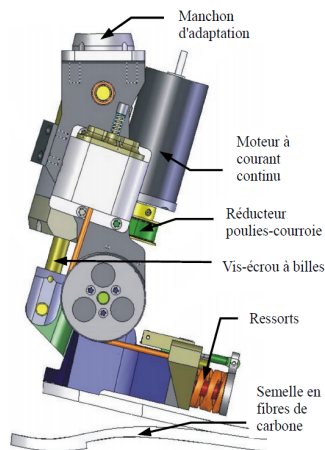


DDS 3

Les petits devoirs du soir
Xavier PessolesExercice 137 – Prothèse active transtibiale*
B2-07

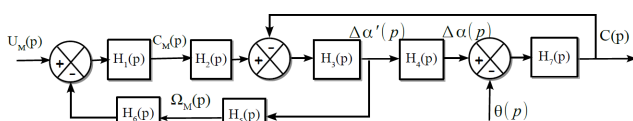
Présentation

Des ingénieurs du M.I.T. ont mis au point une prothèse active transtibiale capable de proposer un comportement similaire à celui des membres non amputés. On étudie dans ce sujet le prototype initial qui a permis de valider la pertinence d'une telle prothèse active.



L'actionneur de la prothèse est un moteur à courant continu alimenté par une batterie rechargeable de 16 Volts. L'énergie mécanique est transmise par un réducteur de type poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou qui adapte cette énergie mécanique pour la prothèse (ensemble de liaisons entre le pied artificiel constitué d'une semelle en fibres de carbone et le manchon ou tibia artificiel). Des ressorts permettent d'ajuster également l'énergie mécanique fournie au pied artificiel. L'effort exercé par les ressorts est directement relié au couple exercé par l'actionneur.

On peut modéliser la chaîne d'énergie de la façon suivante :



Les grandeurs temporelles sont les suivantes :

- u_M tension d'alimentation du moteur (V) ;
- C_M couple exercé par le moteur (Nm) ;

- ω_M vitesse angulaire du moteur (rad s^{-1}) ;
- α angle de rotation du basculeur (rad) tel que $\alpha = \alpha_r + \Delta\alpha$ où α_r est la position repos et $\Delta\alpha$ est la variation angulaire autour de la position repos. On a alors : $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Delta\alpha}{dt}$. On note $\Delta\alpha'(p)$ la transformée de Laplace de $\frac{d\Delta\alpha}{dt}$;
- θ angle de rotation du pied (rad) tel que $\theta = 0 \text{ rad}$ pour la position repos ;
- C couple exercé par le pied (Nm).

On note en majuscule, lorsque cela est possible, les variables associées aux grandeurs temporelles dans le domaine symbolique.

Comportement dynamique de la prothèse

Objectif L'objectif de cette partie est d'établir les équations de comportement dynamique de la prothèse autour de la position de repos lors des phases d'appui et oscillante. Ces équations permettront de compléter le schéma-blocs de la chaîne d'énergie.

On donne l'équation différentielle linéarisée suivante qui caractérise le comportement dynamique de la prothèse : $J_M \frac{d^2 \Delta\alpha(t)}{dt^2} + \mu_m \frac{d\Delta\alpha(t)}{dt} = C_M(t)R_T - C(t)R_T^2$ avec $R_T = \frac{1}{145}$.

Le moteur électrique est régi par les équations électriques et de couplage électromécanique :

- $u_M(t) = Ri(t) + e(t)$ avec $i(t)$ courant moteur et $e(t)$ fcm ;
- $e(t) = k_c \omega_M(t)$ avec $\omega_M(t)$ vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator ;
- $C_M(t) = k_c i(t)$.

Question 1 À partir des équations caractérisant le système, déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_6(p)$.

On a par ailleurs $H_4(p) = \frac{1}{p}$, $H_5(p) = \frac{1}{R_T}$ et $H_7(p) = k_{RS} d_0^2$ ($k_{RS} = 1200 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$ raideur équivalente du ressort et $d_0 = 0,035 \text{ m}$).

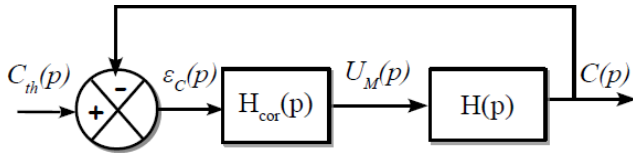
On considère que $\theta(p) = 0$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en

boucle fermée $FTBF(p) = \frac{C(p)}{U_M(p)}$.

Analyse des performances de l'asservissement en couple

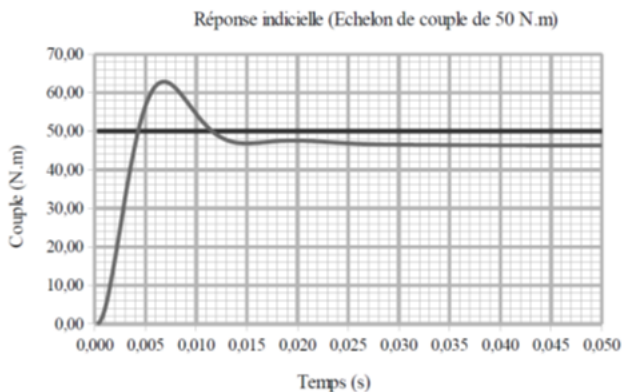
Le schéma-blocs de l'asservissement en couple peut être simplifié par le schéma-blocs suivant avec $H(p) = \frac{a_0}{1 + a_1 p + a_2 p^2}$ où $a_0 = 2,9 \text{ NmV}^{-1}$, $a_1 = \frac{26}{4356} \text{ s}$ et $a_2 = \frac{1}{4356} \text{ s}^2$ et $H_{\text{cor}}(p) = H_c(p) K_{\text{amp}} K_A$.



Objectif L'objectif est de déterminer si la correction $H_{\text{cor}}(p)$ permet de respecter le cahier des charges rappelé ci-après.

Critères	Valeur
Rapidité (temps de réponse à 5%)	$t_{r5\%} < 0,1 \text{ s}$
Précision pour une entrée en échelon (écart normalisé par la valeur de l'échelon)	10 % maxi

Question 3 À l'aide des courbes, valider l'ensemble des critères du cahier des charges en justifiant clairement vos réponses.



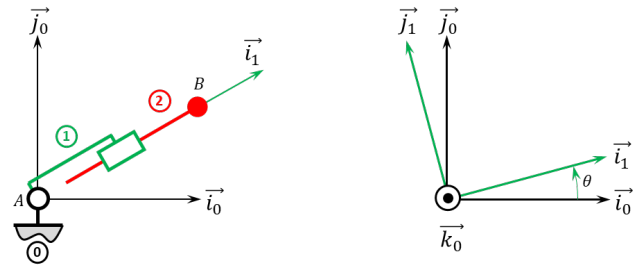
- $H_1(p) = \frac{k_c}{R}$, $H_2(p) = R_T$, $H_3(p) = \frac{R_T^2}{J_M p + \mu_m}$ et $H_6(p) = k_c$.
- $FTBF(p) = \frac{k_c R_T^3}{J_M R p^2 + p(\mu_m R + k_c k_c R_T^2) + R_T R^2 k_{RS} d_0^2}$
- .

Corrigé voir 137.

Exercice 136 – Mouvement RT *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 2/0)$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 2/0)$ par composition.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0)$.

Indications :

- $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.
- $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$.
- $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0) = (\dot{\lambda}(t) - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2) \vec{i}_1 + (\dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t)) \vec{j}_1$.

Corrigé voir 136.

Exercice 135 – Conception de la commande d'un robot chirurgical*

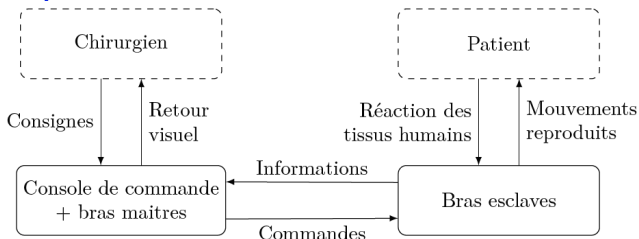
B2-07

Présentation du système

Afin d'améliorer les conditions d'opérations chirurgicales dites mini invasives (comme la précision d'opération et le confort du chirurgien), des robots chirurgicaux ont vu le jour. Cette étude s'intéresse à l'un d'entre eux : le robot Da Vinci. Le chirurgien peut atteindre sa cible grâce à des outils longs et fins traversant le patient grâce à une incision de l'ordre du centimètre.

Le système étudié est composé de deux sous-systèmes principaux :

- l'ensemble {console de commande + bras maîtres} permet au chirurgien de visualiser et de commander les mouvements des outils adéquats à l'intérieur du patient via une caméra haute définition dont l'image est retransmise par l'intermédiaire d'écrans. Le chirurgien commande les mouvements des outils grâce à deux bras maîtres dont les extrémités sont maintenues dans chaque main ;
- les bras esclaves reçoivent les consignes issues du chirurgien par l'intermédiaire des bras maîtres. Il y a au total 3 bras esclaves : deux manipulent chacun un outil, le troisième manipule une caméra.



Le mouvement de l'axe 1 est régi par l'équation suivante : $\Delta C_1(t) = J \frac{d^2 \Delta \theta_1(t)}{dt^2} - k_1 \frac{r'_9}{r_0} h_2 \Delta F_x(t)$ avec $J = 1,98 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$, $k_1 \frac{r'_9}{r_0} = 0,00717$, $h_2 = 0,2 \text{ m}$.

Le couple moteur $\Delta C_1(t)$ est fourni par une machine à courant continu modélisée par les équations suivantes : $u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + R i_1(t) + e_1(t)$, $e_1(t) = k_e \frac{d\Delta \theta_1(t)}{dt}$, $\Delta C_1(t) = k_t i_1(t)$ avec $u_1(t)$ la tension aux bornes du moteur, $i_1(t)$ l'intensité traversant le moteur et $e_1(t)$ la force contre électromotrice, avec $R = 2,08 \Omega$, $k_t = 0,0525 \text{ N mA}^{-1}$ et $k_e = 0,0525 \text{ V s rad}^{-1}$.

On fait l'hypothèse que l'influence de l'inductance L est négligeable sur les performances attendues, soit $L = 0$.

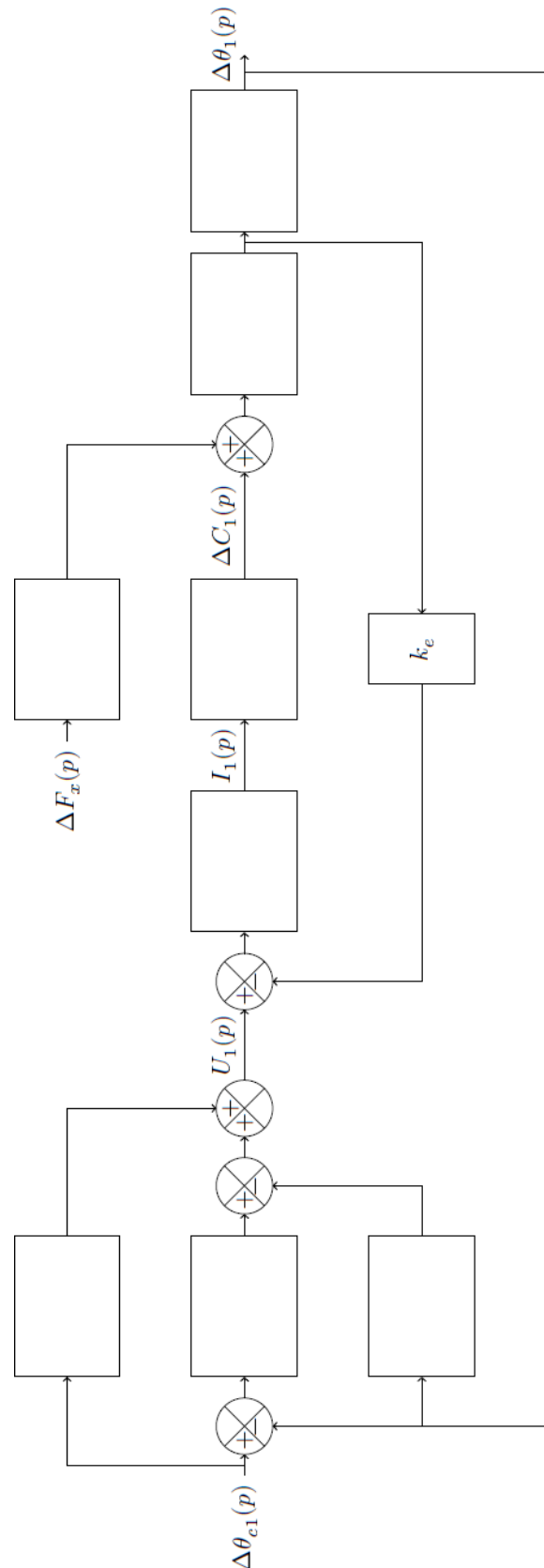
La consigne est notée $\Delta \theta_{c1}(t)$. Le cahier des charges sélectif conduit à choisir un correcteur associant une anticipation (via la présence de σ_4 dans la relation suivante) et une correction PID. La tension de commande du moteur est donnée par : $U_1(p) = (\Delta \theta_{c1}(p) - \Delta \theta_1(p)) \left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} \right) - \sigma_3 p \Delta \theta_1(p) + \sigma_4 \Delta \theta_{c1}(p)$ avec $\Delta \theta_{c1}(p)$ la consigne de position angulaire exprimée dans le domaine symbolique.

Question 1 Compléter le schéma-blocs.

Pour la suite, on considère la perturbation nulle ($\Delta F_x(p) = 0$).

Question 2 À partir de ce schéma-blocs, en notant $H_{processus}(p) = \frac{\Delta \theta_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$, exprimer K et τ en fonction des données de l'énoncé.

Question 3 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée, sous sa forme canonique, notée $B_F(p) = \frac{\Delta \theta_1(p)}{\Delta \theta_{c1}(p)}$ en fonction de K , τ , σ_1 , σ_2 , σ_3 et σ_4 .



1. $A(p) = \sigma_4$, $B(p) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p}$, $C(p) = \sigma_3 p$, $D(p) = \frac{1}{R + Lp}$,
 $E(p) = k_1 \frac{r'_9}{r_0} h_2$, $F(p) = k_t$, $G(p) = \frac{1}{Jp}$, $H(p) = \frac{1}{p}$.
2. $K = \frac{1}{k_e}$ et $\tau = \frac{RJ}{k_t k_e}$.
3. $B_F(p) = K \frac{(\sigma_1 + \sigma_4)p + \sigma_2}{\tau p^3 + p^2(1 + \sigma_3) + \sigma_1 K p + \sigma_2 K}$.

Corrigé voir 135.

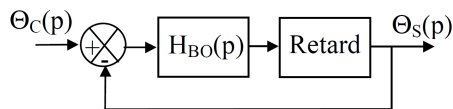
Exercice 134 - *

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

On donne le système suivant dont la FTBF est donnée par $G(p) = \frac{\Theta_S(p)}{\Theta_C(p)} = \frac{3,24}{p^2 + 3,24p + 3,24}$. Le retard du système est de 0,2 s.

L'asservissement est donné par le schéma-blocs suivant.



Question 1 En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique.

Question 2 En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique, déterminer l'expression de la boucle ouverte $H_{BO}(p)$.

Question 3 Déterminer l'expression de $G_r(p)$, transmittance en boucle fermée du système avec retard de 0,2 s.

Le système est soumise à une rampe de $0,1 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 4 Donner la valeur de l'erreur de traînage correspondant à cette entrée, en négligeant le retard.

Question 5 Donner la valeur de l'écart statique du système avec retard.

Question 6 Donner la valeur de l'erreur de traînage du système avec retard.

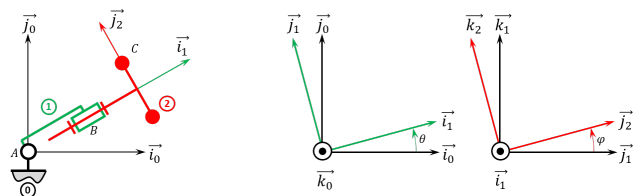
Corrigé voir 134.

Exercice 133 - Mouvement RR 3D **

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$ et $r = 10 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

Indications :

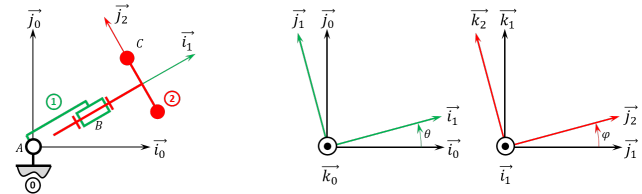
1. .
2. $x_C(t) = (R + \ell) \cos \theta - r \cos \varphi \sin \theta$, $y_C(t) = (R + \ell) \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta$, $z_C(t) = r \sin \varphi$.

Corrigé voir 133.

Exercice 132 - Mouvement RR 3D *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$ et $r = 10 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par composition.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$.

Indications :

1. $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2$.
2. $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = r \dot{\varphi} \vec{k}_2 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + \ell \dot{\theta} \vec{j}_1 + R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
3. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{i}_1 \\ (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 \end{array} \right\}_C$.
4. $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = (R + \ell) \ddot{\theta} \vec{j}_1 - (R + \ell) \dot{\theta}^2 \vec{i}_1 - r \ddot{\varphi} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i}_1 - r \dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{j}_1 + r \ddot{\varphi} \vec{k}_2 + r \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2)$.

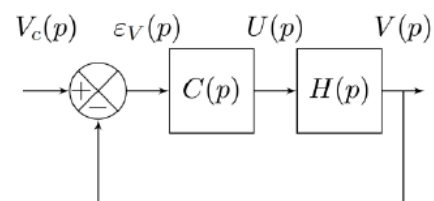
Corrigé voir 133.

Exercice 131 - *

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

L'asservissement de vitesse est à présent modélisé par le schéma-blocs de la figure suivante à retour unitaire. Cet asservissement n'est valable que pour les petites variations de vitesse. $H(p)$ correspond à la fonction de transfert en boucle ouverte naturelle (non corrigée), $C(p)$ est le correcteur.



$H(p) = \frac{K_N}{(1 + T_m p)(1 + T_e p)}$ avec $K_N = 20 \text{ ms}^{-1} \text{V}^{-1}$, $T_m = 5 \text{ s}$, $T_e = 0,5 \text{ s}$.

Objectif

- Exigence 1.2 : Garantir un déplacement du chariot de vitesse :
 - 1.2.3 Précision :
 - * Erreur statique pour une entrée $v_c(t) = V_0 u(t)$ avec $V_0 = 8 \text{ m s}^{-1}$: $E_S = 0 \text{ m s}^{-1}$.
 - * Erreur de trainage pour une entrée $v_c(t) = \gamma_0 t u(t)$ avec $\gamma_0 = 1,6 \text{ m s}^{-2}$: $E_T \leq 0,16 \text{ m s}^{-1}$.

Le concepteur choisit un correcteur Proportionnel Intégral : $C_1(p) = \frac{C}{T_i p} (1 + T_i p)$ avec $T_i = T_m$.

Question 1 Déterminer les expressions littérales de l'erreur statique E_S (consigne : échelon d'amplitude V_0) et de l'erreur de trainage E_T (consigne : rampe de pente γ_0) de cet asservissement corrigé avec $C_1(p)$ en fonction de la consigne, du gain K_N et des paramètres du correcteur et C et T_m .

Question 2 En déduire la condition (notée C_e) sur le gain C du correcteur permettant de satisfaire l'exigence 1.2.3 du cahier des charges.

On choisit finalement un correcteur PID : $C_2(p) = C \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$ avec $T_i = 2T_e$ et $T_d = \frac{T_e}{2}$.

Question 3 Montrer qu'on peut mettre ce correcteur sous la forme $C_2(p) = \frac{K}{p} (1 + T p)^2$ et donner les expressions de K et de T en fonction de C et T_e .

Question 4 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé.

Question 5 Déterminer les expressions littérales de l'erreur statique E_S (consigne : échelon d'amplitude V_0) et de l'erreur de trainage E_T (consigne : rampe de pente γ_0) de cet asservissement corrigé.

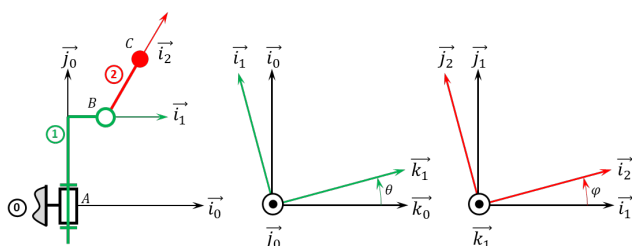
Question 6 En déduire la condition sur la valeur du gain K du correcteur permettant de satisfaire l'exigence 1.2.3 du cahier des charges.

Corrigé voir 131.

Exercice 130 – Mouvement RR 3D *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$ et $\vec{BC} = L \vec{i}_2$. On a $H = 20 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\vec{V}(C, 2/0)$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\vec{V}(C, 2/0)$ par composition du vecteur vitesse.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 4 Déterminer $\vec{\Gamma}(C, 2/0)$.

Indications :

- $\vec{V}(C, 2/0) = -R\dot{\theta} \vec{k}_1 + L(-\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2)$.
- $\vec{V}(C, 2/0) = L\dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1)$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi} \vec{k}_2 + \dot{\theta} \vec{j}_0 \\ L\dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) \end{array} \right\}_C$.
- $\vec{\Gamma}(C, 2/0) = L\dot{\varphi} \vec{j}_2 + L\dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\theta} \vec{i}_2) - \ddot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) - \ddot{\theta} (R \dot{\theta} \vec{i}_1 + L \cos \varphi \dot{\theta} \vec{i}_1 - L \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{k}_1)$.

Corrigé voir 121.

Exercice 129 – Tuyère à ouverture variable*

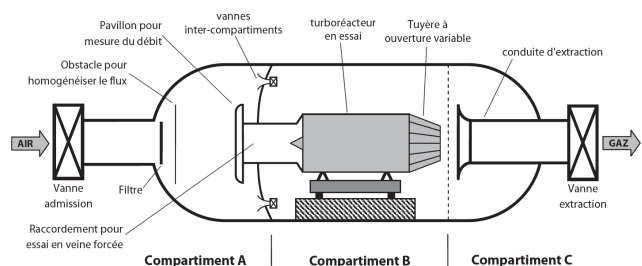
B2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

Présentation du système

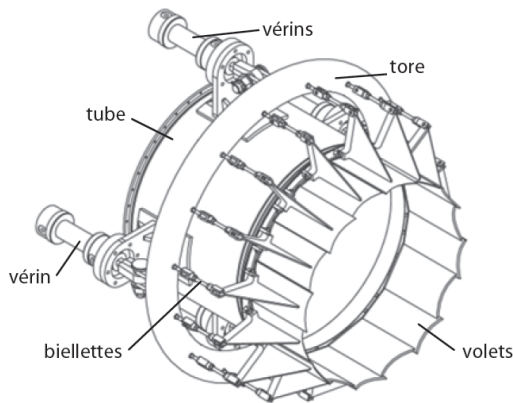
Les propulseurs utilisés dans les applications militaires ou civiles subissent, des tests de certification visant à contrôler leur bon fonctionnement et le respect des normes de sécurité.

Ces tests consistent à simuler au sol les conditions de vol subies par le propulseur et à observer les réactions de celui-ci consécutives à des commandes de pilotage.

La DGA (Direction Générale de l'Armement) dispose dans son centre d'essais des propulseurs de bancs d'essais dédiés à la certification et à la mise au point de différents types de propulseurs d'avions ou de missiles.



Le banc d'essai est composé d'un tube représentant le corps du réacteur et d'une tuyère à ouverture variable actionnée par quatre vérins hydrauliques et permettant de faire varier la vitesse de l'air éjecté.



Objectif On souhaite vérifier que le système permet de respecter le cahier des charges suivant :

- temps de réponse à 5% : 4 s au maximum ;
- précision : l'erreur statique doit être nulle ;
- précision : l'erreur de traînage doit être inférieure à 1 mm pour une consigne de 25 mm s^{-1} .

Modélisation du comportement du vérin – hypothèse fluide compressible

Objectif Il s'agit ici de proposer un modèle plus affiné du comportement du vérin en tenant compte de la compressibilité du fluide et du comportement dynamique du mécanisme.

Pour rendre compte du comportement dynamique du système on propose un modèle de comportement du vérin en tenant compte de la compressibilité du fluide. L'évolution du débit est alors une fonction du déplacement mais aussi de la pression sous la forme de la relation suivante : $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V_0}{B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ avec :

- $\sigma(t)$: pression utile dans le vérin. On notera $\Sigma(p)$ sa transformée ;
- V_0 : demi volume de fluide contenu dans le vérin ;
- B : coefficient de compressibilité du fluide.

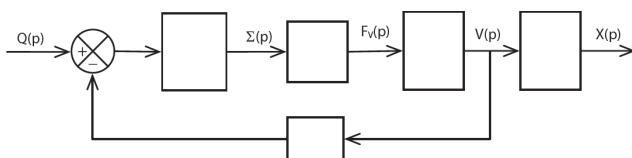
La pression utile induit l'effort développé par le vérin que nous noterons F_v tel que : $F_v(p) = S\Sigma(p)$ où S représente la section utile du vérin en sortie de tige.

$V(p)$ représente l'image par la transformation de Laplace de la vitesse de translation $v(t)$ de la tige du vérin.

En considérant les actions de pesanteur négligeables et en se plaçant dans une phase de test à vide (sans flux d'air), l'application des lois de la dynamique donne la

relation suivante : $F_v(t) = M_{eq} \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$.

Question 1 À partir des équations, compléter le schéma-blocs en indiquant les fonctions de transferts de chaque bloc.



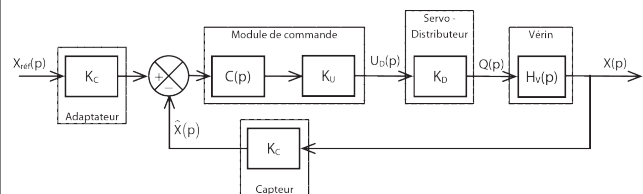
On note F_R l'action mécanique résistante équivalente pour quatre volets. On a $F_R(t) = K_F x(t)$. L'application du théorème de l'énergie cinétique se traduit par $M_{eq} \ddot{x}(t) = (F_V(t) - F_R(t))$.

Question 2 Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer l'effort résistant.

Question 3 Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_V(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$. On donnera le résultat sous la forme $H_V(p) = \frac{K_V}{p(1 + a_2 p^2)}$ en précisant les expressions de K_V et a_2 .

Validation du comportement du vérin

Afin de valider le modèle établi, on se propose d'étudier le comportement en boucle fermée de la chaîne fonctionnelle de commande du vérin. On rappelle ci-dessous le schéma-bloc retenu et on considérera une correction proportionnelle telle que $C(p) = K_p$.



Question 4 Donner l'expression de la forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_{ref}(p)}$. On donnera le résultat en fonction de K_C , K_U , K_D , K_p , K_V et a_2 .

Prise en compte du débit de fuite

Pour pallier le problème de stabilité du modèle précédemment établi, une solution possible consiste à introduire un débit de fuite entre les deux chambres du vérin. Celui-ci a pour effet de réduire artificiellement le débit réel entrant dans le vérin en fonction de la pression utile. Ce débit vaut alors : $q(t) - \delta \sigma(t)$ où δ est le coefficient de débit de fuite.

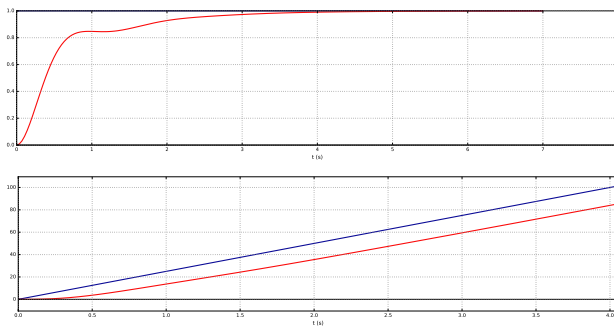
Question 5 Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer le débit de fuite.

Question 6 Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_V(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$. On donnera le résultat sous la forme $H_V(p) = \frac{K_V}{p(1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3)}$ en précisant les expressions de K_V , a_1 , a_2 et a_3 .

Retour sur le cahier des charges

On donne la réponse à un échelon et à une rampe de pente 25 mm s^{-1} .

Question 7 Le cahier des charges est-il vérifié?



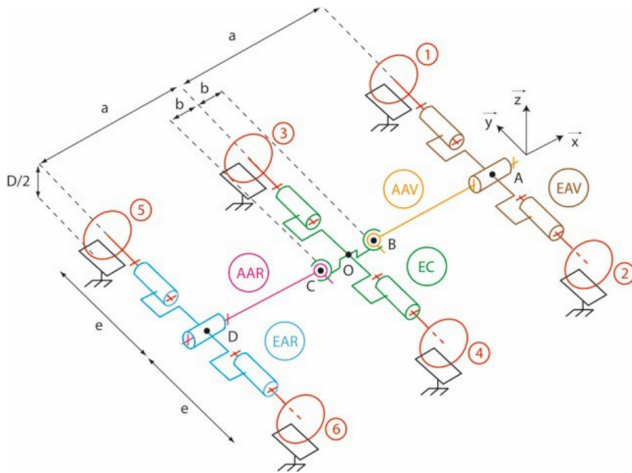
Corrigé voir 129.

Exercice 128 – Robovolc*

B2-16

Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse au Robovolc, une plateforme exploratrice de volcans.



Question 1 Réaliser le graphe de liaisons.

Question 2 Calculer le degré d'hyperstatisme.

Question 3 Si le modèle est hyperstatique, modifier le modèle pour le rendre isostatique.

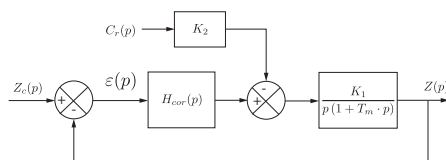
Corrigé voir ??.

Exercice 127 – Hemostase – Stabilité*

C2-03

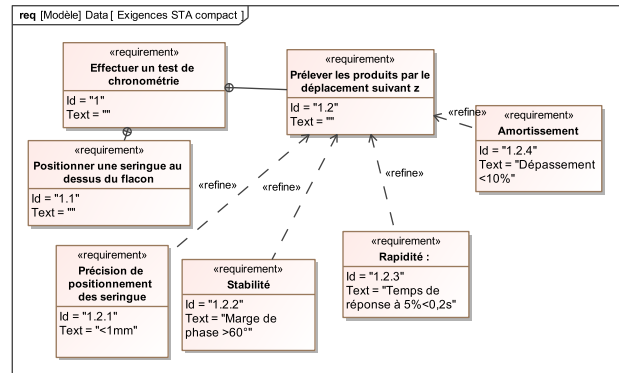
La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{N}^{-1}$, $K_1 = 856 \text{s}^{-1}$, $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{s}$.

Le couple résistant C_r est constant et vaut $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{Nm}$.



On suppose le correcteur proportionnel : $H_{\text{cor}}(p) = K_p$.

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.



Question 1 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cl}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$.

Question 2 Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

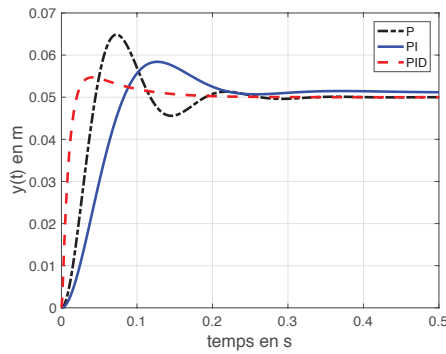
Question 3 Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{\text{cor}}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1 \text{s}$.

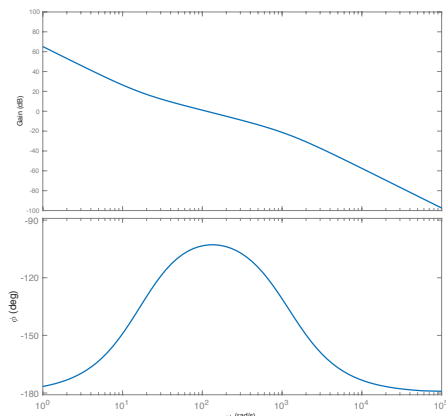
Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1 \text{s}$.

Question 5 On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges.

Question 6 La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.



Question 7 Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



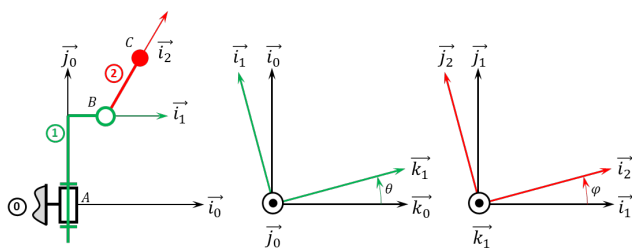
Corrigé voir 126.

Exercice 126 – Mouvement RR 3D **

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$. On a $H = 20 \text{ mm}$, $R = 20 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Question 2 Donner l'équation de mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

Indications

- Tore.
- $x_C(t) = R \cos \theta + L \cos \varphi \cos \theta$, $y_C(t) = H + L \sin \varphi$, $z_C(t) = -R \sin \theta - L \cos \varphi \sin \theta$.

Corrigé voir 121.

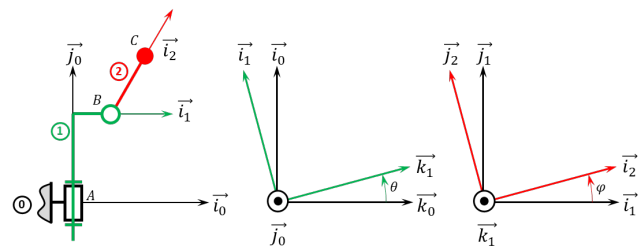
Exercice 125 – Mouvement RR 3D **

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$. On a $H = 20 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 tel que $\overrightarrow{AG_1} = H \vec{j}_1$, on note m_1 la masse de 1 et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2 et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



On donne : $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = -R\dot{\theta} \vec{k}_1 + L(-\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2)$.

On fait l'hypothèse que $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ sont des constantes et on a

$$\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = L\dot{\varphi}(\dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\varphi} \vec{i}_2) - \dot{\theta}(R\dot{\theta} \vec{i}_1 + L \cos \varphi \dot{\theta} \vec{i}_1 - L\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j}_2)$$

Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta}(A, 1+2/0) \cdot \vec{j}_0$

Corrigé voir 124.

Exercice 124 – Véhicule à trois roues Clever*

B2-07

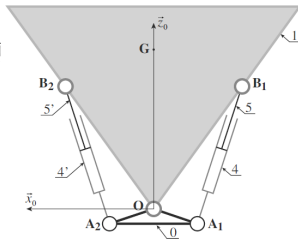
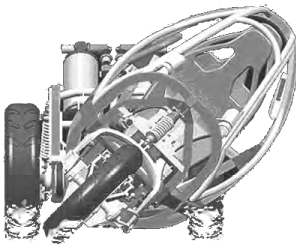
Pas de corrigé pour cet exercice.

Présentation du système

Le Clever est un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens. Clever est la contraction de Compact Low Emission VEHICLE for uRBan tRansportation (véhicule compacte à faibles émissions pour le transport urbain) car, avec une consommation de seulement 2,5 L/100 km, il s'annonce très écologique.

L'habitacle peut s'incliner grâce à un système constitué

- d'un calculateur qui détermine le mouvement et la position à donner à l'habitacle en fonction des conditions d'utilisation ;
- d'un système hydro-mécanique de transmission de puissance et d'adaptation de mouvement ;
- d'un système de contrôle de l'inclinaison de l'habitacle.



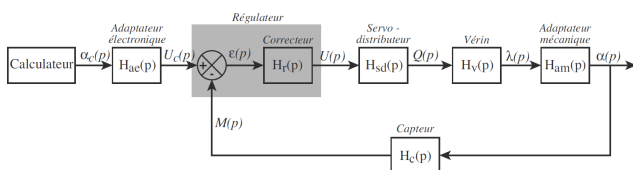
Objectif L'objectif est que le mouvement de l'habitable soit contrôlé :

- écart statique : 0° ;
- écart de traînage pour une entrée en rampe unitaire : 0° ;
- temps de réponse à 5% : inférieur à 0,1 s.

Modélisation du servo-distributeur et du vérin

L'orientation de l'habitable est contrôlée par un asservissement de la position angulaire. L'architecture de cet asservissement est représentée par le schéma-blocs de la figure suivante.

On modélise le comportement du servo-distributeur par un gain pur noté K_s et le capteur par $H_c(p) = C$ avec $C = 1 \text{ V rad}^{-1}$. L'adaptateur mécanique a un comportement linéaire sur l'intervalle d'utilisation. On a donc $H_{am}(p) = R$ ($R = 7 \text{ rad m}^{-1}$). Enfin, on considère que $H_r(p) = 1$.



À ce stade de l'étude, le modèle de comportement du fluide correspond à un comportement incompressible. L'équation caractérisant le comportement du vérin est alors : $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$ où :

- S représente la section utile du vérin en sortie de tige (diamètre 32 mm) ;
- q est le débit en entrée de vérin ;
- $v(t) = \dot{\lambda}(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}$ est la vitesse de translation de la tige du vérin par rapport au corps.

Question 1 Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_{v1}(p)$ (telle que $\lambda(p) = H_{v1}(p)Q(p)$) et compléter le schéma-bloc associé à la modélisation actuelle du système.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF_1$ (telle que $\alpha(p) = FTBF_1(p)\alpha_c(p)$) du système bouclé. Mettre $FTBF_1(p)$ sous la forme $\frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$ en précisant les expressions de K_1 et de τ_1 .

Question 3 À partir du critère de temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) du système, déterminer l'expression puis la valeur numérique minimale du gain du servo-distributeur.

Modélisation du comportement du vérin avec fluide compressible et du comportement dynamique du mécanisme

La compressibilité du fluide étant prise en compte dans le modèle, l'évolution du débit est une fonction du déplacement mais aussi de la pression sous la forme de la relation (1). L'effort exercé par le vérin en sortie de tige est décrit par la relation (2).

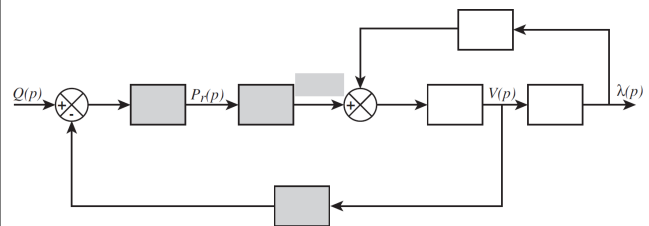
$$q(t) = S\dot{\lambda}(t) + \frac{V_0}{B}\dot{p}_r(t) \quad (1) \quad F_v(t) = Sp_r(t) \quad (2)$$

où :

- $p_r(t)$: pression utile dans le vérin ;
- V_0 : volume caractéristique moyen de fluide contenu dans le vérin et les durites, $V_0 = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$;
- B : coefficient de compressibilité du fluide, $B = 109 \text{ Pa}$;
- $F_v(t)$: effort développé par le vérin en sortie de tige ;
- S : section utile du vérin en sortie de tige.

Par ailleurs, $F_v(t) + k_g \lambda(t) = m_{eq} \ddot{\lambda}(t)$ avec m_{eq} la masse équivalente du système, k_g une constante, $\lambda(t)$ le déploiement des vérins.

Question 4 Appliquer la transformation de Laplace aux équations précédentes et compléter le schéma-blocs.



Analyse du comportement global

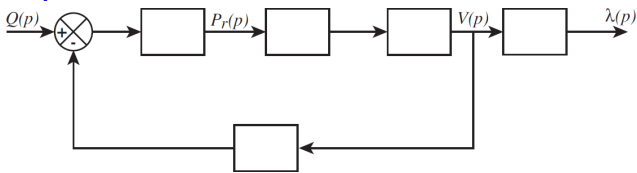
Question 5 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée du vérin H_{v2} (telle que $\lambda(p) = H_{v2}Q(p)$) et préciser les expressions des coefficients K_v et ω_v de sa forme canonique : $H_{v2}(p) = \frac{K_v}{p \left(1 + \frac{p^2}{\omega_v^2} \right)}$.

k_g peut maintenant être négligé.

Modélisation du comportement dynamique avec prise en compte d'un débit de fuite

Pour pallier le problème de stabilité du modèle précédemment établi, une solution possible consiste à introduire un débit de fuite au niveau du vérin. Celui-ci a pour effet de réduire artificiellement le débit réel entrant dans le vérin en fonction de la pression utile. L'expression du débit est alors : $q(t) = S\dot{\lambda}(t) + \frac{V_0}{B}\dot{p}_r(t) - \delta p_r(t)$ où δ représente le coefficient de débit de fuite.

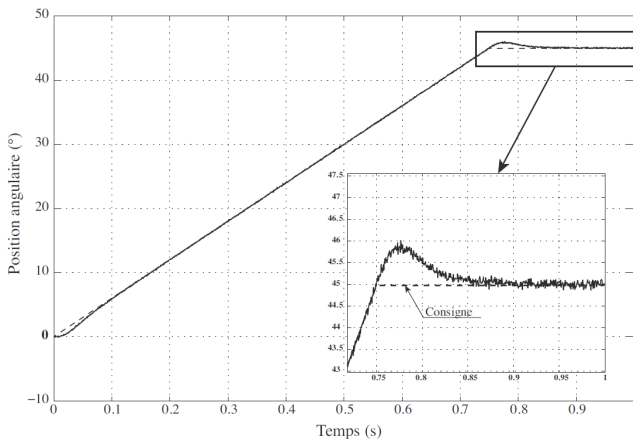
Question 6 Proposer une modification du schéma-bloc donné afin de prendre en compte le débit de fuite.



Question 7 Déterminer l'expression de la fonction de transfert H_{V3} (telle que $\lambda(p) = H_{V3}Q(p)$) associée au comportement dynamique du vérin ainsi modélisé. On donnera le résultat sous la forme suivante : $H_{V3}(p) = \frac{K_V}{p \left(1 + a_1 p + \frac{p^2}{\omega_V^2} \right)}$. Donner l'expression de a_1 en fonction de M_{eq} , δ et S et déterminer l'expression du coefficient d'amortissement ξ_V du second ordre en fonction de M_{eq} , δ , S , B et V_0 .

Retour sur le cahier des charges

Le régulateur étant a priori optimisé, on réalise un essai de validation du comportement temporel de l'inclinaison de l'habitacle, le véhicule étant à l'arrêt. Le calculateur envoie un signal de consigne représentant l'évolution de la position angulaire souhaitée (de 0 à 45° en 0,75 s).



Question 8 Quels sont les critères du cahier des charges validés?

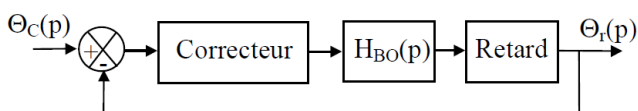
Corrigé voir 123.

Exercice 123 - *

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

L'asservissement est donné par le schéma-blocs suivant. $H_{BO}(p) = \frac{4}{p(p+3,6)}$. Le retard du système est de 0,2 s. De plus, $C(p) = K_c \frac{1+T_c p}{T_c p}$

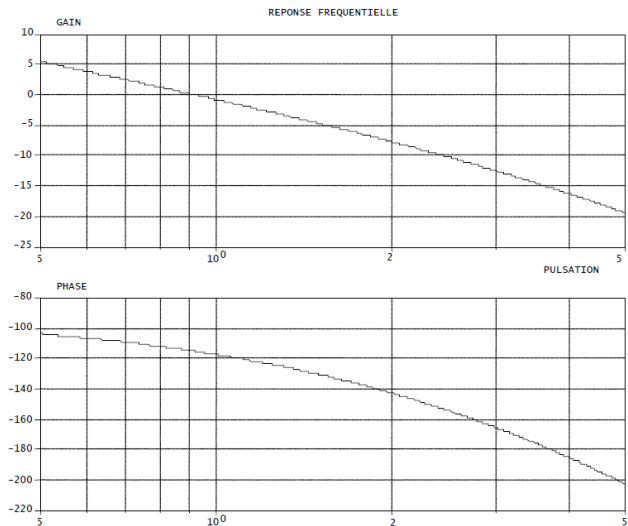


Question 1 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $H_{BO}(p)$ pour des pulsations comprises entre

0,5 rad s⁻¹ et 50 rad s⁻¹.

Question 2 Tracer le diagramme de Bode du retard pour des pulsations comprises entre 0,5 rad s⁻¹ et 50 rad s⁻¹.

On donne le diagramme de la FTBO retardée.



Question 3 Déterminer le gain K_c qui donne une marge de phase de 50°.

Question 4 La constante T_c qui laisse subsister une marge de phase d'environ 45°.

Question 5 Quelle est l'erreur de traînage du système corrigé pour l'entrée en rampe considérée (en négligeant le retard).

Corrigé voir 122.

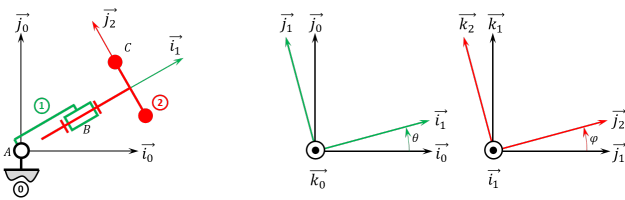
Exercice 122 - Mouvement RR 3D **

C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{AB} = R \vec{i}_1$ et $\vec{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20$ mm et $r = 10$ mm. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- G_2 désigne le centre d'inertie de **2** tel que $\vec{BG}_2 = \ell \vec{i}_2$, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

$$1. \{\mathcal{D}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} m_1(R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1) \\ C_1\ddot{\theta}\vec{k}_0 \end{Bmatrix}_B$$

$$2. \overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0 = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta} (B_2 + m_2R^2)(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi) (C_2 + m_2R^2)(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi).$$

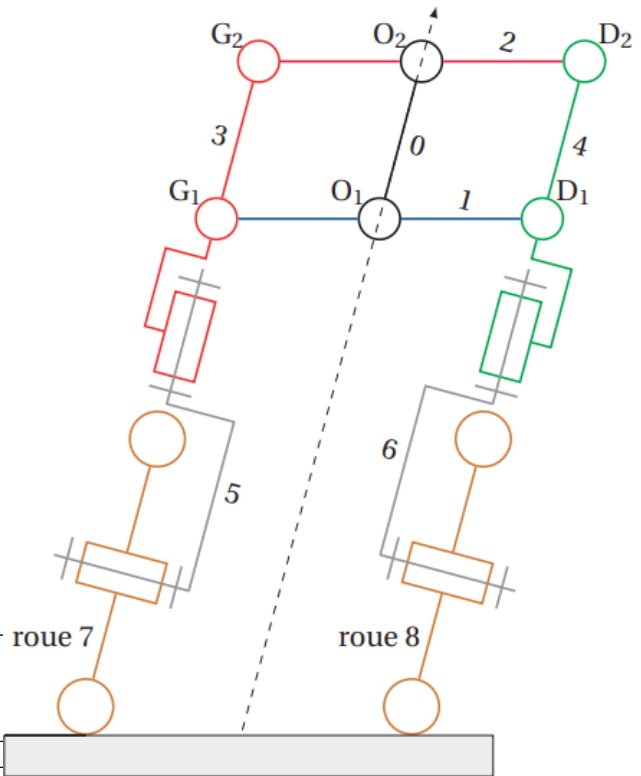
Corrigé voir 130.

Exercice 121 – Scooter Piaggio*

B2-16

Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse au système direction du scooter Piaggio.



Question 1 Réaliser le graphe de liaisons du système de direction. On considérera le sol comme une classe d'équivalence.

Question 2 Calculer le degré d'hyperstatisme.

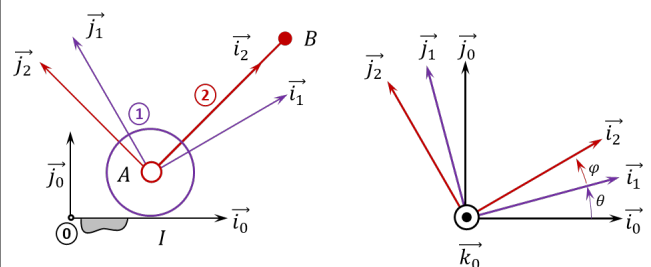
Question 3 Si le modèle est hyperstatique, modifier le modèle pour le rendre isostatique.

Corrigé voir 120.

Exercice 120 – Mouvement RR – RSG **

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{IA} = R\vec{j}_0$ et $\vec{AB} = L\vec{i}_2$. De plus $R = 15\text{ mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

Indications (à vérifier...) :

1. $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = L\dot{\varphi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t)(L\vec{j}_1 - R\vec{i}_0)$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(2/0) = (\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{k}_0 \\ L\dot{\varphi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t)(L\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$.
3. $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0) = L\ddot{\varphi}(t)\vec{j}_2 - L\dot{\varphi}(t)(\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t)(L\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) - L\dot{\theta}^2(t)\vec{i}_1$.

Corrigé voir 119.

Exercice 119 – Mouvement RR – RSG **

C2-08

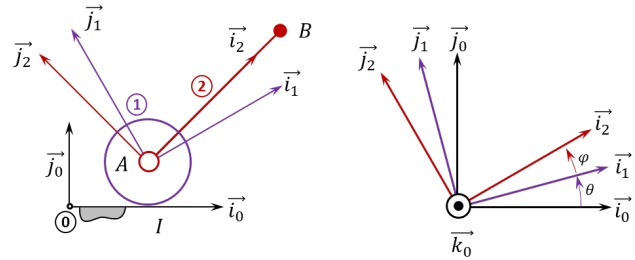
C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\vec{j}_0$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{i}_1$. De plus $R = 15\text{ mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I . De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** tel que $\overrightarrow{AG_1} = -\ell\vec{i}_1$, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;

- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2

la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{R_d}(2/0) \cdot \vec{i}_1$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta}(I, 1 + 2/0) \cdot \vec{k}_0$

Corrigé voir 118.