

# TD 1

## Gyrolock – Sujet

Centrale Supélec PSI 2022.

### Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09

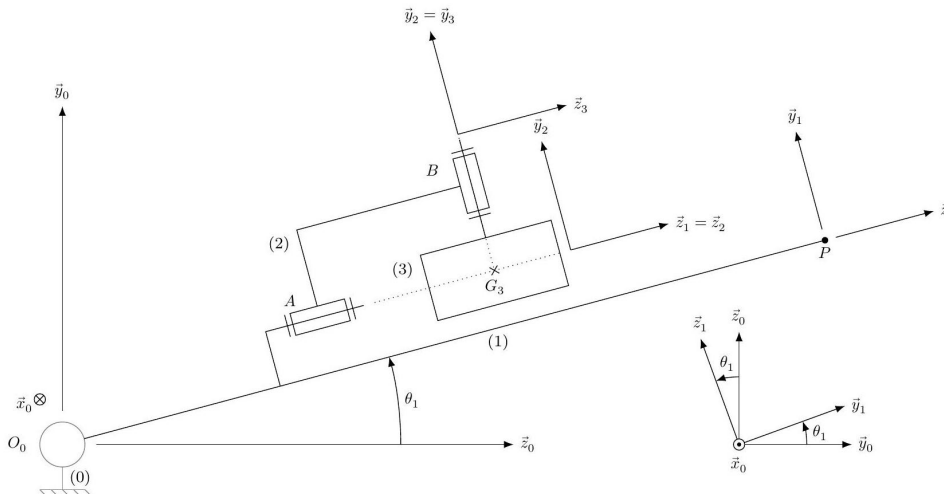


FIGURE 1.1 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ )

Dans la modélisation retenue (figure 1.3), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel  $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère  $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ . Le point P tel que  $O_0P = L$  représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

### Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  entre les solides (0) et (1) possède une raideur  $k$  et un coefficient de frottement visqueux  $f$ , d'où  $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$ ;
- les autres liaisons sont supposées parfaites;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par  $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} f_c \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_P$ ;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note  $y(t) = -\vec{O_0P} \cdot \vec{y}_0$ ;
- le stabilisateur (1) est de masse  $m_1$  et possède un centre d'inertie  $G_1$  tel que  $\vec{O_0G_1} = L_{G_1} \vec{z}_1$  et l'opérateur d'inertie est  $\mathcal{J}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables;
- la toupie (3) est de masse  $m_3$  et possède un centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\vec{O_0G_3} = L_{G_3} \vec{z}_1 + H_{G_3} \vec{y}_1$ ;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques. Q 14. Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en  $\theta_1(t)$ ). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

**Question 1** Exprimer  $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$ , la projection sur  $\vec{x}_0$  du moment dynamique au point  $O_0$  du solide (1) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

**Question 2** Exprimer littéralement la vitesse  $\vec{V}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ , puis l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ .

1: ( $\ddot{\theta}_2 \approx 0$ ,  $\theta_2 \approx 0$  et  $\dot{\theta}_3 = \omega_3$  constante).

**Question 3** En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre<sup>1</sup>, il est possible de montrer que  $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$  avec  $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$  (résultat admis sans démonstration). En déduire  $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$ , en fonction de  $A_3, c_x(t), m_3, L_{G_3}, H_{G_3}$  et  $\ddot{\theta}_1(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $J_x$  en fonction de  $A_1, A_3, m_1, m_3, L_{G_1}, L_{G_3}$  et  $H_{G_3}$  permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

En supposant que  $\theta_1$  reste proche de 0, la relation  $y(t) = L \theta_1(t)$  sera utilisée.

Les transformées de Laplace de  $y(t)$ ,  $c_x(t)$  et  $f_c(t)$  sont notées  $Y(p)$ ,  $C_x(p)$  et  $F_c(p)$ .

**Question 5** En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert  $H_{\text{pert}}(p)$  et  $H_1(p)$  du schéma-blocs figure 1.4 en fonction de  $L, J_x, f$  et  $k$ .

On rappelle que  $L = 0,3$  m et les valeurs retenues pour  $J_x, f$  et  $k$  sont :

- $J_x = 1,14 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;
- $-f = 64 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ ;
- $-k = 95 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

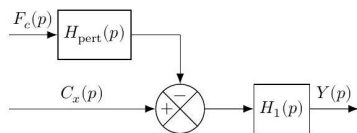


FIGURE 1.2 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

**Question 6** Écrire  $H_1(p)$  sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique  $K_1$ , amortissement  $\xi_1$  et pulsation propre  $\omega_1$ . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

# TD 1

## Gyrolock – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.  
Corrigé proposé par l'UPSTI.

### Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09

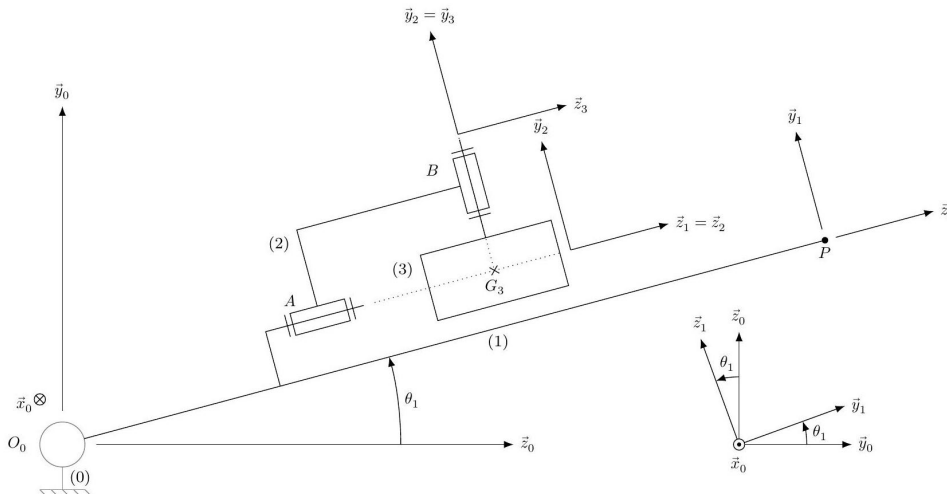


FIGURE 1.3 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ )

Dans la modélisation retenue (figure 1.3), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel  $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère  $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ . Le point  $P$  tel que  $O_0P = L$  représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

### Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  entre les solides (0) et (1) possède une raideur  $k$  et un coefficient de frottement visqueux  $f$ , d'où  $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$ ;
- les autres liaisons sont supposées parfaites;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par  $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} f_c \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_P$ ;
- seul le déplacement vertical du point  $P$  est pris en compte. On note  $y(t) = -\vec{O_0P} \cdot \vec{y}_0$ ;
- le stabilisateur (1) est de masse  $m_1$  et possède un centre d'inertie  $G_1$  tel que  $\vec{O_0G_1} = L_{G_1} \vec{z}_1$  et l'opérateur d'inertie est  $\mathcal{J}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables;
- la toupie (3) est de masse  $m_3$  et possède un centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\vec{O_0G_3} = L_{G_3} \vec{z}_1 + H_{G_3} \vec{y}_1$ ;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques. Q 14. Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en  $\theta_1(t)$ ). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

**Question 1** Exprimer  $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$ , la projection sur  $\vec{x}_0$  du moment dynamique au point  $O_0$  du solide (1) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

#### Correction

Par formule de Varignon :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + \left( \overrightarrow{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{avec } \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O_0 G_1}}{dt^2} \right|_0 = -L_{G_1} \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - L_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1 \text{ donc } \left( \overrightarrow{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \right) \cdot \vec{x}_0 = m_1 L_{G_1}^2 \ddot{\theta}_1.$$

$$\text{De plus au centre d'inertie } G_1 : \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right|_0 \text{ avec}$$

$$\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \mathcal{J}(G_1, 1) \vec{\Omega}(1/0) \cdot \vec{x}_0.$$

$$\text{Donc } \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \dot{\theta}_1 \text{ et } \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \ddot{\theta}_1.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = (A_1 + m_1 L_{G_1}^2) \ddot{\theta}_1}.$$

**Question 2** Exprimer littéralement la vitesse  $\vec{V}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ , puis l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ .

#### Correction

Le point  $G_3$  étant **physiquement rattaché à (3)** on peut écrire

$$\boxed{\vec{V}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0 G_3}}{dt} \right|_0 = -L_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1}.$$

$$\text{Ensuite } \boxed{\vec{\Gamma}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d\vec{V}(G_3, 3/0)}{dt} \right|_0 = -\left( L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) \vec{y}_1 + \left( H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) \vec{z}_1}.$$

2:  $(\ddot{\theta}_2 \approx 0, \theta_2 \approx 0 \text{ et } \dot{\theta}_3 = \omega_3 \text{ constante})$ .

**Question 3** En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre <sup>2</sup>, il est possible de montrer que  $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$  avec  $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$  (résultat admis sans démonstration). En déduire  $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$ , en fonction de  $A_3, c_x(t), m_3, L_{G_3}, H_{G_3}$  et  $\ddot{\theta}_1(t)$ .

#### Correction

Par formule de Varignon :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 &= \vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 + \left( \overrightarrow{O_0 G_3} \wedge m_3 \vec{\Gamma}(G_3, 3/0) \right) \cdot \vec{x}_0 \\ &= A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t) + m_3 L_{G_3} \left( L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) + m_3 H_{G_3} \left( H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) \\ &= \left( A_3 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2 \right) \ddot{\theta}_1 - c_x(t) \end{aligned}$$

**Question 4** Exprimer  $J_x$  en fonction de  $A_1, A_3, m_1, m_3, L_{G_1}, L_{G_3}$  et  $H_{G_3}$  permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

### Correction

En appliquant la stratégie vue en question 14 on a l'équation (effets dynamiques de (2) négligés et actions de la pesanteur négligées) :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1) + (\overrightarrow{O_0P} \wedge f_c \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_0$$

Tout calcul fait avec  $\overrightarrow{O_0P} = L \vec{z}_1$  :

$$\left( A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2 \right) \ddot{\theta}_1 + f \dot{\theta}_1 + k \theta_1 = c_x(t) - L f_c(t)$$

On identifie  $J_x = A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2$ .

En supposant que  $\theta_1$  reste proche de 0, la relation  $y(t) = L\theta_1(t)$  sera utilisée.

Les transformées de Laplace de  $y(t)$ ,  $c_x(t)$  et  $f_c(t)$  sont notées  $Y(p)$ ,  $C_x(p)$  et  $F_c(p)$ .

**Question 5** En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert  $H_{\text{pert}}(p)$  et  $H_1(p)$  du schéma-blocs figure 1.4 en fonction de  $L$ ,  $J_x$ ,  $f$  et  $k$ .

### Correction

Le schéma-bloc donne  $\frac{Y(p)}{H_1(p)} = C_x(p) - H_{\text{pert}}(p)F_c(p)$ . L'équation différentielle précédente rapportée dans le domaine de Laplace (**conditions initiales nulles**) s'écrit (avec  $Y(p) = L\theta_1(p)$ ) :

$$(J_x p^2 + f p + k) \frac{Y(p)}{L} = C_x(p) - L F_c(p)$$

On identifie  $H_1(p) = \frac{L}{J_x p^2 + f p + k}$  et  $H_{\text{pert}}(p) = L$ .

On rappelle que  $L = 0,3$  m et les valeurs retenues pour  $J_x$ ,  $f$  et  $k$  sont :

- ▶  $J_x = 1,14 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;
- ▶  $-f = 64 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ ;
- ▶  $-k = 95 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

**Question 6** Écrire  $H_1(p)$  sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique  $K_1$ , amortissement  $\xi_1$  et pulsation propre  $\omega_1$ . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

### Correction

On a  $H_1(p) = \frac{L}{1 + \frac{f}{k}p + \frac{J_x}{k}p^2}$ , on identifie alors :

- le gain statique  $K_1 = \frac{L}{k} = \frac{0,3}{95} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/N}$ ;
- la pulsation propre  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J_x}} = \sqrt{\frac{95}{1,14 \cdot 10^{-2}}} = 91,3 \text{ rad/s}$ ;
- l'amortissement  $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{\sqrt{k J_x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{95 \cdot 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,03$ .

On choisit de décrire le comportement dans le domaine fréquentiel. On a un système d'ordre 2 avec résonance (car  $\xi_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ) à la pulsation  $\omega_r = \omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_1^2}$ . Le diagramme de Bode

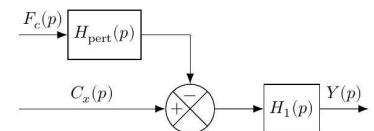


FIGURE 1.4 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

associé est le suivant :