Colle

Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

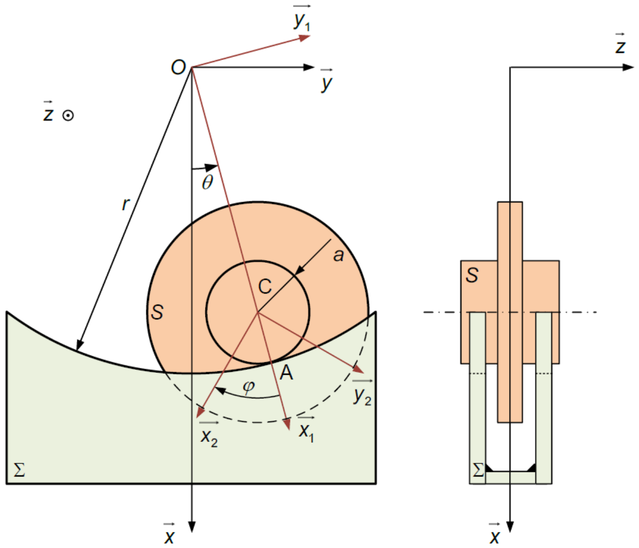
Sources multiples

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C34 : chaînes de solides;*
- *Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;*
- *Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;*

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ.



Soit $\left(O;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ un repère galiléen lié au bâti Σ. On désigne par $\overrightarrow{g}=g\overrightarrow{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$, de rayon r . Le solide S de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a ($a<r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon S, de centre C, roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ;
- soit $\mathcal{R}_1\left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z}\right)$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_1}\right)$. $\theta=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- soit $\mathcal{R}_2\left(C;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z}\right)$ un repère lié à S. On pose $\varphi=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose $\varphi=0$ lorsque $\theta=0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie $\left(C,\overrightarrow{z}\right)$ et f le coefficient de frottement entre S et Σ.

On donne $a=12{,}3\,\text{mm}$; $r=141{,}1\,\text{mm}$; $g=9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m=7217\,\text{g}$; $f=0,15$.

Question 1 *Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.*

Question 2 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R. En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ.*

Question 3 *En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S.*

Question 4 *En déduire le moment d'inertie I de S, sachant que $T=5\,\text{s}$.*

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta=\theta_0\cos(\omega t)$ avec $\omega=\sqrt{\dfrac{mg}{(r-a)\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t=0$, tel que $\theta=\theta_0$ et $\dot{\theta}=0$.

Question 5 *Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ.*

Colle

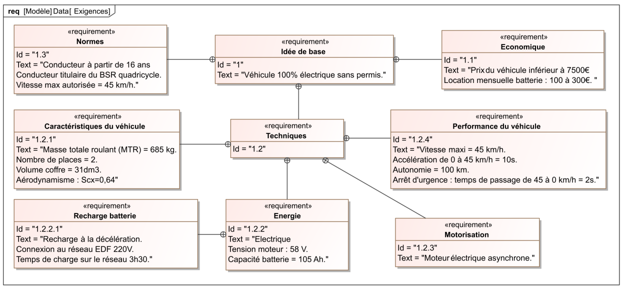
Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

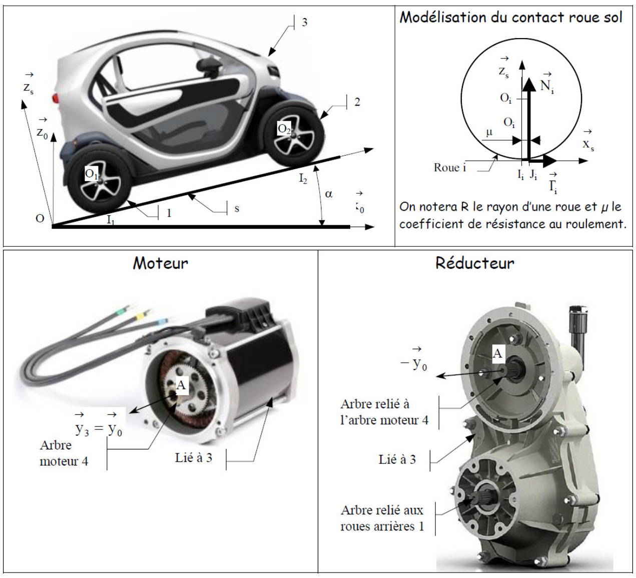
Mise en situation



Choix du motoréducteur

> **Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



Hypothèses générales :

- le vecteur $\overrightarrow{z_0}$ est vertical ascendant et on notera g l'accélération de la pesanteur;
- le repère $\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture $\left(O,\overrightarrow{z_s},\overrightarrow{x_s}\right)$;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en I_i ;
- le coefficient de résistance au roulement μ est identique pour tous les contacts roue – sol : $\mu = 3\text{e}-3m$. On pose $\overrightarrow{I_1 J_1} = \mu \overrightarrow{x_s}$, avec $\mu > 0$ si le déplacement du véhicule est suivant $+\overrightarrow{x_s}$;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

Actions mécaniques Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est : $\left\{\mathscr{F}(s\rightarrow i)\right\} = \left\{\begin{array}{c} T_i\overrightarrow{x_s} + N_i\overrightarrow{z_s} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{J_i}$ avec $J_i \in \left(O,\overrightarrow{x_s},\overrightarrow{y_s}\right)$ et $i=1$ (roues arrières) ou 2 (roues avants). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que $\left\{\mathscr{F}(3\rightarrow 4)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{\_}$.

Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe $\left(A,\overrightarrow{y_0}\right)$: $J_m = 6\times 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe $\left(O_i,\overrightarrow{y_0}\right)$: $J_R = 0{,}1\,\text{kg}\,\text{m}^2$ (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge : $m = 685\,\text{kg}$;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté G ;
- les autres inerties seront négligées.

Grandeurs cinématiques : Soit ω_m la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3, ω_{13} la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et ω_{23} la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera r le rapport de transmission du réducteur tel que $\omega_m = r\omega_{13}$. On appellera $\overrightarrow{V(G,3/0)} = \overrightarrow{V}_{3/0} = v\overrightarrow{x_s}$ la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon $R = 280\,\text{mm}$.

Choix de l'ensemble moto-réducteur

Équation de mouvement du véhicule

> **Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

Notations :

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide i sur le solide j dans le mouvement de i par rapport à 0 : $\mathscr{P}\left(i \rightarrow j/0\right)$;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide i et le solide j : $\mathscr{P}\left(i \longleftrightarrow j\right)$;
- énergie cinétique du solide i dans son mouvement par rapport à 0 : $\mathscr{E}_c\left(i/0\right)$.

Question 1 *Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :*

- *écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;*
- *déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;*
- *déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;*
- *déterminer explicitement les énergies cinétiques ;*
- *en déduire une équation faisant intervenir C_m, N_1, N_2, v, ω_m, $\omega_{1/0}$, $\omega_{2/0}$ …… ;*
- *expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.*

Question 2 *À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer (N_1+N_2). Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.*

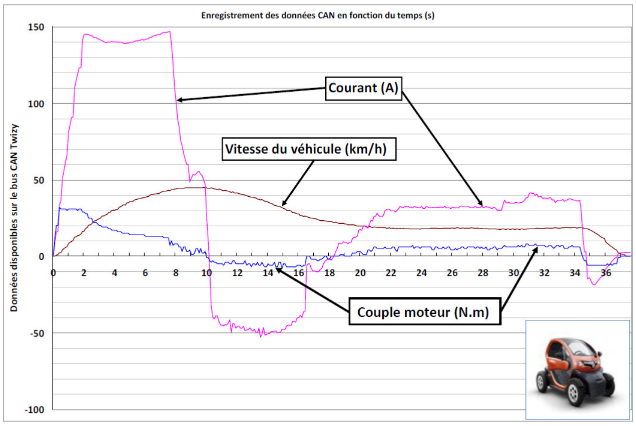
Question 3 *Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre (v,ω_{10}), (v,ω_{20}) et (ω_m,ω_{10}). Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme $\dfrac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq}\dfrac{dv(t)}{dt}$ avec $F_r(t)$ fonction de m, μ, g, R et α et M_{eq} fonction m, J_m, J_R, R et r.*

Détermination du coefficient de résistance au roulement μ

Objectif Déterminer le coefficient de résistance au roulement μ suite à une expérimentation.

Question 4 *En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement μ. Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :*

- *justifier dans quelle phase se placer ;*
- *définir la variable mesurée ;*
- *définir les hypothèses nécessaires ;*
- *énoncer les équations utilisées pour déterminer μ.*



Choix du moto-réducteur

Objectif Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission r issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

Question 5 *Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission r_{mini} pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.*

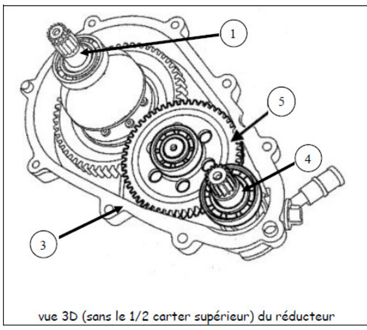
Question 6 *Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission r_{max} qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.*

Question 7 *À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.*

Validation du choix constructeur du moto-réducteur

Objectif Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

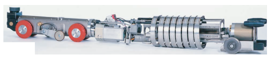
Question 8 *À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission $r = \dfrac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$ et conclure.*



vue 3D (sans le 1/2 carter supérieur) du réducteur

Z_4 = 17 dents
Z_{5a} = 57 dents
Z_{5b} = 17 dents
Z_1 = 68 dents

Colle



Robot de dépose de fibres optiques

Mines Ponts – PSI – 2004

Savoirs et compétences :

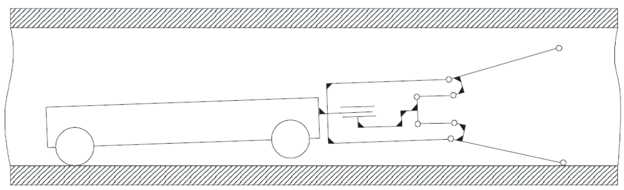
- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Présentation

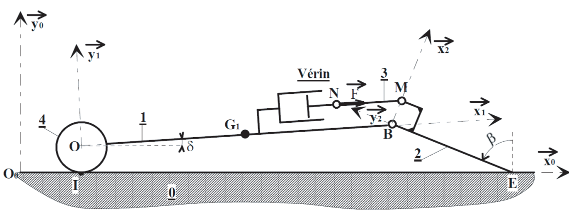
L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

Objectif En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14°$ et $\dot{\delta} \leq 50°.s^{-1}$.

De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.



Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action F du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant t, le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :



Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- une tige **1** de longueur $OB = L_1$, de section négligeable, de masse m_1, et de centre d'inertie G_1, tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2}\overrightarrow{x_1}$;
- une roue 4, de centre O, de rayon $R = 0{,}07\,\text{m}$, de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec **1** ;
- un bras **2** constitué de deux éléments BE et BM tels que $\overrightarrow{BE} = -a\,\overrightarrow{y_2}$ et $\overrightarrow{BM} = b\,\overrightarrow{x_2}$, de section et de masse négligeables ;
- une biellette **3** (NM) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige 1 ;
- un vérin hydraulique de masse négligeable.

En I, le contact entre la roue **4** et la paroi **0** se fait par roulement sans glissement.

En E, le contact entre le bras **2** et la paroi **0** se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action $\overrightarrow{F}$ du vérin sur la biellette 3a, à chaque instant, pour direction $\overrightarrow{x_1}$: $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{x_1}$.

Repères et paramétrage

- $R_0\left(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$, repère associée à la canalisation O et supposé galiléen.
- $R_1\left(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$, repère associé à la tige 1.
- $R_2\left(O; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$, repère associé au bras 2.
- $\delta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right)$.
- $\beta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}\right)$.

Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à $\delta = 14°$, une vitesse $\dot{\delta}$ inférieur à $50°/s$

Modélisation dynamique

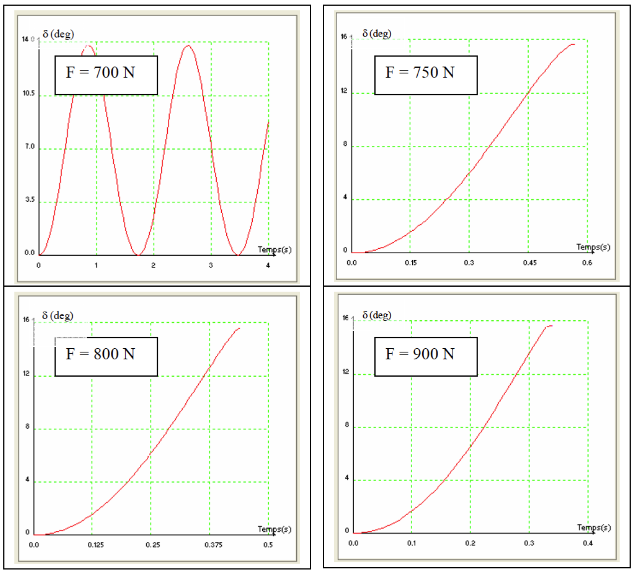
Question 1 *Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1+2+3+4\}$.*

Question 2 *Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ.*

Question 3 *Donner la puissance intérieure à Σ.*

Question 4 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement* *donnant une relation entre F, δ, et β.*

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.



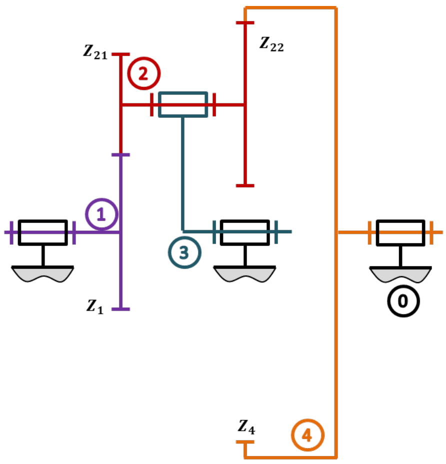
Question 5 *Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.*

Exercice 1 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

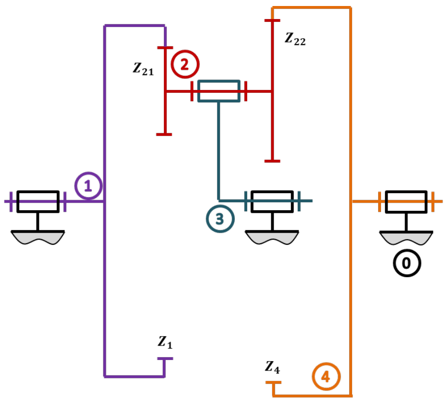
Corrigé voir 1.

Exercice 2 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

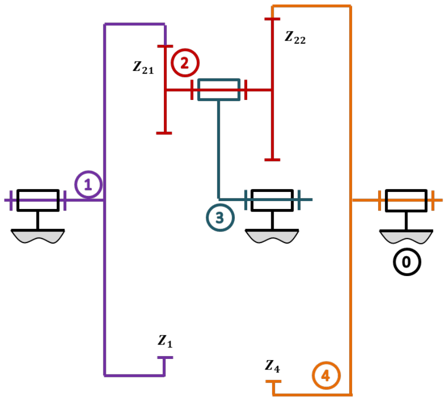
Corrigé voir 2.

Exercice 3 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

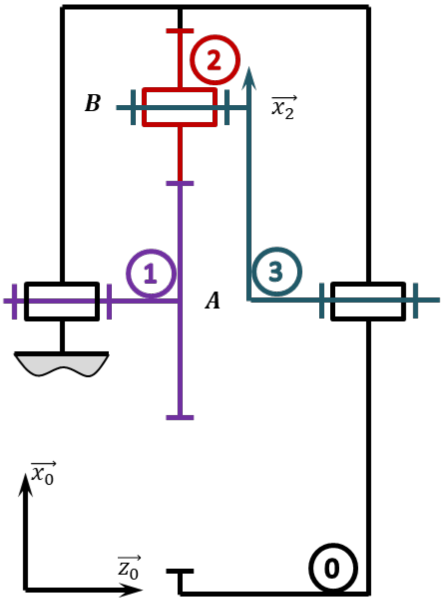
Corrigé voir 3.

Exercice 4 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer* $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

Corrigé voir 4.