Colle 01 – Corrigé

Asservissement en température d'un four

Equipe PT – La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- *C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.*
- *C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.*

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension v(t). Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (réglée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}+2000\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}=0,02v(t)$.

Question 1 *Calculer la fonction de transfert $G(p)$ du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?*

On décide de réguler la température $\theta(t)$ dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension $u(t)$. Le capteur est régi par l'équation différentielle : $u(t)+2\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=5\cdot10^{-3}\theta(t)$. On introduit également un gain K dans la chaîne directe.

Question 2 *Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rappeler les conditions de stabilité d'un système.*

On donne t_m le temps de montée du système en BF : $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ avec ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 3 *On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi=45°$. Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?*

On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour $K=11,3$.

Question 4 *Pour conserver une marge de phase égale à 60° on introduit une correcteur à avance de phase sous la forme $C(p)=K_a\dfrac{1+aTp}{1+Tp}$. Déterminer les constantes du correcteur.*

soit : $$H(p) = \frac{0{,}02K\,(1+2p)}{p\,(1+2p)\,(1+2\,000p) + 10^{-4}K} = \frac{0{,}02K\,(1+2p)}{4\,000\,p^3 + 2\,002\,p^2 + p + 10^{-4}K}$$

Les conditions de stabilité en boucle fermée nous sont données par le critère de Routh :

$$\begin{array}{ccc} 4\,000 & 1 & 0 \\ 2\,002 & 10^{-4}K & 0 \\ \dfrac{2\,002 - 0{,}4K}{2\,002} & 0 & 0 \\ 10^{-4}K & 0 & 0 \end{array}$$

Le système est stable si et seulement si :

$$2\,002 - 0{,}4K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 5\,005$$

d) La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p)B(p) = \frac{10^{-4}K}{p\,(1+2\,000p)\,(1+2p)}$$

Si on impose une marge de phase de 45°, on a :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\,000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{4}$$

En négligeant le dernier terme, on obtient : $\omega_{c0} = \dfrac{1}{2\,000} = 5\cdot 10^{-4}$ rad/s

d'où : $$t_m = \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5\cdot 10^{-4}} = 6\,000\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 40\ \text{mn}$$

e) Pour déterminer la valeur du signal de consigne, il convient de calculer la valeur du signal délivré par le capteur lorsque la température atteint 1 200 °C : en régime permanent, le capteur se comporte comme un gain de $5\cdot 10^{-3}$ V/°C.

Par conséquent : $$\theta = 1\,200\ °\text{C} \quad \Rightarrow \quad u = 6\ \text{V}$$

Comme la chaîne directe comporte un intégrateur, l'erreur statique sera nulle. Le système ne peut donc se stabiliser à 1 200 °C que si le signal d'entrée est un échelon de hauteur 6 V.
Si le système est réglé pour obtenir une marge de phase de 45°, la réponse du système, en boucle fermée, sera caractérisée par un facteur d'amortissement égal à 0,45. D'après les abaques des réponses indicielles, cela correspond à un dépassement de 20 %. La température maximale atteinte dans le four (temporairement) est donc égale à 1 440 °C.
Ce dépassement est bien évidemment trop important puisque les objets à cuire ne peuvent être soumis à des températures dépassant 1 400 °C.
f) Si on souhaite limiter le dépassement à 10 %, nous devons régler le système de sorte qu'il présente une marge de phase de 60 °. Cette marge de phase correspond à une pulsation ω_{c0} telle que :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\,000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{3}$$

soit : $$\arctan 2\,000\omega_{c0} \approx \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0} \approx \frac{\tan \pi/6}{2\,000} = 0{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{rad/s}$$

Par conséquent : $$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx 3\ \text{h}\ 10\ \text{mn}$$

Dans ces conditions, chaque traitement duerea 4 heures et 50 minutes (temps de montée en temprérature ajouté à une heure de cuisson et à 24 minutes de manutention et refroidissement). On ne pouura donc en réaliser que 5 par 24 heures. Le nombre maximum d'objets que l'on pourra traiter par jour est donc limité à 50.

Colle 02 – Corrigé

Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase

Equipe PT – La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- ❒ *C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.*
- ❒ *C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.*

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire : $G(p) = \dfrac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

- marge de phase : $\Delta\varphi \geq 45°$;
- dépassement $D\% < 10\%$;
- écart statique $\varepsilon_S < 0,08$;
- temps de montée $t_m < 8\,\text{s}$.

Question 1 *Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0,08$?*

On note t_m le temps de montée du système en BF et $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 *Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8\,\text{s}$?*

Question 3 *Quel choix faire pour la valeur de K ?*

Question 4 *Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.*

Expérimentalement, on constate que $z_{\text{BF}} \simeq \dfrac{\Delta\varphi^o}{100}$ et on rappelle que $D\% = e^{\frac{-\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}}$.

Question 5 *Que vaut alors le dépassement $D\%$?*

Question 6 *À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.*

Avec la valeur de $K = 16,1$, on introduit, en amont de $G(p)$, dans la chaîne directe, un correcteur $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

Question 7 *Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de 60°.*

CORRECTION

Q1- Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0{,}08$?

Comme la FTBO est : $G(p)=\dfrac{K}{(10\,p+1)^2\,(p+1)}$, et que le retour est unitaire, la FTBF s'écrit :

$$H(p)=\frac{G(p)}{1+G(p)}=\frac{K}{(10\,p+1)^2\,(p+1)+K}$$

Par définition l'écart statique s'écrit : $\varepsilon_S = \lim_{p\to 0^+}\ \{\ 1 - H(p)\ \} = 1 - \dfrac{K}{1+K} = \dfrac{1}{1+K}$

Pour avoir $\varepsilon_S < 0{,}08$ il faut avoir : $\dfrac{1}{1+K} < 0{,}08$ Soit $\boxed{K > 11{,}5}$

Q2- Quelle est la condition sur K pour obtenir tm < 8s ?

Pour avoir tm < 8 s et en considérant la relation approchée $t_m = \dfrac{3}{\omega_{C0}}$ < 8 s soit $\omega_{C0} > 0{,}375$ s

Le gain K qui correspond à cette pulsation de coupure à 0 dB est tel que : $G(j\omega_{c0}) = \dfrac{K}{(1+100\,\omega_{c0}{}^2)\,\sqrt{1+\omega_{c0}{}^2}} = 1$

Soit $\boxed{K = 16{,}1}$

Q3- Déterminer la plus petite valeur de K, permettant d'obtenir à la fois $\varepsilon S < 0{,}08$ et

D'après Q1, pour avoir $\varepsilon_S < 0{,}08$ il faut **K > 11,5**
D'après Q2, pour avoir obtenir tm < 8s il faut **K > 16,1**

La plus petite valeur qui permet de satisfaire aux deux conditions ci-dessus est **K > 16,1**

Q4- Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions. Que vaut alors le dépassement?

La marge de phase obtenue pour cette valeur de K est :

$$\Delta\varphi = \pi - 2\arctan 10\omega_{C0} - \arctan 10\omega_{C0} = 0{,}16 \text{ rad} = 9°$$

La valeur du dépassement en boucle fermée se détermine par les relations :

$$\Delta\varphi° \rightarrow z_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi°}{100} \rightarrow D\% = \exp\left(-\pi\frac{z_{BF}}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

Soit $\Delta\varphi° = 9° \rightarrow z_{BF} \approx \dfrac{\Delta\varphi°}{100} = 0{,}09 \rightarrow D\% = \exp\left(-\pi\dfrac{0{,}09}{\sqrt{1-0{,}09^2}}\right)$ = 73%

$$\boxed{\Delta\varphi° = 9° \text{ et } D\% = 74}$$

Ces deux valeurs ne sont pas conformes au cahier des charges

Q5- Déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

$$D\% = \exp\left(-\pi\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = 0{,}1$$

$$-\pi\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \ln 0{,}1 = -2.3 \qquad \pi^2\frac{z^2}{1-z^2} = 5.3 \qquad z^2 = \frac{5{,}3}{5{,}3+\pi^2}$$

Soit z_{BF} = 0,6   Ainsi : $\Delta\varphi° \approx 100\ z_{BF} = 60°$

Par ailleurs la marge de phase $\Delta\varphi \geq 45°$

Ces deux conditions imposent $\boxed{\Delta\varphi \geq 60°}$

Q6- Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase $C(p) = \dfrac{1 + aT\,p}{1 + T\,p}$ introduit a pour mission de remonter la marge de phase à 60°.

Il faut donc obtenir une remontée de phase de 60- 9 = 51° à la pulsation ω_{C0} = 0,375 rad/s

On $\omega_{c0} = \omega_{max} = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$ = 0,375 rad/s et $\varphi_{max} = \arcsin\dfrac{a-1}{a+1}$ = 51°

Cette dernière condition conduit à : a = 8

La première à T = 0,94 s

$$Ka = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Cycle 05

Colle 03 – Corrigé

Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase

Equipe PT – La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- *C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.*
- *C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.*

On considère un système de fonction de transfert est : $G(p) = \dfrac{K}{(p+1)^3}$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite une marge de phase supérieure à 45°.

Question 1 *Définir la condition de stabilité théorique du système ?*

On note t_m le temps de montée du système en BF avec $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 *Calculer la valeur K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de* 2,15 s.

Question 3 *Calculer pour cette valeur de K la marge de phase.*

Question 4 *En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ qu'il faut introduire dans la chaîne directe.*

CORRECTION

Q1- Définir la condition de stabilité théorique du système ?

Tous les poles sont à partie réel négative.

Q2- Calculer la valeur K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

Le temps de montée est défini par : $t_m = \dfrac{3}{\omega_{C0}}$

Si tm = 2,15 s alors la pulsation de coupure à 0 dB est : ω_{C0} = 1,4 rad/s

Or $|G(\omega_{c0})| = \dfrac{K}{(\sqrt{1+\omega_{c0}{}^2})^3}$ et $\varphi(\omega) = -3 \arctan \omega$

Par définition : $|G(\omega_{c0})| = \dfrac{K}{(\sqrt{1+\omega_{c0}{}^2})^3}$ =1 on obtient K = 5

Q3- Calculer pour cette valeur de K la marge de phase.

Dans ces conditions la marge de phase vaut : $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{C0}) = \pi - 3 \arctan \omega_{C0} = 17°$

Q4- En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase qu'il faut introduire dan la chaîne directe.

Le correcteur à avance de phase $C(p) = \dfrac{1 + aT\,p}{1 + T\,p}$ introduit a pour mission de remonter la marge de phase à 45 - 17 = 28° à la pulsation ω_{C0} = 1,4 rad/s

$\omega_{c0} = \omega_{max} = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$ = 1,4 rad/s et $\varphi_{max} = \arcsin \dfrac{a-1}{a+1}$ = 28°

Soit a = 2,8 et T = 0,43 s $\qquad Ka = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Colle 04 – Corrigé

Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur intégral

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- ❒ *C1-02 : Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.*
- ❒ *C2-04 : Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.*

Correction proportionnelle

Soit $F(p)$ la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de BODE de $F(p)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.

Question 1 *Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.*

On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note K_p le gain de ce correcteur.

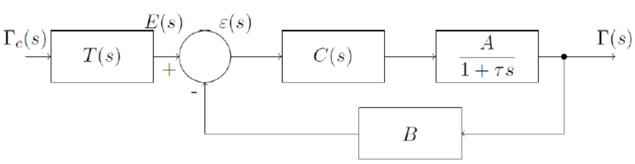
Question 2 *Déterminer la valeur de K_p permettant d'obtenir une marge de gain $M_G = 12\,\text{dB}$.*

Question 3 *Déterminer la nouvelle marge de phase du système.*

Question 4 *En le justifiant, déterminer l'erreur de position du système corrigé pour une consigne indicielle.*

Correction intégrale – Asservissement en accélération

On désire contrôler l'accélération $\gamma(t)$ d'un plateau. Pour cela, un capteur d'accélération, fixé sur le plateau et de sensibilité B, est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert : $H(s) = \dfrac{A}{1+\tau s}$. On modélise le correcteur par la fonction de transfert $C(s)$.



On a $A = 100\,\text{g}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\text{V}^{-1}$, $\tau = 0{,}2\,\text{s}$ et $B = 10^{-2}\,\text{g}^{-1}\text{V}\text{m}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Question 5 *Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur $T(s)$ qui traduira l'accélération de consigne $\Gamma_c(s)$ en tension $E(s)$.*

On applique à l'entrée du système une consigne d'accélération $\gamma_c = 20g$.

Système asservi sans correction : $C(s) = 1$.

Question 6 *Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.*

Question 7 *Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.*

Question 8 *Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent.*

Question 9 *Donner l'allure de la réponse de ce système en précisant les points caractéristiques.*

Système asservi avec correction intégrale : $C(s) = \dfrac{1}{s}$.

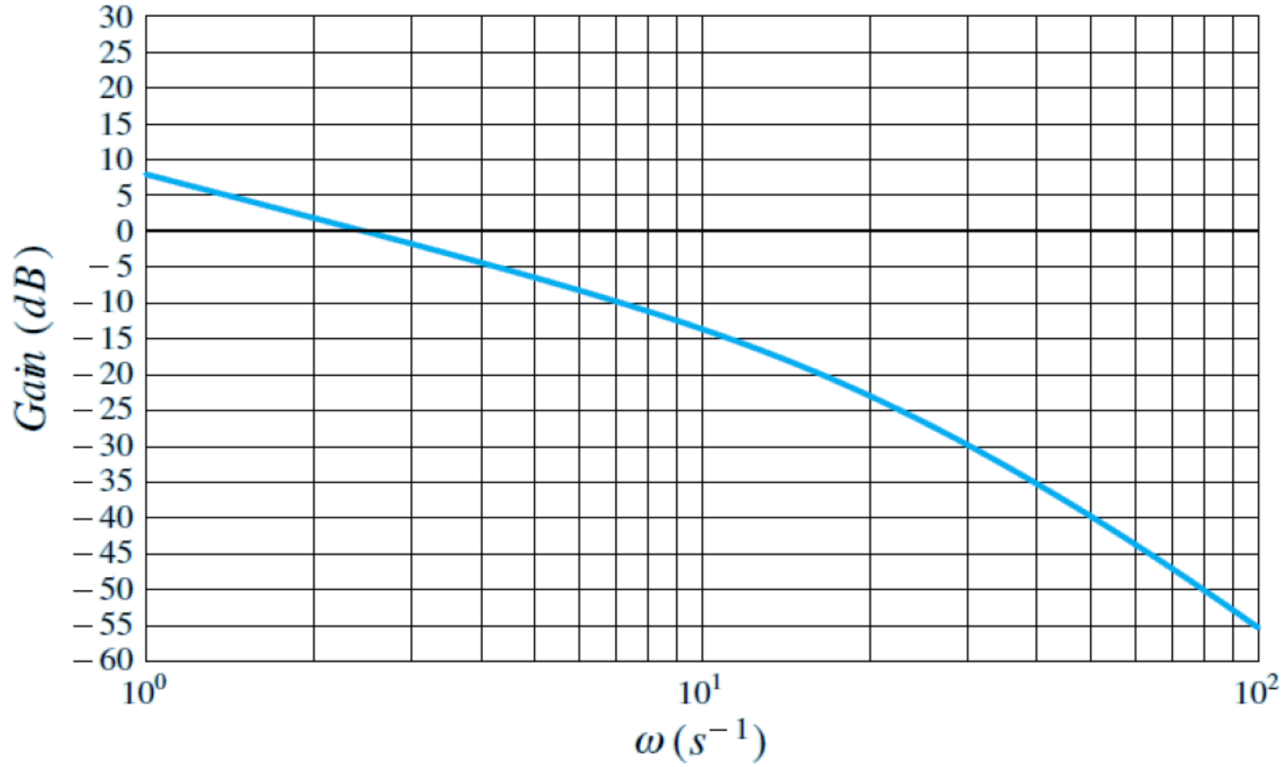
Question 10 *Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.*

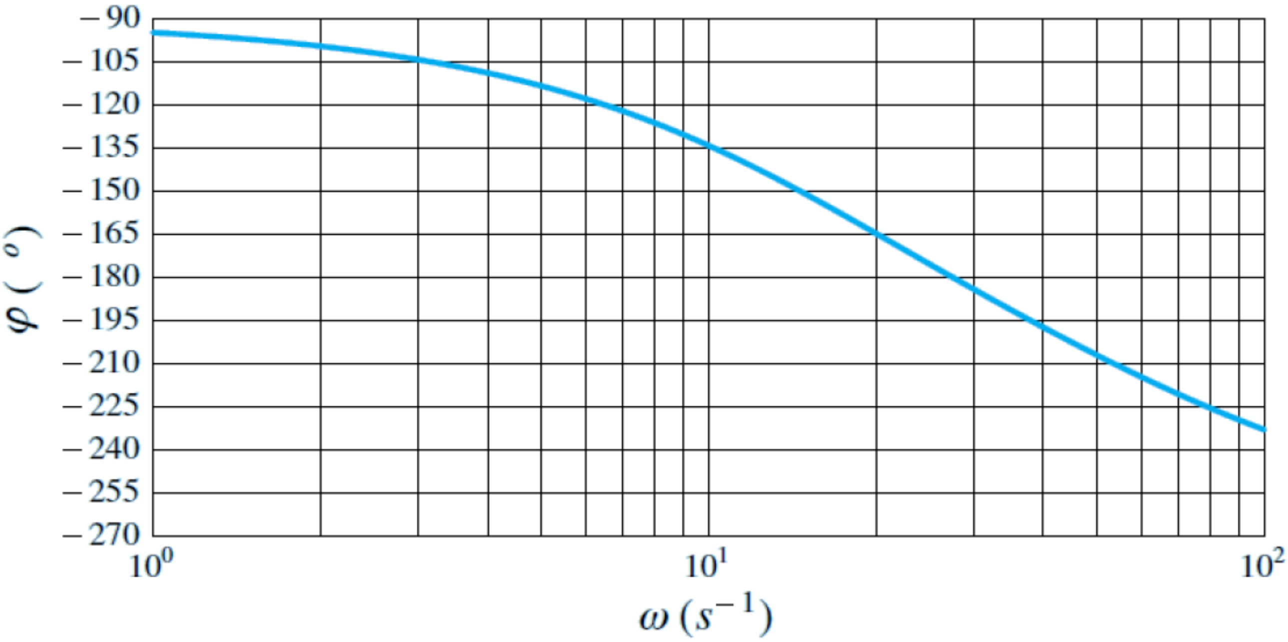
Question 11 *Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.*

Question 12 *Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent. Pouvait-on prévoir ce résultat.*

Question 13 *Conclure en comparant le comportement du système avec et sans correction.*

Cycle 05


30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−35
−40
−45
−50
−55
−60
Gain (dB)
10^0
10^1
10^2
$\omega\,(s^{-1})$


−90
−105
−120
−135
−150
−165
−180
−195
−210
−225
−240
−255
−270
φ (°)
10^0
10^1
10^2
$\omega\,(s^{-1})$

1.1. Réglage d'une marge de gain

1. $\boxed{M_\varphi = 78°}$ et $\boxed{M_G = 28\,\text{dB}}$
2. $Kp \approx \boxed{6{,}3}$
3. $\boxed{M_\varphi = 37°}$
4. L'erreur en régime permanent, vis-à-vis d'une consigne en échelon, est nulle.

2.1. Asservissement en accélération

1. $\boxed{T(s) = B}$
2. $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{A \cdot B / 1 + A \cdot B}{1 + \dfrac{\tau}{A \cdot B + 1} \cdot s}}$ $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{0{,}5}{1 + 0{,}1 \cdot s}}$
3. $t_{5\%} \approx \boxed{0{,}3\,\text{s}}$
4. $\gamma(+\infty) = \boxed{10 \cdot g \ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ $e_r(+\infty) = \boxed{10 \cdot g \ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$
5.
6. $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{A \cdot B} \cdot s + \dfrac{\tau}{A \cdot B} \cdot s^2}}$ $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{1}{1 + s + 0{,}2 \cdot s^2}}$ $\boxed{z = 1{,}12 \ \& \ \omega_0 = 2{,}24 \ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}$
7. $\boxed{t_{5\%} = 2{,}23\,\text{s}}$
8. $\gamma(+\infty) = \gamma_c = \boxed{20 \cdot g \ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$. Le système est précis.
9.