

## Chapitre 1

### Approche énergétique

*Savoirs et compétences :*

- Mod2.C16 : torseur cinétique
- Mod2.C17 : torseur dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Objectif de la modélisation . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Puissance</b>	<b>2</b>
2.1	Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel . . . . .	2
2.2	Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide	2
2.3	Puissance d'actions mutuelles entre deux solides . . . . .	2
2.4	Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Travail</b>	<b>3</b>
3.1	Définition . . . . .	3
3.2	Travail conservatif . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Énergie cinétique</b>	<b>4</b>
4.1	Définition . . . . .	4
4.2	Propriétés . . . . .	4
4.3	Énergie cinétique équivalente . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Théorème de l'énergie cinétique</b>	<b>5</b>
5.1	Introduction . . . . .	5
5.2	Énoncé pour un solide . . . . .	5
5.3	Énoncé pour un ensemble de solides . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Notion de rendement énergétique</b>	<b>5</b>
6.1	Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle . . . . .	5
6.2	Détermination d'une puissance dissipée . . . . .	6

# 1 Introduction

## 1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible;
- déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système;
- estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

# 2 Puissance

## 2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

**Définition** **Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel** On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure** à un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  subissant une densité d'effort  $\vec{f}(M)$  (où  $M$  est un point courant de ( $E$ )) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overrightarrow{V(M, E/R)} dV.$$

(R) On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement dans un **référentiel galiléen**  $R_g : \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ .

### ! Dimensions et homogénéité.

- Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en *Watt*.
- Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en  $\text{Nms}^{-1}$ .
- Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

**Propriété Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble E** On considère un ensemble matériel  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$ .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les  $S_i$  venant de l'extérieur de  $E$  :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

## 2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

**Définition** **Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ )** La **puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

(!) On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

(R)

- Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \end{array} \right\}_P \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S/R)} \\ \overrightarrow{V(P, S/R)} \end{array} \right\}_P$   
 $= \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors en tout point  $A$  la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$ .
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

## 2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

**Définition** Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R_g$ , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), dans leur mouvement par rapport au repère  $R$ , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_g).$$

**La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) **est indépendante du repère  $R$** . Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

R

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble  $E$ , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble  $E$  :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

## 2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

**Définition** Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

R

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

## 3 Travail

### 3.1 Définition

**Définition Travail**

Le travail entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  d'une action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $R$  est donné par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

R

On peut également définir le travail élémentaire par :

$$dW(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

- Le travail est une grandeur scalaire.
- L'unité de travail est le **Joule**.
- Le travail est homogène au **produit entre une force et une distance**.

### 3.2 Travail conservatif

**Définition Travail conservatif**

On dit que le **travail est conservatif** (noté  $W_c^{t_2}_{t_1}(\text{ext} \rightarrow E/R)$ ) s'il est indépendant du chemin suivi pour passer de l'état initial (instant  $t_1$ ) à l'état final (instant  $t_2$ ). Dans ce cas là il existe une grandeur appelée énergie potentielle de l'action mécanique extérieure à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  qui vérifie :

$$dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = -dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R) \quad \text{avec} \quad dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\frac{dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R)}{dt}.$$

(R)

- On dit que la puissance à travail conservatif dérive d'une énergie potentielle (au signe près).
- L'énergie potentielle est une primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près arbitraire.

### 3.2.1 Énergie potentielle de la pesanteur

**Définition Énergie potentielle de la pesanteur**

L'**énergie potentielle** associée à l'action de la pesanteur sur un ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(g \rightarrow E/R) = m g z_G + k.$$

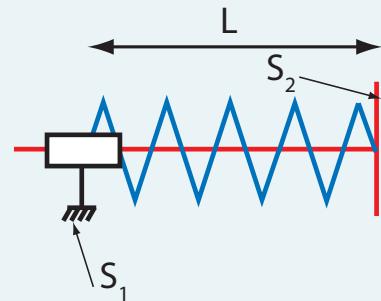
Où  $z_G$  correspond à la position du centre de gravité  $G$  de  $S$  suivant la verticale ascendante  $\vec{z}$  (colinéaire au champs de pesanteur  $\vec{g}$ ) et  $k$  une constante.

### 3.2.2 Énergie potentielle associée à un ressort

**Définition Énergie potentielle associée à un ressort**

L'**énergie potentielle associée à l'action d'un ressort**  $r$  de raideur  $K$  et de longueur à vide  $L_0$  situé entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \frac{K}{2}(L - L_0)^2 + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$



## 4 Énergie cinétique

### 4.1 Définition

**Définition Énergie cinétique**

On définit l'**énergie cinétique**  $E_c$  d'un système matériel  $S$  en mouvement dans un référentiel  $R$  comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant  $P$  de  $S$  pondéré de la masse élémentaire :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{V}(P/R))^2 dm.$$

### 4.2 Propriétés

**Propriété Expression avec les comoments** L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{C}(S/R)\}.$$

!

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

**Propriété Cas particuliers**

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V(G, S/R)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe**  $(O, \vec{z})$  par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/R)}^2.$$

### 4.3 Énergie cinétique équivalente

**Définition** Énergie cinétique équivalente

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $E_c(E/R)$

avec **son inertie équivalente**  $J_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$ :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{\text{eq}}(E)$  (en kg) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$ :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

## 5 Théorème de l'énergie cinétique

### 5.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

### 5.2 Énoncé pour un solide

#### Théorème Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

### 5.3 Énoncé pour un ensemble de solides

**Théorème Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides** Soit  $(E)$  un ensemble de  $n$  solide  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  en mouvement par rapport à un repère galiléen  $R_g$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c(E/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/R_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$  la puissance intérieure à  $E$  qui est nulle si l'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites) ;
- $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ , la puissance galiléenne de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_g$ .

(R)

- Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel  $E$  que l'on considère.
- Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- Pour obtenir une équation de mouvement (*ie* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

## 6 Notion de rendement énergétique

### 6.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- en **régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs ;

- en **régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

**Définition** Rendement d'une chaîne fonctionnelle Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- $\eta \in [0, 1]$ ;
- $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$  définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**;
- $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$  définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

**Propriété Rendement global d'une chaîne d'énergie** Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant  $n$  éléments de rendements  $\eta_i$  est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs  $\eta_i$  étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

## 6.2 Détermination d'une puissance dissipée

**Propriété Estimation des dissipations**

On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement  $\eta$  :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$

## Références

[1] Émilien Durif, *Approche énergétique des systèmes, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.*

## Activation 1



### Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

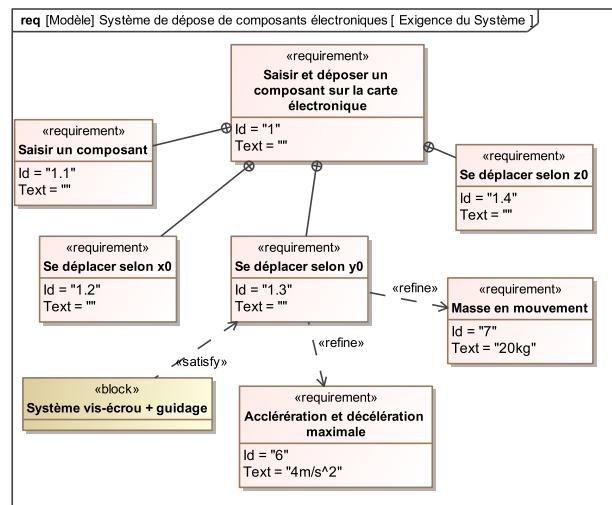
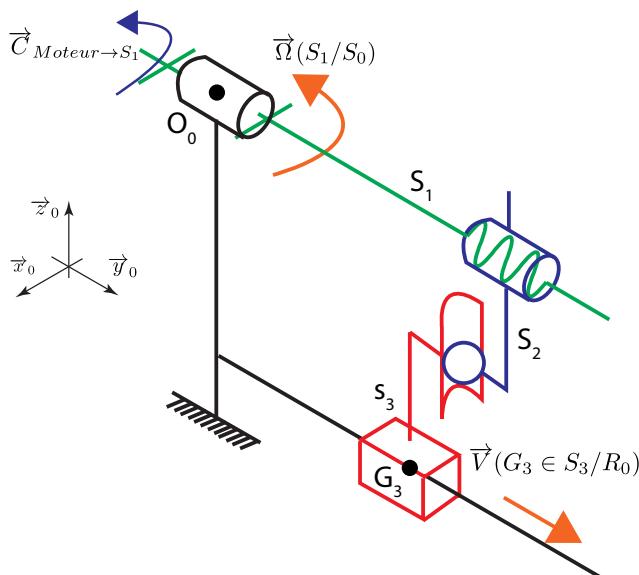
#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

#### Hypothèses :

- le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
- on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
- la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0 G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
- seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.



- $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).

#### Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- Pas de la vis à billes :  $p = 20\text{ mm}$ .
- Diamètre de la vis à billes :  $D = 25\text{ mm}$ .
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_b = 2,15 \times 10^{-4}\text{ kg m}^2$ .
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (palières + joints) :  $C_r = 3\text{ Nm}$ .
- $l$ , longueur libre de la vis – entre deux palières – (mm) :  $1000\text{ mm}$ .
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - couple maximal,  $C_{\max} = 21,2\text{ Nm}$ ;
  - fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000\text{ tr/min}$ ;
  - moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4}\text{ kg m}^2$ .

**Objectif** L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
  - vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;
- à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :
- masse :  $M_3$ ;
  - cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E$  :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

## Activation 2



### Télécabine à stabilité accrue : le funitel

Mines Ponts PSI – 2003

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

#### Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câble mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).

Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement  $f = 0,03$ . 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme  $p$  :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2$  avec  $p$  en pascal,  $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$  masse volumique de l'air,  $V_a$  module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en m/s.

**Objectif** On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $E_{ct}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_v$  des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Sur la ligne, les cabines se déplacent à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ . En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ . Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble. On envisagera une accélération constante des cabines de  $a = 1,3 \text{ m s}^{-2}$ . **Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

1.  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left( 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2 \simeq 6,7 \text{ MJ}.$
2.  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = -8M_p g V \sin \alpha = -359289 \text{ W}.$
3.  $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha = -218677 \text{ W}.$
4.  $P_T = 1266 \text{ kW}.$
5.  $\tau = \frac{V - v_0}{a} = 5,3 \text{ s}$  et  $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 19,875 \text{ m}.$

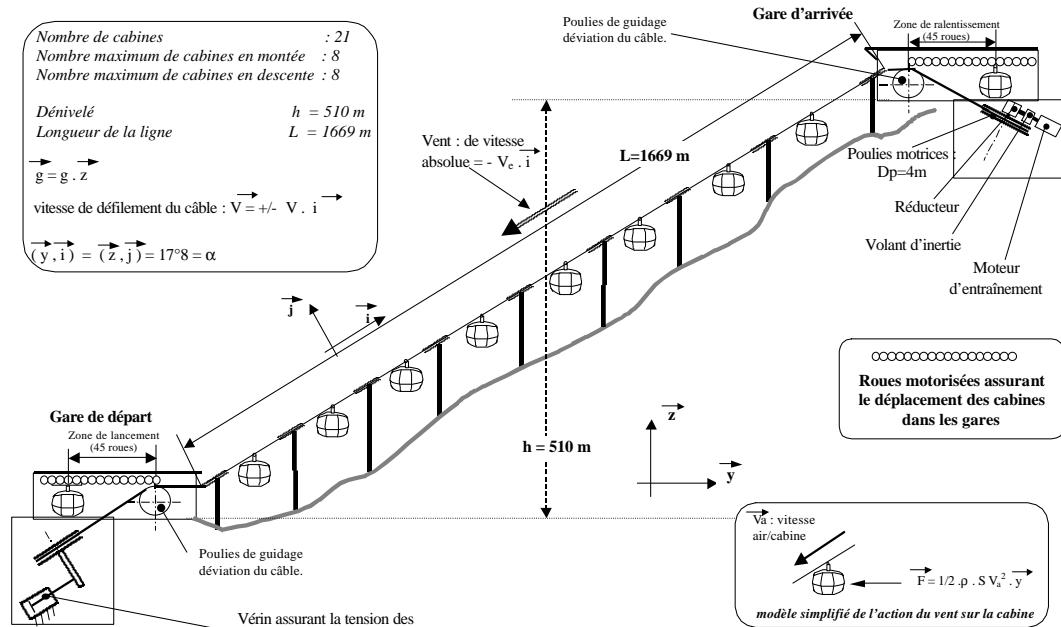


FIG. 1 : Ligne totale

Extrait du cahier des charges		Autres caractéristiques techniques	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	$M_C = 2500 \text{ kg}$
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	$S_l = 10 \text{ m}^2$
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	$S_f = 7,1 \text{ m}^2$
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	$M_p = 2080 \text{ kg}$	Masse linéique du câble	$\mu = 8,47 \text{ kg/m}$
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	$V = 7,2 \text{ m/s}$	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d'entraînement	$N = 1700 \text{ tr/min}$	Diamètre d'une poulie motrice :	$D_p = 4 \text{ m}$
Longueur de la ligne	$L = 1669 \text{ m}$	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	$I_M = 575 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$
Dénivelé	$h = 510 \text{ m}$		

## Application

### Application – Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs

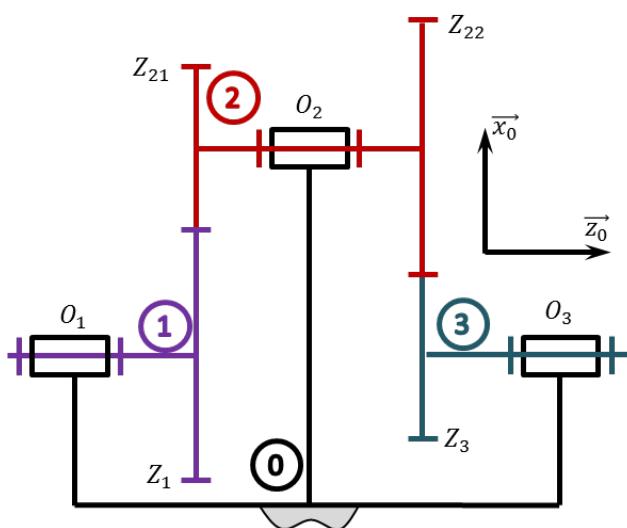
#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

#### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sont de la forme :  $I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i}$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante  $C_r$  s'exerce sur l'arbre 3.

**Question 1** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

**Question 2** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.

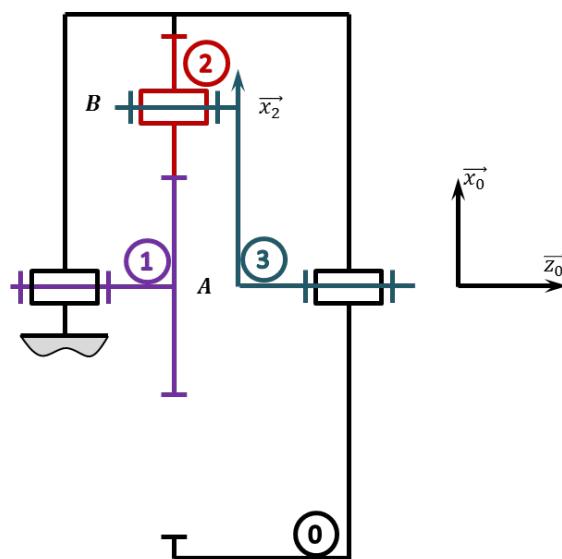
**Question 3** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

#### Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\bar{\bar{I}}_A(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \bar{\bar{I}}_B(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

$$\bar{\bar{I}}_A(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

**Question 4** Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.

**Question 5** Déterminer l'inertie équivalente du

train épicycloïdal.

**Question 6** Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliqué un couple résistant.

## Application 1



### Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

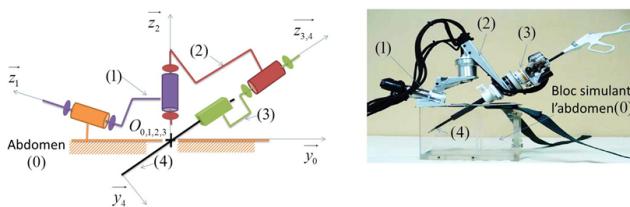
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

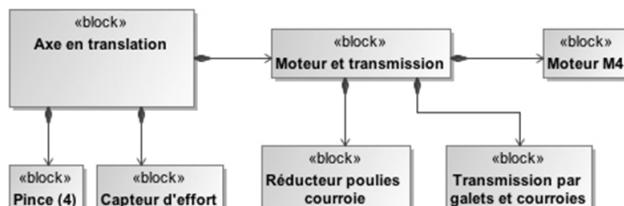
#### Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.



Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moteur réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).

**Objectif** Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

#### Équation de mouvement

##### Hypothèses

- La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- Les axes de rotation du MC<sup>2</sup>E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- L'instrument chirurgical est vertical.
- Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- Tous les galets  $G_i$  ont même rayon noté  $\mathcal{R}_g$  et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points  $I_1$  à  $I_6$ .
- La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primaire pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Remarque : Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

#### Modélisation simplifiée du problème

- La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée  $\omega_m(t)\vec{x}_0$  où  $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$  (vitesse de rotation avant réduction de rapport  $r$ ).
  - La poulie motrice a un rayon  $R_i$  et tourne à la vitesse  $\omega_i(t)$  (vitesse de rotation après réduction de rapport  $r$ ).
  - La poulie réceptrice a un rayon  $R_e$  et tourne à la vitesse  $\omega_e(t)$ .
  - Les deux pignons en contact ont même rayon primaire, supposé égal à  $R_e$ .
  - Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ .
  - L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté  $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{ressort} \rightarrow 4) \\ 0 \end{array} \right\}_{O_4}$
- où  $O_4$  est le point de contact entre la pince (4) et le ressort,  $k$  la raideur du ressort et  $z(t)$  la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.

- On note  $\overrightarrow{V(O_4, 4/0)} = v(t) \overrightarrow{z_0} = \frac{dz(t)}{dt} \overrightarrow{z_0}$ .
- Les masses des courroies sont négligées.

#### Données

- $I_m$ , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- $I_r$ , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- $I_i$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_i$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_e$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_p$ , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_g$ , moment d'inertie de chaque galet  $G_i$ , de rayon  $R_g$ , par rapport à son axe de rotation.
- $m_4$ , masse de la pince (4).
- $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$ , rapport de réduction constant du motoréducteur.

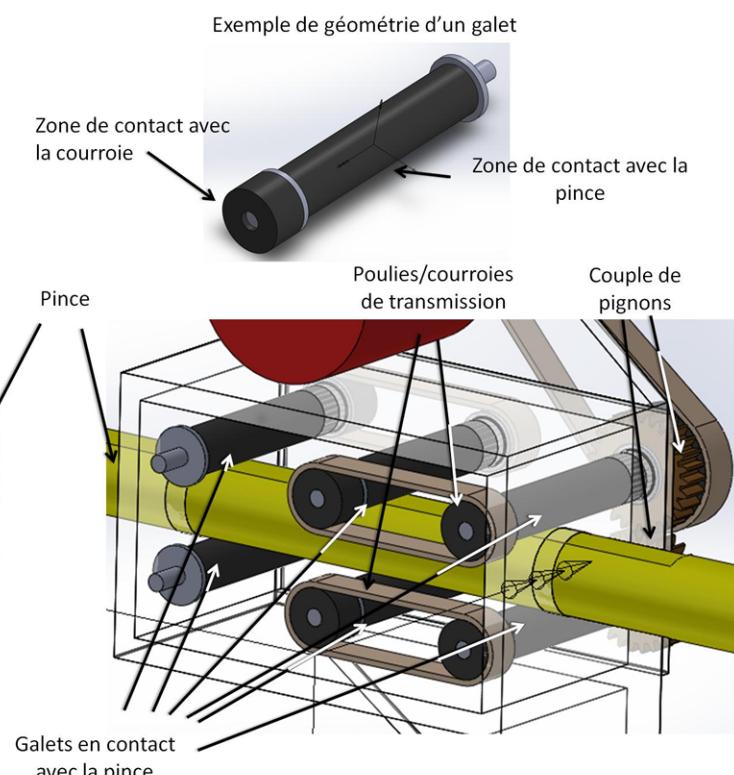
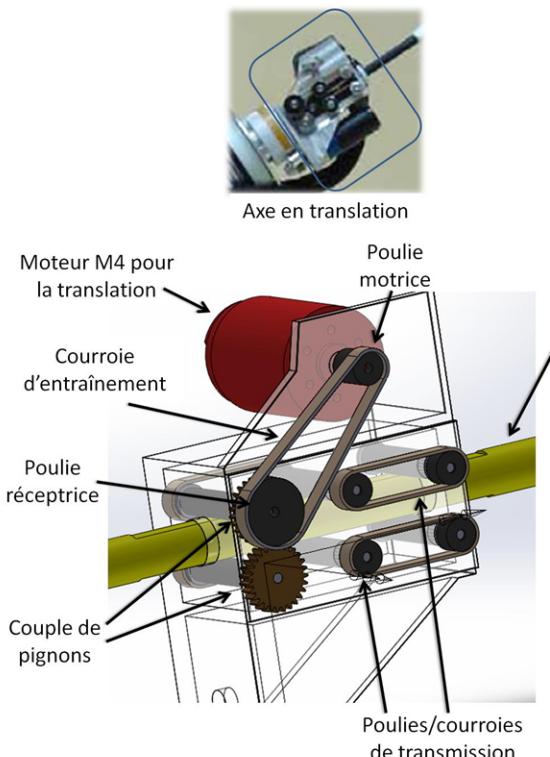
L'équation de mouvement est définie par l'équation

différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

#### Travail demandé

**Question 1** Déterminer la relation entre  $v(t)$  et  $\omega_m(t)$ . Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre  $z(t)$  et  $\theta_m(t)$ .



**Question 2** Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente  $J$  ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de  $m_4$  et des données géométriques.

**Question 4** Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

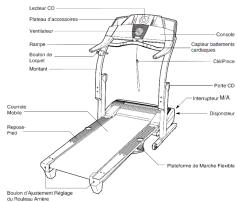
**Question 5** Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0), déterminer l'expression du terme  $C_e(t)$  en fonction des données du problème et de  $\theta_m(t)$ .

#### Corrigé résumé

- $v(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$  et  $z(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \theta_m(t)$ .
- .
- $J = I_m + (I_r + I_i)r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g)\left(\frac{R_i}{R_e}r\right)^2 + m_4\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\right)^2$ .
- $\mathcal{P}(\text{res} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = -kz(t) \frac{R_g r R_i}{R_e} \omega_m(t)$ ,  
 $\mathcal{P}(\text{mot} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = C_m \omega_m(t)$ ,  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = 0$  et  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$ .
- $C_e(t) = k\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\right)^2 \theta_m(t)$ .

Exemple de géométrie d'un galet

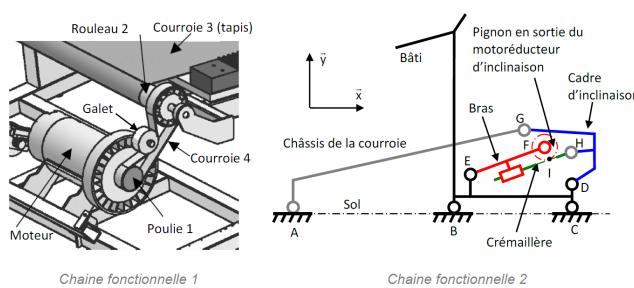
## Application 2



On s'intéresse à un tapis de course dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'utilisateur court sur une courroie mobile qui est entraînée dans le sens inverse de la course. La vitesse de déplacement de la courroie mobile est réglable pour permettre au coureur de rester sur place. Le système propose un large choix de mode de fonctionnement cependant l'étude sera limitée à l'utilisation du programme de contrôle de la fréquence cardiaque. Avec ce programme, le système ajuste automatiquement la vitesse et l'inclinaison du tapis afin d'obtenir une fréquence cardiaque préréglée.

Le programme de contrôle de la fréquence cardiaque fonctionne de la façon suivante :

- dans un premier temps, le système commence par augmenter la vitesse de déplacement de la courroie mobile via la chaîne fonctionnelle 1 pour atteindre la fréquence cardiaque préréglée;
- si la vitesse maximale ne suffit pas, le tapis de course s'incline via la chaîne fonctionnelle 2 pour augmenter encore l'effort.



Extrait du cahier des charges :

Exigences	Critères	Niveaux
1.1. Le système doit permettre au coureur de courir avec une fréquence cardiaque prédéfinie	Vitesse de course Pente Masse utilisateur	De 0 à 19 Km/h par incrément de 0,1Km/h De 0% à 14% par incrément de 0,5% 115 Kg maxi

Hypothèses et données :

- on se place dans le cas où le tapis est réglé à l'horizontale;
- la courroie 3, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur le rouleau 2. Le rayon d'enroulement de la courroie 3 sur le rouleau 2 est  $R_e = 24,5\text{ mm}$ . La poulie 2 est liée au rouleau 2.

## Application 02

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

- la courroie 4, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur les poulies 1 et 2, ainsi que sur le galet. Les rayons primitifs de la poulie motrice 1 et de la poulie 2 sont respectivement  $R_{p1} = 27\text{ mm}$  et  $R_{p2} = 44\text{ mm}$ ;
- une étude préliminaire a montré que la présence d'un coureur de 115 kg entraîne un effort résistant tangentiel  $T_{coureur \rightarrow 3} = 230\text{ N}$  sur la courroie 3;
- l'inertie équivalente des pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur est  $I_{eq} = 0,1\text{ kgm}^2$ ;
- le rendement global du système mécanique est  $\eta = 0,9$ .

**Objectif** Valider le choix de la motorisation de la chaîne fonctionnelle 1 vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m$  en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement  $V_{30}$  en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur  $\omega_{m\max}$  lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

**Question 2** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.

**Question 3** Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h.

Le système possède un moteur courant continu ayant les caractéristiques ci-dessous.

Puissance nominale $P_n = 1840\text{ W}$ Vitesse maximale $N_{max} 4000\text{ tr/min}$	Tension nominale $U_n = 130\text{ V}$ Constante de vitesse $K_F = 0,33\text{ V/(rad.s^{-1})}$ Courant nominal $I_n = 17,6\text{ A}$ Constante de couple $K_T = 0,33\text{ N.m/A}$ Résistance d'induit $R = 1,1\text{ Ohm}$
---	--

**Question 4** Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

**Éléments de correction**

1.  $\omega_m = \frac{R_{p2}}{R_{p1}} \frac{V_{30}}{R_e}$  et  $\omega_{m\max} = 351 \text{ rad s}^{-1}$ .
2.  $C_m = \frac{1}{\eta} \left( T_{\text{coureur} \rightarrow 3} R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right)$ .

3.  $P(0 \rightarrow 1/0) = \frac{1}{0,9} \left( T R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right) \omega_{\max} = 1349 \text{ W}$ .

4. ...

## Application 3



### Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

#### Présentation

Le chariot élévateur , objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage;
- du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.



#### Phase de levage du bateau

**Objectif** Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

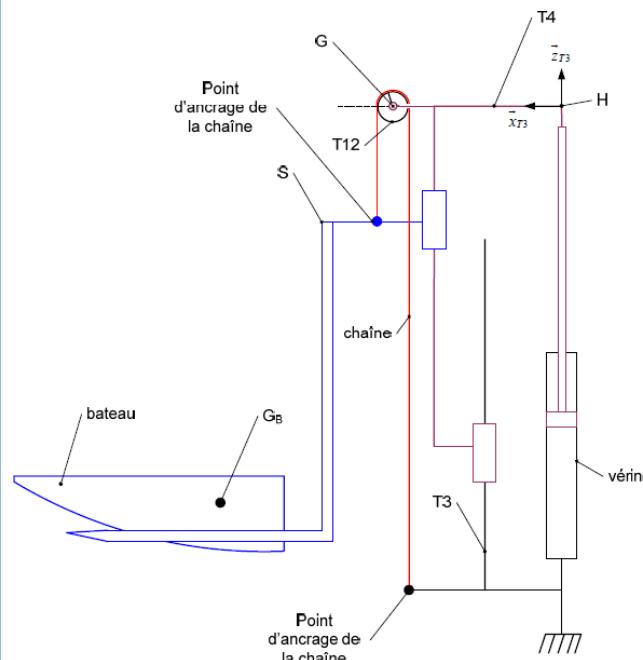
- req 102 : vitesse de levage en charge :  $0,33 \text{ m s}^{-1}$  ;
- req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la suivante. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble  $S = \{T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}\}$  est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble  $S$ . Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon  $T_{12}$  qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est  $F_V$  (considéré comme constant). On note  $I_{T_{12}}$  le moment d'inertie de la poulie  $T_{12}$  par rapport à son axe

de rotation,  $R_{T_{12}}$  son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Solide	Masse
Ensemble (S)	$m_S$
Bateau (B)	$m_B$
Mât inférieur (T <sub>3</sub> )	$m_{T_3}$
Mât supérieur (T <sub>4</sub> )	$m_{T_4}$
Chaîne (C)	négligée

Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère  $\mathcal{R}_3$  peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes  $\overrightarrow{x_{T_3}}$  et  $\overrightarrow{z_0}$  sont confondus pour les conditions de l'étude.

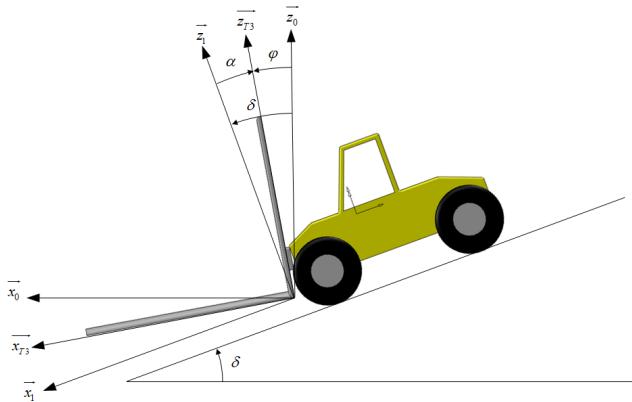


**Question 1** Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

## Phase de déplacement

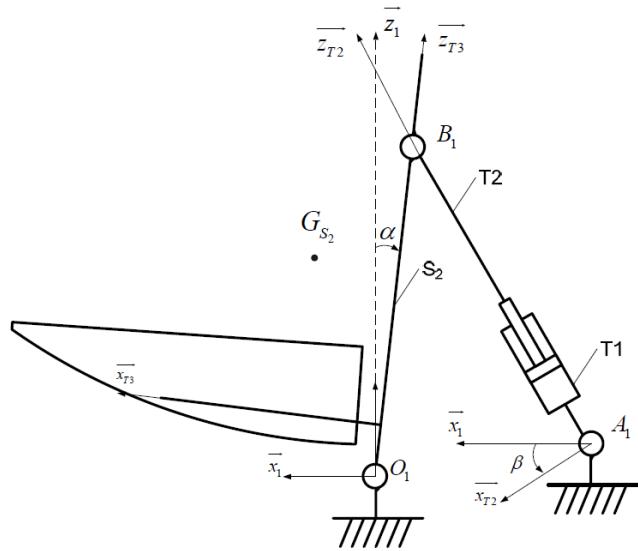
La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1, T2 et T1', T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

- l'angle de basculement  $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$ ;
- l'angle de la pente  $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ ;
- l'angle à asservir  $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$ .



**Question 2** Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle  $\varphi(t)$  qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches? Justifier.

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.



Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- l'ensemble  $S_2 = \{T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, B\}$  en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot 1 de centre de gravité  $G_{S_2}$ . Le moment d'inertie de l'ensemble  $S_2$  par rapport à l'axe sera noté  $J_{S_2}$  et sa masse  $m_{S_2}$ . La liaison pivot entre l'ensemble  $S_2$  et le chariot (bâti) génère un couple résistant  $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{O_1 O_{G_{S_2}}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T3}$ ;
- un vérin équivalent  $V = \{T_1, T_2\}$  dont le corps est en liaison pivot d'axe  $(A_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot (bâti) et la tige en liaison pivot d'axe  $(B_1, \vec{y}_0)$  par rapport à l'ensemble  $S_2$ . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté  $\vec{F}_V = p(t)S \vec{z}_{T2}$  où  $p(t)$  est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose  $\overrightarrow{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$ . Le paramétrage est tel que si  $\alpha = 0$  alors  $\lambda = 0$ .

**Question 3** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .

## Application 4



### Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric)

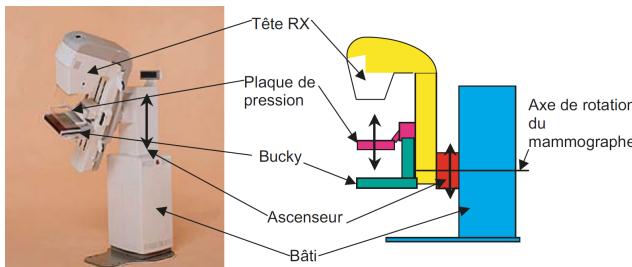
Centrale MP 2004

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

#### Mise en situation

Le mammographe est utilisée pour rechercher la présence d'une tumeur dans un sein. Il est constitué des éléments génériques suivants.



Un ascenseur en liaison glissière de direction verticale par rapport à la partie fixe du mammographe (bâti). Cette mobilité permet d'adapter le mammographe à la taille de la patiente. L'ascenseur supporte les éléments suivants : la « tête RX » qui permet d'émettre les rayons X et un collimateur qui permet de contrôler le faisceau afin d'optimiser le cliché. Le réglage angulaire de la tête RX est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. La tête RX est donc en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

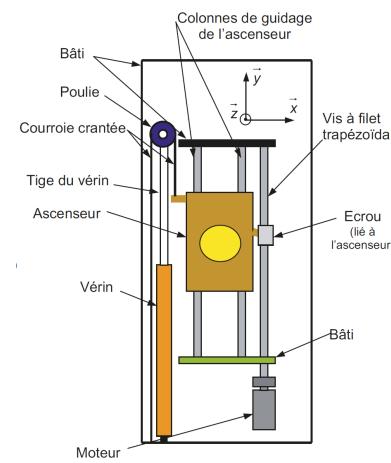
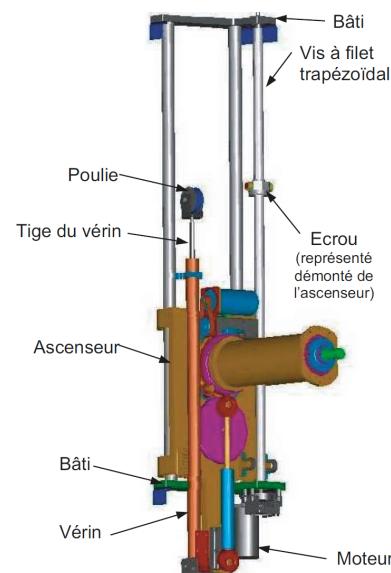
Le « bucky » sert de surface d'appui au sein et de support au film ou au capteur d'images. Le réglage angulaire du bucky est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. Le bucky est en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

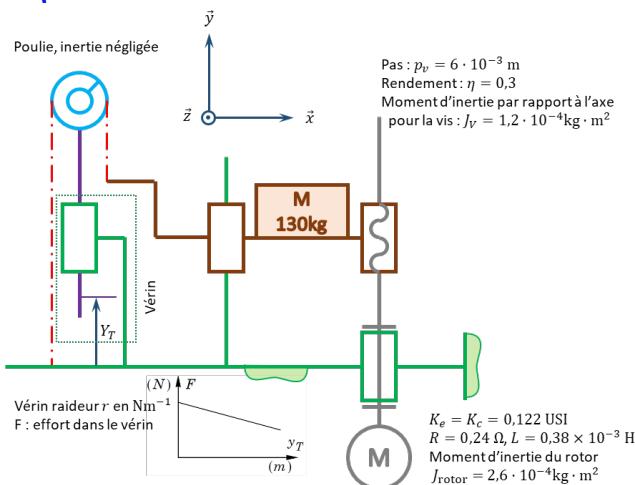
La « plaque de pression » permet de comprimer le sein et de le maintenir en position afin d'avoir une meilleure qualité de l'image. Elle fait l'objet d'une liaison glissière par rapport au bucky. À noter que les réglages angulaires des deux liaisons pivots sont indépendants. On peut, par exemple, faire tourner la tête sans faire tourner le bucky.

**Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »**

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux

barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.





### Détermination de la motorisation

**Objectif** L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Faire monter ou descendre l'ascenseur	
Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente $V_L$ lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	course = 0,8 m $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide $V_R$ : respecter la durée $t_a$ de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s (mini)}$

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

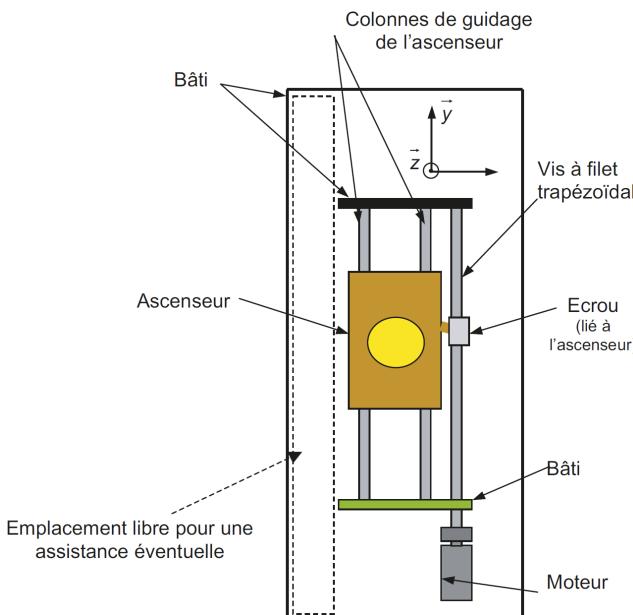
1. départ en position basse ( $y = 0$  à l'instant  $t = 0$ );
2. mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante  $a$  pour atteindre la vitesse  $V_R$  rapide en respectant les contraintes du cahier des charges;

3. arrêt de l'ascenseur à la position  $y = 0,8 \text{ m}$  (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à  $t_a$ ).

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

### Solution sans assistance

On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé  $\Sigma$  (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.



On notera :

- $\vec{g} = -g \vec{y}$  l'accélération de la pesanteur. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;
- $C$  le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{Max}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

### Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{Max}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur 1,4 m. Cette solution est-elle envisageable?

### Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \max}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal  $D$  supérieur à 0,1 m. Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement  $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$  et de module de Coulomb  $G = 82\,000 \text{ MPa}$ . On prendra un coefficient de sécurité  $s = 2$ . Pour que le ressort résiste à l'effort maximal  $F_{c \max}$ , il doit avoir un diamètre  $d \geq \sqrt{\frac{8F_{c \max}Ds}{\pi R_{eg}}}$ , c'est-à-dire  $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c \max}}$ .

Pour obtenir un ressort de raideur  $r$  il faut un nombre de spires  $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$ , c'est-à-dire  $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$ .

**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible?

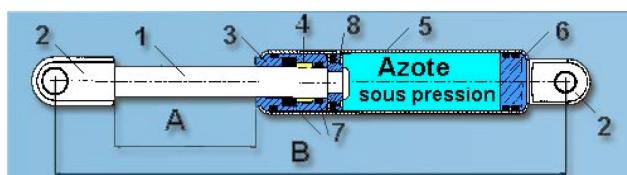
### Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

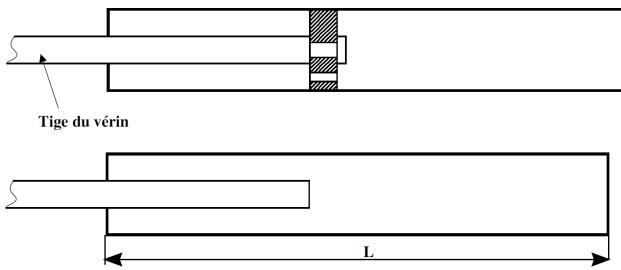
**Question 17** Le module de l'effort appliquée par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{min}$  développé par le vérin.

Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-dessous.



**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors

de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.



**Question 19** Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3}$  m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand  $D = 57 \times 10^{-3}$  m. L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale  $L = 1$  m. Soient  $p_1$ ,  $F_1$ ,  $V_1$  la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et  $p_2$ ,  $F_{\min}$ ,  $V_2$  pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1$ ,  $F_{\min}$  et  $\Delta_{y_T}$ . Exprimer  $F_{\min}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\min}$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $L$  et  $\Delta_{y_T}$ .

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\max}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$ ...

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$  ...

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\max}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

### Synthèse

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

## Application 4

### Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

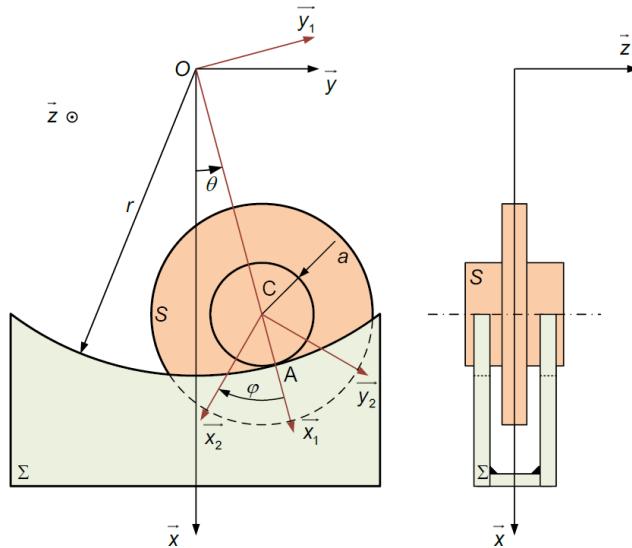
Sources multiples

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

#### Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti  $\Sigma$ .



Soit  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti  $\Sigma$ . On désigne par  $\vec{g} = g \vec{x}$  l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de  $\Sigma$  sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe  $(O, \vec{z})$ , de rayon  $r$ . Le solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$  ( $a < r$ ).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon  $S$ , de centre  $C$ , roule sans glisser au point  $A$  sur la portée cylindrique de  $\Sigma$ ;

- soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  le repère, tel que le point  $C$  soit sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- soit  $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  un repère lié à  $S$ . On pose  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

Notons  $I$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à son axe de symétrie  $(C, \vec{z})$  et  $f$  le coefficient de frottement entre  $S$  et  $\Sigma$ .

On donne  $a = 12,3 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .

**Question 2** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur  $\theta$ .

**Question 3** En supposant que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement, déterminer la période  $T$  des oscillations de  $S$ .

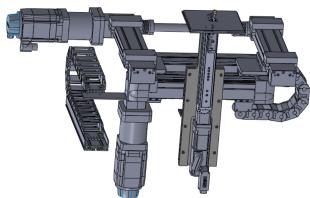
**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de  $S$ , sachant que  $T = 5 \text{ s}$ .

En supposant toujours que l'angle  $\theta$  reste petit, on pose  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{l}{a^2}\right)}}$ .

On suppose à la date  $t = 0$ , tel que  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

**Question 5** Déterminer la valeur maximale de  $\theta_0$  pour que  $S$  roule sans glisser sur  $\Sigma$ .

## TD 1



## Système de dépose de poudre

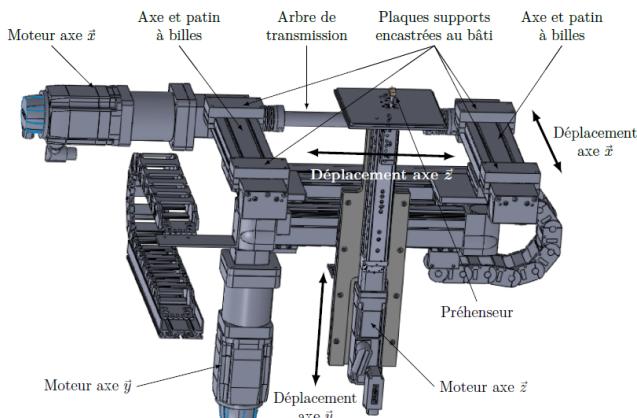
Concours Centrale Supelec – ISI 2016

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Mise en situation

On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.

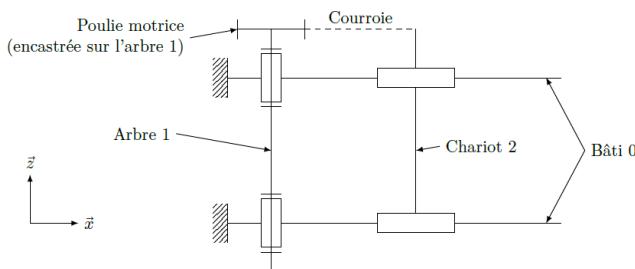


**Objectif** L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système.

Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe  $\vec{x}$  soit de  $V_{\max} = 0,45 \text{ m s}^{-1}$  et que l'accélération maximale du chariot soit de  $\gamma_{\max} = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Travail demandé

La transmission est réalisée de la façon suivante. L'arbre 1 est entraîné par un moto-réducteur dont le rapport de réduction est noté  $r$ .



## Notations

- $\Omega$  : vitesse de rotation du moteur;
- $C_m$  : le couple exercé par le moteur;
- $r = n_{\text{axe poulie}} / n_{\text{moteur}} = \frac{1}{10}$  : rapport de réduction du réducteur entre le moteur et les poulies;
- $M_2 = 25 \text{ kg}$  : masse de l'ensemble mobile 2;
- $\phi = 28,65 \text{ mm}$  est le diamètre primitif des poulies;
- l'inertie des courroies est négligée;
- $J_m = 1,2 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre moteur;
- $J_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre 1;
- $C_r = 0,15 \text{ Nm}$  : couple de frottements secs dans les liaisons ramené à l'arbre moteur;
- $\mu = 0,001 \text{ N m s rad}^{-1}$  : coefficient de frottements visqueux dans les liaisons ramené à l'arbre moteur.

**Question 1** Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur  $\Omega_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Déterminer l'accélération maximale du moteur  $\dot{\Omega}_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe  $\vec{x}$  par rapport au bâti notée  $\mathcal{E}_c$  (ensemble/0). En déduire l'inertie équivalente  $J$  de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

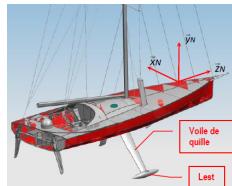
**Question 4** Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté  $C_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 5** Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de  $3000 \text{ tr min}^{-1}$  et de puissance utile  $0,47 \text{ kW}$ .

**Question 6** Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

## TD 2



## Quille pendulaire \*

Concours Commun Mines Ponts 2014

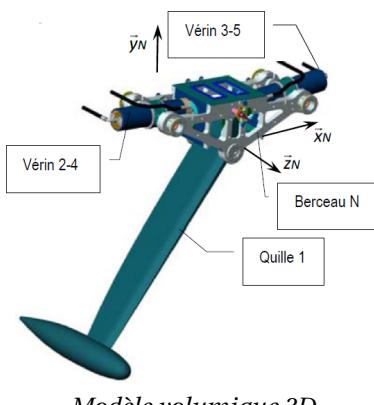
## Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe ( $O, \vec{z}_N$ ) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



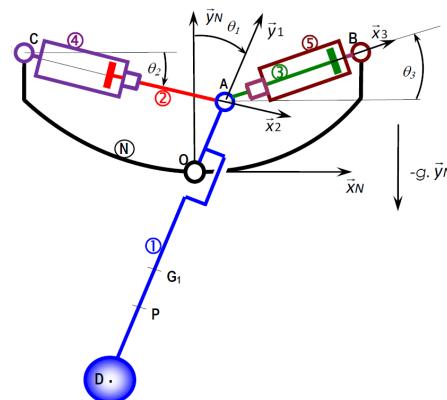
Modèle volumique 3D

**Objectif** L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

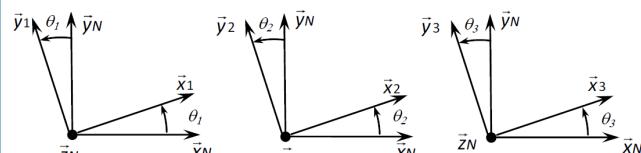
## Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère  $R_N$  est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que :  $F_{h2} > 0$  et  $F_{h3} = 0$ . Le vérin 2–4 est alors moteur et le vérin 3–5 est libre ( $F_{h2}$  désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc  $-F_{h2}$  qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.



Modèle 2D



Paramétrage

## Données géométriques, massiques et inertielles

- $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1; \overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\vec{x}_2; \overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\vec{x}_3,$
- Solide 1, masse  $M_1$ , centre d'inertie  $G_1$ ,  $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\vec{y}_1$ ,  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}$ .
  - Solide 2, masse  $M_2$ , centre d'inertie  $G_2$ ,  $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\vec{x}_2$ ,  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$ .
  - Solide 3, masse  $M_3$  =

$$\begin{aligned} M_2, \text{ centre d'inertie } G_3, \\ \overrightarrow{AG_3} = L_2\vec{x}_3, I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}. \\ \bullet \text{ Solide 4, masse } M_4, \text{ centre d'inertie } C, I_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_N)}. \\ \bullet \text{ Solide 5, masse } M_5, \text{ centre d'inertie } B, I_B(5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_N)}. \end{aligned}$$

## Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{h2}\vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_C$ .
- Action de pression de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_{h3}\vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_B$ .

- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action hydraulique de l'eau sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P$  avec  $\overrightarrow{OP} = -h \vec{y}_1$ .

## Vecteurs vitesse

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

- $\vec{V}(G_1, 1/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_2, 2/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_3, 3/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(A, 2/4)$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

## Energie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à  $E$  en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à  $E$ . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $N$ . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position  $\theta_1 = 0$  à la position  $\theta_1 = 45^\circ$  en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position  $\theta_1 = 0$  en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

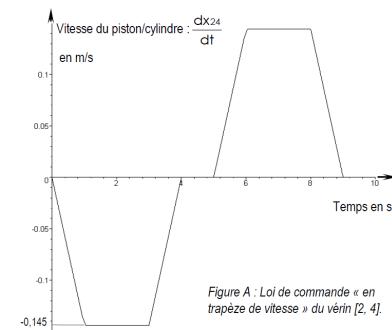
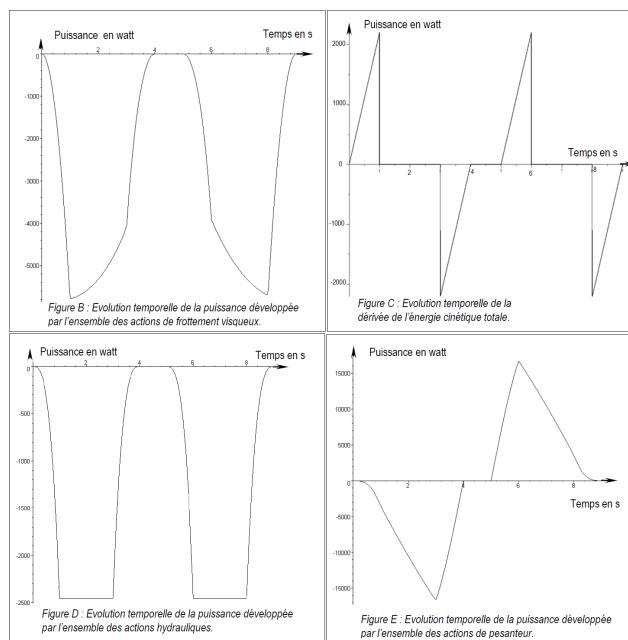


Figure A : Loi de commande « en trapèze de vitesse » du vérin [2, 4].

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure suivante.



**Question 7** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0$  s,  $t = 1$  s,  $t = 3$  s et  $t = 4$  s. Sur cet intervalle  $[0, 4]$  s, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

**Question 8** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Eléments de correction :

1. .
2. (a)  $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}$ .
- (b)  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} - L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}$ .
- (c)  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} + L_2 \dot{\theta}_3 \overrightarrow{y_3}$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \overrightarrow{y_3}$ .
- (d)  $\overrightarrow{V(A, 2/4)} = \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2}$ .

3. (a)  $\mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2)$ .

- (b)  $\mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2))$ .
- (c)  $\mathcal{E}_c(4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2$ .
4. •  $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{Ph}} 2) = F_{h2} \dot{x}_{24}$ ;
  - $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{Phf}} 2) = -k \dot{x}_{24}^2(t)$ ;
  - $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{Ph}} 5) = F_h \dot{x}_{35}(t)$ ;
  - $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{Phf}} 5) = -k \dot{x}_{35}^2(t)$ .
  5. • la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
  - $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$ ;
  - $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2$ ;
  - $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3)$ ;
  - $\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = F_t h \dot{\theta}_1$ .
  6.  $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$ .

## Activation 1



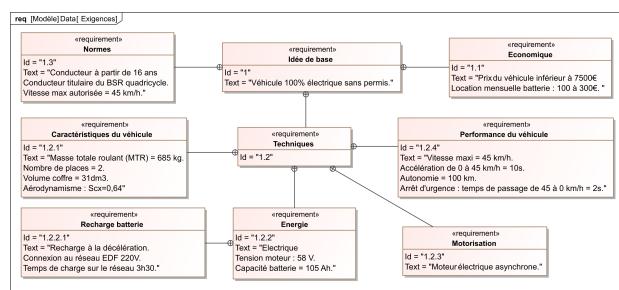
### Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

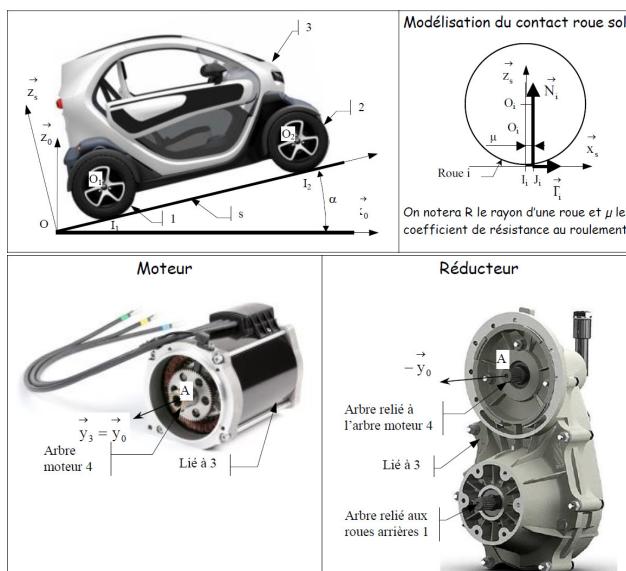
### Mise en situation



### Choix du motoréducteur

**Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



#### Hypothèses générales :

- le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est sup-

posé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;

- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
  - les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
  - le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3e - 3m$ .
- On pose  $\vec{I}_1 J_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{F}(s \rightarrow i)\} = \begin{cases} \frac{T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s}{0} & \text{avec } J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s) \\ \end{cases}_{J_i}$  et  $i = 1$  (roues arrières) ou  $2$  (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\} = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 & \end{cases}_{-}$ .

#### Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe ( $A, \vec{y}_0$ ) :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe ( $O_i, \vec{y}_0$ ) :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- les autres inerties seront négligées.

**Grandeur cinétiques :** Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

#### Choix de l'ensemble moto-réducteur

#### Équation de mouvement du véhicule

**Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

**Notations :**

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

**Question 1** Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :

- écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- en déduire une équation faisant intervenir  $C_m$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $v$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  .....
- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer  $(N_1 + N_2)$ . Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

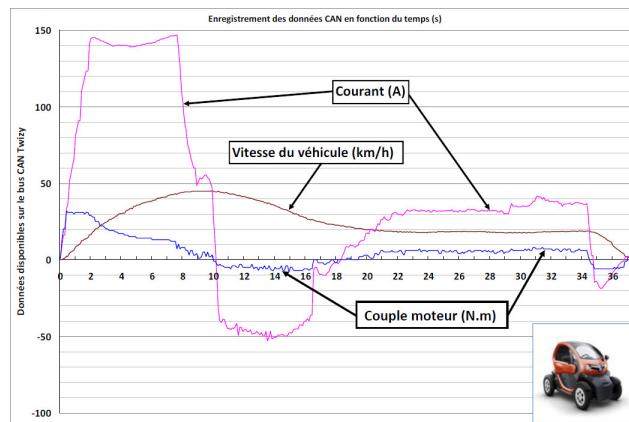
**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10})$ ,  $(v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{r C_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m$ ,  $J_m$ ,  $J_R$ ,  $R$  et  $r$ .

### Détermination du coefficient de résistance au roulement $\mu$

**Objectif** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- justifier dans quelle phase se placer;
- définir la variable mesurée;
- définir les hypothèses nécessaires;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .



### Choix du moto-réducteur

**Objectif** Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{mini}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

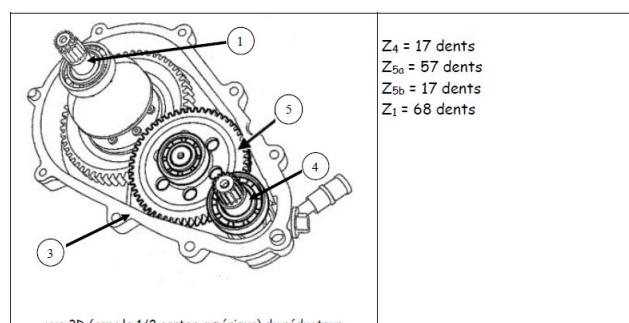
**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

**Objectif** Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.



## TD 4



## Robot de dépose de fibres optiques

Savoirs et compétences : Mines Pontois – PSI – 2004

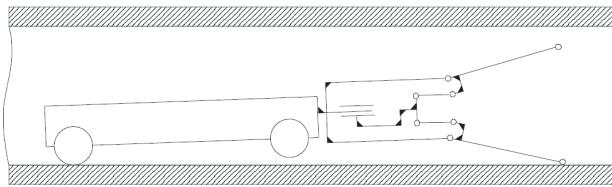
- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Présentation

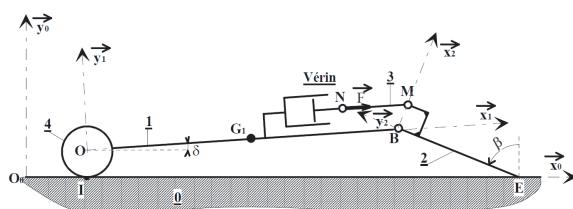
L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

**Objectif** En fin des mouvements des bras, on doit avoir  $\delta = 14^\circ$  et  $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$ .

De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.



Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action  $F$  du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant  $t$ , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :



## Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- une tige **1** de longueur  $OB = L_1$ , de section négligeable, de masse  $m_1$ , et de centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2} \vec{x}_1$ ;

- une roue **4**, de centre  $O$ , de rayon  $R = 0,07 \text{ m}$ , de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec **1**;
- un bras **2** constitué de deux éléments **B***E* et **B***M* tels que  $\overrightarrow{BE} = -a \vec{y}_2$  et  $\overrightarrow{BM} = b \vec{x}_2$ , de section et de masse négligeables;
- une biellette **3** (*NM*) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige **1**;
- un vérin hydraulique de masse négligeable.

En *I*, le contact entre la roue **4** et la paroi **0** se fait par roulement sans glissement.

En *E*, le contact entre le bras **2** et la paroi **0** se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action  $\vec{F}$  du vérin sur la biellette *3a*, à chaque instant, pour direction  $\vec{x}_1$  :  $\vec{F} = F \vec{x}_1$ .

## Repères et paramétrage

- $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , repère associé à la canalisation *O* et supposé galiléen.
- $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , repère associé à la tige **1**.
- $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , repère associé au bras **2**.
- $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .

## Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à  $\delta = 14^\circ$ , une vitesse  $\dot{\delta}$  inférieur à  $50^\circ/s$

## Modélisation dynamique

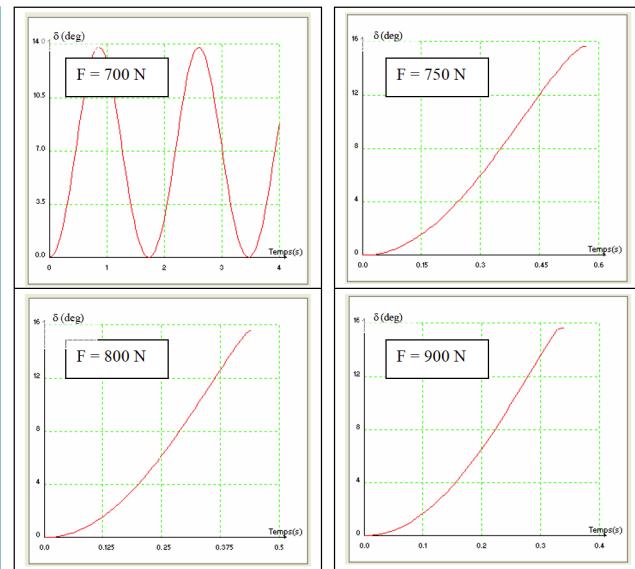
**Question 1** Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ .

**Question 2** Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma$ .

**Question 3** Donner la puissance intérieure à  $\Sigma$ .

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  pour déterminer l'équation de mouvement

donnant une relation entre  $F$ ,  $\delta$ , et  $\dot{\delta}$ .



Des simulations pour différentes valeurs de  $F$  donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de  $\delta$  en fonction du temps.

**Question 5** Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses  $\dot{\delta}$  en fin de course. En déduire les valeurs de  $F$  respectant le cahier des charges.

1.  $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right)$ .
2.  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = -m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta$ .
3.  $\mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma) = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta)$
4.  $m_1 \dot{\delta} \left[ \ddot{\delta} \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right] = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta$ .

## TD 5



## RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain\*

Concours Commun Mines Ponts 2009

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Mise en situation

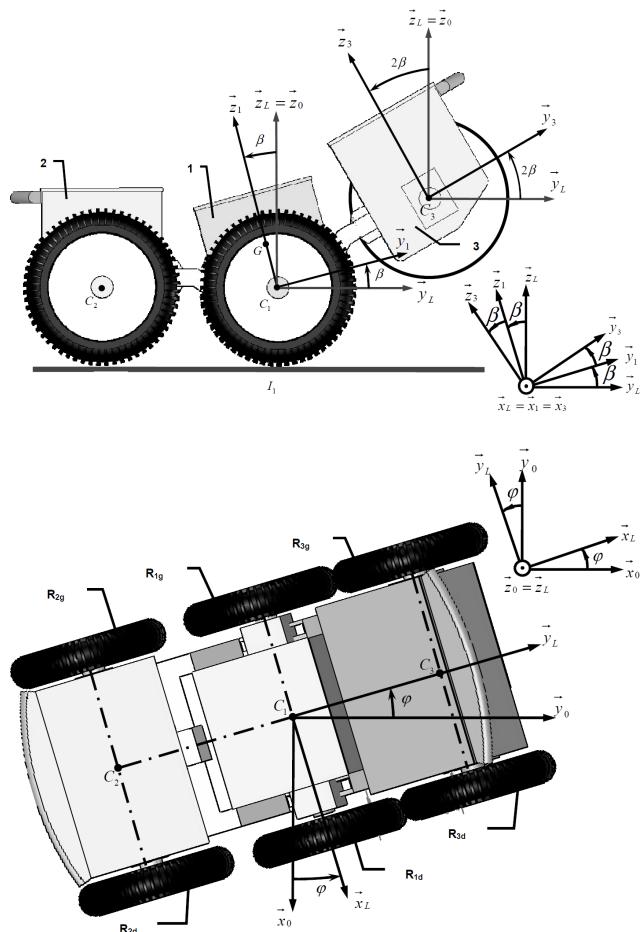
Le robuROC 6 est un robot mobile développé par la société ROBOSOFT. Cette plateforme robotisée a été conçue pour des applications de recherche et d'exploration en milieu extérieur. Elle est équipée de 6 roues motrices indépendantes, de même diamètre, montées par paires sur 3 podes articulés en tangage et en roulis.

**Hypothèse(s)** Le mouvement de roulis n'est pas pris en compte. Il est fixé à une valeur nulle.

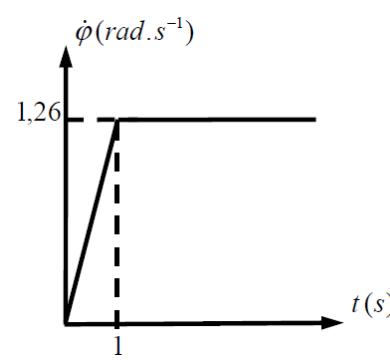
Les 6 roues de la plate-forme (notée *PF*) sont motorisées permettant ainsi de se déplacer sur des reliefs très accidentés. Cependant, la plate-forme ne comporte pas de systèmes spécifiques de direction. Le changement de direction est imposé par une rotation différentielle des roues du pôle central 1. Les roues avant et arrière doivent alors avoir des vitesses de rotation compatibles avec celles du pôle central 1. Lorsque le rayon de courbure de la trajectoire suivie par la plate-forme devient inférieur à 4 mètres, le groupe hydraulique est actionné pour passer en « Mode 2 roues instable ». La plate-forme ne tenant pas en équilibre sur 2 roues, elle retombe dès le début du mouvement sur les roues arrière ou les roues avant, passant donc en « Mode 4 roues Déplacement ». Cette intervention du groupe hydraulique permet ainsi de soulager le contact entre les roues des podes avant / arrière et le sol.

Pour cette étude, nous considérerons que la plate-forme retombe sur les roues arrière (figure suivante) et nous nous placerons dans le cas d'un rayon de courbure nul. Le mouvement de lacet étudié est donc une rotation autour de l'axe ( $C_1, \vec{z}_0$ ), d'angle  $\varphi$ , appelé angle de lacet.

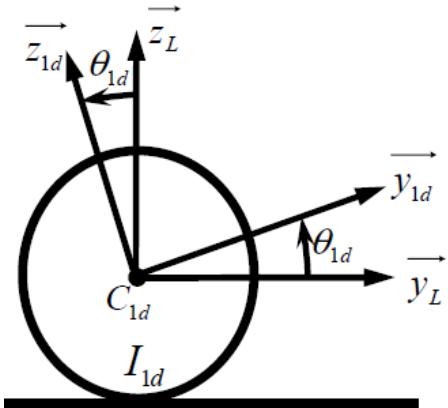
Ce mouvement est défini par le torseur cinématique suivant :  $\{\mathcal{V}(PF/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(PF/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{C_1}$ .



L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à respecter la loi de vitesse de la figure suivante.



Les roues centrales et les roues arrière sont en contact avec le sol. Dans ce mode, seules les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices. Elles roulent sans glisser sur le sol en  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . Les roues du pode avant 3 et du pode arrière 2 sont bloquées.



	Nom	Centre de gravité	Point de contact avec le sol	Vitesse de rotation / au pode central	Repère associé
Roue centrale droite	$R_{1d}$	$C_{1d}$	$I_{1d}$	$\dot{\theta}_{1d}$	$R_{1d} = (C_{1d}, \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$
Roue centrale gauche	$R_{1g}$	$C_{1g}$	$I_{1g}$	$\dot{\theta}_{1g}$	$R_{1g} = (C_{1g}, \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$
Roue arrière droite	$R_{2d}$	$C_{2d}$	$I_{2d}$	nulle	-----
Roue arrière gauche	$R_{2g}$	$C_{2g}$	$I_{2g}$	nulle	-----

### Paramétrage

- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au sol **0** supposé galiléen;
- $\mathcal{R}_L = (C_1; \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  lié à la plate-forme **PF** tel que  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_L) = (\vec{y}_0, \vec{y}_L)$  appelé angle de lacet;
- $\mathcal{R}_1 = (C_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au pode central **1** tel que  $\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_1) = (\vec{z}_L, \vec{z}_1)$ ;  $\beta$  est l'angle de tangage;  $\beta = 2^\circ$  (supposé constant pendant tout le mouvement du lacet);
- $\mathcal{R}_3 = (C_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié au pode avant **3** tel que  $2\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_3) = (\vec{z}_L, \vec{z}_3) = 4^\circ$ ;
- $\vec{C}_1 \vec{C}_3 = b \vec{y}_3$  et  $\vec{C}_1 \vec{C}_2 = -b \vec{y}_L$  avec  $b = 553$  mm;
- la figure précédente permet de définir le paramétrage de chacune des roues de la plate-forme en contact avec le sol avec l'exemple de la roue centrale droite  $R_{1d}$ .

### Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides

Le mouvement de roulis étant nul et le mouvement de tangage étant fixé à une valeur constante, il est possible de définir l'ensemble rigide  $\Sigma$  constitué des trois podes **1**, **2** et **3**, des deux roues avant, des deux roues arrière et des bras d'articulation **4** et **4'**. Pour chaque constituant de cet ensemble, la masse est supposée répartie uniformément. Centre de gravité de  $\Sigma$ :  $G$  tel que  $\vec{C}_1 \vec{G} = a_G \vec{z}_1$  et  $a_G = 85$  mm,  $m_\Sigma = 152$  kg,  $I_{C_1}(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$  avec  $A = 30,2$  kgm<sup>2</sup>,  $B = 8,2$  kgm<sup>2</sup> et  $C = 32,3$  kgm<sup>2</sup>.

Roue droite ou gauche + axe de roue :  $R_{i,dou}$  ( $i$  correspond au numéro du pode). Centre de gra-

vité de  $R_{i,dou}$  :  $C_{i,dou}$  tel que l'entraxe  $C_{ig}C_{id} = 2e$ ,  $\vec{C}_i \vec{C}_{id} = e \vec{x}_L$  et  $\vec{C}_i \vec{C}_{ig} = -e \vec{x}_L$  avec  $e = 340$  mm,  $m_r = 4$  kg, rayon d'une roue  $R = 225$  mm,  $I_{C_{i,dou}}(R_{i,dou}) = \begin{pmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{pmatrix}_{(\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)}$  valable dans toute base orthonormée directe contenant  $\vec{x}_L$  avec  $A_r = 0,1$  kgm<sup>2</sup> et  $B_r = 0,04$  kgm<sup>2</sup>.

Axe des moteurs du pode central : les deux motoréducteurs centraux sont constitués chacun d'un moteur à courant continu alimenté en 48 V associé à un réducteur épicycloïdal de rapport de réduction  $k = 1/25$ . La matrice d'inertie en  $C_1$  d'un axe moteur droit  $M_{1d}$  ou  $M_{1g}$  (en rotation suivant  $(C_1, \vec{x}_L)$ ) est :  $I_{C_1}(M_{1d} \text{ ou } M_{1g}) = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & B_m & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)}$  avec  $A_m = 795 \times 10^{-7}$  kgm<sup>2</sup> et  $B_m = 8 \times 10^{-3}$  kgm<sup>2</sup>.

Les masses et inerties des autres pièces seront négligées.

### Modélisation du contact roue / sol

Les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices, elles roulent sans glisser aux points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . On pose  $\vec{C}_{1d} \vec{I}_{1d} = -R \vec{z}_L$  et  $\vec{C}_{1g} \vec{I}_{1g} = -R \vec{z}_L$ . Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1d})} = Y_{1d} \vec{y}_L + Z_{1d} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{1d}}$  et  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1g})} = Y_{1g} \vec{y}_L + Z_{1g} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{1g}}$ .

Les roues arrière  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  sont bloquées, leur vitesse de rotation par rapport au pode arrière **2** est nulle. Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2d})} = T_{2d} \vec{n}_g + Z_{2d} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{2d}}$  et  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2g})} = T_{2g} \vec{n}_g + Z_{2g} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{2g}}$  avec  $\vec{n}_d$  et  $\vec{n}_g$  deux vecteurs unitaires opposés aux vitesses de glissement des roues  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  par rapport au sol **0** respectivement en  $I_{2d}$  et  $I_{2g}$ . On pose  $\vec{C}_{2d} \vec{I}_{2d} = -R \vec{z}_L$  et  $\vec{C}_{2g} \vec{I}_{2g} = -R \vec{z}_L$ .  $T_{2d} = f Z_{2d}$  et  $T_{2g} = f Z_{2g}$ ;  $f$  est le facteur de frottement constant au contact roue/sol  $f = 0,6$ .

### Autres liaisons

Toutes les autres liaisons de la plate-forme sont supposées parfaites (sans jeu, sans frottement).

### Motoréducteur centraux

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1d}$  est notée  $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ -C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$ .

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1g}$  est notée

$$\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}.$$

**Question 6** Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble  $\Sigma$  au point  $C_1$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer la somme des efforts normaux  $Z_{2d} + Z_{2g}$  s'exerçant sur les roues arrières. Isolons l'ensemble de la plate-forme PF, soit l'ensemble  $\Sigma$ , les roues centrales et les motoréducteurs. Plaçons-nous dans le plan médian  $(C_1, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  de la plate-forme PF. Nous définissons le projeté  $I_1$  des points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$  dans ce plan.  $I_1$  est défini par le vecteur :  $\vec{C_1 I_1} = -R \vec{z}_L$ . D'autre part, nous avons  $\vec{C_2 I_1} = b \vec{y}_L - R \vec{z}_L$  et  $\vec{C_3 I_1} = -b \vec{y}_3 - R \vec{z}_L$ . Nous ferons l'hypothèse que le moment dynamique  $\delta(I_1, PF/0) \cdot \vec{x}_L$  est négligeable devant les actions mécaniques.

**Question 7** En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  en  $I_1$  en projection sur  $\vec{x}_L$ , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact  $Z_{2d} + Z_{2g}$ , entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir  $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r)g$  avec  $m_2 = 52 \text{ kg}$  la masse du pôle arrière 2.

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  par une approche énergétique.

**Question 8** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat

sera mis sous la forme  $\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$  où  $J$  est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

**Question 9** Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme  $C_m = k_2(J\ddot{\varphi} + k_1(T_{2d} + T_{2g}))$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.

Pour la question suivante, vous prendrez  $J = 34 \text{ kg m}^2$ ,  $k_1 = 0,65 \text{ m}$  et  $k_2 = 1,3 \times 10^{-2}$  sans unité.

**Question 10** Calculer le couple moteur maximal :  $C_m \text{ maxi}$ . À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

