Application 1 – Corrigé

Application – Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs

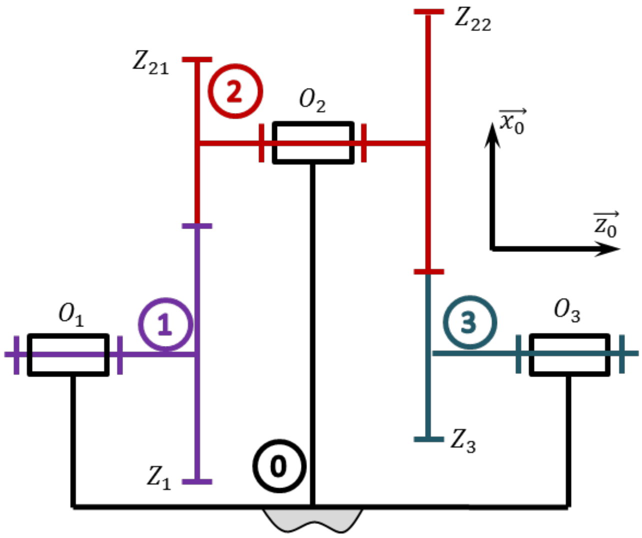
Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec Z_1, Z_{21}, Z_{23} et Z_3 le nombre de dents des roues dentées. On nomme k_1 le rapport du train de S_1 et S_2 avec $k_1 = \dfrac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$ et k_2 le rapport de S_2 et S_3 avec $k_2 = \dfrac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$.

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m \overrightarrow{z_0}$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r \overrightarrow{z_0}$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite $d = mz$ avec d le diamètre primitif, m le module, z le nombre de dents du pignon. $\omega(1/0)$, $\omega(2/0)$ et $\omega(3/0)$ sont les vitesses de rotation de S_1, S_2 et S_3 autour des axes $\left(O_1, \overrightarrow{x_g}\right)$, $\left(O_2, \overrightarrow{x_g}\right)$ et $\left(O_3, \overrightarrow{x_g}\right)$. Le repère galiléen $\mathscr{R}_g$ est lié au solide S_0. Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse $G_1 = O_1$, $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$ associées aux solides S_1, S_2 et S_3 sont de la forme : $I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i}$.

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur C_m agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante C_r s'exerce sur l'arbre 3.

Question 1 *Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.*

Question 2 *Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.*

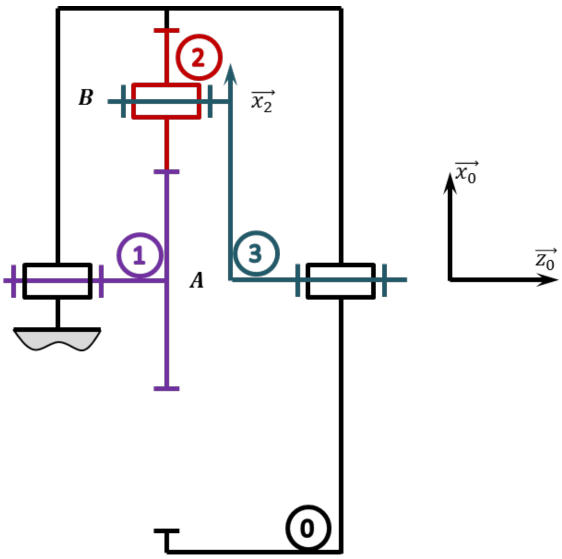
Question 3 *Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.*

Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\overline{\overline{I_A}}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \qquad \overline{\overline{I_B}}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

$$\overline{\overline{I_A}}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m\overrightarrow{z_0}$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r\overrightarrow{z_0}$

Question 4 *Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.*

Méthode
1. Écrire le rapport de réduction recherché.
2. Refaire le schéma en fixant le porte satellite et en libérant le bâti. Le porte satellite devient donc le bâti et le train peut être considéra comme un train simple.
3. Déterminer le rapport de réduction du train simple (les taux de rotation seront donc exprimés en fonction du porte-satellite) en fonction du nombre de dents des roues dentées.
4. Introduire les fréquences de rotation exprimées au point 1.
5. Exprimer le rapport de réduction cherché en fonction du nombre de dents des solides.

On recherche $k = \dfrac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$.

On bloque le porte satellite **3** et on libère la couronne **0**.

On peut donc exprimer $\dfrac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)} = (-1)^1 \dfrac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_0} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}$.

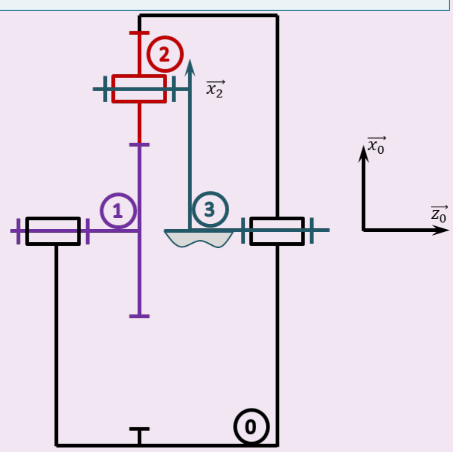
En décomposant le taux de rotation, on introduit $\omega(1/0)$ et $\omega(0/3)$:

$$\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)} = \frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0)+\omega(0/3)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0)-\omega(3/0)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow$$

$$Z_0\omega(3/0) = Z_1(\omega(1/0)-\omega(3/0)) \Leftrightarrow \omega(3/0)(Z_0+Z_1) = Z_1\omega(1/0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{Z_1}{Z_1+Z_0}.$$

Au final, $k = \dfrac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \dfrac{Z_1}{Z_1+Z_0}$.



Question 5 *Déterminer l'inertie équivalente du train épicycloïdal.*

Question 6 *Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliqué un couple résistant.*

Méthode 1. On calcule $T(1/0)$,

Calcul de l'énergie cinétique du planétaire : $T(1/0)$
Par définition, $2T(1/0) = \{\mathcal{V}(1/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(1/0)\}$ A étant un point fixe dans **0**, on a :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0)\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_1\overrightarrow{V(G,1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(A \in 1/0)} = \overline{\overline{I}}(A,0)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = C_1\omega(1/0)\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(1/0) = \frac{1}{2}C_1\omega(1/0)^2$$

Correction **Calcul de l'énergie cinétique du porte-satellite :** $T(3/0)$
Par définition, $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$; on a :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega(3/0)\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A,3/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3\overrightarrow{V(G,3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(A \in 3/0)} = \overline{\overline{I}}(A,3)\overrightarrow{\Omega(3/0)} = C_3\omega(3/0)\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2}C_3\omega(3/0)^2 = \frac{1}{2}k^2C_3\omega(1/0)^2$$

Correction **Calcul de l'énergie cinétique d'un seul satellite :** $T(2/0)$
Par définition, $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$ et le centre d'inertie d'un porte satellite est au point B on a donc :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0)\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(B,2/0)} \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2\overrightarrow{V(G,2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(A \in 2/0)} = \overline{\overline{I}}(A,2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = C_2\omega(2/0)\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/3)} + \overrightarrow{V(B,3/0)} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V(A,3/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = -R_3\overrightarrow{x_3} \wedge \omega(3/0)\overrightarrow{z_0} = -R_3\omega(3/0)\overrightarrow{y_3}.$$

R Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est porté par le porte satellite. Par ailleurs, les points A, B ainsi que les points de contact dans les engrenages sont toujours suivant la direction du porte satellite. Enfin, $R_3 = R_1 + R_2$.

D'où :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0)\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(B,2/0)} = -R_3\omega(3/0)\overrightarrow{y_3} \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2\overrightarrow{V(G,2/0)} = -R_3\omega(3/0)\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{\sigma(A \in 2/0)} = C_2\omega(2/0)\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2}C_2\omega(2/0)^2 + \frac{1}{2}M_2R_3^2\omega(3/0)^2 = \frac{1}{2}C_2\frac{r_1^2}{4r_2^2}\omega(1/0)^2 + \frac{1}{2}M_2R_3^2k^2\omega(1/0)^2 = \frac{1}{2}C_2\mu^2\omega(1/0)^2 + \frac{1}{2}M_2R_3^2\omega(3/0)^2$$

Correction **Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble E :** $T(E/0)$

Sans oublier qu'il y a 3 satellites (...), on a donc :

$$T(E/0) = T(1/0) + T(2/0) + T(3/0)$$

$$T(E/0) = \frac{3}{2} C_2 \frac{r_1^2}{4 r_2^2} \omega(1/0)^2 + \frac{3}{2} M_2 R_3^2 k^2 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} C_1 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

D'où

$$T(E/0) = \frac{1}{2}\left(3C_2\mu^2 + 3M_2R_3^2k^2 + C_1 + k^2C_3\right)\omega(1/0)^2$$

On note donc $J_{eq} = 3C_2\mu^2 + 3M_2R_3^2k^2 + C_1 + k^2C_3$ l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

Correction **Calcul des puissances externes**

Calcul des puissances dues aux actions de contact

Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 1 et 0 : $\mathscr{P}_{0\to 1}$ **:**

On a : $\mathscr{P}_{0\to 1} = \{\mathscr{V}(1/0)\} \otimes \{\mathscr{T}(1\to 0)\}$

$$\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0)\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A \quad \{\mathscr{T}(1\to 0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(1\to 0)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,1\to 0)} = L_{01}\overrightarrow{x_0} + L_{01}\overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_A$$

On a donc : $\mathscr{P}_{0\to 1} = 0$.

- **Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 2 et 0 :** $\mathscr{P}_{0\to 2} = 0$
- **Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 3 et 0 :** $\mathscr{P}_{0\to 3} = 0$
- **Puissance fournie à l'arbre 1 :** $\mathscr{P}_{\text{ext}\to 1} = C_e\,\omega(1/0)$
- **Puissance transmise par l'arbre 3 :** $\mathscr{P}_{3\to \text{ext}} = C_s\,\omega(3/0) = k C_s\,\omega(1/0)$
- **Calcul des puissances dues aux actions à distance**
- **Puissance due à la pesanteur sur la pièce 1**
- **Puissance due à la pesanteur sur la pièce 3**
- **Puissance due à la pesanteur sur la pièce 2**
- **Calcul des puissances internes**
- **Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 1 et 2 :** $\mathscr{P}_{1\to 2} = 0$ **(RSG)**
- **Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 2 et 3 :** $\mathscr{P}_{3\to 2} = 0$

  D'après le théorème de l'énergie puissance, on a :

$$\frac{\mathrm{d}T(E/0)}{\mathrm{d}t} = (C_e + kC_s)\,\omega(1/0) \Leftrightarrow J_{eq}\dot{\omega}(1/0) = (C_e + kC_s)$$

Application 3 – Corrigé

Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

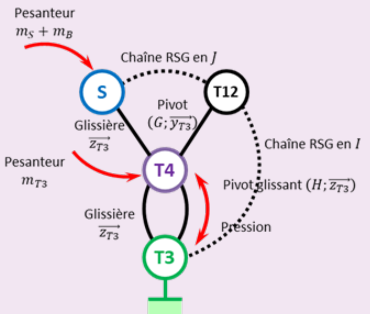
Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Présentation

Question 1 *Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.*

Correction On isole l'ensemble : {bateau; S; chaîne; T12; T4}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $P_{\text{int}}(E)+\mathscr{P}\left(\overline{E}\rightarrow E/\mathscr{R}_g\right)=\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\left[\mathscr{E}_c\left(E/\mathscr{R}_g\right)\right]$.



Relation cinématique :

- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=V_B\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{V(G,T_4/T_3)}=V_V\overrightarrow{z}$
- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}+\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_4)}+\overrightarrow{V(G,T_4/T_3)}$
  - $\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}=\overrightarrow{V(J,S/T_{12})}+\overrightarrow{GJ}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/T_{12})}=R\overrightarrow{x}\wedge\omega(T_4/T_{12})\overrightarrow{y}=R\omega(T_4/T_{12})\overrightarrow{z}$
  - $V_B=R\omega(T_4/T_{12})+V_V$
- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}+\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_3)}$
  - $\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_3)}=\overrightarrow{V(I,T_{12}/T_3)}+\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{\Omega(T_{12}/T_3)}=-R\overrightarrow{x}\wedge\omega(T_{12}/T_4)\overrightarrow{y}=R\omega(T_4/T_{12})\overrightarrow{z}$
  - $V_B=R\omega(T_4/T_{12})+R\omega(T_4/T_{12})=2R\omega(T_4/T_{12})$
- $V_B=V_B/2+V_V\iff V_B=2V_V$ et $\omega(T_4/T_{12})=-\dfrac{V_B}{2R}$.

(Remarque : erreur de signe éventuelle sur $\omega(T_{12}/T_4)$, non pénalisante pour la suite…)

Bilan des puissances extérieures :

- $\mathscr{P}\left(\text{pes}\rightarrow S/\mathscr{R}_g\right)=\left\{\begin{array}{c}-(m_S+m_B)g\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_B}\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ V_B\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{G_B}=-(m_S+m_B)gV_B\,;$
- $\mathscr{P}\left(\text{pes}\rightarrow T_4/\mathscr{R}_g\right)=\left\{\begin{array}{c}-m_T4g\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_{T_4}}\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ V_V\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{G_{T_4}}=-m_T4gV_V=-\dfrac{1}{2}m_T4gV_B\,;$
- $\mathscr{P}\left(\text{pre}\rightarrow T_4/\mathscr{R}_g\right)=\left\{\begin{array}{c}F_V\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{H}\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ V_V\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{G_B})=F_VV_V=\dfrac{1}{2}.F_VV_B.$
- $\mathscr{P}\left(T_3\rightarrow T_4/\mathscr{R}_g\right)=0$: glissière et pivot glissant sans frottement
- $\mathscr{P}\left(T_3\rightarrow 12/\mathscr{R}_g\right)=0$: roulement sans glissement.

- $\mathscr{P}\left(\overline{E} \rightarrow E/\mathscr{R}_g\right) = V_B(\frac{1}{2}.F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g)$

Bilan des puissances intérieures :

- $\mathscr{P}\left(E \overset{0}{\longleftrightarrow} = \right)$.

Calcul de l'énergie cinétique :

- $\mathscr{E}_c\,(S/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B)V_B^2$ (mouvement de translation du bateau par rapport au référentiel galiléen) ;
- $\mathscr{E}_c\,(T_4/3) = \frac{1}{2}m_T 4 V_V^2 = \frac{1}{8}m_T 4 V_B^2$ (mouvement de translation du vérin par rapport au référentiel galiléen) ;
- $\mathscr{E}_c\,(T_{12}/3) = \frac{1}{2}J\omega(T_{12}/3)^2 = \frac{1}{2}\frac{JV_B^2}{4R^2}$ (mouvement de rotation et translation du solide 12 – masse négligeable) (Remarque : le terme 1/4 n'apparait pas sur le corrigé initial).
- $\mathscr{E}_c\,(E/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B + 1/4 m_T 4 + J/(4R^2))V_B^2$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E_c(t)\right] = \left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma$ et $\gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V_B(t)\right]$.

Au final : $\left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma = V_B\left(\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g\right)$ et $\gamma = \dfrac{\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g}{m_S + m_B + 1/4 m_T 4 + \frac{J}{4R^2}}$

Cette valeur permet de valider l'exigence 1.1.3 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère 1.1.2) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire ($t = \frac{V_{\text{levage}}}{\gamma}$).

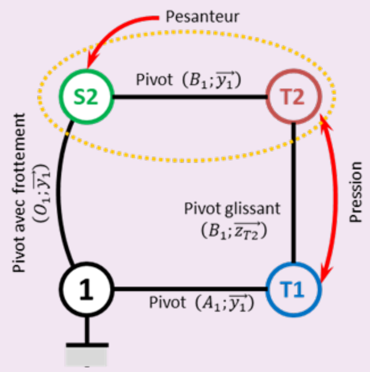
Phase de déplacement

Question 2 *Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle $\varphi(t)$ qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.*

Correction Quand le chariot avance à vitesse constante ($\varphi_{dec} = 0$), il faut que l'angle $\varphi(t)$ soit nul. Il faut donc envoyer une consigne $\varphi_c = -\delta$.

Question 3 *En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{eq}\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2}g\,x_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq}.*

Correction On isole l'ensemble $E = \{S2; T2\}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen : $P_{\text{int}}(E) + \mathscr{P}\left(\overline{E} \rightarrow E/\mathscr{R}_g\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathscr{E}_c\left(E/\mathscr{R}_g\right)\right]$



Calcul des puissances externes :

- $\mathscr{P}\,(\text{pes} \rightarrow S_2/1) = \left\{\begin{array}{c} -m_{S_2}g\,\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_{S_2}} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_2/1)} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}} \end{array}\right\}_{G_{S_2}} = (-m_{S_2}g\,\overrightarrow{z_1})\cdot(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}}) = -m_{S_2}g(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha)$

$\overrightarrow{V\left(G_{S_2}, S_2/1\right)} = \overrightarrow{V\left(O_1, S_2/1\right)} - (x_{G_{S_2}}\overrightarrow{x_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\overrightarrow{z_{T_3}}) \wedge \dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_1} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}}$.

- $\mathscr{P}\left(1\rightarrow S_2/1\right)=\left\{\begin{array}{c}-\\ L_{12}\overrightarrow{x_1}-\mu\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}+N_{12}\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_{O_1}\otimes\left\{\begin{array}{c}\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_1}=-\mu\dot{\alpha}^2$
- $\mathscr{P}\left(T_1\rightarrow T_2/1\right)_{\text{pivot glissant}}=0$ (pivot glissant sans frottement)
- $\mathscr{P}\left(T_1\rightarrow T_2/1\right)_{\text{vérin}}=\left\{\begin{array}{c}p(t)S\overrightarrow{z_{T_2}}\\ -\end{array}\right\}_{B_1}\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{\lambda}\end{array}\right\}_{B_1}=p(t)S\dot{\lambda}=p(t)S\dfrac{\dot{\alpha}}{k}$
- $\mathscr{P}\left(\overline{E}\rightarrow E/\mathscr{R}_g\right)=-m_{S_2}g\left(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha+z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha\right)-\mu\dot{\alpha}^2+p(t)S\dot{\alpha}/k.$

Calcul des puissances internes $\mathscr{P}\left(E\overset{0}{\longleftrightarrow}=\right)$ pas de frottement dans la liaison pivot.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S2 sont à prendre en contact (elles sont négligeables pour T2).

$\mathscr{E}_c\left(S_2/1\right)=\dfrac{1}{2}J_{S2}\dot{\alpha}^2+\dfrac{1}{2}m_{S2}\overrightarrow{V\left(G_{S2},S_2/1\right)}^2=\dfrac{1}{2}\left(J_(S_2)+m_{S_2}(x_{G_{S_2}}^2+z_{G_{S_2}}^2)\right)\dot{\alpha}^2=\dfrac{1}{2}J_{eq}\dot{\alpha}^2$ avec $J_{\text{eq}}=J_(S_2)+m_{S_2}(x_{G_{S_2}}^2+z_{G_{S_2}}^2)$.

On trouve donc, au final :

$$J_{\text{eq}}\ddot{\alpha}+\mu\dot{\alpha}=\frac{p(t)S}{k}+m_{S2}g\left(x_{G_{S2}}\cos\alpha-z_{G_{S2}}\sin\alpha\right).$$

Si on suppose l'angle α nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.

Application 4 – Corrigé

Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

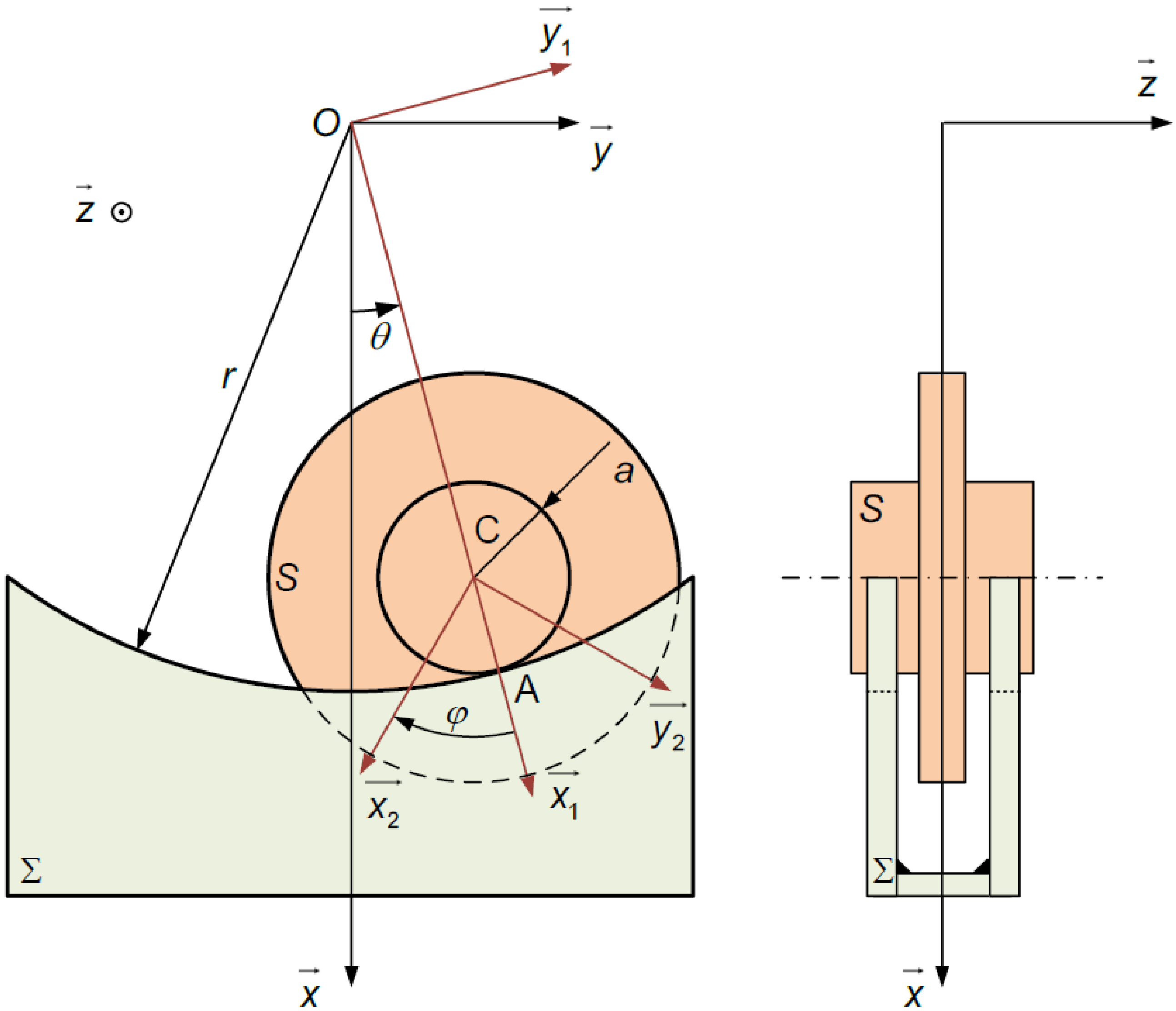
Sources multiples

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C34 : chaînes de solides ;*
- *Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;*
- *Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;*

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ.



Soit $\left(O;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ un repère galiléen lié au bâti Σ. On désigne par $\overrightarrow{g}=g\,\overrightarrow{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$, de rayon r . Le solide S de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a ($a<r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon S, de centre C, roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ;
- soit $\mathcal{R}_1\left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z}\right)$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_1}\right)$. $\theta=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- soit $\mathcal{R}_2\left(C;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z}\right)$ un repère lié à S. On pose $\varphi=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose $\varphi=0$ lorsque $\theta=0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie $\left(C,\overrightarrow{z}\right)$ et f le coefficient de frottement entre S et Σ.

On donne $a=12{,}3\,\text{mm}$; $r=141{,}1\,\text{mm}$; $g=9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m=7217\,\text{g}$; $f=0,15$.

Question 1 *Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.*

Question 2 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R. En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ.*

Question 3 *En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S.*

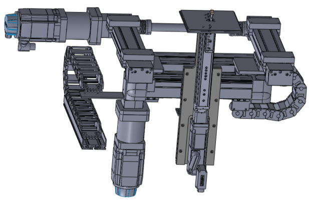
Question 4 *En déduire le moment d'inertie I de S, sachant que $T=5\,\text{s}$.*

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta=\theta_0\cos(\omega t)$ avec $\omega=\sqrt{\dfrac{mg}{(r-a)\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t=0$, tel que $\theta=\theta_0$ et $\dot{\theta}=0$.

Question 5 *Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ.*

TD 1 – Corrigé



Système de dépose de poudre

Concours Centrale Supelec – TSI 2016

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Objectif L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système.

Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe $\overrightarrow{x}$ soit de $V_{\max} = 0{,}45\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ et que l'accélération maximale du chariot soit de $\gamma_{\max} = 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Travail demandé

Question 1 *Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur Ω_{max}. Faire l'application numérique.*

Correction

On a $V_{\max} = \Omega_{\max} \cdot r \cdot \dfrac{\phi}{2}$. En conséquence $\Omega_{\max} = V_{\max}\dfrac{2}{r\phi}$.

Application numérique : $\Omega_{\max} = \dfrac{2 \cdot 0,45 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 314\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \simeq 3000\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$.

Question 2 *Déterminer l'accélération maximale du moteur $\dot{\Omega}_{max}$. Faire l'application numérique.*

Correction

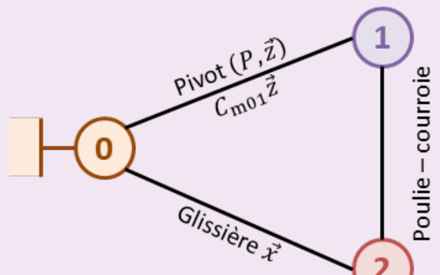
En suivant un raisonnement similaire : $\dot{\Omega}_{\max} = \gamma_{\max}\dfrac{2}{r\phi}$.

Application numérique : $\dot{\Omega}_{\max} = \dfrac{10 \cdot 2 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 6981\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$.

Question 3 *Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe $\overrightarrow{x}$ par rapport au bâti notée $\mathscr{E}_c(\text{ensemble}/0)$. En déduire l'inertie équivalente J de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.*

Correction

Le système peut être modélisé ainsi :



$\mathscr{E}_c(\text{ensemble}/0) = \mathscr{E}_c(1/0) + \mathscr{E}_c(2/0)$. Le solide 1 et l'arbre moteur sont en rotation par rapport au bâti et le solide 2 est en translation par rapport au bâti, on a donc :

- $\mathscr{E}_c(1/0) = \dfrac{1}{2}\left(J_m\Omega^2 + J_1(r\Omega)^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(J_m + J_1 r^2\right)\Omega^2$
- $\mathscr{E}_c(2/0) = \dfrac{1}{2}MV^2 = \dfrac{1}{2}M\Omega^2\left(\dfrac{r\phi}{2}\right)^2$.

$\mathscr{E}_c(\text{ensemble}/0) = \dfrac{1}{2}\left(\left(J_m + J_1 r^2\right) + M\left(\dfrac{r\phi}{2}\right)^2\right)\Omega^2$.

Application numérique : $J_{eq} = \left(J_m + J_1 r^2\right) + M\left(\dfrac{r\phi}{2}\right)^2 = 5,9 \times 10^{-5}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

Question 4 *Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté C_{max}. Faire l'application numérique.*

Correction

Question 5 *Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.*

Correction

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de $3000\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$ et de puissance utile $0{,}47\,\text{kW}$.

Question 6 *Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.*

Correction

Activation 1 – Corrigé

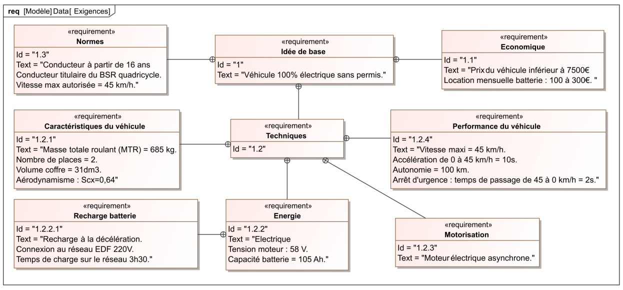
Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

Savoirs et compétences :

- ❐ *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- ❐ *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

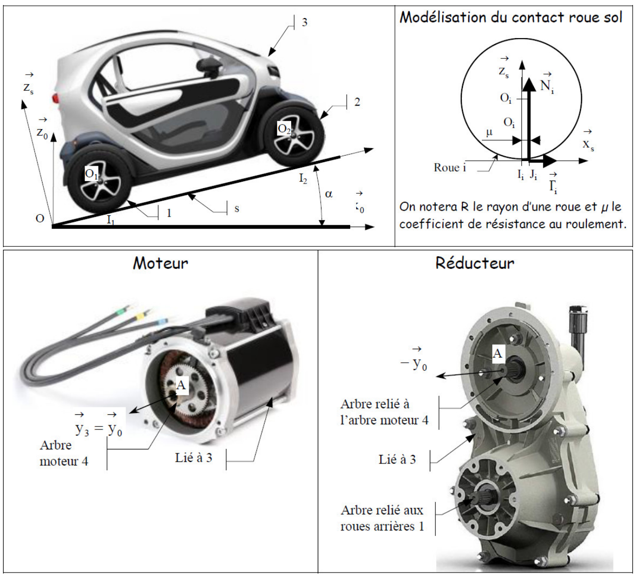
Mise en situation



Choix du motoréducteur

> **Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



Hypothèses générales :

- le vecteur $\overrightarrow{z_0}$ est vertical ascendant et on notera g l'accélération de la pesanteur;
- le repère $\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture $\left(O,\overrightarrow{z_s},\overrightarrow{x_s}\right)$;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en I_i ;
- le coefficient de résistance au roulement μ est identique pour tous les contacts roue – sol : $\mu = 3\text{e}-3m$. On pose $\overrightarrow{I_1 J_1} = \mu\overrightarrow{x_s}$, avec $\mu > 0$ si le déplacement du véhicule est suivant $+\overrightarrow{x_s}$;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

Actions mécaniques Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est : $\{\mathscr{F}(s\rightarrow i)\} = \left\{\begin{array}{c} T_i\overrightarrow{x_s} + N_i\overrightarrow{z_s} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{J_i}$ avec $J_i \in \left(O,\overrightarrow{x_s},\overrightarrow{y_s}\right)$ et $i = 1$ (roues arrières) ou 2 (roues avants). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que $\{\mathscr{F}(3\rightarrow 4)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{y_0} \end{array}\right\}_{-}$.

Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe $\left(A,\overrightarrow{y_0}\right)$: $J_m = 6\times 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m}^2$;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe $\left(O_i,\overrightarrow{y_0}\right)$: $J_R = 0{,}1\,\text{kg}\,\text{m}^2$ (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge : $m = 685\,\text{kg}$;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté G ;
- les autres inerties seront négligées.

Grandeurs cinématiques : Soit ω_m la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3, ω_{13} la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et ω_{23} la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera r le rapport de transmission du réducteur tel que $\omega_m = r\omega_{13}$. On appellera $\overrightarrow{V(G,3/0)} = \overrightarrow{V}_{3/0} = v\overrightarrow{x_s}$ la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon $R = 280\,\text{mm}$.

Choix de l'ensemble moto-réducteur

Équation de mouvement du véhicule

> **Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

Notations :
- puissance extérieure des actions mécaniques du solide i sur le solide j dans le mouvement de i par rapport à 0 : $\mathscr{P}\left(i \rightarrow j/0\right)$;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide i et le solide j : $\mathscr{P}\left(i \longleftrightarrow j\right)$;
- énergie cinétique du solide i dans son mouvement par rapport à 0 : $\mathscr{E}_c\left(i/0\right)$.

Question 1 *Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :*

- *écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;*
- *déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;*
- *déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;*
- *déterminer explicitement les énergies cinétiques ;*
- *en déduire une équation faisant intervenir C_m, N_1, N_2, v, ω_m, $\omega_{1/0}$, $\omega_{2/0}$ ...... ;*
- *expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.*

Correction

Question 2 *À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer $(N_1 + N_2)$. Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.*

Correction

Question 3 *Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre (v, ω_{10}), (v, ω_{20}) et (ω_m, ω_{10}). Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme $\dfrac{r C_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq}\dfrac{dv(t)}{dt}$ avec $F_r(t)$ fonction de m, μ, g, R et α et M_{eq} fonction m, J_m, J_R, R et r.*

Correction

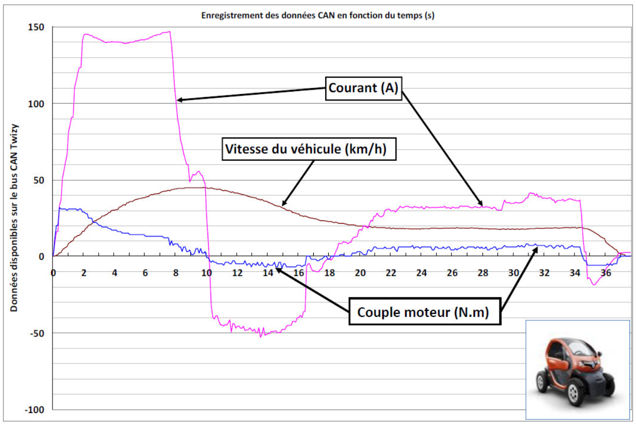
Détermination du coefficient de résistance au roulement μ

Objectif Déterminer le coefficient de résistance au roulement μ suite à une expérimentation.

Question 4 *En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement μ. Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :*

- *justifier dans quelle phase se placer ;*
- *définir la variable mesurée ;*
- *définir les hypothèses nécessaires ;*
- *énoncer les équations utilisées pour déterminer μ.*

Correction



Choix du moto-réducteur

Objectif Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale $\dfrac{dv(t)}{dt}$ du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission r issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

Question 5 *Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission r_{mini} pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.*

Correction

Question 6 *Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission r_{max} qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.*

Correction

Question 7 *À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.*

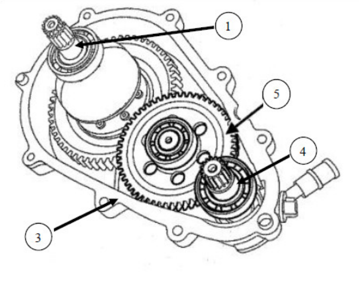
Correction

Validation du choix constructeur du moto-réducteur

Objectif Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

Question 8 *À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission* $r = \dfrac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$ *et conclure.*

Correction



vue 3D (sans le 1/2 carter supérieur) du réducteur

Z_4 = 17 dents
Z_{5a} = 57 dents
Z_{5b} = 17 dents
Z_1 = 68 dents

TD 5 – Corrigé

RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain⋆

Concours Commun Mines Ponts 2009

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Question 9 *Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble* Σ *au point* C_1 *dans la base* $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.

Correction

Question 10 *En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen* $\mathcal{R}_0$ *en* I_1 *en projection sur* $\overrightarrow{x_L}$, *déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact* $Z_{2d}+Z_{2g}$, *entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir* $\left(Z_{2d}+Z_{2g}\right)_{Repos}=\left(m_2+2m_r\right)g$ *avec* $m_2=52\,\text{kg}$ *la masse du pode arrière* ***2***.

Correction

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur C_m par une approche énergétique.

Question 11 *Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme* $\dfrac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$ *où* J *est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.*

Correction

Question 12 *Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme* $C_m=k_2\left(J\ddot{\varphi}+k_1\left(T_{2d}+T_{2g}\right)\right)$ *où* k_1 *et* k_2 *sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.*

Correction

Pour la question suivante, vous prendrez $J=34\,\text{kg}\,\text{m}^2$, $k_1=0{,}65\,\text{m}$ et $k_2=1{,}3\times10^{-2}$ sans unité.

Question 13 *Calculer le couple moteur maximal :* C_m *maxi. À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.*

Correction