z}_0$ ;
- pesanteur sur 3 et 4 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 3+4)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_{34} g \vec{y}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_3}$ . On a par ailleurs  $\overline{\mathcal{M}}(O_2, \text{pes} \rightarrow 3+4) = \overrightarrow{O_2 G_3} \wedge -M_{34} g \vec{y}_1 = \left( L_3 \vec{x}_2 + \frac{1}{3} L_4 \vec{x}_3 + L_5 \vec{y}_3 \right) \wedge -M_{34} g \vec{y}_1 = -M_{34} g \left( L_3 \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 + \frac{1}{3} L_4 \vec{x}_3 \wedge \vec{y}_1 + L_5 \vec{y}_3 \wedge \vec{y}_1 \right) = -M_{34} g \left( L_3 \cos \theta_{12} + \frac{1}{3} L_4 \cos \theta_{13} + L_5 \cos \theta_{13} - l_5 \sin \theta_{13} + L_7 \cos \theta_{15} \right) \vec{z}_0$ ;
- pesanteur sur  $E1$  :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow E1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_{E1} g \vec{y}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_5}$ . On a par ailleurs  $\overline{\mathcal{M}}(O_2, \text{pes} \rightarrow E1) = \overrightarrow{O_2 G_5} \wedge -M_{E1} g \vec{y}_1 = -M_{E1} g \left( L_3 \vec{x}_2 + L_4 \vec{x}_3 + L_5 \vec{x}_3 + l_5 \vec{y}_3 + L_7 \vec{x}_5 \right) \wedge \vec{y}_1 = -M_{E1} g \left( L_3 \cos \theta_{12} + L_4 \cos \theta_{13} + L_5 \cos \theta_{13} - l_5 \sin \theta_{13} + L_7 \cos \theta_{15} \right) \vec{z}_0$ ;
- effort presseur + perçage  $\{\mathcal{T}(\text{Tronçon} \rightarrow E1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} -F - P & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{array} \right\}_{P, \mathcal{R}_5}$ . On a par ailleurs  $\overline{\mathcal{M}}(O_2, \text{Tronçon} \rightarrow E1) =$

$$\begin{aligned}\vec{O_2P} \wedge (-F-P)\vec{x_5} &= (L_3\vec{x_2} + L_4\vec{x_3} + L_5\vec{x_3} + l_5\vec{y_3} + L_8\vec{x_5}) \wedge (-F-P)\vec{x_5} = -(F+P)(L_3\vec{x_2} \wedge \vec{x_5} + L_4\vec{x_3} \wedge \vec{x_5} + L_5\vec{x_3} \wedge \vec{x_5} + l_5\vec{y_3} \wedge \vec{x_5}) \\ &= -(F+P)\left(L_3\sin(\theta_{15}-\theta_{12}) + (L_4+L_5)\sin(\theta_{15}-\theta_{13}) + l_5\sin\left(\theta_{15}-\theta_{13}-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{z_0}.\end{aligned}$$

**Question 4** Quel théorème doit-être appliqué et sur quel axe de projection, pour déterminer le couple  $C_{12}$  ?

Pour ne pas faire apparaître les actions de la liaison 1-2 il faudra réaliser un théorème du moment statique en  $O_2$  en projection sur  $\vec{z_2}$  (la liaison pivot n'a pas de composante en ce point et sur cette projection).

$$\begin{aligned}\text{On a donc : } -\frac{1}{2}M_2g L_3 \cos \theta_{12} - M_{34}g \left( L_3 \cos \theta_{12} + \frac{1}{3}L_4 \cos \theta_{12} - L_5 \sin \theta_{13} \right) - M_{E1}g (L_3 \cos \theta_{12} + L_4 \cos \theta_{13} + L_5 \cos \theta_{13} - l_5 \sin \theta_{13} + \\ (F+P)\left( L_3 \sin(\theta_{15}-\theta_{12}) + (L_4+L_5)\sin(\theta_{15}-\theta_{13}) + l_5 \sin\left(\theta_{15}-\theta_{13}-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 0.\end{aligned}$$

**Question 5** Déterminer l'équation littérale du couple  $C_{12}$  en fonction de  $g, F, P, M_2, M_{34}, M_{E1}, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, \theta_{12}, \theta_{15}$ .

$$\text{On a } C_{12} - \frac{1}{2}M_2g L_3 \cos \theta_{12} - M_{34}g \left( L_3 \cos \theta_{12} + \frac{1}{3}L_4 \cos \theta_{12} \right) - M_{E1}g (L_3 \cos \theta_{12} + L_4 + L_5 + L_7 \cos \theta_{15}) - (F+P)(L_3 \sin(\theta_{15}-\theta_{12}) + (L_4 +$$

Les valeurs du robot considéré sont :

- $M_2 = 264 \text{ kg}, M_{34} = 430 \text{ kg}, M_{E1} = 150 \text{ kg}, P = 150 \text{ N}, F = 1000 \text{ N};$
- $L_1 = 0,405 \text{ m}, L_2 = 0,433 \text{ m}, L_3 = 1,075 \text{ m}, L_4 = 1,762 \text{ m}, L_5 = 0,165 \text{ m}, L_6 = 0,250 \text{ m}, L_7 = 0,550 \text{ m}, L_8 = 0,750 \text{ m}.$

**Question 6** Déterminer alors la valeur du couple  $C_{12}$ .

$$\begin{aligned}\text{On a } C_{12} - \frac{1}{2}M_2g L_3 \cos \theta_{12} - M_{34}g \left( L_3 \cos \theta_{12} + \frac{1}{3}L_4 \cos \theta_{12} \right) - M_{E1}g (L_3 \cos \theta_{12} + L_4 + L_5) - (F+P)(L_3 \cos(\theta_{12}) - (L_4 + L_5)) = \\ 0. \text{ Soit } C_{12} - \frac{1}{4}M_2g L_3 - M_{34}g \frac{1}{2} \left( L_3 + \frac{1}{3}L_4 \right) - M_{E1}g \left( L_3 \frac{1}{2} + L_4 + L_5 \right) - (F+P) \left( L_3 \frac{1}{2} - (L_4 + L_5) \right) = 0. \text{ Au final } C_{12} = \\ \frac{1}{4}M_2g L_3 + M_{34}g \frac{1}{2} \left( L_3 + \frac{1}{3}L_4 \right) + M_{E1}g \left( L_3 \frac{1}{2} + L_4 + L_5 \right) + (F+P) \left( L_3 \frac{1}{2} - (L_4 + L_5) \right).\end{aligned}$$

La valeur limite supérieure du couple  $C_{12}$  est fixée par le constructeur à 9000 Nm.

**Question 7** Le choix du robot permettra-t-il de garantir les conditions d'assemblage dans cette position ? Justifier la réponse.

$C_{12} = 6230 \text{ Nm}$ . Compatible avec le cahier des charges.

## Exercice 109 – Automate d'exploration de l'hémostase \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer la vitesse maximale  $V_M^x$  en fonction de  $x_M^{\max}, T$  et  $T_a$ .

La distance  $x_M^{\max}$  correspond à l'aire sous la courbe de la loi de commande de vitesse. On a alors  $x_M^{\max} = (T - T_a) V_M^x$   
 $\Leftrightarrow V_M^x = \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}.$

**Question 2** Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur  $C_m$  en fonction de  $V_x, T_a, J_e$  et  $\lambda$  durant les trois phases du mouvement.

- Expression de l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c(E/0) = \frac{1}{2}J_e(\omega_m^x)^2.$
- Puissance intérieure :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0.$
- Puissance extérieure :  $\mathcal{P}_{\text{ext}}(E) = C_m \omega_m^x.$
- Application du TEC :  $J_e \omega_m^x \dot{\omega}_m^x = C_m \omega_m^x$  soit  $J_e \dot{\omega}_m^x = C_m.$

On a alors sur chacune des phases :

- Phase 1 :  $C_m = J_e \dot{\omega}_m^x$  avec  $\dot{\omega}_m^x = \dot{V}_M^x / \lambda = \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$  et  $C_m = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}.$
- Phase 2 :  $C_m = 0.$
- Phase 3 :  $C_m = -J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}.$

**Question 3** Préciser à quel(s) instant(s)  $t$  la puissance fournie par le moteur est maximale ( $P_{\max}$ )

**Question 4** Exprimer cette puissance  $P_{\max}$  en fonction de  $V_M^x, \lambda, J_e$ , et  $T_a$ .

$$P_{\max} = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a} \omega_m^x = J_e \frac{(V_M^x)^2}{\lambda^2 T_a}.$$

**Question 5** Donner alors l'expression de  $P_{\max}$  en fonction de  $x_M^{\max}, \lambda, J_e$ , et  $T_a$ .

$$\text{On a alors } P_{\max} = J_e \frac{(x_M^{\max})^2}{\lambda^2 (T - T_a)^2 T_a}.$$

**Question 6** À partir de cette expression, montrer que  $P_{\max}$  est minimale pour un réglage du temps d'accélération

$$T_a \text{ tel que } T_a = \frac{T}{3}.$$

On résout  $\frac{dP_{\max}}{dT_a} = 0$  et on cherche la valeur de  $T_a$  pour laquelle  $P_{\max}$  est minimale.

**Question 7** Déterminer la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}^x$  que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé?

$$\text{On a } V_M^x = \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}. \text{ D'autre part, } V_M^x = \omega_M^x k R_p \text{ soit } \omega_M^x = \frac{V_M^x}{k R_p} = \frac{x_M^{\max}}{k R_p (T - T_a)}.$$

$$\text{AN : } \omega_M^x = \frac{550 \times 10^{-3}}{0,1 \times 20 \times 10^{-3} (1 - 1/3)} = \frac{550 \times 3}{4} = 412,5 \text{ rad s}^{-1} \text{ soit } 3941 \text{ tr min}^{-1}.$$

Cette valeur est bien compatible avec la vitesse du moteur.

#### Exercice 108 – Mouvement RR 3D \*\*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 107 – Système vis-écrou \* D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

A3-05

C2-06

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.

**Question 2** Réaliser la chaîne d'énergie-puissance partielle en définissant les noms des transmetteurs et les grandeurs d'entrée et de sortie cinématiques.

**Question 3** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du piston 3 et la vitesse de rotation du moteur 1.

#### Exercice 106 – Mouvement RR 3D \*\*

B2-14

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point A en projection sur  $\vec{i}_1$ .

**Question 2** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$ .

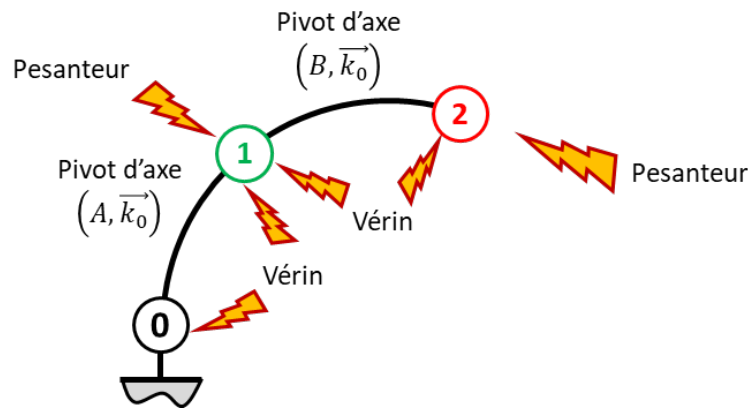
#### Exercice 105 – Mouvement RR \*

B2-14

B2-15

C1-05

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

- Pivot entre 0 et 1 :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 + Z_{01} \vec{k}_0 \\ M_{01} \vec{j}_0 + N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$ .
- Pivot entre 1 et 2 :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 + Z_{12} \vec{k}_1 \\ M_{12} \vec{j}_1 + N_{12} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$ .
- Pesanteur sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$ .
- Pesanteur sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$ .
- Moteur entre 0 et 1 :  $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$ .
- Moteur entre 1 et 2 :  $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$ .

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

- Pivot entre 0 et 1 :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$ .
- Pivot entre 1 et 2 :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$ .
- Pesanteur sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$ .
- Pesanteur sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$ .
- Moteur entre 0 et 1 :  $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$ .
- Moteur entre 1 et 2 :  $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$ .

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole 2 et on réalise le théorème du moment statique en A en projection sur  $\vec{k}_0$  ;
- on isole 1+2 et on réalise le théorème du moment statique en B en projection sur  $\vec{k}_0$ .

### Exercice 103 – Système de levage à multiples colonnes \*

A3-01

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Vous ne connaissez pas le diagramme FAST (je le sais). Quel(s) diagramme(s) SysML pourriez-vous utiliser pour remplacer les diagrammes « FAST ».

**Question 2** Réaliser la chaîne fonctionnelle du système de levage étudié.

**Exercice 103 – Calcul de moment\***

**B2-14** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\mathcal{M}(\vec{B}, \vec{F})$ .

**Question 2** Déterminer  $\mathcal{M}(\vec{O}, \vec{F})$ .

**Exercice 102 – Train simple \***

**A3-05**

**C2-06**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{40} + \omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40} + \omega_{03} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03})$   
 $\Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03}) - \omega_{03} \Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03}) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

$$0 = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} = \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4 + Z_1 Z_{22}}.$$

**Exercice 101 – Mouvement RR 3D \*\***

**B2-14**

**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

**Exercice 100 – Pèse camion \*\***

**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la relation entre  $F$  et  $M$ . Que dire de la position du camion sur la plate-forme ?

**Question 2** Déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons.

**Exercice 99 – Train simple \*** D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

**A3-05**

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du coulisseau et la vitesse de rotation du moteur.

**Exercice 98 – Automate d'exploration de l'hémostase \***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer  $\omega_b$  et  $v$ , les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de  $\theta$ ,  $r$  et  $R$ .

- On isole la bille.
- On réalise le bilan des actions mécaniques :
  - $\{\mathcal{T}(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ r T_I \vec{y}_1 \end{array} \right\}_G$ .
  - $\{\mathcal{T}(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t) \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ .
  - $\{\mathcal{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -f_v \vec{V}(G, \text{bille}/0) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ .
  - $\{\mathcal{T}(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} mg \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ .
- On calcule le torseur dynamique de la bille  $\{\mathcal{D}(\text{bille}/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m \overline{\Gamma(G, \text{bille}/0)} \\ -J \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$  avec  $\overline{\Gamma(G, \text{bille}/0)} = \frac{dV(G, \text{bille}/0)}{dt} =$

$$(R-r)\ddot{\theta} \vec{x}_1 - (R-r)\dot{\theta}^2 \vec{z}_1.$$

En appliquant le TRD à la bille en projection sur  $\vec{z}_1$ , on a :  $-N_I + F(t) \vec{x}_0 \cdot \vec{z}_1 + mg \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 = -m(R-r)\dot{\theta}^2 \iff -N_I + F(t) \sin \theta + mg \cos \theta = -m(R-r)\dot{\theta}^2$ .

En appliquant le TMD à la bille, en G, en projection sur  $\vec{y}_0$ , on a :  $r T_I = -J \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} \iff r T_I = -\frac{2}{5} m r^2 \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} \iff T_I = \frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta}$ .

**Question 2** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal  $N_I$  et tangentiel  $T_I$  du rail sur la bille sont liés à l'angle  $\theta$  par les équations suivantes :

$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$  et  $T_I = \frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta}$ . En appliquant le TRD à la bille en projection sur  $\vec{x}_1$ , on a :  $T_I + F(t) \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 + mg \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_1 - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta} \iff T_I + F(t) \cos \theta - mg \sin \theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$ .

En utilisant la question précédente, on a alors  $\frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta} + F(t) \cos \theta - mg \sin \theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$

$$\iff F(t) \cos \theta = mg \sin \theta + f_v(R-r)\dot{\theta} + \frac{7}{5} m(R-r)\ddot{\theta}$$

(Signe à revoir?).

**Question 3** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que  $\frac{7}{5} m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg \sin \theta = F(t) \cos \theta$ .

Si  $\theta$  est petit  $\frac{7}{5} m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg \theta = F(t)$ . En passant dans le domaine de Laplace, on a  $\frac{7}{5} m(r-R)p^2 \theta(p) +$

$$f_v(r-R)p\theta(p) + mg\theta(p) = F(p) \text{ soit } H(p) = \frac{1}{\frac{7}{5} m(r-R)p^2 + f_v(r-R)p + mg}$$

$$= \frac{1}{\frac{mg}{5g} (r-R)p^2 + \frac{f_v}{mg} (r-R)p + 1}$$

$$\text{On a donc } K_S = \frac{1}{mg}, \omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(r-R)}}, \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{f_v(r-R)}{mg} \text{ soit } \xi = \frac{f_v(r-R)}{2mg} \sqrt{\frac{5g}{7(r-R)}} = \frac{f_v}{2mg} \sqrt{\frac{5g(r-R)}{7}}$$

**Exercice 97 – Le banc balafre \***

**A3-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Sur le synoptique de la figure ??, on peut lire « Analog to Digital Converter Multiplexed ». Que signifie le terme multiplexé utilisé ici ?



**Question 2** Compte tenu de la sensibilité du capteur et de l'étendue des valeurs à mesurer, déterminer la gamme de mesure à régler sur l'amplificateur de charge.

**Question 3** En utilisant la documentation technique de l'amplificateur de charge, déterminer la plage de variation de la tension de sortie de l'amplificateur. En déduire le quantum de la conversion analogique numérique, puis la résolution de la mesure. Conclure vis-à-vis de la résolution demandée.

### Exercice 96 – Assemblage par frettage \*

**B2-14** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}}(Q)$ .

**Question 3** Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du frettage.

Exprimons le torseur des actions mécaniques sous sa forme locale en un point  $M$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{d\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

La forme globale au point O est alors donnée par :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{d\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_M$$

**Calculons  $\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}$ .**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} &= \int \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} = \iint p \vec{r} dS = -p \iint \vec{r} dS = -p \iint (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) dS \\ \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} &= -p \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) R d\theta dz = -pRL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) d\theta \\ \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} &= -pRL \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \vec{x} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \vec{y} d\theta \right) = -pRL \left( [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{x} + [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{y} \right) \\ \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} &= -pRL(2\vec{x} + 0\vec{y}) = -2pRL \vec{x} \end{aligned}$$

$2RL$  est appelée surface projetée du cylindre. Elle correspond au produit du diamètre par sa longueur.

**Calculons  $\overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)}$ .**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} &= \int \overrightarrow{d\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} &= -p \iint R \vec{r} \wedge \vec{r} dS = \vec{0} \end{aligned}$$

Au final,

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -2pRL \vec{x} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

**Question 4** Calculer  $\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}$  lorsque la pression est de la forme :  $p(\theta) = p_0 \cos \theta$  pour  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Dans ce cas :

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = \int d\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = \iint p(\theta) \overrightarrow{r} dS = -p_0 R \iint \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta dz$$

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -p_0 LR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

Au final :

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -p_0 LR \frac{\pi}{2} \overrightarrow{x}$$

### Exercice 95 – Mouvement RR 3D \*\*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

### Exercice 94 – Train simple \*

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{40} + \omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40} + \omega_{03} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03})$   
 $\Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} - \omega_{30}) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30}$ .

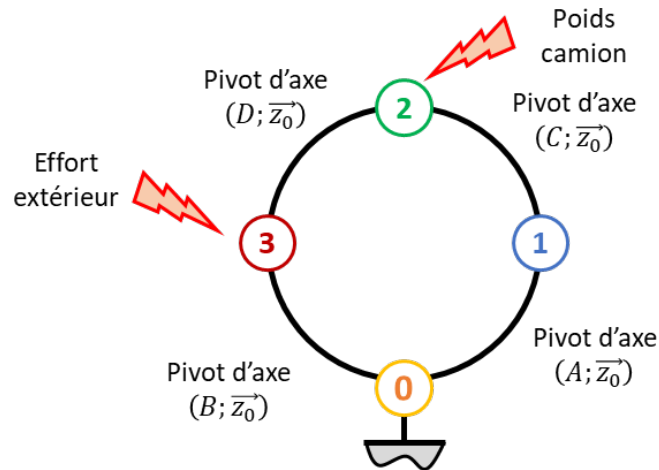
**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} = -\left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} - 1} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22} - Z_{21} Z_4}$$

### Exercice 93 – Pèse camion \*

C2-07

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons en indiquant les actions mécaniques.



**Question 2** Appliquer le PFS au solide 1.

- On isole 1.
- BAME :
  - $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$ ;
  - $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$ .
- En utilisant l'hypothèse de problème plan, 1 est soumis à 2 glisseurs. L'action mécanique est donc orientée suivant la droite (AC). On a donc  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} X_A \vec{x}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} -X_A \vec{x}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C$ .

**Question 3** Appliquer le PFS au solide 2.

- On isole 2.
- BAME :
  - $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} X_A \vec{x}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} X_A \vec{x}_0 \\ b X_A \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_D$  ;
  - $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} X_D \vec{x}_0 + Y_D \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_D$  ;
  - $\{\mathcal{T}(\text{Camion} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -Mg \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} -Mg \vec{y}_0 \\ -Mge \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_D$  ;
- En appliquant le PFS en D, on a donc  $\begin{cases} X_A + X_D = 0 \\ Y_D = Mg \\ b X_A - Mge = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_D = -Mge/b \\ Y_D = Mg \\ X_A = Mge/b \end{cases}$

**Question 4** Appliquer le PFS au solide 3.

- On isole 3.
  - BAME :
    - $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{matrix} X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_B$  ;
    - $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{matrix} -X_D \vec{x}_0 - Y_D \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_D$  ;
    - $\{\mathcal{T}(F \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_E$  ;
  - En appliquant le PFS en B, on a donc  $\begin{cases} X_B - X_D = 0 \\ Y_B - Y_D - F = 0 \\ Fd - Y_D(a+c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_B = X_D = -Mge/b \\ Y_B = Y_D + F = Mg + F \\ Fd = Y_D(a+c) = Mg(a+c) \end{cases}$
- $F$  ne dépend de  $e$  position du camion.

**Question 5** Déterminer les actions mécaniques dans chacune des liaisons.

$X_A = Mge/b$ ,  $X_D = -Mge/b$  et  $Y_D = Mg$ ,  $X_B = -Mge/b$  et  $Y_B = Mg + F$ .

**Exercice 92 – Codeur incrémental \***

**A3-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Donner le rôle et le principe de fonctionnement (schémas) d'un codeur incrémental optique.

**Question 2** Le codeur est équipé d'une voie de mesure et d'un disque à 25 fentes. Donner la résolution du capteur en degtés.

**Question 3** Quelle sera la résolution du capteur s'il est équipé de deux voies de mesure?

**Question 4** Quelle est la résolution du capteur vis-à-vis de l'arbre de sortie du réducteur?

**Question 5** Donner le gain du convertisseur numérique analogique.

### Exercice 91 – Assemblage par frettage \*

#### B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.

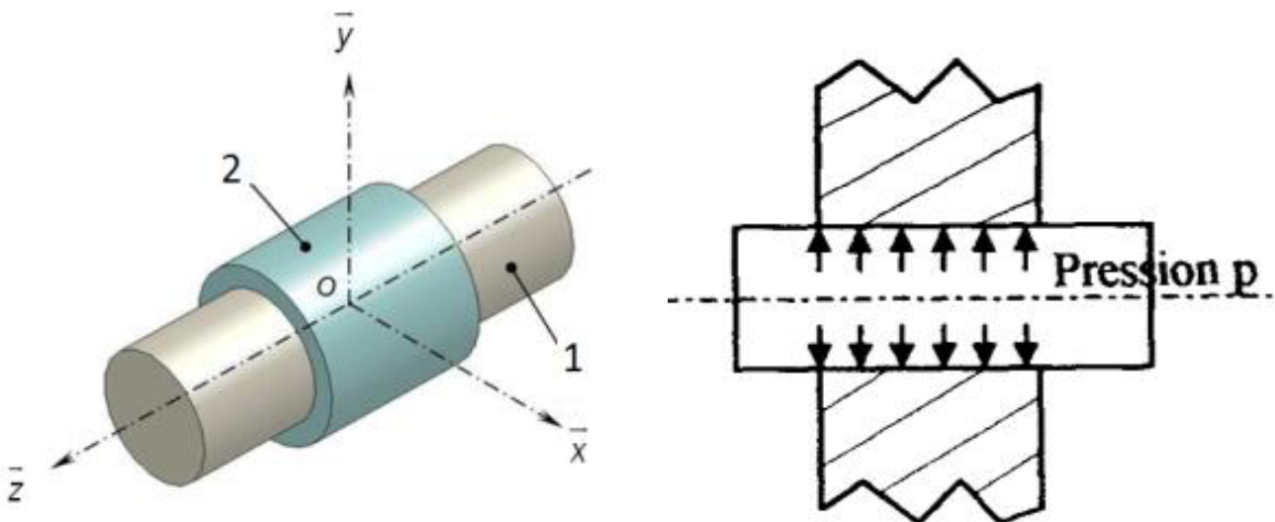
Le frettage consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après frettage, il subsiste donc une pression de contact  $p$  (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

Les caractéristiques de cet assemblage par frettage sont les suivantes :

- $R$  : rayon de l'arbre 1 ;
- $L$  : longueur du contact ;
- $f$  : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

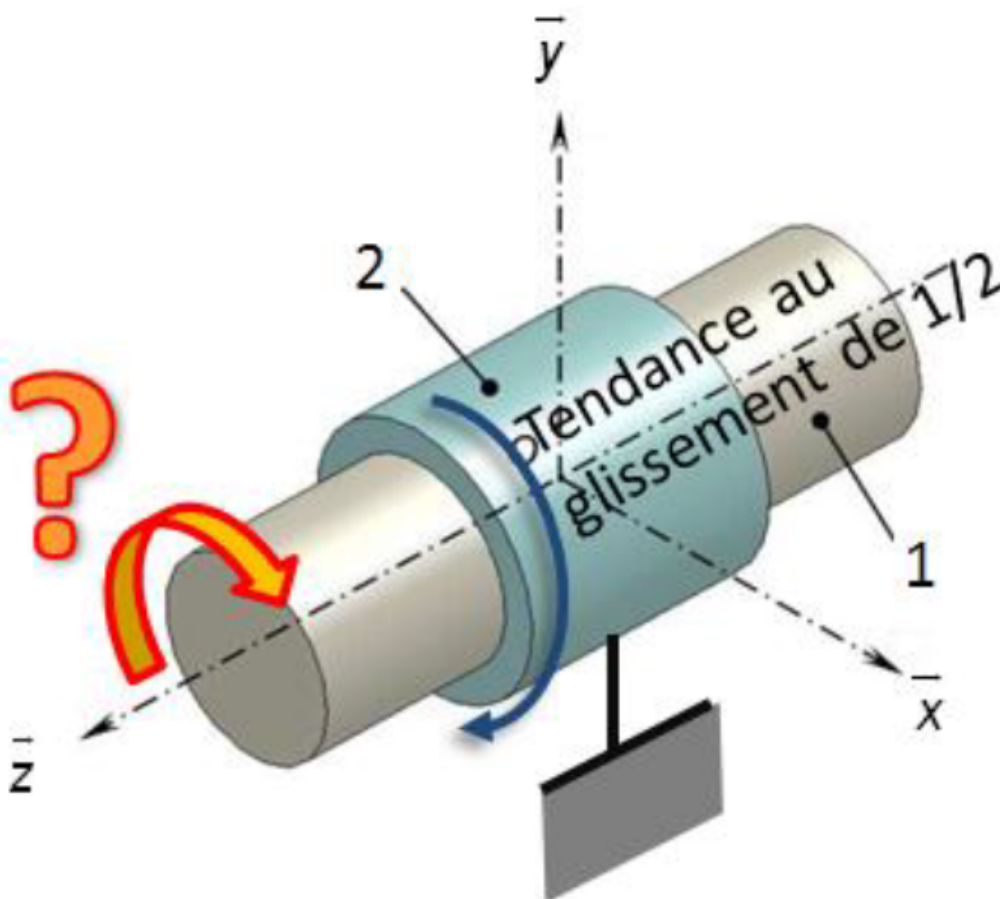


**Objectif** Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

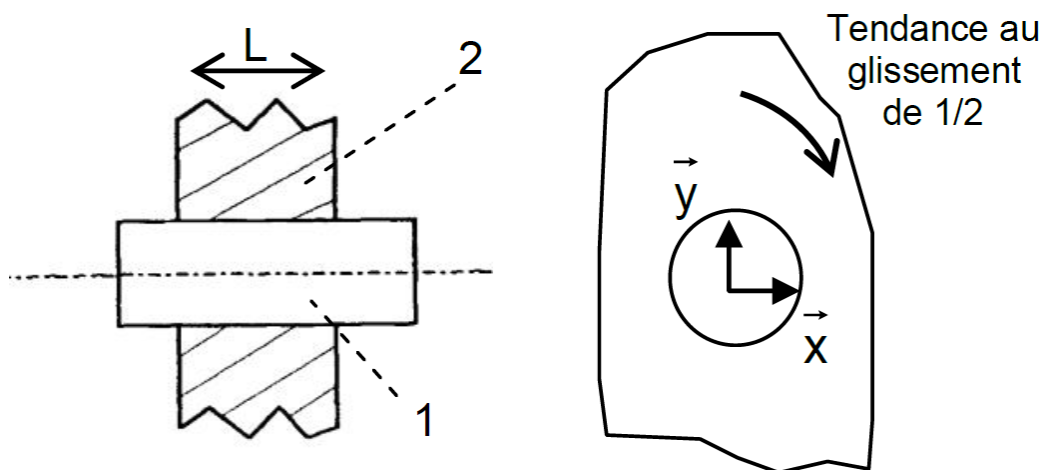
### Couple maximal transmissible

Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de 1/2 autour de  $\vec{z}$ .



**Question 1** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.



**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 3** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du fretage.

**Exercice 90 – Train simple \***

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{40} + \omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40} + \omega_{03} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03})$   
 $\Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} - \omega_{30}) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30}$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} = -\left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} - 1} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22} - Z_{21} Z_4}.$$

### Exercice 89 – Système EPAS \*\*

**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer la condition de non basculement de l'ensemble.

**Question 2** Calculer la longueur  $L_{\max}$  de déploiement au-delà de laquelle il y aura basculement.

1. .
2.  $L_{\max} = 2b \frac{m_P + m_E + m_V}{2m_P + m_E}$ .