

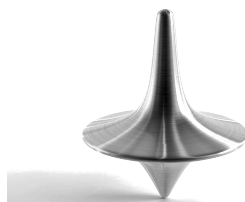
Cours

## Chapitre 3

### Caractérisation inertielle des solides

*Savoirs et compétences :*

- B2-10 : Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.



Toupie



Volants d'inertie d'un vilebrequin

<b>1</b>	<b>Masse et centre de masse (centre d'inertie)</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions	2
1.2	Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux	2
1.3	Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)	2
<b>2</b>	<b>Matrice d'inertie d'un solide</b>	<b>3</b>
2.1	Opérateur et matrice d'inertie	3
2.2	Déplacement d'une matrice d'inertie	3
2.3	Changement de base de la matrice d'inertie	4
2.4	Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)	4
2.5	Matrice d'inertie de solides usuels (3)	5

# 1 Masse et centre de masse (centre d'inertie)

## 1.1 Définitions

**Définition Masse d'un solide indéformable** On peut définir la masse totale d'un solide  $S$  par :  $M = \int_{P \in S} dm$ . Si de plus l'ensemble est fait d'un matériau homogène de masse volumique  $\mu$ , on a  $M = \mu \int_{P \in S} dV$ .

**Définition Centre d'inertie d'un solide** La position du centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  est définie par  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \overrightarrow{0}$ .

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide  $S$ , on passe généralement par l'origine du repère associé à  $S$ . On a alors  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \int_{P \in S} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \int_{P \in S} \overrightarrow{OG} dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm \Leftrightarrow M \overrightarrow{OG} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm$ .

**Méthode** Pour déterminer les coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  du centre d'inertie  $G$  du solide  $S$  dans la base  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on a donc :

$$\begin{cases} M x_G = \mu \int_{P \in S} x_P dV \\ M y_G = \mu \int_{P \in S} y_P dV \\ M z_G = \mu \int_{P \in S} z_P dV \end{cases} \quad \text{avec } dV \text{ volume élémentaire du solide } S.$$

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

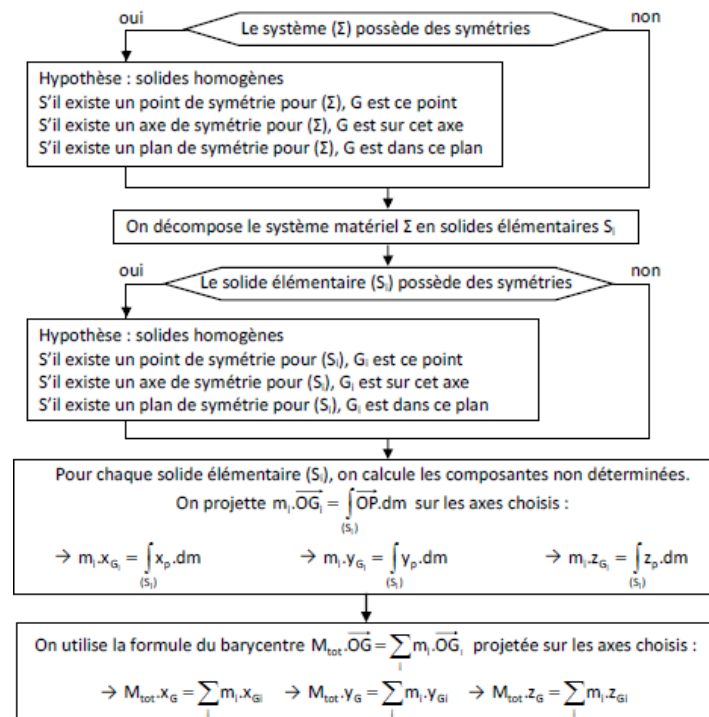
**R** Centre d'inertie et centre de gravité sont confondus lorsque le champ de pesanteur est considéré comme uniforme en tout point de l'espace.

## 1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux

**Méthode** Soit un solide composé de  $n$  solides élémentaires dont la position des centres d'inertie  $G_i$  et les masses  $M_i$  sont connues. On note  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ . La position du centre d'inertie  $G$  de l'ensemble  $S$  est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

## 1.3 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)



## 2 Matrice d'inertie d'un solide

### 2.1 Opérateur et matrice d'inertie

#### Définition Opérateur d'inertie

Soient :

un solide  $S$  de masse  $m$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ ;

- $\mathcal{R}_S = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le repère lié au solide  $S$ ;
- $P$  un point de  $S$  tel que  $\vec{OP} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}$ ;
- $\vec{u}$  un vecteur unitaire lié au solide  $S$  tel que  $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ .

On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\vec{u} \rightarrow \overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = \int_S \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

On appelle matrice d'inertie du solide  $S$  en  $O$ ,  $I_O(S)$ , l'image de cette application linéaire :  $\overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = I_O(S) \vec{u}$ .

#### Définition Matrice d'inertie La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S (y_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (x_p y_p) dm & -\int_S (x_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p y_p) dm & \int_S (x_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (y_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p z_p) dm & -\int_S (y_p z_p) dm & \int_S (x_p^2 + y_p^2) dm \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On appelle produit d'inerties par rapport aux axes  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{z})$  et  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{y})$  les termes  $D$ ,  $E$  et  $F$ .

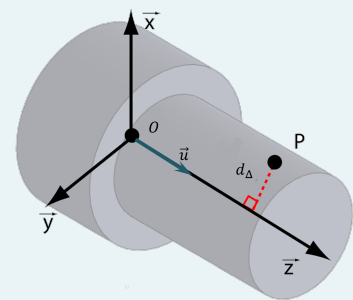
#### Propriété

- La matrice d'inertie est une matrice symétrique. Il existe une base dans laquelle elle est diagonalisable. Cette base est appelée base principale d'inertie.
- Si  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $E$  sont nuls.
- Si  $(O, \vec{z}, \vec{x})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $F$  sont nuls.
- Si  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est un plan de symétrie du solide,  $E$  et  $F$  sont nuls.
- Si un solide admet 2 plans de symétrie, alors  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont nuls.

#### Définition Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie caractérise la répartition de masse d'un solide autour d'un axe  $\Delta(O, \vec{u})$ . Plus la valeur de l'inertie est grande plus il sera difficile de mettre en mouvement de rotation ce solide autour de l'axe  $\Delta$ . On note  $I_\Delta(S)$ , le moment d'inertie du solide  $S$  autour de l'axe  $\Delta$ . Son unité est en  $\text{kg.m}^2$ . On a alors :

$$I_\Delta(S) = \int_S d_\Delta^2 dm \quad \text{où } d_\Delta \text{ est la distance entre le point courant } P \text{ et l'axe } \Delta.$$



**R** Si on connaît  $I_O(S)$ , alors  $I_\Delta(S) = \vec{u}^\top I_O(S) \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  vecteur unitaire.

### 2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie – Théorème de Huygens

**Théorème Théorème de Huygens** Soit  $S$  un solide de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ , d'inertie  $I_G(S)$  et d'inertie  $I_O(S)$  avec  $\vec{OG} = a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z}$ . Les matrices  $I_G(S)$  et  $I_O(S)$  exprimées dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sont liées

par :

$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Si le solide est modélisé par une masse ponctuelle  $m$  en  $G$  et si on souhaite connaître le moment d'inertie pour un point situé à une distance  $d$  de  $G$ , on a  $I = md^2$ .

### 2.3 Changement de base de la matrice d'inertie

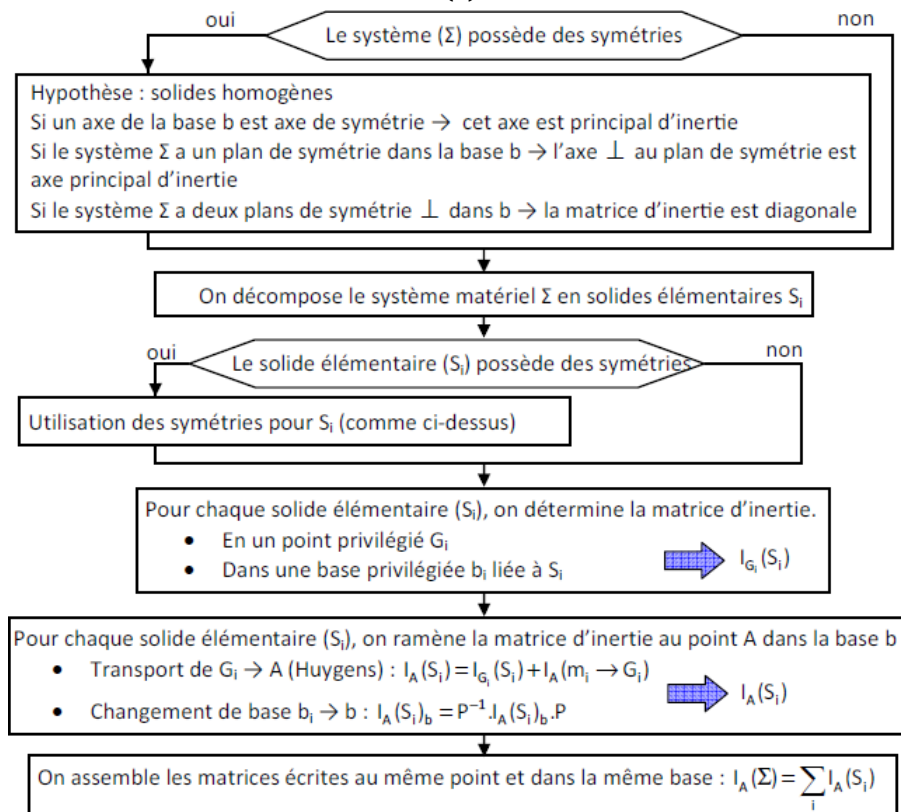
**Définition Matrice de Passage** On appelle  $P_{12}$  la matrice de passage permettant de passer de la base  $\mathcal{B}_1$  à la base  $\mathcal{B}_2$ . Cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_2$  écrits dans la base d'origine  $\mathcal{B}_1$ . On l'appelle aussi matrice de changement de base. Cette matrice est inversible.

Dans le cas des matrices de rotation,  $P_{12}^{-1} = P_{12}^T$ .

■ **Exemple** Soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  et  $\mathcal{R}_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  avec  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On a alors  $\vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \vec{x}_1$ . En conséquences,  $P_{12} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . ■

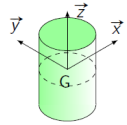
**Résultat** Pour passer  $I_A(S)_{\mathcal{B}_1}$  de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de la on a  $I_A(S)_{\mathcal{B}_2} = P_{12}^{-1} I_A(S)_{\mathcal{B}_1} P_{12}$ .

### 2.4 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)



## 2.5 Matrice d'inertie de solides usuels (3)

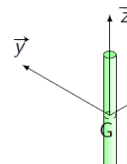
**Cylindre** d'axe  $(G, \vec{z})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant  $\vec{z}$

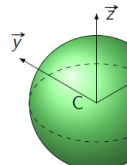
**Tige cylindrique**  $(G, \vec{z})$  de rayon négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant  $\vec{z}$ .

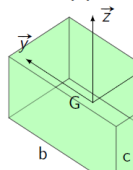
**Sphère pleine** de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{C(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

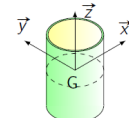
**Parallélépipède** de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans la base  $B$  parallèle aux arêtes du parallélépipède

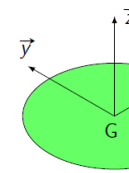
**Tube** d'axe  $(G, \vec{z})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  (épaisseur négligeable)



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left( \frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left( \frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant  $\vec{z}$ .

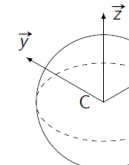
**Disque** d'axe  $(G, \vec{z})$  d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en G dans toute base contenant  $\vec{z}$ .

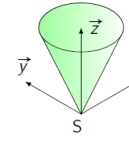
**Sphère creuse** de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{C(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

**Cône**  $(S, \vec{z})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$



$$\begin{pmatrix} \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left( \frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left( \frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{S(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

au sommet S dans toute base contenant  $\vec{z}$ .

## Références

- [1] Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.
- [3] Robert Papanicola, *Opérateurs d'inertie*, Lycée Charlemagne, Paris, <http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/>.

## Activation 1



### Barrière sur la tamise – Matrices d'inertie

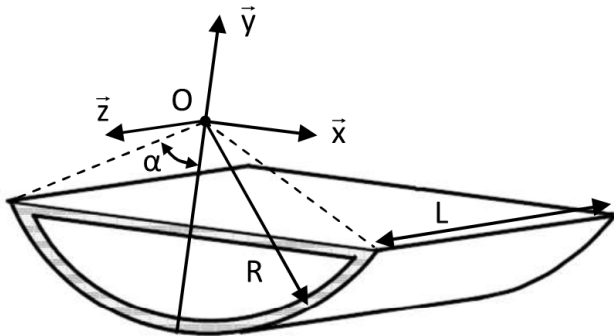
Florestan Mathurin

#### Savoirs et compétences :

- B2-10 : Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.

### Barrière sur la Tamise

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constitué de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58 \text{ m}$  la longueur de la porte ;
- $R = 12,4 \text{ m}$  le rayon de la porte ;
- $e = 0,05 \text{ m}$  l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant  $R$  ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$  ;

•  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_P$  de la plaque ;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_C$  de la portion cylindrique ;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de la porte.

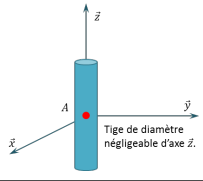
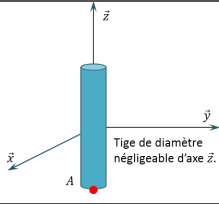
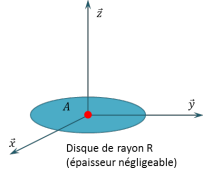
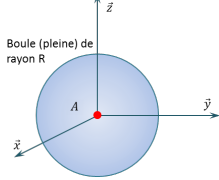
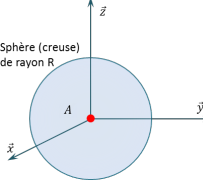
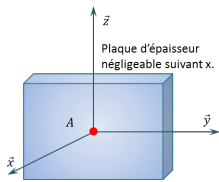
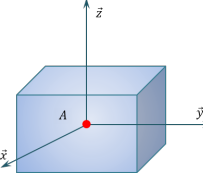
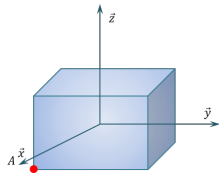
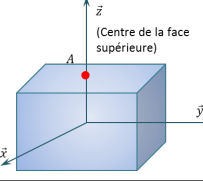
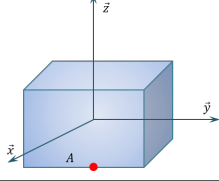
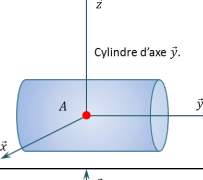
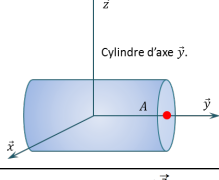
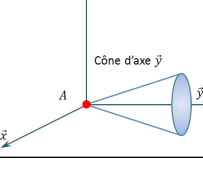
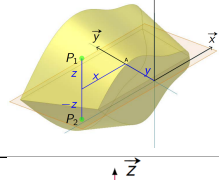
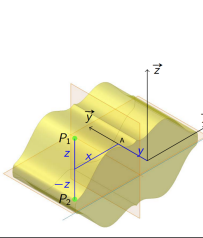
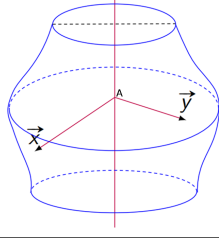
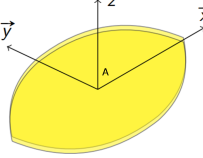
**Question 2** Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque  $P$  en  $G_P$  ;
2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre  $C$  en  $G_C$  ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte  $P$  en  $G$ .

**Question 3** Déterminer la moment d'inertie de la porte par rapport à  $(O, \vec{z})$ .

## Matrices d'inertie

Donner les formes des matrices d'inertie suivantes.



## Application 1



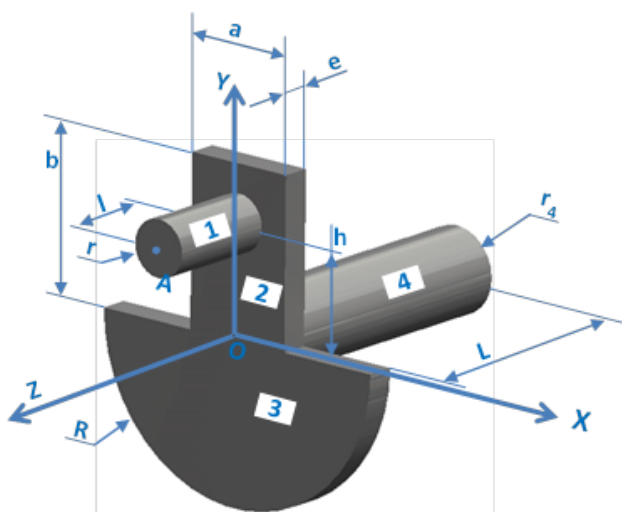
### Application – Vilebrequin de moteur

C. Gamelon & P. Dubois

#### Savoirs et compétences :

- B2-10 : Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.

Un vilebrequin est réalisé en mécanosoudage pour faire fonctionner un prototype de moteur. Les géométries sont par conséquent simples : assemblage de tôles ou cylindres en acier.



L'origine  $O$  repère  $\mathcal{R}$  est située dans le plan de contact du cylindre 1 et du parallélépipède 2.

On note  $\rho = 7200 \text{ kgm}^{-3}$  la masse volumique du matériau et on donne :

- |                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| • $a = 20 \text{ mm}$ ; | • $r = 5 \text{ mm}$ ;     |
| • $b = 30 \text{ mm}$ ; | • $L = 50 \text{ mm}$ ;    |
| • $e = 5 \text{ mm}$ ;  | • $r_4 = 7,5 \text{ mm}$ ; |
| • $l = 20 \text{ mm}$ ; | • $h = 20 \text{ mm}$ .    |

**Question 1** Calculer les masses des différentes pièces :  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  et  $m_4$ .

**Question 2** Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

**Question 3** Déterminer la valeur de  $R$  afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

**Question 4** Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 5** Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en  $O$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

**Question 6** Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe  $\vec{OA}$ .