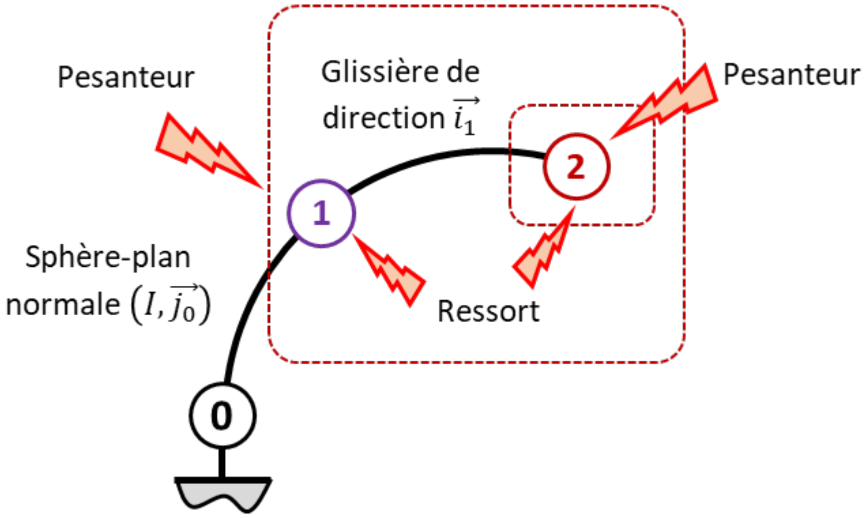
Exercice 1 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-14

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à $\mathscr{R}_0$.*

Le système posède deux mobilités :

- translation de 1 par rapport à 2 (λ) ;
- rotation de l'ensemble {1+2} autour du point I (le roulement sans glissement permet d'écrire une relation entre la rotation de paramètre θ et le déplacement suivant $\overrightarrow{i_0}$.

On en déduit la stratégie suivante :

- on isole 2 et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection suivant $\overrightarrow{i_1}$. BAME : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}$, $\{\mathscr{T}(1_{\text{ressort}}\rightarrow 2)\}$ ($\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)}\cdot\overrightarrow{i_1}=0$ et $\overrightarrow{R(1_{\text{ressort}}\rightarrow 2)}\cdot\overrightarrow{i_1}=0$) $\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur}\rightarrow 2)\}$.
- on isole {1+2} et on réalise un théorème du moment dynamique en I en projection suivant $\overrightarrow{k_0}$. BAME : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}$ ($\overrightarrow{\mathscr{M}(I,0\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{k_0}=0$), $\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur}\rightarrow 1)\}$ et $\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur}\rightarrow 2)\}$.

Question 3 *Déterminer les lois de mouvement.*

Exercice 2 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-14

C1-05 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à* $\mathscr{R}_0$.

Question 3 *Déterminer les lois de mouvement.*

Colle – Corrigé

Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant★★

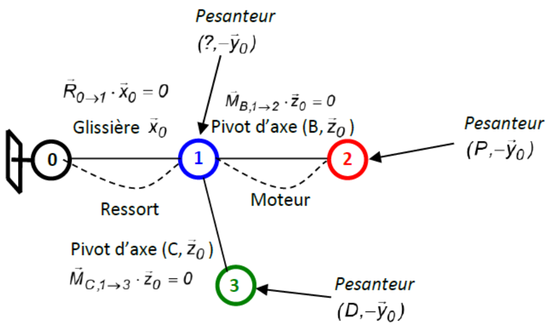
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ, leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes.
Une équation est déjà imposée : $\Omega=cte$. Reste à déterminer $\theta(t)$ et $x(t)$.

On isole Σ =1+2+3.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ en projection sur $\vec{x}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0=\vec{R}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0}$$

On isole 3.
Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur $\vec{z}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\vec{M}_{C,\overline{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0$:

$$\left\{\mathcal{T}_{0\to 1}\right\}=\underset{\forall P}{\left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{0\to 1}\\ \vec{M}_{P,0\to 1}\end{array}\right.}\quad avec\ \vec{R}_{0\to 1}\cdot\vec{x}_0=0 \qquad \left\{\mathcal{T}_{0\xrightarrow{ressort}1}\right\}=\underset{\forall P\in(A,\vec{x}_0)}{\left\{\begin{array}{l}-kx\vec{x}_0\\ \vec{0}\end{array}\right.}$$

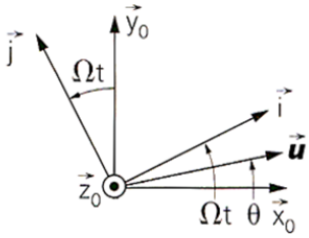
$$\left\{\mathcal{T}_{pes\to 1}\right\}=\underset{\forall P\in(G_1,\vec{y}_0)}{\left\{\begin{array}{l}-m_1g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{array}\right.}\qquad \left\{\mathcal{T}_{pes\to 2}\right\}=\underset{\forall P\in(G_2,\vec{y}_0)}{\left\{\begin{array}{l}-m_2g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{array}\right.}\qquad \left\{\mathcal{T}_{pes\to 3}\right\}=\underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\left\{\begin{array}{l}-m_3g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{array}\right.}$$

$$\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0=-kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0$:

$$\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=\sum_{i=1}^{3}m_i\vec{\Gamma}_{G_i\in i/0}\cdot\vec{x}_0$$

Soit $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=m_1\vec{\Gamma}_{G_1\in 1/0}\cdot\vec{x}_0+m_2\vec{\Gamma}_{G_2\in 2/0}\cdot\vec{x}_0+m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}\cdot\vec{x}_0$



$\vec{V}_{G_1\in 1/0}=\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_1\in 1/0}=\ddot{x}\vec{x}_0}$

$\vec{V}_{G_2\in 2/1}=\cancel{\vec{V}_{B\in 2/1}}+\overrightarrow{G_2B}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}=-r\vec{i}\wedge\Omega\vec{z}_0=r\Omega\vec{j}$

$\vec{V}_{G_2\in 2/0}=\vec{V}_{G_2\in 2/1}+\vec{V}_{G_2\in 1/0}=r\Omega\vec{j}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_2\in 2/0}=\ddot{x}\vec{x}_0-r\Omega^2\vec{i}}$ car $\left.\dfrac{d\vec{j}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{j}=\Omega\vec{z}_0\wedge\vec{j}=-\Omega\vec{i}$

$\vec{V}_{G_3\in 3/1}=\cancel{\vec{V}_{C\in 3/1}}+\overrightarrow{G_3C}\wedge\vec{\Omega}_{3/1}=L\vec{v}\wedge\dot{\theta}\vec{z}_0=L\dot{\theta}\vec{u}$

$\vec{V}_{G_3\in 3/0}=\vec{V}_{G_3\in 3/1}+\vec{V}_{G_3\in 1/0}=L\dot{\theta}\vec{u}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=\ddot{x}\vec{x}_0+L\ddot{\theta}\vec{u}+L\dot{\theta}^2\vec{v}}$ car $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{v}$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ=S1 + S2 + S3 en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0=\vec{R}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0$

$$-kx=m_1\ddot{x}+m_2\left(\ddot{x}-r\Omega^2\cos(\Omega t)\right)+m_3\left(\ddot{x}+L\ddot{\theta}\cos\theta-L\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

$$\boxed{(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta}\cos\theta-m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{C,\bar{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0$:

$\{T_{2\to 3}\}=\underset{\forall P\in(C,\vec{z}_0)}{\begin{Bmatrix}\vec{R}_{2\to 3}\\ \vec{M}_{P,2\to 3}\end{Bmatrix}}$ *avec* $\vec{M}_{P,2\to 3}\cdot\vec{z}_0=0$ $\qquad\{T_{pes\to 3}\}=\underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix}-m_3g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$

$$\vec{M}_{C,pes\to 3}\cdot\vec{z}_0=\left(\cancel{\vec{M}_{G_3,pes\to 3}}+\overrightarrow{CG_3}\wedge -m_3g\vec{y}_0\right)\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge -m_3g\vec{y}_0\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3gL\sin\theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0$:

$\vec{\delta}_{G_3,3/0}=\vec{0}$ (masse ponctuelle)

$$\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\left[\vec{\delta}_{G_3,3/0}+\overrightarrow{CG_3}\wedge\vec{R}_{d\,3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3L\left[\vec{z}_0\wedge\vec{v}\right]\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=m_3L\vec{u}\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à *S3* au point *C* et en projection sur $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\vec{M}_{C,\bar{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0$

$-m_3gL\sin\theta=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right]$ d'où $\boxed{\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0}$

Cycle 04

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0,0)$,

et que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre n en a est $f(x+a) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}x + \cdots + \dfrac{f^n(a)}{n!}x^n$, on a :

$$\text{ordre } 0 : \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \quad \text{ordre } 1 : \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre } 2 : \begin{cases} \cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre } 3 : \begin{cases} \cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} \end{cases}$$

et $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc : $\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3 L\ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)}$ et $\boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.

En posant $x(t) = A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t)$, on a : $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2\cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2\cos(\Omega t) + kA\cos(\Omega t) - m_3 LB\Omega^2\cos(\Omega t) = m_2 r\Omega^2\cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2\cos(\Omega t) - LB\Omega^2\cos(\Omega t) + gB\cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à : $\begin{cases} \left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]A - m_3 L\Omega^2 B = m_2 r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + \left(-L\Omega^2 + g\right)B = 0 \end{cases}$

Soit :

$$\boxed{A = \frac{m_2 r\Omega^2\left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$$

$$\boxed{B = \frac{m_2 r\Omega^4}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$$

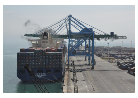
4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

On a $x(t) = 0$ en régime forcé, si $A = 0$.

Ce qui implique que : $A = \dfrac{m_2 r\Omega^2\left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}$ Soit : $\boxed{L = \dfrac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas $B = \dfrac{-m_2 r}{m_3 L}$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t) = \dfrac{-m_2 r}{m_3 L}\cos(\Omega t)$

Colle – Corrigé



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs ⋆⋆

Centrale Supelec PSI 2013

Savoirs et compétences :

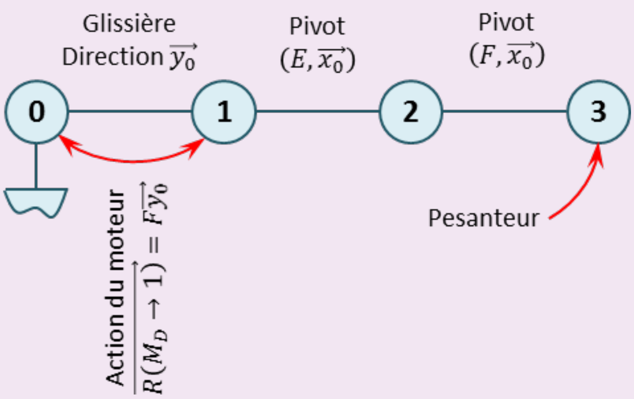
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

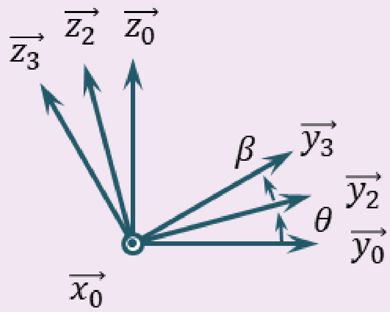
Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

Question 1 *Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?*

Correction





Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

Question 2 *Déterminer littéralement, au point G_3, la vitesse $\overrightarrow{V(G_3,3/0)}$ puis le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0$.*

Correction $\overrightarrow{V(G_3,3/0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG_3}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}-\ell_2\overrightarrow{z_2}-h_3\overrightarrow{z_3}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}.$

On a :

- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_2}+\overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{z_2}=\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_2}=-\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}$;

- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{z_3} = \left(\dot\theta + \dot\beta\right)\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{y_3}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot\theta\overrightarrow{z_2}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{z_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3,3/0)} = \dot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\dot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{y_3}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/0)} = \ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}$.

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overrightarrow{\delta(G_3,3/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}A_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = A_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{x_0}$.

On a donc, $\{\mathscr{D}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{l} M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right) \\ A_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_{G_3}$

Question 3 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.*

Correction D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant $\overrightarrow{z_2}$, on peut donc suggérer de réaliser le thorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3 ;
- action de 2 sur 3.

On a donc : $-M_3 g\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{y_2} = \left(M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_2}$

$\Leftrightarrow -M_3 g\sin\theta = M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\cos\theta + \ell_2\ddot\theta + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\cos\beta - h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\sin\beta\right)$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc **(1+2+3)** et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action du moteur sur 1.

On applique le TRD sur $\overrightarrow{y_0}$: $F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0} = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}} + \overrightarrow{R_d(3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Rightarrow F = \left(M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Leftrightarrow F = M_3\left(\ddot y_{ch}(t) + \ell_2\ddot\theta\cos\theta + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\cos\left(\beta+\theta\right) - \ell_2\dot\theta^2\sin\theta - h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\sin\left(\beta+\theta\right)\right)$

Question 4 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.*

Correction Le TRD appliqué à 3 en projection suivant $\overrightarrow{z_2}$ se traduit par :

$F - M_3 g\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{z_2} = \left(M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_2}$

$\Leftrightarrow F - M_3 g\cos\theta = M_3\left(-\ddot y_{ch}(t)\sin\theta + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\sin\beta + \ell_2\dot\theta^2 + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\cos\beta\right)$.

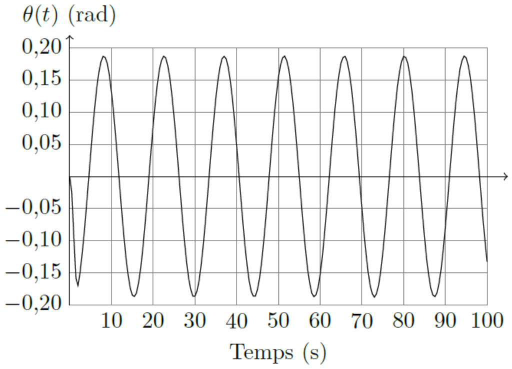
Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant $\overrightarrow{x_0}$ se traduit par :

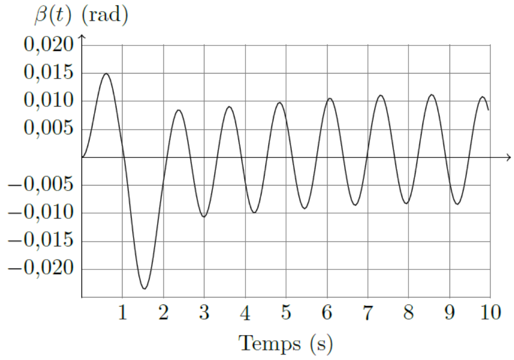
$\overrightarrow{FG_3} \wedge \left(-M_3 g \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_0} = \left(\overrightarrow{\delta\left(G_3, 3/0\right)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d\left(3/0\right)}\right) \cdot \overrightarrow{x_0}$
$\Leftrightarrow -h_3 \overrightarrow{z_3} \wedge \left(-M_3 g \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_0} = A_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)$
$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin\left(\beta + \theta\right) = A_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)$.

Question 5 *En supposant que θ, β, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.*

Correction
- On a $-M_3 g \sin\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\cos\theta + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)\cos\beta - h_3\left(\dot{\theta} + \dot{\beta}\right)^2 \sin\beta\right)$. En linéarisant, on obtient $-M_3 g\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right) - h_3\left(\dot{\theta} + \dot{\beta}\right)^2 \beta\right)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $-M_3 g\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)\right)$.
- On a : $F - M_3 g\cos\theta = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\sin\theta + h_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)\sin\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta} + \dot{\beta}\right)^2\cos\beta\right)$. En linéarisant, on obtient : $F - M_3 g = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\theta + h_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta} + \dot{\beta}\right)^2\right)$ En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $F - M_3 g = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\theta + h_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)\beta\right)$.
- On a : $M_3 g h_3 \sin\left(\beta + \theta\right) = A_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)$ En linéarisant, on obtient $M_3 g h_3\left(\beta + \theta\right) = A_3\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)$.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.





Question 6 *Proposer une simplification de la modélisation précédente.*

Correction L'amplitude des oscillations de β est 10 fois inférieure aux oscillations de θ. En conséquences, on pourrait poser $\beta = 0$ et :
- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\ddot{\theta}$;
- $F - M_3 g = -M_3\ddot{y}_{ch}(t)\theta$;
- $M_3 g h_3\theta = A_3\ddot{\theta}$.