

## DDS 2

## Les p'tits devoirs du soir

Xavier Pessoles

## Exercice 167 – Parallélépipède\*

B2-10

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en

son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

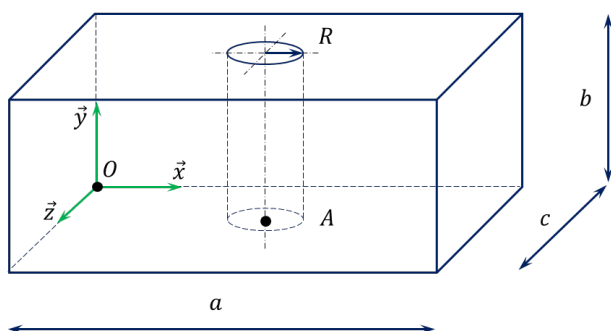
$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie

par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec  $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}$ ,

$$B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, \quad C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



$$\text{On pose } \vec{OA} = \frac{a}{2} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}.$$

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

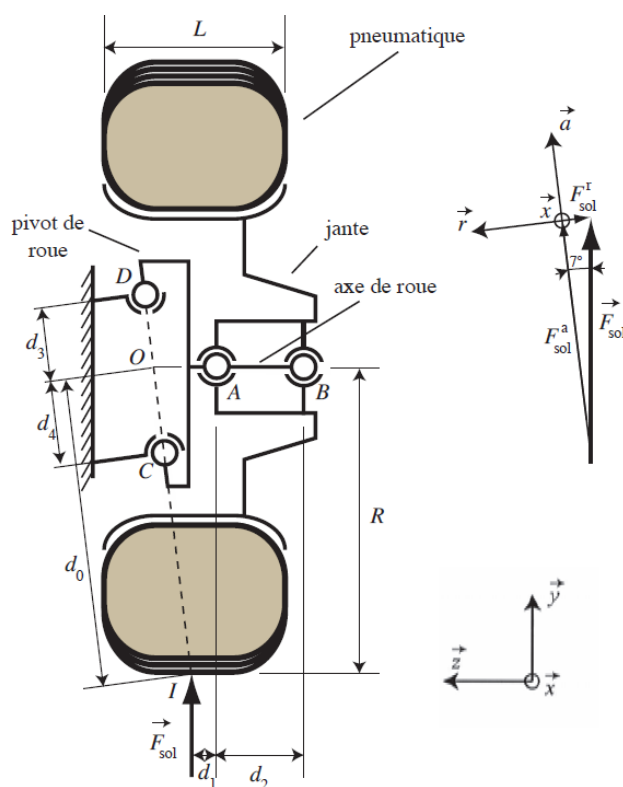
Corrigé voir 167.

## Exercice 166 – Suspension automobile \*\*

C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse à la liaison entre l'axe de la toue et le châssis du véhicule. Les notations adoptées seront les

suivantes :  $F_C^a$  (respectivement  $F_C^r$ ,  $F_C^x$ ) désignera la composante suivant  $\vec{a}$  (respectivement  $\vec{r}$ ,  $\vec{x}$ ) de l'effort extérieur exercé en  $C$ . On procédera de même pour le point  $D$ .



**Question 1** Réaliser le graphe des liaisons en faisant apparaître les actions mécaniques. Exprimer les torseurs des actions mécaniques de chacune des liaisons.

**Question 2** En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliqué au point  $C$ , en projection sur les axes de la base  $(\vec{a}, \vec{r}, \vec{x})$  en fonction des composantes  $F_{sol}^a$  et  $F_{sol}^r$  et des dimensions  $d_0$ ,  $d_3$  et  $d_4$ .

**Question 3** Résoudre littéralement le système.

Corrigé voir 166.

## Exercice 165 – Parallélépipède percé\*

**B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.**

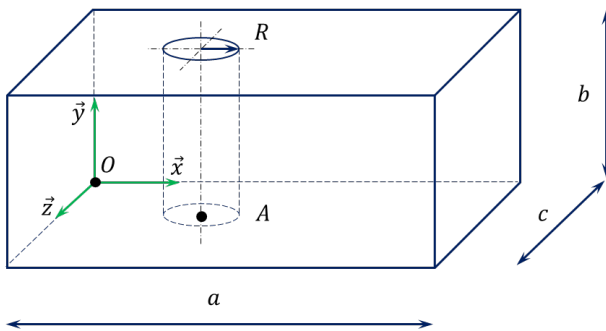
La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \frac{b^2 + c^2}{12}, B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



$$\text{On pose } \vec{OA} = \frac{a}{3} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}.$$

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

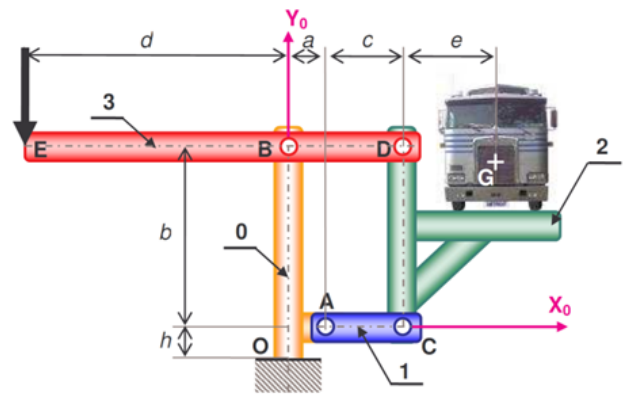
**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

Corrigé voir 165.

**Exercice 163 – Pèse camion \*\***

**C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.**

On considère un bâti **0** auquel est attaché le repère  $\mathcal{R} = (O; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$ . Le champ de pesanteur est  $g = -g \vec{y}_0$ . La barre **1** est liée au bâti **0** par une liaison pivot parfaite d'axe  $(A, \vec{z}_0)$ . Le plateau porte camion **2** est lié à la barre **1** par une liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$ . Le levier **3** est lié au bâti **0** par une liaison pivot parfaite d'axe  $(B, \vec{z}_0)$ . Ce levier est également lié au plateau **2** par une liaison pivot parfaite d'axe  $(D, \vec{z}_0)$ . Le camion **4**, de centre de masse  $G$  et de masse  $M$  inconnue, repose sur le plateau **2**. L'action mécanique connue est caractérisée par :

$$\{\text{ext} \rightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_E.$$


**Question 1** Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.

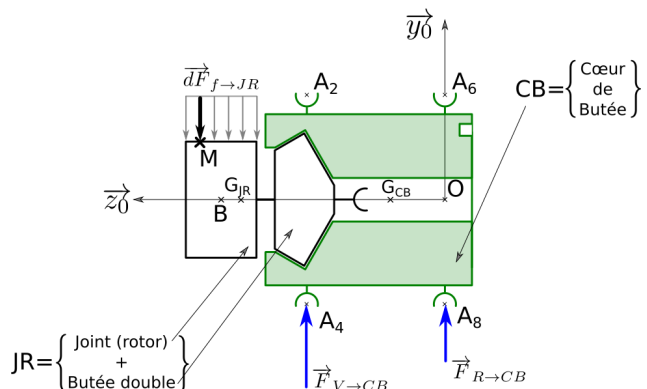
**Question 2** Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de  $F$  en fonction de  $M$ .

Corrigé voir 163.

**Exercice 159 – Banc Balafre \***

**B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.**

La figure suivante représente le paramétrage permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$ . On nommera  $G$  le centre d'inertie de l'ensemble  $S$ .



**Données et hypothèses**

- On note  $\vec{BM} = z_0 \vec{z}_0 + R_J \vec{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175 \text{ mm}$ ;
- la longueur du joint est  $L_J = 150 \text{ mm}$ . La position du point  $B$ , centre du joint est  $\vec{OB} = z_B \vec{z}_0$  avec  $z_B = 425 \text{ mm}$ ;
- Le cœur de butée a une masse  $M_{CB} = 40 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\vec{OG}_{CB} = L_{CB} \vec{z}_0$  avec  $L_{CB} = 193 \text{ mm}$ ;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$  a une masse  $M_{JR} = 100 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{JR}$  est paramétrée par  $\vec{OG}_{JR} = L_{JR} \vec{z}_0$  avec  $L_{JR} = 390 \text{ mm}$ . On notera  $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$  la matrice d'inertie de l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\vec{x}_{JR}, \vec{y}_{JR}, \vec{z}_0)$  liée à  $JR$ ;

- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  avec  $z_4 = 280 \text{ mm}$  et  $R_{CB} = 150 \text{ mm}$ .

**Question 1** Déterminer l'expression de la coordonnée  $z_G$  de  $\overrightarrow{OG}$  selon  $\overrightarrow{z_0}$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Sachant que l'ensemble  $JR$  possède une symétrie de révolution par rapport à  $(O, \overrightarrow{z_0})$ , simplifier la matrice d'inertie  $I_{G_{JR}}(JR)$ .

Corrigé voir 159.

### Exercice 167 – Parallélépipède\*

B2-10

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

Pour des raisons de symétrie, on a directement  $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2}\overrightarrow{x} + \frac{b}{2}\overrightarrow{y} + \frac{c}{2}\overrightarrow{z}$ .

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

Notons (1) le parallélépipède rectangle et (2) le cylindre (plein). On note  $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ . On a  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$

et  $I_G(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$  (attention l'axe du cylindre est  $\overrightarrow{y}$ ).

On a donc  $I_G(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ .

Par ailleurs,  $m = m_1 - m_2$  et  $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{2}\overrightarrow{y}$ ; donc  $I_A(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 + m\frac{b^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 + m\frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ .

Enfin,  $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2}\overrightarrow{x} + \frac{b}{2}\overrightarrow{y} + \frac{c}{2}\overrightarrow{z}$ ; donc  $I_O(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ .

### Exercice 166 – Suspension automobile \*\*

C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe des liaisons en faisant apparaître les actions mécaniques. Exprimer les torseurs des actions mécaniques de chacune des liaisons.

**Question 2** En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliqué au point  $C$ , en projection sur les axes de la base  $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{x})$  en fonction des composantes  $F_{sol}^a$  et  $F_{sol}^r$  et des dimensions  $d_0$ ,  $d_3$  et  $d_4$ .

**Question 3** Résoudre littéralement le système.

### Exercice 165 – Parallélépipède percé\*

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

### Exercice 163 – Pèse camion \*\*

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.

**Question 2** Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de  $F$  en fonction de  $M$ .

### Exercice 159 – Banc Balafre \*

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Données et hypothèses

- On note  $\overrightarrow{BM} = z\overrightarrow{z_0} + R_J\overrightarrow{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175$  mm;
- la longueur du joint est  $L_J = 150$  mm. La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B\overrightarrow{z_0}$  avec  $z_B = 425$  mm;

- Le cœur de butée a une masse  $M_{CB} = 40 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{CB} = 193 \text{ mm}$ ;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$  a une masse  $M_{JR} = 100 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{JR}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{JR} = 390 \text{ mm}$ . On notera  $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$  la matrice d'inertie de l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$  liée à  $JR$ ;
- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  avec  $z_4 = 280 \text{ mm}$  et  $R_{CB} = 150 \text{ mm}$ .

**Question 1** Déterminer l'expression de la coordonnée  $z_G$  de  $\overrightarrow{OG}$  selon  $\overrightarrow{z_0}$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Sachant que l'ensemble  $JR$  possède une symétrie de révolution par rapport à  $(O, \overrightarrow{z_0})$ , simplifier la matrice d'inertie  $I_{G_{JR}}(JR)$ .