

## Colle – Corrigé



## Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant\*

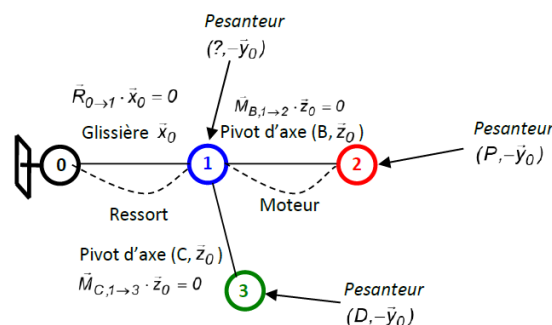
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x, \theta$ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée :  $\Omega = cte$ . Reste à déterminer  $\theta(t)$  et  $x(t)$ .

On isole  $\Sigma = 1+2+3$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma$  en projection sur  $\vec{x}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$$

On isole 3.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur  $\vec{z}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C,3 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0$  :

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{cases} \text{ avec } \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 = 0 & \{T_{0 \rightarrow \text{ressort} \rightarrow 1}\} &= \begin{cases} -kx\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \\ \{T_{pes \rightarrow 1}\} &= \begin{cases} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} & \{T_{pes \rightarrow 2}\} &= \begin{cases} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} & \{T_{pes \rightarrow 3}\} &= \begin{cases} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0 = -kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0$  :

$$\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\Gamma}_{G_i \in i/0} \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{Soit } \vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$$

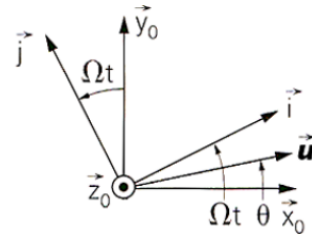
$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \ddot{\vec{x}}_0$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{G_2 B} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -r\vec{i} \wedge \Omega \vec{z}_0 = r\Omega \vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = r\Omega \vec{j} + \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = \ddot{\vec{x}}_0 - r\Omega^2 \vec{i} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{j}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{j} = \Omega \vec{z}_0 \wedge \vec{j} = -\Omega \vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 3/1} + \vec{G_3 C} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = L\vec{v} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = L\dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = L\dot{\theta} \vec{u} + \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = \ddot{\vec{x}}_0 + L\ddot{\theta} \vec{u} + L\dot{\theta}^2 \vec{v} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{v}$$



Théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma = S1 + S2 + S3$  en projection sur  $\vec{x}_0$  :  $\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$

$$-kx = m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - r\Omega^2 \cos(\Omega t)) + m_3 (\ddot{x} + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\vec{M}_{C, pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = \left( \vec{M}_{G_3, pes \rightarrow 3} + \vec{CG_3} \wedge -m_3 g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge -m_3 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 g L \sin \theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\vec{\delta}_{G_3, 3/0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle)}$$

$$\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = [\vec{\delta}_{G_3, 3/0} + \vec{CG_3} \wedge \vec{R}_{d3/0}] \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0}] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 L [\vec{z}_0 \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L \vec{u} \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta}]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à  $S3$  au point  $C$  et en projection sur  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$

$$-m_3 g L \sin \theta = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta}] \quad \text{d'où } \boxed{\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0}$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que  $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ ,

et que le développement limité de  $f(x)$  à l'ordre  $n$  en  $a$  est  $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$ , on a :

$$\text{ordre 0:} \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \text{ordre 1:} \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 2:} \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 3:} \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{cases}$$

et  $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc : 
$$\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.

En posant  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ , on a :  $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA \cos(\Omega t) - m_3LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} [-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k]A - m_3L\Omega^2B = m_2r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + (-L\Omega^2 + g)B = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

$$B = \frac{m_2r\Omega^4}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

On a  $x(t) = 0$  en régime forcé, si  $A = 0$ .

Ce qui implique que :  $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$  Soit :  $\boxed{L = \frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas  $B = \frac{-m_2r}{m_3L}$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t) = \frac{-m_2r}{m_3L} \cos(\Omega t)$



## Colle – Corrigé



## Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs \*

Centrale Supélec PSI 2013

## Savoirs et compétences :

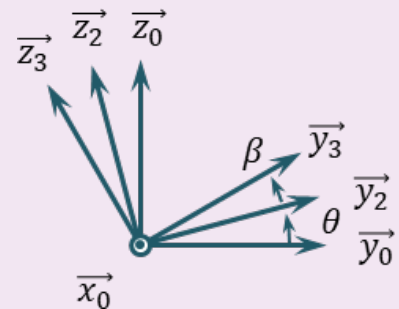
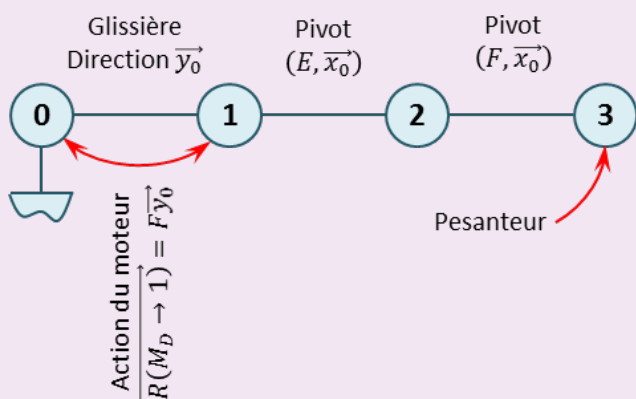
- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

## Modélisation dynamique du comportement de la charge

**Objectif** Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

**Question 1** Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

## Correction



Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur  $y_{ch}(t)$  (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle  $\theta(t)$  (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle  $\beta(t)$  (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

**Question 2** Déterminer littéralement, au point  $G_3$ , la vitesse  $\overrightarrow{V}(G_3, 3/0)$  puis le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}$  de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

**Correction** 
$$\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (y_{ch}(t) \overrightarrow{y_0} - \ell_2 \overrightarrow{z_2} - h_3 \overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

• 
$$\left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta} \overrightarrow{y_2};$$

$$\begin{aligned} \bullet \left[ \frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[ \frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \vec{z}_3 = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3 = -(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3; \\ \bullet \left[ \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} &= \dot{\theta} \vec{z}_2; \\ \bullet \left[ \frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} &= (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{z}_3. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \dot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3.$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} = \dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3.$$

$$\text{Par ailleurs, } G_3 \text{ étant le centre d'inertie, de 3, on a } \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\sigma(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dA_3(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} =$$

$$A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$$

$$\text{On a donc, } \{\mathcal{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3(\dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

**Question 3** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$ , sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

**Correction** D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant  $\vec{z}_2$ , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur  $\vec{y}_2$ .

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } -M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 &= \left( M_3 (\dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_2 \\ \Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta &= M_3 (\dot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta) \end{aligned}$$

Résolution faisant intervenir  $F$  – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc (1+2+3) et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_0$ .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \vec{y}_0 : F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= \left( M_3 (\dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_0 \\ \Leftrightarrow F &= M_3 (\dot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta)) \end{aligned}$$

**Question 4** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$  et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

**Correction** Le TRD appliqué à 3 en projection suivant  $\vec{z}_2$  se traduit par :

$$\begin{aligned} F - M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 &= \left( M_3 (\dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{z}_2 \\ \Leftrightarrow F - M_3 g \cos \theta &= M_3 (-\dot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta). \end{aligned}$$

Le TMD appliqué à 3 au point  $F$  en projection suivant  $\vec{x}_0$  se traduit par :

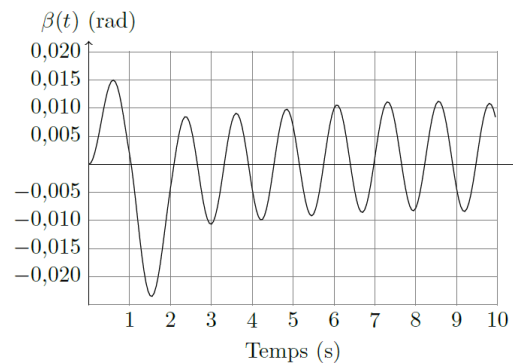
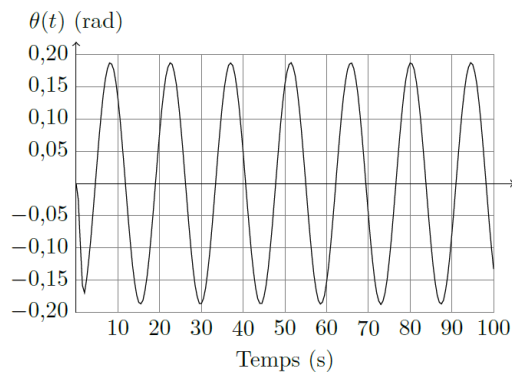
$$\begin{aligned} \overrightarrow{F G_3} \wedge (-M_3 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} &= \left( \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{F G_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \overrightarrow{x_0} \\ \Leftrightarrow -h_3 \overrightarrow{z_3} \wedge (-M_3 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} &= A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \\ \Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) &= A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}). \end{aligned}$$

**Question 5** En supposant que  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, linéariser les équations précédentes.

**Correction**

- On a  $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$ . En linéarisant, on obtient  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}))$ .
- On a :  $F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta)$ . En linéarisant, on obtient :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta)$ .
- On a :  $M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ . En linéarisant, on obtient  $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ .

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en  $y_{ch}(t)$  de 10m.



**Question 6** Proposer une simplification de la modélisation précédente.

**Correction** L'amplitude des oscillations de  $\beta$  est 10 fois inférieure aux oscillations de  $\theta$ . En conséquences, on pourrait poser  $\beta = 0$  et :

- $-g \theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$  ;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$  ;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$ .

## Colle – Corrigé



### Dynamique du véhicule – Segway de première génération\*

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

### Présentation

**Objectif** L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

### Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ . Exprimer la vitesse linéaire  $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$  du véhicule en fonction de  $R_C$  et  $\dot{\theta}$ .

**Correction** On a  $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0) = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$ . On a alors  $V_L = R_C \dot{\theta}$ .

**Question 2** Exprimer l'accélération, notée  $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0)$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ .

**Correction** 
$$\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \quad (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

**Question 3** Exprimer les conditions d'adhérence liant  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $N_A$ ,  $N_B$  et  $f$  traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant  $T_A + T_B$  à  $f$  et  $N_A + N_B$ .

**Correction** La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc,  $T_A \leq f N_A$  et  $T_B \leq f N_B$ . En sommant les inégalités, on a donc  $T_A + T_B \leq f (N_A + N_B)$ .

**Question 4** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z}_0$ .

**Correction**  $E$  étant un ensemble indéformable, on a :  $\overrightarrow{R_d}(E/\mathcal{R}_0) = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$  (pas de projection sur  $\vec{z}_0$ ). On isole  $E$  et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur  $E$  ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{z}_{01}$ , on a donc :  $N_A + N_B - m_E g = 0$ .

**Question 5** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_1$ . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite  $V_L$  de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

**Correction** En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{y}_1$ , on a :  $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$ . En utilisant les résultats de la question précédente,  $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$ . En notant  $V_L = R_C \dot{\theta}$  la vitesse limite avant



dérage, on a  $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$ . On a donc  $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$ .

**Question 6** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

**Correction** La vitesse limite est donc de  $10 \text{ m s}^{-1}$  soient  $36 \text{ km h}^{-1}$  ce qui satisfait le cahier des charges.

### Étude du renversement en virage du véhicule Segway

**Question 7** Calculer le torseur dynamique du système matériel  $E$  en  $G_E$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Exprimer ses composantes dans la base  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

**Correction** Au centre d'inertie de  $E$ , on a  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ . On a  $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$ . On a donc,  $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \vec{x}_1 - D \dot{\theta} \vec{y}_1 + C \dot{\theta} \vec{z}_0$ . On a donc  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$ .  
En conséquence,  $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$ .

**Question 8** Calculer  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  le moment dynamique au point  $B$  de l'ensemble  $(E)$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en projection sur  $\vec{x}_1$ .

**Correction**  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h \vec{z}_0 - l \vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$ .  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .

**Question 9** En appliquant le théorème du moment dynamique au point  $B$  à l'ensemble  $E$  et les roues dans leur mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , en projection sur  $\vec{x}_1$ , écrire l'équation scalaire qui donne  $N_A$  en fonction de  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  et des données du problème.

**Correction** On a :  
•  $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_0 = (-l \vec{y}_1 + h \vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_0 = l m_E g \vec{x}_1$ ;  
•  $\overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1$ .  
En appliquant le TMD en  $B$  suivant  $\vec{x}_1$ , on a :  $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .  
Au final,  $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$ .

**Question 10** Écrire la condition de non renversement du véhicule.

**Correction** Pour qu'il y ait non renversement,  $N_A$  doit rester positif ou nul.

On néglige  $I_{G_E}(E)$  pour simplifier l'application numérique.

**Question 11** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

**Correction**  $N_A \simeq \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$ . Ce qui est positif (pas de basculement).  
 $N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0 \Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L$   
 $\Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$ . CDCF Validé.

## Colle – Corrigé



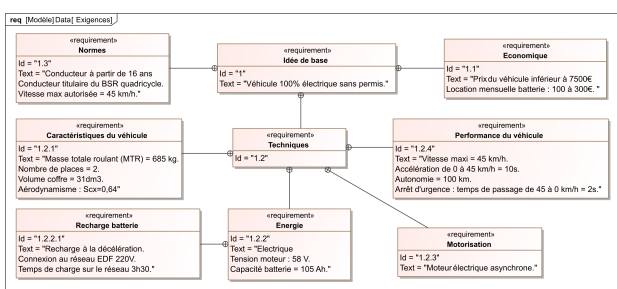
### Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

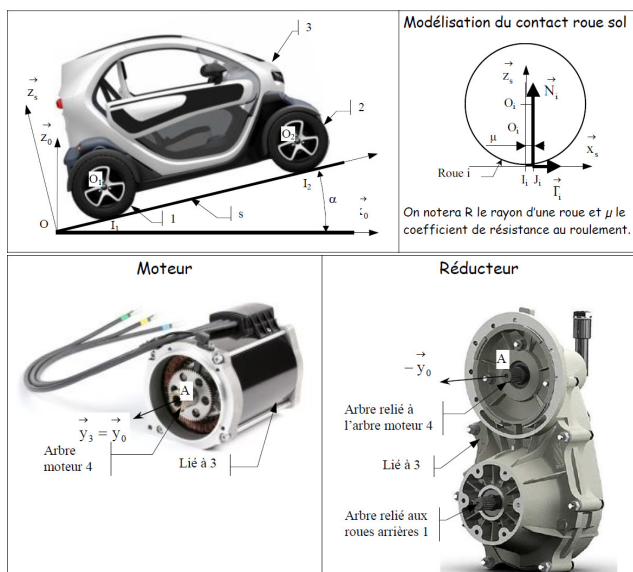
### Mise en situation



### Choix du motoréducteur

**Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



#### Hypothèses générales :

- le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est sup-

posé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;

- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3e - 3m$ . On pose  $\vec{I}_1 \vec{J}_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{F}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{matrix} T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ 0 \end{matrix} \right\}_{J_i}$  avec  $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$

et  $i = 1$  (roues arrières) ou  $2$  (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ C_m \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_-$ .

#### Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- les autres inerties seront négligées.

**Grandeurs cinématiques :** Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

#### Choix de l'ensemble moto-réducteur

#### Équation de mouvement du véhicule

**Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

### Notations :

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

**Question 1** Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :

- écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- en déduire une équation faisant intervenir  $C_m$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $v$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  .....;
- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

### Correction

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer  $(N_1 + N_2)$ . Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

### Correction

**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10})$ ,  $(v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{r C_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m$ ,  $J_m$ ,  $J_R$ ,  $R$  et  $r$ .

### Correction

**Détermination du coefficient de résistance au roulement  $\mu$**

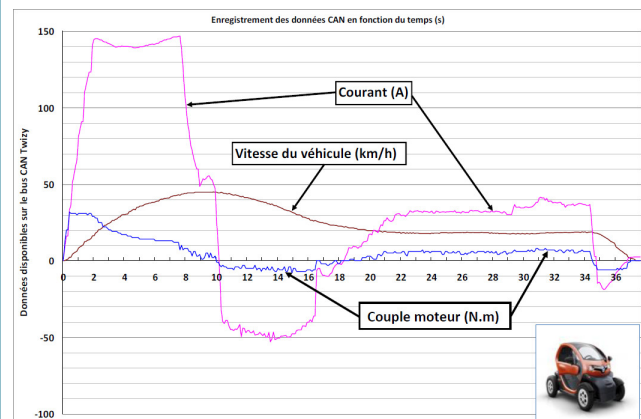
**Objectif** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coef-

ficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- justifier dans quelle phase se placer;
- définir la variable mesurée;
- définir les hypothèses nécessaires;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .

### Correction



### Choix du moto-réducteur

**Objectif** Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{\min}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

### Correction

**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

### Correction

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

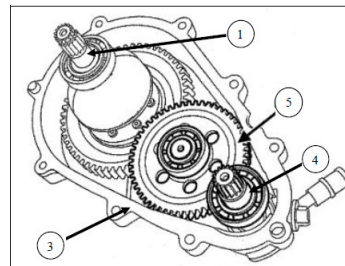
## Correction

### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

**Objectif** Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.

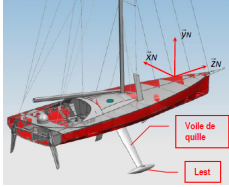
## Correction



vue 3D (sans le 1/2 carter supérieur) du réducteur

$Z_4 = 17$  dents  
 $Z_{5a} = 57$  dents  
 $Z_{5b} = 17$  dents  
 $Z_1 = 68$  dents

## TD 2 – Corrigé



## Quille pendulaire \*

Concours Commun Mines Ponts 2014

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

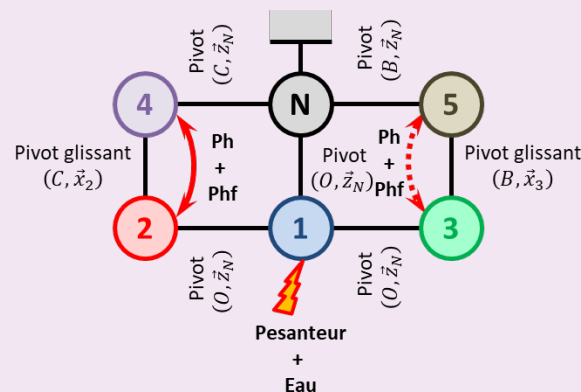
## Mise en situation

**Objectif** L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

## Vecteurs vitesse

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

## Correction



**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

1.  $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles ;
2.  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles ;
3.  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles ;
4.  $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

## Correction

1.  $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = \overrightarrow{V(O, 1/N)} + \overrightarrow{G_1 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1 \overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}$ .
2.  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[ \frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(R \overrightarrow{y_1} - L_2 \overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} - L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} &= \left[ \frac{d(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2} - L_2\overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_N} = \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2}. \\ 3. \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} &= \left[ \frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(R\overrightarrow{y_1} + L_2\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1} + L_2\dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3}. \\ \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} &= \left[ \frac{d(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(-x_{35}(t)\overrightarrow{x_3} + L_2\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2)\overrightarrow{y_3}. \\ 4. \overrightarrow{V(A, 2/4)} &= \left[ \frac{d\overrightarrow{CA}}{dt} \right]_{R_4} = \left[ \frac{d(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}. \end{aligned}$$

## Energie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

## Correction

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{E}_c(1/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(1/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(1/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(1/N)}}{\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/N)}}{\overrightarrow{\sigma(G_1, 1/N)}} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N}}{L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}} \right\}_{G_1} \otimes \\ &\left\{ \frac{M_1 L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}}{\dot{\theta}_1 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N})} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N}) \cdot \overrightarrow{z_N} + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2) = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 C_1 + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2). \\ 2. \mathcal{E}_c(2/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(2/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(2/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/N)}}{\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/N)}}{\overrightarrow{\sigma(G_2, 2/N)}} \right\}_{G_2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_N}}{\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2}} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 (\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2})}{\dot{\theta}_2 B_2 \overrightarrow{z_N}} \right\}_{G_1} \\ &= \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2})^2) = \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2)). \\ 3. \mathcal{E}_c(4/N) &= \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2. \end{aligned}$$

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

## Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(4 \xleftrightarrow{\text{Ph}} 2) &= \{ \mathcal{T}(4 \rightarrow 2) \} \otimes \{ \mathcal{V}(2/4) \} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}}{\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 4 \rightarrow 2)}} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/4)}}{\overrightarrow{V(A, 2/4)}} \right\}_A \\ &= \left\{ \frac{\overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\overrightarrow{V(A, 2/4)}} \right\}_A = \left\{ \frac{F_{h2} \overrightarrow{x_2}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}} \right\}_A = F_{h2} \dot{x}_{24}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \bullet \mathcal{P}(4 \xleftrightarrow{\text{Phf}} 2) &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} \end{array} \right\}_A = -k \dot{x}_{24}^2(t); \\
 \bullet \mathcal{P}(3 \xleftrightarrow{\text{Ph}} 5) &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A = F_h \dot{x}_{35}(t); \\
 \bullet \mathcal{P}(3 \xleftrightarrow{\text{Phf}} 5) &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k \dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A = -k \dot{x}_{35}^2(t).
 \end{aligned}$$

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

**Correction** Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \overrightarrow{V(G_1, 1/R_N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G_1}$   
 $= -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_N} = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_2 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_{G_1}$   
 $= -M_2 g \overrightarrow{y_N} \cdot (\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g \overrightarrow{y_N} \cdot (-\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \overrightarrow{y_3})$   
 $= -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3);$
- $\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{array} \right\}_P \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ h \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_P$   
 $= F_t h \dot{\theta}_1;$

**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

**Correction** On a :  $\mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$

**Question 7** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0 \text{ s}$ ,  $t = 1 \text{ s}$ ,  $t = 3 \text{ s}$  et  $t = 4 \text{ s}$ . Sur cet intervalle  $[0, 4 \text{ s}]$ , évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

**Correction** D'après UPSTI. À 1 s,  $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14500 \text{ W}$  à 3 s  $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22500 \text{ W}$  Maximum à environ 22,5 kW. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur  $[5 \text{ s}; 8 \text{ s}]$ ).

**Question 8** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

**Correction** D'après UPSTI. La différence est de 7,5 kW. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...

## Colle – Corrigé



### Dynamique du véhicule – Segway de première génération\*

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

### Présentation

**Objectif** L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

### Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ . Exprimer la vitesse linéaire  $V_L = \|\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}\|$  du véhicule en fonction de  $R_C$  et  $\dot{\theta}$ .

**Correction** On a  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$ . On a alors  $V_L = R_C \dot{\theta}$ .

**Question 2** Exprimer l'accélération, notée  $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ .

**Correction**  $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$  ( $\dot{\theta}$  est constant).

**Question 3** Exprimer les conditions d'adhérence liant  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $N_A$ ,  $N_B$  et  $f$  traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant  $T_A + T_B$  à  $f$  et  $N_A + N_B$ .

**Correction** La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc,  $T_A \leq f N_A$  et  $T_B \leq f N_B$ . En sommant les inégalités, on a donc  $T_A + T_B \leq f (N_A + N_B)$ .

**Question 4** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z}_0$ .

**Correction**  $E$  étant un ensemble indéformable, on a :  $\overrightarrow{R_d(E/\mathcal{R}_0)} = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$  (pas de projection sur  $\vec{z}_0$ ). On isole  $E$  et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur  $E$  ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{z}_{01}$ , on a donc :  $N_A + N_B - m_E g = 0$ .

**Question 5** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_1$ . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite  $V_L$  de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

**Correction** En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{y}_1$ , on a :  $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$ . En utilisant les résultats de la question précédente,  $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$ . En notant  $V_L = R_C \dot{\theta}$  la vitesse limite avant



dérage, on a  $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$ . On a donc  $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$ .

**Question 6** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

**Correction** La vitesse limite est donc de  $10 \text{ m s}^{-1}$  soient  $36 \text{ km h}^{-1}$  ce qui satisfait le cahier des charges.

### Étude du renversement en virage du véhicule Segway

**Question 7** Calculer le torseur dynamique du système matériel  $E$  en  $G_E$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Exprimer ses composantes dans la base  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

**Correction** Au centre d'inertie de  $E$ , on a  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ . On a  $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$ . On a donc,  $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \vec{x}_1 - D \dot{\theta} \vec{y}_1 + C \dot{\theta} \vec{z}_1$ . On a donc  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$ .  
En conséquence,  $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$ .

**Question 8** Calculer  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  le moment dynamique au point  $B$  de l'ensemble  $(E)$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en projection sur  $\vec{x}_1$ .

**Correction**  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h \vec{z}_0 - l \vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$ .  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .

**Question 9** En appliquant le théorème du moment dynamique au point  $B$  à l'ensemble  $E$  et les roues dans leur mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , en projection sur  $\vec{x}_1$ , écrire l'équation scalaire qui donne  $N_A$  en fonction de  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  et des données du problème.

**Correction** On a :  
•  $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_1 = (-l \vec{y}_1 + h \vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_1 = l m_E g \vec{x}_1$ ;  
•  $\overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1$ .  
En appliquant le TMD en  $B$  suivant  $\vec{x}_1$ , on a :  $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .  
Au final,  $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$ .

**Question 10** Écrire la condition de non renversement du véhicule.

**Correction** Pour qu'il y ait non renversement,  $N_A$  doit rester positif ou nul.

On néglige  $I_{G_E}(E)$  pour simplifier l'application numérique.

**Question 11** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

**Correction**  $N_A \simeq \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$ . Ce qui est positif (pas de basculement).  
 $N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0 \Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L$   
 $\Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$ . CDCF Validé.