

Application 1 – Corrigé



Chaîne ouverte – Wheeling moto*

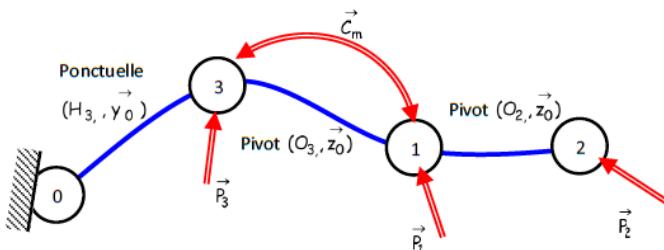
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Eléments de corrigé

- Q1- Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling.
Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3 .



Si on considère des liaisons parfaites, en particulier en H_3 (liaison sans frottement), l'ensemble modélisé en 2D est isostatique et comporte 4 mobilités :

- déplacement suivant \vec{x}_0 du centre d'inertie G_1 du cadre (1) par rapport au sol : paramètre λ_1 ;
- position angulaire du cadre (1) par rapport au sol : paramètre $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- position angulaire de la roue (3) par rapport au sol : paramètre $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$;
- position angulaire de la roue (2) par rapport au sol : paramètre $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$.

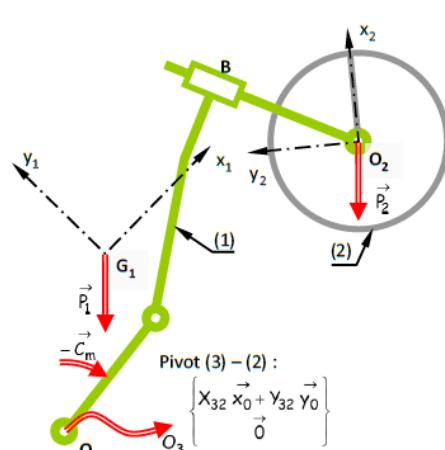
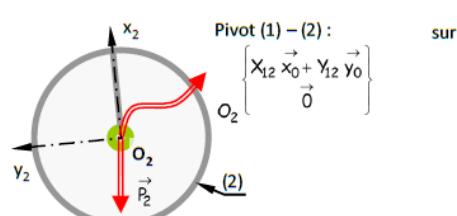
La propriété de roulement sans glissement en H_3 entre la roue (3) et le sol (0) introduit une relation entre les paramètres de position.

Il y a donc 3 équations du mouvement issues de l'application du principe fondamental de la dynamique.

- Q2- En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble :
- élément(s) isolé(s) ;
 - théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

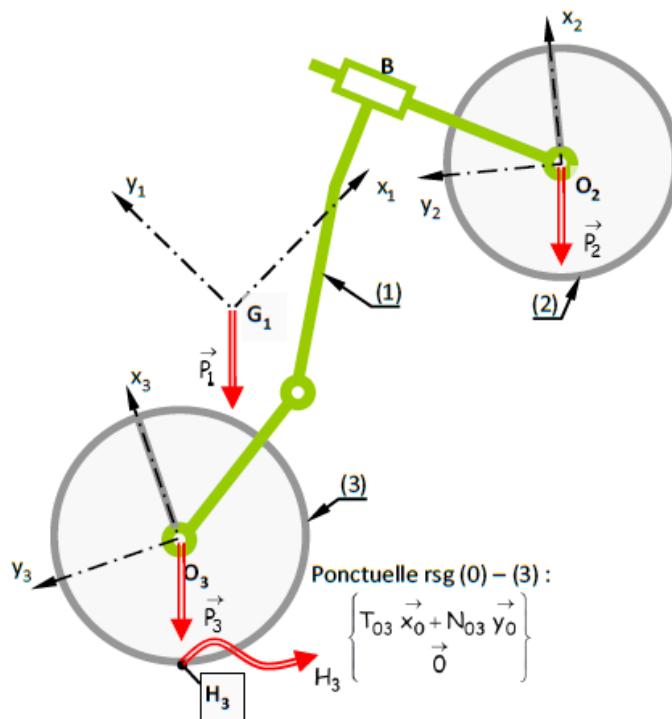
Les trois équations sont obtenues en isolant successivement :

- la roue avant (2) :
équation du moment dynamique en O_2 , en projection
 \vec{z}_0 . Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (1) – (2) ;



- ensemble {roue avant (2), cadre (1)} :
équation du moment dynamique en O_3 , en projection sur \vec{z}_0 .
Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (3) – (1) ;

- ensemble {roue avant (2), cadre (1), roue arrière (3)} :
équation du moment dynamique en H_3 , en projection sur \vec{z}_0 .
Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison ponctuelle avec RsG (0) – (3) ;



- Q3-** Mettre en place les équations précédentes.
Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

EQUATION (1)

Moment cinétique de la roue (2) : il est défini en O_2 , centre d'inertie de la roue (2), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(O_2,2/0) = \bar{\bar{I}}(O_2,2) \otimes \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 = C_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(O_2,2/0) = \frac{d\vec{\sigma}(O_2,2/0)}{dt/(0)} = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

Actions extérieures sur la roue (2) :

- pesanteur : le poids \vec{P}_2 est supposé appliqué en O_2 , donc de moment nul en ce point ;
- la liaison pivot (1) – (2) a un moment nul en O_2 .

Soit l'équation (1) : $C_2 \ddot{\theta}_2 = 0$

EQUATION (2)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2)} : il est défini en O_3 , en faisant la somme des moments dynamiques de (1) et de (2) : $\vec{\delta}(O_3,[1,2]/0) = \vec{\delta}(O_3,1/0) + \vec{\delta}(O_3,2/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment cinétique du cadre (1) : il est défini en G_1 , centre d'inertie du cadre (1), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(G_1,1/0) = \bar{\bar{I}}(G_1,1) \otimes \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 = C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(G_1,1/0) = \frac{d\vec{\sigma}(G_1,1/0)}{dt/(0)} = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

Calcul en O_3 : $\vec{\delta}(O_3,1/0) = \vec{\delta}(G_1,1/0) + m_1 \vec{\Gamma}(G_1,1/0) \wedge \vec{G}_1 \vec{O}_3$

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(G_1,1/0)$: pour ce calcul, il est plus adroit de repérer la position du cadre (1) par rapport au sol (0) en définissant comme paramètre λ_1 : $\vec{O} \vec{O}_3 = \lambda_1 \vec{x}_0$.

Le point O est un point lié au sol, situé à la distance R du plan de contact de la roue avec la chaussée.

$$\vec{OG}_1 = \vec{OO_3} + \vec{O_3G_1} = \lambda_1 \vec{x_0} + a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}$$

$$\vec{V}(G_1, 1/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1})$$

$$\vec{\Gamma}(G_1, 1/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1})$$

Moment dynamique en O_3 : $\vec{\delta}(O_3, 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z_0} + m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}) \right] \wedge (-a_1 \vec{x_1} - b_1 \vec{y_1})$

$$\vec{\delta}(O_3, 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z_0} - m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin \theta_1 + b_1 \cos \theta_1) - \dot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] \vec{z_0}$$

Calcul pour la roue avant (2) :

$$\vec{\delta}(O_3, 2/0) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) + m_2 \vec{\Gamma}(O_2, 2/0) \wedge \vec{O_2O_3}$$

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(O_2, 2/0)$

$$\vec{OO_2} = \lambda_1 \vec{x_0} + L_1 \vec{x_1}$$

$$\vec{V}(O_2, 2/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}(O_2, 2/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x_1}$$

Moment dynamique en O_3 : $\vec{\delta}(O_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z_0} + m_2 \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x_1} \right] \wedge -L_1 \vec{x_1}$

$$\vec{\delta}(O_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z_0} - m_2 L_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 L_1 \right] \vec{z_0}$$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2} :

- pesanteur sur (2) : le poids \vec{P}_2 appliqué en O_2 , de moment en O_3 :

$$\vec{O_3O_2} \wedge -\vec{P}_2 \vec{y_0} = L_1 \vec{x_1} \wedge -\vec{P}_2 \vec{y_0} = -L_1 P_2 \cos \theta_1 \vec{z_0}$$

- pesanteur sur (1) : le poids \vec{P}_1 appliqué en G_1 , de moment en O_3 :

$$\vec{O_3G_1} \wedge -\vec{P}_1 \vec{y_0} = (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}) \wedge -\vec{P}_1 \vec{y_0} = -P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) \vec{z_0}$$

- le moteur agit sur le cadre (1) en exerçant un couple de moment $-C_m \vec{z_0}$
- la liaison pivot (3) – (2) a un moment nul en O_3 .

Soit l'équation (2) :

$$C_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin \theta_1 + b_1 \cos \theta_1) + \dot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] + C_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 L_1 \right] = -L_1 P_2 \cos \theta_1 - P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) - C_m$$

EQUATION (3)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2), (3)} : il est défini en H_3 , en faisant la somme des moments dynamiques de (1), de (2) et de (3) : $\vec{\delta}(H_3, \{1, 2, 3\}/0) = \vec{\delta}(H_3, 1/0) + \vec{\delta}(H_3, 2/0) + \vec{\delta}(H_3, 3/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment dynamique en H_3 : $\vec{\delta}(H_3, 1/0) = \vec{\delta}(G_1, 1/0) + m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \wedge \vec{G_1H_3}$

$$\vec{\delta}(H_3, 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z_0} + m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}) \right] \wedge (-R \vec{y_0} - a_1 \vec{x_1} - b_1 \vec{y_1})$$

Calcul pour la roue avant (2) :

Moment dynamique en H_3 : $\vec{\delta}(H_3, 2/0) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) + m_2 \vec{\Gamma}(O_2, 2/0) \wedge \vec{O_2H_3}$

$$\vec{\delta}(H_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z_0} + m_2 L_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x_1} \right] \wedge (-R \vec{y_0} - L_1 \vec{x_1})$$

Calcul pour la roue arrière (3) :

Moment cinétique de la roue (3) : il est défini en O_3 , centre d'inertie de la roue (3), point où est supposé définie sa matrice d'inertie.

$$\vec{\sigma}(O_3, 3/0) = \bar{I}(O_3, 3) \otimes \dot{\theta}_3 \vec{z}_0 = C_3 \dot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(O_3, 3/0) = \frac{d \vec{\sigma}(O_3, 3/0)}{dt/(0)} = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

Moment dynamique en H_3 : $\vec{\delta}(H_3, 3/0) = \vec{\delta}(O_3, 3/0) + m_3 \vec{\Gamma}(O_3, 3/0) \wedge \vec{O_3 H_3}$, avec $O_3 = G_3$, centre d'inertie de la roue (3).

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(O_3, 3/0)$

$$\vec{O O_3} = \lambda_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{V}(O_3, 3/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{\Gamma}(O_3, 3/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0$$

$$\text{En } H_3 : \vec{\delta}(H_3, 3/0) = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z}_0 + m_3 \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 \wedge -R \vec{y}_0 = (C_3 \ddot{\theta}_3 - m_3 \ddot{\lambda}_1 R) \vec{z}_0$$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2, 3} :

- pesanteur sur (2) : le poids \vec{P}_2 appliqué en O_2 , de moment en H_3 : $\vec{H_3 O_2} \wedge -\vec{P}_2 \vec{y}_0 = -L_1 P_2 \cos \theta_1 \vec{z}_0$
- pesanteur sur (1) : le poids \vec{P}_1 appliqué en G_1 , de moment en H_3 : $\vec{H_3 G_1} \wedge -\vec{P}_1 \vec{y}_0 = -P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) \vec{z}_0$
- pesanteur sur (3) : le poids \vec{P}_3 appliqué en O_3 , a un moment nul en H_3 ;
- le contact ponctuel du sol sur la roue (3) a un moment nul en H_3 .

Nota : le moteur est interne à l'ensemble isolé...

Soit l'équation (3) :

Il reste à conclure...

Le système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général.

Seule l'équation (1) indépendante des deux autres donne un résultat simple :

$$C_2 \ddot{\theta}_2 = 0, \text{ soit } \dot{\theta}_2 = \text{Cte} : \text{la vitesse de rotation de la roue avant est constante...}$$

Application 2 – Corrigé



Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant*

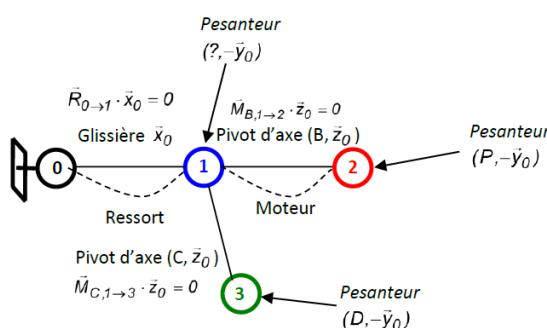
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\Omega = cte$. Reste à déterminer $\theta(t)$ et $x(t)$.

On isole $\Sigma = 1+2+3$.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée à Σ en projection sur \bar{x}_0 doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \bar{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \bar{x}_0$$

On isole 3.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur \bar{z}_0 doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \bar{z}_0 = \vec{M}_{C,\bar{3} \rightarrow 3} \cdot \bar{z}_0$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \bar{x}_0$:

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \bar{x}_0 = 0 & \{T_{0 \text{ ressort} \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -kx \bar{x}_0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ \{T_{pes \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \bar{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\} & \{T_{pes \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \bar{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\} & \{T_{pes \rightarrow 3}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -m_3 g \bar{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \bar{x}_0 = -kx$$

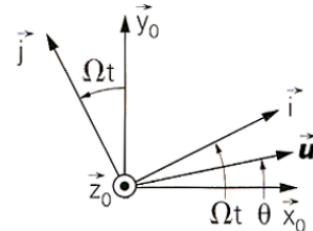
Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0$:

$$\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\Gamma}_{G_i \in 1/0} \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{Soit } \vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{x} \vec{x}_0 \Rightarrow$$

$$\vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \dot{x} \vec{x}_0$$



$$\vec{V}_{G_2 \in 2/1} = \cancel{\vec{V}_{B \in 2/1}} + \vec{G_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -r \vec{i} \wedge \vec{\Omega} \vec{z}_0 = r \vec{\Omega} \vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = r \vec{\Omega} \vec{j} + \dot{x} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = \dot{x} \vec{x}_0 - r \vec{\Omega}^2 \vec{i} \quad \text{car } \frac{d \vec{j}}{dt} \Big|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{j} = \vec{\Omega} \vec{z}_0 \wedge \vec{j} = -\vec{\Omega}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/1} = \cancel{\vec{V}_{C \in 3/1}} + \vec{G_3} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = L \vec{v} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = L \dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = L \dot{\theta} \vec{u} + \dot{x} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = \ddot{x} \vec{x}_0 + L \ddot{\theta} \vec{u} + L \dot{\theta}^2 \vec{v} \quad \text{car } \frac{d \vec{u}}{dt} \Big|_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{v}$$

Théorème de la résultante dynamique appliquée à $\Sigma = S1 + S2 + S3$ en projection sur $\vec{x}_0 : \vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$

$$-kx = m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - r \vec{\Omega}^2 \cos(\Omega t)) + m_3 (\ddot{x} + L \ddot{\theta} \cos \theta - L \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \vec{\Omega}^2 \cos(\Omega t)$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{C, \bar{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$:

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \underset{\forall P \in (C, \vec{z}_0)}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \end{array} \right\}} \text{ avec } \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 3}\} = \underset{\forall P \in (G_3, \vec{y}_0)}{\left\{ \begin{array}{l} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

$$\vec{M}_{C, pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = \left(\cancel{\vec{M}_{G_3, pes \rightarrow 3}} + \vec{C} \vec{G}_3 \wedge -m_3 g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = [-L \vec{v} \wedge -m_3 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 g L \sin \theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0$:

$$\vec{\delta}_{G_3, 3/0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle)}$$

$$\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = [\vec{\delta}_{G_3, 3/0} + \vec{C} \vec{G}_3 \wedge \vec{R}_{d3/0}] \cdot \vec{z}_0 = [-L \vec{v} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0}] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 L [\vec{z}_0 \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L \vec{u} \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta}]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à $S3$ au point C et en projection sur $\vec{z}_0 : \vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C, \bar{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$

$$-m_3 g L \sin \theta = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta}] \quad \text{d'où } \ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$,

et que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre n en a est $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$, on a :

$$\begin{array}{lll} \text{ordre 0: } & \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{array} \right. & \text{ordre 1: } \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = \theta \end{array} \right. & \text{ordre 2: } \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta \end{array} \right. & \text{ordre 3: } \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{array} \right. \end{array}$$

et $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc : $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0$

 3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B .

En posant $x(t) = A \cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$, on a : $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA \cos(\Omega t) - m_3LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à : $\begin{cases} [-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k]A - m_3L\Omega^2 B = m_2r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + (-L\Omega^2 + g)B = 0 \end{cases}$

Soit : $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k][(-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4]}$

$B = \frac{m_2r\Omega^4}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k][(-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4]}$

 4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

On a $x(t) = 0$ en régime forcé, si $A = 0$.

Ce qui implique que : $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k][(-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4]}$ Soit : $L = \frac{g}{\Omega^2}$

Dans ce cas $B = \frac{-m_2r}{m_3L}$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t) = \frac{-m_2r}{m_3L} \cos(\Omega t)$

Application 3 – Corrigé



Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique *

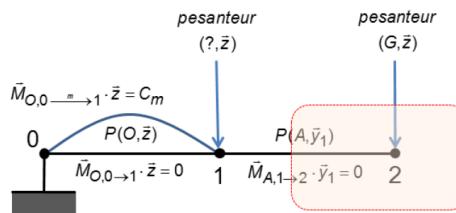
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

1. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède deux degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\omega = \text{cte}$. Reste à déterminer $\beta(t)$.

On isole la nacelle 2.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur \bar{y}_1 doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 2 n'interviennent pas :

$$\ddot{\delta}_{A,2/0} \cdot \bar{y}_1 = \bar{M}_{A,\bar{2} \rightarrow 2} \cdot \bar{y}_1$$

Actions mécaniques pour obtenir $\bar{M}_{A,\bar{2} \rightarrow 2} \cdot \bar{y}_1$:

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \bar{M}_{P,1 \rightarrow 2} \end{cases} \text{ avec } \bar{M}_{P,1 \rightarrow 2} \cdot \bar{y}_1 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 2}\} = \begin{cases} mg\bar{z} \\ 0 \end{cases}$$

Avec $\bar{M}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot \bar{y}_1 = 0$

$$\bar{M}_{A,pes \rightarrow 2} \cdot \bar{y}_1 = (\bar{M}_{G,pes \rightarrow 2} + \overrightarrow{AG} \wedge mg\bar{z}) \cdot \bar{y}_1 = (b\bar{z}_2 \wedge mg\bar{z}) \cdot \bar{y}_1 = -mgbsin\beta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir : $\ddot{\delta}_{A,2/0} \cdot \bar{y}_1$:

A n'est pas un point fixe dans R_0 . On ne peut donc pas utiliser l'intégration par partie.

La matrice d'inertie est donnée en un point A qui n'est pas le centre de gravité !!!

2 possibilités :

Méthode 1 : utiliser les définitions de $\dot{\sigma}_{A,2/0}$ et $\ddot{\delta}_{A,2/0}$:

$$\dot{\sigma}_{A,2/0} = \bar{I}_A(2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A,2/0} \quad \text{et} \quad \ddot{\delta}_{A,2/0} = \frac{d\dot{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \Big|_0 + m\vec{V}_{A,0} \wedge \vec{V}_{G,2/0}$$

Méthode 2 : utiliser Huygens pour obtenir la matrice au point G, puis utiliser la méthode classique en déterminant $\dot{\sigma}_{G,2/0}$ puis $\ddot{\delta}_{G,2/0}$ puis $\ddot{\delta}_{A,2/0}$.

Nous allons utiliser la méthode 1.

$$\vec{V}_{A/0} = \vec{V}_{A\in 2/0} = \vec{V}_{A\in 1/0} = \vec{V}_{O\in 1/0} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -a\dot{x}_1 \wedge \dot{a}\vec{z}_1 = a\dot{a}\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = \vec{I}_A(2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in 2/0} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{b1} + mb\vec{z}_2 \wedge a\dot{a}\vec{y}_1$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}_{b2} - mba\dot{a}\vec{x}_2 \\ &= -A\dot{\alpha}\sin\beta\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2 - mba\dot{a}\vec{x}_2 \\ &= -(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \Big|_0 \cdot \vec{y}_1 + (m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G\in 2/0}) \cdot \vec{y}_1$$

Avec : $(m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G\in 2/0}) \cdot \vec{y}_1 = 0$ car $\vec{V}_{A/0} \parallel \vec{y}_1$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \Big|_0 \cdot \vec{y}_1 = \frac{d(\vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1)}{dt} \Big|_0 - \vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_0$$

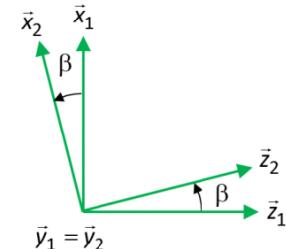
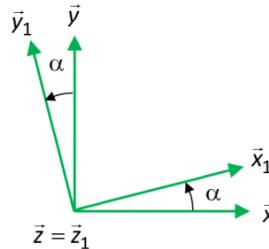
$$\text{et } \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\vec{x}_1$$

Donc

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \frac{d(B\dot{\beta})}{dt} - [-(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2] \cdot [-\dot{\alpha}\vec{x}_1]$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}[-(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\cos\beta + C\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta]$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \cos\beta [\sin\beta(C-A) - mba]$$

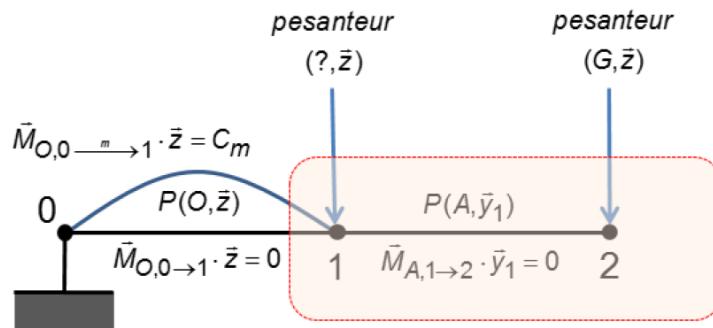


Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur \vec{y}_1 : $\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \vec{M}_{A,\bar{2} \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$

$$-mgbs\sin\beta = B\ddot{\beta} + \omega^2 \cos\beta [\sin\beta(C-A) - mba] \quad (1)$$

2. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

Graphe de structure :



On isole l'ensemble $E = \text{bras } 1 + \text{nacelle } 2$.

Le théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur \vec{z} doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas.

$$\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$:

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \underset{\forall P \in (O, \vec{z})}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{array} \right.} \text{ avec } \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = 0 & \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \underset{\forall P}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{array} \right.} \text{ avec } \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = C_m \\ \{T_{pes \rightarrow 1}\} &= \underset{\forall P \in (G_1, \vec{z})}{\left\{ \begin{array}{l} m_1 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right.} & \{T_{pes \rightarrow 2}\} &= \underset{\forall P \in (G, \vec{z})}{\left\{ \begin{array}{l} m g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right.} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \vec{M}_{O,pes \rightarrow i} \cdot \vec{z} = (\cancel{\vec{M}_{G,pes \rightarrow i}} + \overrightarrow{OG_i} \wedge m_i g \vec{z}) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O,pes \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O,pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = C_m$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z}$:

O est un point fixe dans R_0 . On peut donc utiliser l'intégration par partie.

$$\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \frac{d(\vec{\sigma}_{O,E/0} \cdot \vec{z})}{dt} - \vec{\sigma}_{O,E/0} \cdot \cancel{\frac{d\vec{z}}{dt}}_0 = \frac{d(\vec{\sigma}_{O,E/0} \cdot \vec{z})}{dt}$$

$$\vec{\sigma}_{O,1/0} \cdot \vec{z} = \left(\overset{\circ}{I}_O(1) \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \right) \cdot \vec{z} = I \dot{\alpha} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{d(\vec{\sigma}_{O,1/0} \cdot \vec{z})}{dt} = 0} \quad (\text{car } \dot{\alpha} = \omega = \text{cte})$$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} = \left(\vec{\sigma}_{A,2/0} + \overrightarrow{OA} \wedge m \vec{V}_{G \in 2/0} \right) \cdot \vec{z} = \vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{z} + \left(\overrightarrow{OA} \wedge m \vec{V}_{G \in 2/0} \right) \cdot \vec{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{z} &= \left[-(A \dot{\alpha} \sin \beta + m b a \dot{\alpha}) \vec{x}_2 + B \dot{\beta} \vec{y}_2 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2 \right] \cdot \vec{z} \\ &= -(A \dot{\alpha} \sin \beta + m b a \dot{\alpha})(-\sin \beta) + C \dot{\alpha} \cos^2 \beta \quad \text{car } \vec{x}_2 \cdot \vec{z} = -\sin \beta \text{ et } \vec{z}_2 \cdot \vec{z} = \cos \beta \\ &= \omega (A \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + m b a \sin \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}_{G \in 2/0}) \cdot \vec{z} &= [a\vec{x}_1 \wedge m(\vec{V}_{A \in 2/0} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0})] \cdot \vec{z} \\
 &= \{a\vec{x}_1 \wedge m[a\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\vec{z}_2 \wedge (\dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{y}_1)]\} \cdot \vec{z} \\
 &= \{a\vec{x}_1 \wedge m[\dot{\alpha}(a + b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2]\} \cdot \vec{z} \\
 &= ma\dot{\alpha}(a + b\sin\beta) \\
 &= ma\omega(a + b\sin\beta)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} = \omega(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mb\sin\beta + ma^2)$$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} = \omega(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mb\sin\beta + ma^2)$$

$$\frac{d(\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z})}{dt} = \omega(2\dot{\beta}A\sin\beta\cos\beta - 2C\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + 2mb\dot{\beta}\cos\beta)$$

$$\boxed{\frac{d(\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z})}{dt} = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta[\sin\beta(A - C) + mba]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur \vec{z} : $\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$

$$\boxed{C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta[\sin\beta(A - C) + mba]} \quad (2)$$

3. Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?

On suppose que $mba \gg A \approx C$

De plus lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, on a : $\beta = cte \Rightarrow \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$

Ainsi, les deux équations déterminées aux questions 1 et 2 deviennent :

$$(1) \Rightarrow -mgbs\sin\beta = -\omega^2\cos\beta mba \Rightarrow \tan\beta = \frac{\omega^2 a}{g} \Rightarrow \boxed{\beta = \arctan\left(\frac{\omega^2 a}{g}\right)}$$

(2) $\Rightarrow \boxed{C_m = 0}$ ce qui est normal, car la liaison 1/0 est parfaite, donc à vitesse constante de 1/0, il n'y a pas besoin de couple moteur (qui sert à accélérer ou freiner).

Application 4 – Corrigé



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs *

Centrale Supelec PSI 2013

Savoirs et compétences :

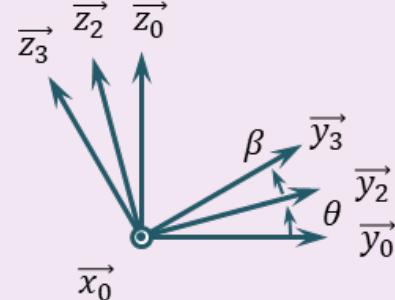
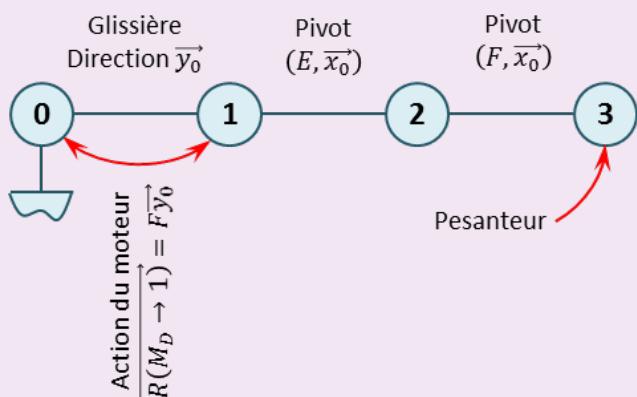
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

Question 1 Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

Correction



Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

Question 2 Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\overrightarrow{V(G_3, 3/0)}$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 .

Correction $\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (y_{ch}(t) \overrightarrow{y_0} - \ell_2 \overrightarrow{z_2} - h_3 \overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}$

On a :

$$\bullet \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta} \overrightarrow{y_2};$$

- $\left[\frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overline{\Omega(3/0)} \wedge \vec{z}_3 = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3 = -(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3;$
- $\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{z}_2;$
- $\left[\frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{z}_3.$

$$\overline{V(G_3, 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \dot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3.$$

$$\overline{\Gamma(G_3, 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3.$$

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overline{\delta(G_3, 3/0)} = \left[\frac{d\overline{\sigma(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dA_3(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} =$

$$A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$$

$$\text{On a donc, } \{\mathcal{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

Question 3 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Correction D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant \vec{z}_2 , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur \vec{y}_2 .

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\text{On a donc : } -M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = (M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3)) \cdot \vec{y}_2$$

$$\Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc (1+2+3) et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_0 .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \vec{y}_0 : F = \overline{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\overline{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0 \text{ (masse négligée)}} + \underbrace{\overline{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0 \text{ (masse négligée)}} + \overline{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow F = (M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3)) \cdot \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow F = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta))$$

Question 4 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Correction Le TRD appliqué à 3 en projection suivant \vec{z}_2 se traduit par :

$$F - M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = (M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3)) \cdot \vec{z}_2$$

$$\Leftrightarrow F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta).$$

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant \vec{x}_0 se traduit par :

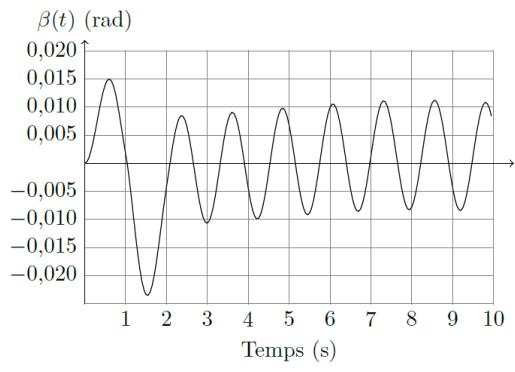
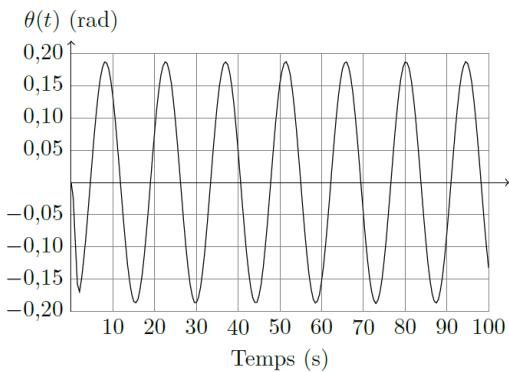
$$\begin{aligned} \overrightarrow{FG_3} \wedge (-M_3 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} &= \left(\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \overrightarrow{x_0} \\ \Leftrightarrow -h_3 \overrightarrow{z_3} \wedge (-M_3 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} &= A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \\ \Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) &= A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}). \end{aligned}$$

Question 5 En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Correction

- On a $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$. En linéarisant, on obtient $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}))$.
- On a : $F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta)$. En linéarisant, on obtient : $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta)$.
- On a : $M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$. En linéarisant, on obtient $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10m.



Question 6 Proposer une simplification de la modélisation précédente.

Correction L'amplitude des oscillations de β est 10 fois inférieure aux oscillations de θ . En conséquences, on pourrait poser $\beta = 0$ et :

- $-g \theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$.

Application 1 – Corrigé



Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme *

Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Mise en situation

Question 1 Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.

Correction On réalise une fermeture géométrique dans le triangle ABC et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow e \overrightarrow{x_1} + L_2 \overrightarrow{x_2} - \lambda_3 \overrightarrow{y_0} \Leftrightarrow e(\cos \theta_1 \overrightarrow{x_0} + \sin \theta_1 \overrightarrow{y_0}) + L_2(\cos \theta_2 \overrightarrow{x_0} + \sin \theta_2 \overrightarrow{y_0}) - \lambda_3 \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$. On a donc : $\begin{cases} e \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 = 0 \\ e \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \cos \theta_2 = -e \cos \theta_1 \\ L_2 \sin \theta_2 = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \end{cases}$ Au final, $L_2^2 = e^2 \cos^2 \theta_1 + (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1 = (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2$
 $\Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} + e \sin \theta_1$.

Question 2 En considérant que seul le plan $(H, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

Correction On a donc une invariance suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Correction H est un point fixe :

$$\bullet \quad \{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H, 1/0)} = I_H(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H$$

$$\bullet \quad \{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H, 1/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(H, 1/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H$$

G_3 est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

$$\bullet \quad \{\mathcal{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3 \overrightarrow{V(G_3, 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

$$\bullet \quad \{\mathcal{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3, 1/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

G_2 est le centre de gravité de 2.

$$\bullet \quad \{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)} = I_{G_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}) \\ C_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\bullet \{ \mathcal{D}(2/0) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} = \left[\frac{d\sigma(G_2, 2/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}) \\ C_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

Détail des calculs.

Calcul de $\overrightarrow{V(G_2, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \overrightarrow{V(G_2, 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2, 3/0)}$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/3)} = \overrightarrow{V(C, 2/3)} + \overrightarrow{G_2 C \wedge \Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} = a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \quad \overrightarrow{V(G_2, 3/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}.$$

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}.$$

Question 3 Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.

Correction

• On isole (1).

• Bilan des actions mécaniques extérieures :

– Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

– Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}) \overrightarrow{z_0} = (e \overrightarrow{x_1} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2})) \overrightarrow{z_0} = (e X_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} + e Y_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}) \overrightarrow{z_0} = e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1)$

– Couple moteur : $\{\mathcal{T}(0_m \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$.

• On applique le TMD en A en projection suivant \overrightarrow{z} :

$$e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1 \ddot{\theta}_1$$

• On isole (2).

• Bilan des actions mécaniques extérieures :

– Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

– Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

• On applique le TMD en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} \cdot \overrightarrow{z} \iff L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2}) \cdot \overrightarrow{z} = (\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)}) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\implies -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 (-a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}))) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\implies -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 (\ddot{\lambda}_3 \sin \theta_2 - a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2})$$

• On isole (2+3).

• Bilan des actions mécaniques extérieures :

– Liaison glissière : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
- Force explosion : $\{\mathcal{T}(0_e \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_y \overrightarrow{y} + F_z \overrightarrow{z} \\ C_{exp} \end{array} \right\}_C$.
- On applique le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$:

$$F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2})) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\iff F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 + a_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2))$$

TD 1 – Corrigé



Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux*

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Présentation

Étude de la position du centre de gravité

Objectif L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières».

Question 1 Déterminer l'expression de x_{G_c} afin de valider l'exigence req C206.

Correction On a $\overrightarrow{OG} = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_C}$. On souhaite que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$. On a donc $0 = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_C}$ et donc : $x_{G_c} = -\frac{m_T}{m_C} x_{G_T} - \frac{m_1}{m_C} x_{G_1}$.

Pour toute la suite de l'étude, les points G et O sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ est notée M .

Étude du basculement frontal

Question 2 Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{\Sigma, B\}$. Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point I_4 .

Correction On isole $\{\Sigma, B\}$.

On fait le BAME.

- Poids du bateau : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow B)\} = \begin{Bmatrix} -m_B g \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} -m_B g \vec{z} \\ m_B g \vec{y} \left(x_{G_B} - \frac{2L}{3} \right) + E m_B g \vec{x} \end{Bmatrix}_{I_4}$.
- Poids de Σ : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow \Sigma)\} = \begin{Bmatrix} -M g \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} -M g \vec{z} \\ -\frac{2M g L}{3} \vec{y} + E M g \vec{x} \end{Bmatrix}_{I_4}$.
- Action du sol sur chaque roue :
 - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_1)\} = \begin{Bmatrix} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ L N_1 \vec{y} \end{Bmatrix}_{I_4}$;
 - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_2)\} = \begin{Bmatrix} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ -2 E N_2 \vec{x} + L N_2 \vec{y} - 2 E T_2 \vec{z} \end{Bmatrix}_{I_4}$;
 - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_3)\} = \begin{Bmatrix} -T_3 \vec{x} + N_3 \vec{z} \\ -2 E N_3 \vec{x} - 2 E T_3 \vec{z} \end{Bmatrix}_{I_4}$;
 - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_4)\} = \begin{Bmatrix} -T_4 \vec{x} + N_4 \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}_{I_4}$.

Calcul du $\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\})/0\}$.

$$\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\})/0\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\})/0} \\ \overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\})/0} \end{Bmatrix}_{I_4}.$$

On a $\overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} = -(M + m_B) \text{dec}_x \vec{x}_1$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma, B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \Sigma/0)} + \overrightarrow{\delta(G, B/0)}$. Le bateau étant en translation par rapport au bâti, on a donc :

- $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} + \vec{I_4} \vec{G} \wedge \overrightarrow{R_d(\{\Sigma\}/0)} = \left(-2 \frac{L}{3} \vec{x}_1 - E \vec{y}_1 + h \vec{z}_1 \right) \wedge -M \text{dec}_x \vec{x}_1 = -M \text{dec}_x (E \vec{z}_1 + h \vec{y}_1)$;
- $\overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\delta(I_4, \{B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} + \vec{I_4} \vec{G_B} \wedge \overrightarrow{R_d(\{B\}/0)} = \left(\left(-x_{G_B} + 2 \frac{L}{3} \right) \vec{x}_1 + E \vec{y}_1 + (z_{G_B} + h) \vec{z}_1 \right) \wedge -m_B \text{dec}_x \vec{x}_1 = m_B \text{dec}_x (E \vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1)$;
- au final, $\overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} = m_B \text{dec}_x (E \vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1) - M \text{dec}_x (E \vec{z}_1 + h \vec{y}_1)$.

On applique le PFD.

- Théorème de la résultante dynamique :

- suivant $\vec{x}_1 : -(M + m_B) \text{dec}_x = - \sum_{i=1}^4 T_i$;
- suivant $\vec{y}_1 : 0 = 0$;
- suivant $\vec{z}_1 : 0 = \sum_{i=1}^4 N_i - (M + m_B) g$.

- Théorème du moment dynamique :

- suivant $\vec{x}_1 : 0 = E m_B g + E M g - 2 E N_2 - 2 E N_3$;
- suivant $\vec{y}_1 : -m_B \text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M \text{dec}_x h = L(N_1 + N_2) + m_B g \left(x_{G_B} - 2 \frac{L}{3} \right) - \frac{M g 2 L}{3}$;
- suivant $\vec{z}_1 : m_B \text{dec}_x E - M \text{dec}_x E = -2 E T_2 - 2 E T_3$.

Question 3 Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

Correction La mise en équation précédente permet d'exprimer 8 inconnues (N_i et T_i pour i allant de 1 à 4).

En faisant l'hypothèse que le plan $(G_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$ est plan de symétrie, on peut considérer que $N_4 = N_3$, $T_4 = T_3$, $N_1 = N_2$, $T_1 = T_2$. Il reste donc 4 inconnues.

De plus, à la limite du basculement frontal, les roues arrières se décolleraient. Il resterait donc les inconnues N_3 et T_3 .

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

Question 4 Déterminer alors l'expression de dec_x .

Correction Le basculement frontal du véhicule peut se traduire par un théorème du moment dynamique appliqué en I_4 en projection sur \vec{y}_1 . On utilise les conditions précédentes. On a donc :

$$-m_B \text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M \text{dec}_x h = m_B g \left(x_{G_B} - 2 \frac{L}{3} \right) - \frac{M g 2 L}{3} \text{ soit } \text{dec}_x = \frac{m_B g \left(x_{G_B} - 2 \frac{L}{3} \right) - \frac{M g 2 L}{3}}{-m_B (z_{G_B} + h) - M h}$$

$$\Leftrightarrow \text{dec}_x = -g \frac{m_B (3x_{G_B} - 2L) - M 2 L}{3m_B (z_{G_B} + h) + 3M h}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté f .

Question 5 Donner les expressions de N_4 et T_4 et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

Correction

Étude du basculement latéral

Question 6 Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de V qui provoque le basculement latéral ?

Correction

Question 7 En déduire l'expression de V qui provoque le basculement latéral.

Correction

TD 2 – Corrigé



Dynamique du véhicule – Véhicule à trois roues Clever*

Concours Banque PT – SIA 2013

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Le Cleverest un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens.

Il se présente comme un véhicule à trois roues pouvant embarquer deux personnes assises en tandem. Il adopte une architecture pendulaire, c'est-à-dire qu'il se penche dans les virages (cf. 7). Le déplacement du centre de gravité qui en résulte lui confère une grande stabilité malgré une faible largeur du véhicule (légèrement inférieure à 1 m, contre 60 à 75 cm pour une moto, et 1,5 m pour une petite voiture). Cette étroitesse se veut une réponse aux problèmes d'encombrement dans les villes mais permet aussi une surface frontale moins importante que sur une voiture conventionnelle et donc des pertes aérodynamiques réduites. En outre, les sensations de conduite sont semblables à celle d'une moto mais avec un pilotage, à l'aide d'un volant, propre à un véhicule à 4 roues. Le moteur est un monocylindre à gaz naturel qui a été développé par l'IFP et dont les performances permettent d'atteindre une vitesse de pointe de 100 km h^{-1} avec une accélération en phase avec les attentes pour un véhicule urbain.

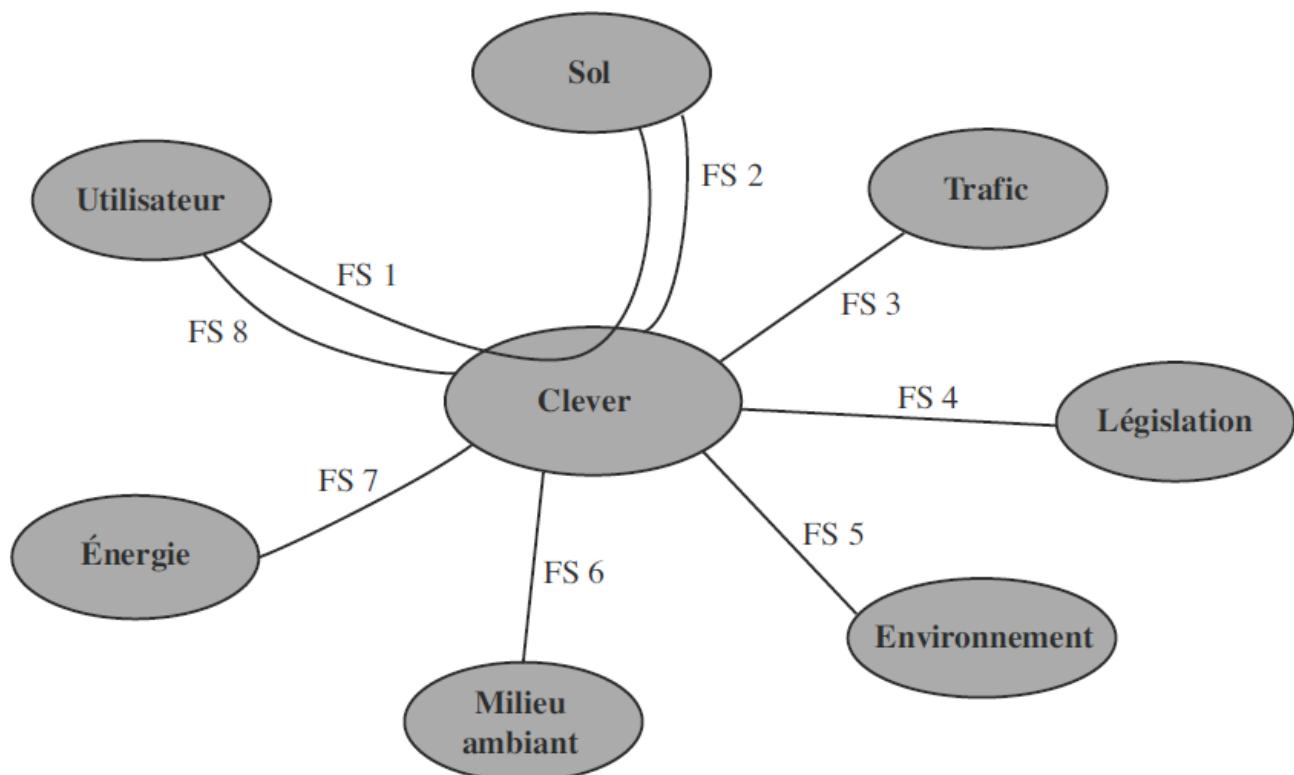
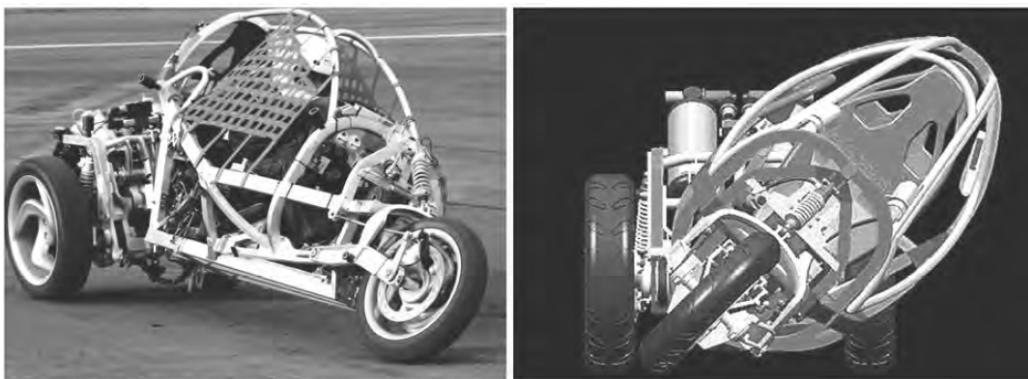


Diagramme partiel des interacteurs dans la phase d'utilisation normale

N°	Fonction de service
FS 1	Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol
FS 2	Rester insensible aux perturbations de la route
FS 3	S'insérer facilement dans le trafic
FS 4	Respecter la réglementation en vigueur
FS 5	Contribuer au respect de l'environnement
FS 6	Résister au milieu ambiant
FS 7	Utiliser les énergies disponibles et ne pas trop consommer
FS 8	Être confortable

Caractérisation partielle des fonctions de service

Du point de vue de l'architecture cinématique (cf. 7), le groupe motopropulseur est placé à l'arrière. À l'avant, l'habitacle repose sur une roue de moto et pivote par rapport au bloc arrière autour d'une liaison pilotée angulairement par le biais de deux vérins hydrauliques. L'inclinaison est contrôlée par un ordinateur de bord en fonction de l'angle au volant et de la vitesse. Le Tableau 7 regroupe les caractéristiques techniques annoncées par l'équipe de développement.



Vue de la cinématique pendulaire

Type de véhicule	inclinable à 3 roues
Disposition des sièges	en tandem
Longueur hors tout	3 m
Largeur hors tout	1 m
Hauteur hors tout	1,35 m
Poids à vide	395 kg
Châssis	aluminium
Carrosserie	matériaux synthétiques
Moteur	monocylindre à gaz naturel de 213 cm ³
Puissance maxi	20 Ch DIN (soit 15 kW) à 9000 tr/min
Couple maxi	16 Nm à 6500 tr/min
Vitesse maxi	100 km/h
Accélération	0-60 km/h en un temps inférieur à 7 s
Autonomie	100 km

Caractéristiques techniques

1 Validation de la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle »

Objectif Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle » qui a été proposée pour assurer les fonctions de service FS1 « Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol » et FS3 « S'insérer facilement dans le trafic » du Tableau 7 donné en introduction. Ce choix doit en effet permettre de garantir la stabilité du Clever dans les virages tout en permettant une faible largeur du véhicule afin de s'insérer dans la circulation.

On donne ci-dessous deux extraits du cahier des charges relatifs aux fonctions de service FS1 et FS3.

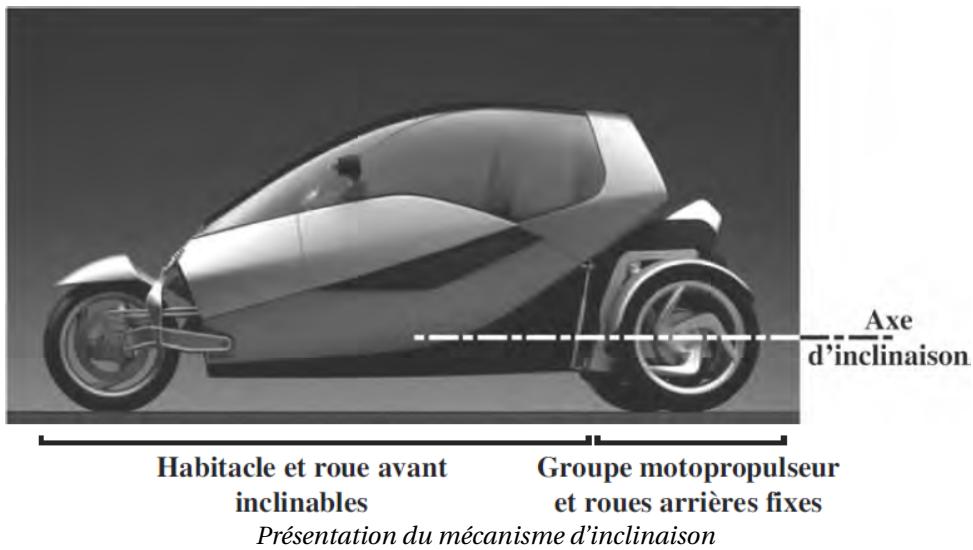
Fonction de service	Critères d'appréciation	Niveau
FS1 Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol	<ul style="list-style-type: none"> Renversement du véhicule pour une vitesse de 55 km/h dans un virage de rayon de courbure 20 m Glissement du véhicule pour une vitesse de 55 km/h dans un virage de rayon de courbure 20 m 	<ul style="list-style-type: none"> Interdit Interdit

Fonction de service	Critères d'appréciation	Niveau
FS3 S'insérer facilement dans la circulation	<ul style="list-style-type: none"> Largeur hors tout du véhicule 	<ul style="list-style-type: none"> < 1 m

1.1 Conditions de non renversement et d'adhérence

On se propose maintenant d'étudier l'influence du mécanisme d'inclinaison de l'habitacle du Clever sur la stabilité de celui-ci dans les virages. En particulier, on va montrer que cette technologie pendulaire lui permet d'avoir une largeur faible, comparée à une voiture qui n'est pas équipée de cette technologie, tout en assurant un non renversement à vitesse élevée.

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la subsection 1.1. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la subsection 1.1.



Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la 2. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route **R** est munie du repère $\mathcal{R}_g = (O; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$. Le référentiel associé est supposé galiléen;
- le groupe motopropulseur **0** est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O . Le rayon de courbure de la trajectoire du point C dans \mathcal{R}_g est R_C . Le repère lié à **0** est $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_e$ et on note $\theta = (\vec{x}_e, \vec{x}_0) = (\vec{y}_e, \vec{y}_0)$. On a donc $OC = R_C \vec{x}_0$. On remarquera bien que \mathcal{R}_0 est mobile par rapport à \mathcal{R}_g ;
- l'habitacle **1** est liée au groupe **0** par une liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_0) . Le repère lié $\mathcal{R}_1 = (C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de **1** est G tel que $\vec{CG} = e \vec{z}_1$ et sa masse est m . On note $I_G(1)$ son opérateur d'inertie en G . On considérera que c'est un solide de forme quelconque dont la matrice est donnée dans la base \mathcal{R}_0 .
- les roues arrière **2** et **3** sont liées au groupe **0** par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{x}_0) .
- les contacts entre les roues **2** et **3** et la route **R** ont lieu en A et B définis par $\vec{CA} = \frac{\ell}{2} \vec{x}_0 - r \vec{z}_0$ et $\vec{CB} = -\frac{\ell}{2} \vec{x}_0 - r \vec{z}_0$, r désignant le rayon des roues et ℓ la voie arrière du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_0 . Le contact dans ces liaisons se fait avec frottement et le coefficient de frottement est noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route **R** sur les roues **2** et **3** sont modélisées dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(R \rightarrow 2) = T_A \vec{x}_0 + N_A \vec{z}_0$ et $\vec{R}(R \rightarrow 3) = T_B \vec{x}_0 + N_B \vec{z}_0$.

Dans les questions qui suivent, mises à part la liaison entre **R** et **2** et celle entre **R** et **3**, pour lesquelles le frottement est pris en compte, toutes les liaisons sont considérées parfaites. En outre, on négligera la masse des pièces **0**, **2** et **3** devant celle de l'habitacle **1**. On note $E = 0 \cup 1 \cup 2 \cup 3$. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$.

On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C , ainsi que la vitesse V de ce point par rapport au référentiel \mathcal{R}_g sont constants. L'angle d'inclinaison α du système pendulaire est lui aussi supposé constant.

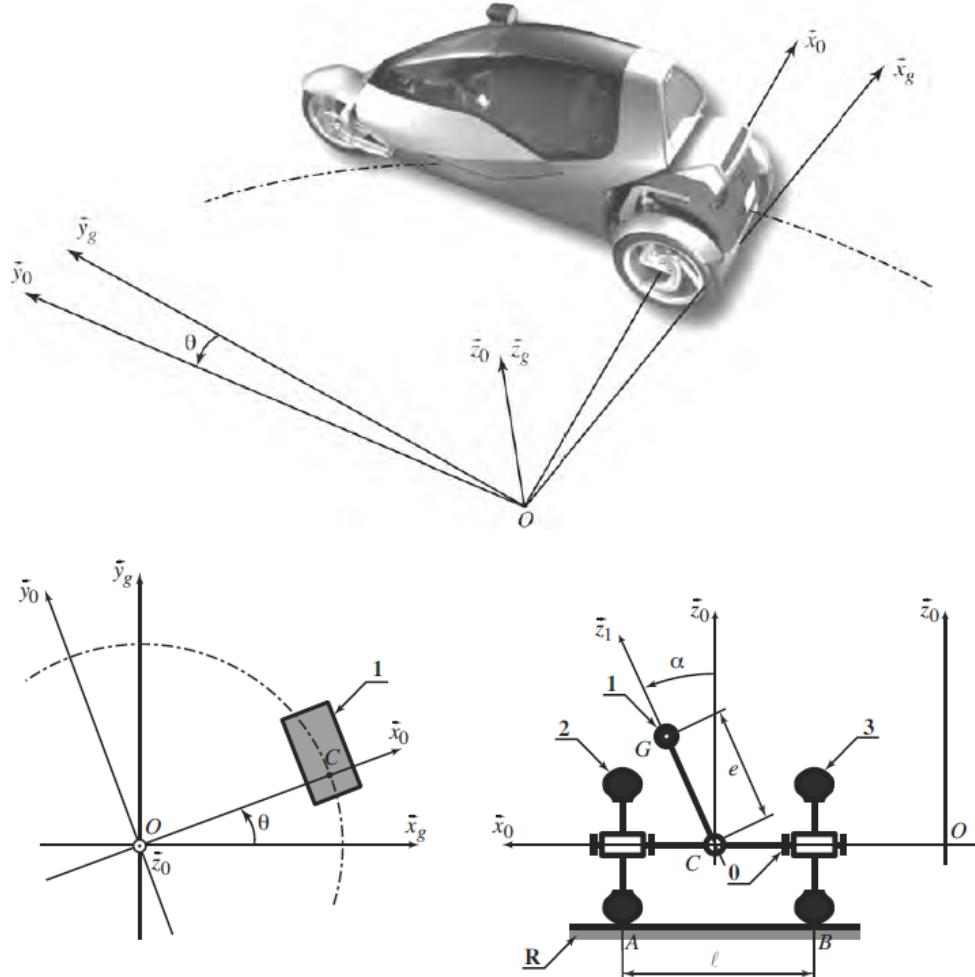
Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V(G/\mathcal{R}_g)}$, du point G dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g en fonction de V , e , R_C et α .

Correction

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{a(G/\mathcal{R}_g)}$, du point G dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g en fonction de V , e , R_C et α .

Correction

On



Modélisation simplifiée du Clever en position inclinée

On néglige le contact entre la roue avant et le sol.

Question 3 En rappelant que le rayon R_c , la vitesse V et l'angle α sont supposés constants, calculer le moment dynamique en G , noté $\delta(G, E/\mathcal{R}_g)$, de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g .

Correction

Question 4 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g , écrire les trois équations scalaires qui lient les actions mécaniques de contact entre le sol et les roues T_A , N_A , T_B et N_B aux données du problème.

Correction

Question 5 Déduire de ces trois relations l'expression des efforts normaux N_A et N_B en fonction de m , ℓ , r , e , g et R_c , α , V . Tous les autres paramètres étant fixés, une augmentation de la vitesse V risque-t-elle de susciter un décollement de la roue intérieure ou de la roue extérieure au virage?

Correction

Question 6 Déduire de la question précédente la condition de non renversement, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport V^2/R_c aux paramètres ℓ , r , e , g et α , R_c .

Correction

Question 7 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f . En utilisant les équations qui avaient été montrées précédemment et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, en déduire la condition d'adhérence, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport $\frac{V^2}{R_c}$ aux paramètres e , f , g et α , R_c .

Correction

1.2 Cas d'un véhicule sans architecture pendulaire

Afin de montrer l'intérêt de l'architecture pendulaire comme solution technique à la fonction de service FS3 « S'insérer facilement dans la circulation », on imagine maintenant que le véhicule Clever n'en est pas équipé, ce qui se traduit par la condition $\alpha = 0$.

Question 8 Réécrire les conditions d'adhérence et de non renversement dans ce cas particulier.

Correction

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- rayon d'une roue, $r = 30\text{ cm}$, position du centre de gravité, $e = 50\text{ cm}$;
- accélération de la pesanteur, $g = 9,81\text{ m s}^{-2}$ coefficient d'adhérence pneu-route, $f = 0,8$.

Question 9 Calculer la valeur de la voie arrière du véhicule (largeur ℓ entre les roues arrières) en dessous de laquelle le phénomène limitant la vitesse à laquelle on peut prendre un virage est le risque de renversement et non celui de dérapage. En déduire quel est le phénomène limitant dans le cas d'une voiture traditionnelle (voie de l'ordre de 1,5 m) et dans le cas d'un véhicule étroit comme le Clever (voie égale à 0,9 m) ?

Correction

Question 10 Calculer la valeur de la vitesse maximale V à laquelle il est possible de prendre un virage de rayon de courbure $R_c = 20\text{ m}$ avec un véhicule étroit de voie $\ell = 0,9\text{ m}$ si celui-ci n'est pas inclinable. On exprimera cette vitesse en km/h. Celle-ci est-elle compatible avec la norme qui prescrit de pouvoir rouler à 55 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 20 m ?

Correction

1.3 Cas d'un véhicule à architecture pendulaire

On considère maintenant l'architecture pendulaire. L'angle α peut varier dans la plage $[-45^\circ, 45^\circ]$.

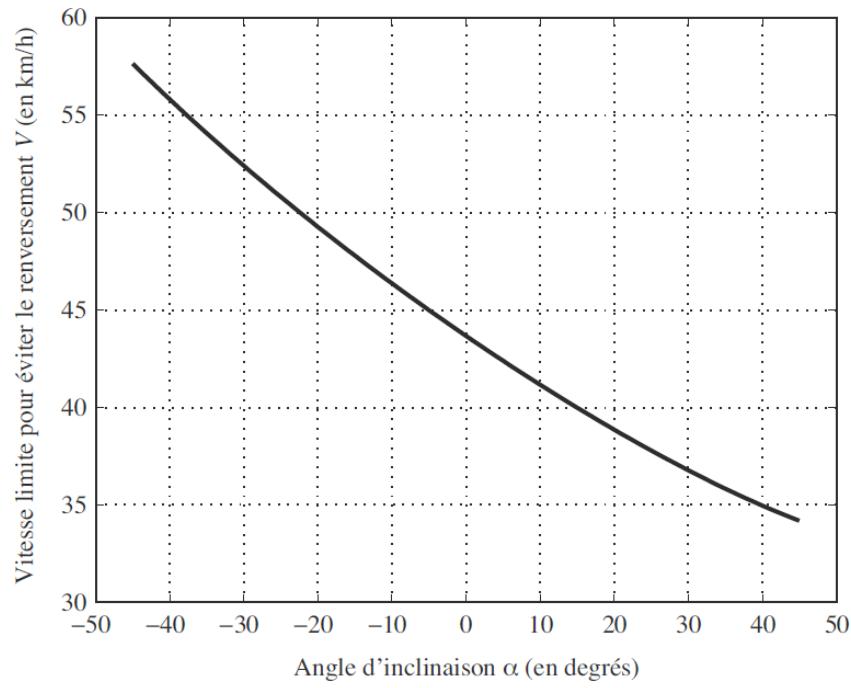
Question 11 Commenter le signe de l'angle α pour contribuer au non renversement du Clever dans la configuration de la 2 (virage à gauche). Le véhicule doit-il s'incliner vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la trajectoire (comme c'est le cas sur la 2 en bas à droite) ?

Correction

Le graphique de la 12, représente, en fonction de l'angle d'inclinaison α et dans la configuration précédente (même géométrie et rayon de courbure $R_c = 20\text{ m}$), l'évolution de vitesse maximale V en dessous de laquelle il n'y a pas renversement.

Question 12 En utilisant la 12, déterminer l'angle d'inclinaison α qu'il faut imposer à l'habitacle pour respecter la norme.

Correction



Représentation graphique de la condition de non renversement

TD 3 – Corrigé



Dynamique du véhicule – Segway de première génération*

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Présentation

Objectif L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction On a $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta} \overrightarrow{x_1}$. On a alors $V_L = R_C \dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\ddot{\theta}$ et R_C .

Correction $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \overrightarrow{x_1} - R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} = -R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1}$ ($\dot{\theta}$ est constant).

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Correction La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq f N_A$ et $T_B \leq f N_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f (N_A + N_B)$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

Correction E étant un ensemble indéformable, on a $\overrightarrow{R_d(E/\mathcal{R}_0)} = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1}$ (pas de projection sur $\overrightarrow{z_0}$). On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur E ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{z_{01}}$, on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_1}$. En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Correction En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_1}$, on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$. En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant

dérapage, on a $\frac{V_L^2}{R_C} \leq fg$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction La vitesse limite est donc de 10 m s^{-1} soient 36 km h^{-1} ce qui satisfait le cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Correction Au centre d'inertie de E , on a $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$. On a donc, $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \vec{x}_1 - D \dot{\theta} \vec{y}_1 + C \dot{\theta} \vec{z}_{01}$. On a donc $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$. En conséquence, $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en projection sur \vec{x}_1 .

Correction $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h \vec{z}_0 - l \vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \cdot \overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , en projection sur \vec{x}_1 , écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ et des données du problème.

Correction On a :

- $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = (-l \vec{y}_1 + h \vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = l m_E g \vec{x}_1$;
- $\overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1$.

En appliquant le TMD en B suivant \vec{x}_1 , on a : $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Au final, $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

Correction Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction $N_A \simeq \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$. Ce qui est positif (pas de basculement).

$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0 \Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L$
 $\Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$. CDCF Validé.