# 10 Parcours de graphes

- Parcours d'un graphe

## 10.1 Introduction

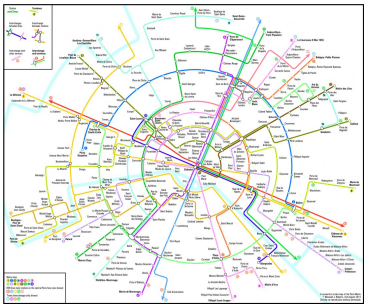


FIGURE 10.1 – Représentation ciculaire du métro parisien

Une fois que nous sommes en présence d'un graphe, il va falloir le parcourir pour répondre à différentes questions :

- est-il possible de joindre un sommet $A$ et un sommet $B$ ?
- est-il possible, depuis un sommet, de rejoindre tous les autres sommets du graphe ?
- peut-on détecter la présence de cycle ou de circuit dans un graphe ?
- quel est le plus court chemin pour joindre deux sommets ?
- *etc.*

Les deux algorithmes principaux sont les suivants :

- le parcours en largeur – *Breadth-First Search* (BFS) – pour lequel on va commencer par visiter les sommets les plus proches du sommet initial (sommets de niveau 1), puis les plus proches des sommets de niveau 1 *etc.* ;
- le parcours en profondeur – *Depth-First Search* (DFS) – pour lequel on part d'un sommet initial jusqu'au sommet le plus loin. On remonte alors la pile pour explorer les ramifications.

Une des difficultés du parcours de graphe est d'éviter de tourner en rond. C'est pour cela qu'on mémorisera l'information d'avoir visité ou non un sommet. On parle aussi de marquage.

## 10.2 Parcours en largeur

### 10.2.1 Un premier algorithme

On propose ci-dessous un algorithme de parcours en largeur en utilisant un graphe implémenté sous forme de liste d'adjacence ainsi qu'un sommet `s` de départ.

```
def bfs(G:dict, s:str) -> None:
    """
    G : graphe sous forme de dictionnaire d'adjacence
    s : sommet du graphe (Chaine de caractere du type "S1").
    """
    visited = {}
    for sommet,voisins in G.items():
        visited[sommet] = False
```

```
    # Le premier sommet à visiter entre dans la file
    file = deque([s])
    while len(file) > 0:
        # On visite la tête de file
        tete = file.pop()
        # On vérifier qu'elle n'a pas été visitée
        if not visited[tete]:
            # Si on l'avait pas visité, maintenant c'est le cas :)
            visited[tete] = True
            # On met les voisins de tete dans la file
            for v in G[tete]:
                file.appendleft(v)
```

Dans cet algorithme :

- on commence par créer une liste ayant pour taille le nombre de sommets. Cette liste va permettre de savoir si un sommet a été visité ou non ;
- dans la file, on va commencer par ajouter le sommet initial ;
- on commence alors à traiter la file en extrayant l'indice du sommet initial ;
- si ce sommet n'a pas été visité, il devient visité ;
- on ajoute alors dans la file l'ensemble des voisins du sommet initial ;
- on continue alors de traiter la file.

**Remarque**

En l'état, à quoi sert cet algorithme ?

### 10.2.2 Applications

**Exemple –**

*Comment connaître la distance d'un sommet `s` aux autres ?*

```
def distances(G, s):
    dist = [-1]*len(G)
    q = deque([(s, 0)])
    while len(q) > 0:
        u, d = q.pop()
        if dist[u] == -1:
            dist[u] = d
            for v in G[u]:
                q.appendleft((v, d + 1))
    return dist
```

**Exemple –**

*Comment connaître un plus court chemin d'un sommet s à un autre ?*

```
def bfs(G, s):
    pred = [-1]*len(G)
    q = deque([(s, s)])
    while len(q) > 0:
        u, p = q.pop()
        if pred[u] == -1:
            pred[u] = p
            for v in G[u]:
                q.appendleft((v, u))
```

```python
    return pred

def path(pred, s, v):
    L = []
    while v != s:
        L.append(v)
        v = pred[v]
    L.append(s)
    return L[::-1] # inverse le chemin
```

## 10.3 Parcours en profondeur

### 10.3.1 Un premier algorithme

On propose ci-dessous un algorithme de parcours en profondeur en utilisant un graphe implémenté sous forme de liste d'adjacence ainsi qu'un sommet `s` de départ.

```python
def dfs(G, s): #
    visited = [False]*len(G)
    pile = [s]
    while len(pile) > 0:
        u = pile.pop()
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            for v in G[u]:
                pile.append(v)
```

Dans cet algorithme :

- on commence par créer une liste ayant pour taile le nombre de sommets. Cette liste va permettre de savoir si un sommet a été visité ou non ;
- dans la pile, on va commencer par ajouter le sommet initial ;
- on commence alors à traiter le sommet initial après l'avoir extrait de la pile ;
- si ce sommet n'a pas été visité, il devient visité ;
- on ajoute alors dans la pile l'ensemble des voisins du sommet initial ;
- on continue alors de traiter la pile.

À la différence du parcours en largeur, lorsqu'on va traiter la pile, on va s'éloigner du sommet initial... avant d'y revenir quand toutes les voies auront été explorées.

### 10.3.2 Une autre formulation

La formulation précédente du parcours en profondeur a l'avantage d'être très proche de celle du parcours en largeur. Cependant, si on traçait l'arbre permettant de visualiser les sommets visités, on constate que l'algorithme crée des ramifications qui ne correspondent pas vraiment à un parcours en profondeur [1]. Il s'agit alors de

1: https://11011110.github.io/blog/2013/12/17/stack-based-graph-traversal.html

```python
def dfs(G, s): #
    visited = [False]*len(G)
    pile = [s]
    while len(pile) > 0:
        u = pile.pop()
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            for v in G[u]:
                pile.append(v)
```

```python
def dfs_2(G, s): # A VERIFIER :)
    visited = [False]*len(G)
    pile = [s]
    while len(pile) > 0 :
        u = pile.pop()
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            pile.append(u)
            for v in G[v] :
                pile.append(v)
```

### 10.3.3 Une autre formulation (récursive)

```python
def dfs(G, s):
    visited = [False]*len(G)
    def aux(u):
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            for v in G[u]:
                aux(v)
    aux(s)
```

### 10.3.4 Applications

**Exemple –**

*Lister les sommets dans l'ordre de leur visite.*

**Exemple –**

*Comment déterminer si un graphe non orienté est connexe ?*

**Exemple –**

*Comment déterminer si un graphe non orienté contient un cycle ?*

## Références

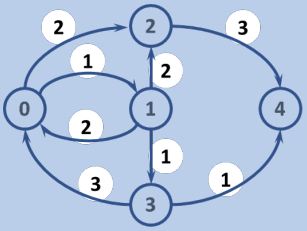

- Cours de Quentin Fortier https://fortierq.github.io/itc1/.
- Cours de JB Bianquis. Chapitre 5 : Parcours de graphes. Lycée du Parc. Lyon.
- Cours de T. Kovaltchouk. Graphes : parcours. Lycée polyvalent Franklin Roosevelt, Reims.
- https://perso.liris.cnrs.fr/vincent.nivoliers/lifap6/Supports/Cours/graph_traversal.html
- http://mpechaud.fr/scripts/parcours/index.html


## 10.4 Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra est un parcours en largeur d'un graphe **pondéré (poids positifs)** et orienté. Il permet de calculer l'ensemble des plus courts chemins entre un sommet vers tous les autres sommets du graphe.

Pour modéliser le graphe, on utilisera une matrice d'adjacence $M$ pour laquelle $M_{ij} = w(i,j)$ et $w(i,j)$ représente le poids de l'arête de $i$ vers $j$. Lorsqu'il n'y a pas d'arc entre deux sommets, on aura $M_{ij} = \infty$.

**Exemple –**




Colonne $j$, sommet d'arrivée

Ligne $i$, sommet de départ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 3 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

**Définition – Poids d'un chemin**

Soit un un graphe pondéré $G = (V, E, w)$ où $V$ désigne l'ensemble des sommets, $E$ l'ensemble des arêtes et $w$, la fonction poids définie par $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ($w(u,v)$ est le poids de l'arête de $u$ vers $v$).
On appelle poids du chemin $C$ et on note $w(C)$ la somme des poids des arêtes du chemin.
Un chemin de $u \in V$ à $v \in V$ est un plus court chemin s'il n'existe pas de chemin de poids plus petit.

**Exemple –**

Pour le chemin $C = 0, 1, 2, 4$, on a $w(C) = 6$.
Pour le chemin $C' = 0, 1, 3, 4$, on a $w(C') = 3$.
$C'$ est un plus court chemin.

**Définition – Distance**

La distance $d(u,v)$ est le poids d'un plus court chemin de $u$ à $v$. On peut alors noter $d(u,v) = \inf\{w(C) | C \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$.
Si $v$ n'est pas atteignable depuis $u$ on poser $d(u,v) = \infty$.

**Exemple –**

Dans le cas précédent, $d(0,4) = 3$, $d(2,4) = 3$ et $d(4,1) = \infty$

**Propriété – Sous-optimalité**

Soit $C$ un plus court chemin de $u$ à $v$ ainsi que $u'$ et $v'$ deux sommets de $C$. Alors le sous-chemin de $C$ de $u'$ à $v'$ est aussi un plus court chemin.

**Exemple –**

$C' = 0, 1, 3, 4$ est un plus court chemin ; donc $C' = 1, 3, 4$ ou $C' = 0, 1, 3$ aussi.

**Objectif**

Soit un graphe pondéré $G = (V, E, w)$ où $V$ désigne l'ensemble des sommets, $E$ l'ensemble des arêtes et $w$, la fonction poids.
Soit $s$ un sommet de $V$. L'objectif est de déterminer la liste de l'ensemble des distances entre $s$ et l'ensemble des sommets de $V$.

Pour répondre à l'objectif, on peut formuler l'algorithme de Dijkstra ainsi.

**Entrées :** un graphe pondéré donné par liste ou marrice d'adjacence, un sommet `s` du graphe
**Sortie :** `D` liste des distances entre `s` et chacun des sommets
Initialisation de `D` : `D = n`$\times[\infty]$
Initialisation de `D` : `D[s] =`$[0]$
Initialisation de `T` : `T = n x [False]` liste des sommets traités
Initialisation d'une file de priorité avec le sommet de départ `F = {s}`
**Tant que** `F` n'est pas vide :
    Recherche du sommet `u` tel que `d[u]` minimal parmi les sommets de `F`
    **Pour** tout voisin $v$ de $u$ **faire** :
        **Si** $v$ n'est ni dans $T$ ni dans $F$ **alors**
            Ajouter $v$ à $F$
        `D`=min $(d[v], d[u] + w(u, v))$
    `T[u] = True`
Renvoyer `D`

Une des étapes qui diffère avec le parcours en largeur notamment, est l'utilisation d'une file de priorité et la recherche du sommet vérifiant $d[u]$ minimal. Cela signifie que lorsqu'on partira d'un sommet `s`, on déterminera alors l'ensemble des distances permettant d'atteindre les voisins de `s`. À l'itération suivante, on visitera alors le sommet ayant la distance la plus faible.

**Définition – File de priorité**

Une file de priorité est une structure de données sur laquelle on peut effectuer les opérations suivantes :

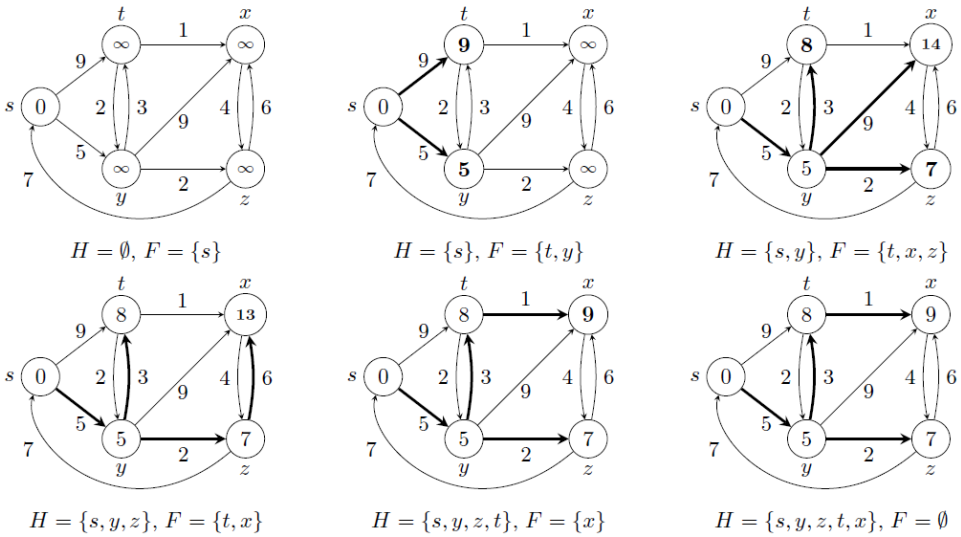
- insérer un élement ;
- extraire l'élément ayant, dans notre cas, la plus petite valeur ;
- tester si la file de priorité est vide ou pas.

**Exemple –**

Soit une file de priorité comprenant les éléments suivants : `file = [12,1,4,5]`. La file de priorité est dotée d'une méthode `pop` permettant d'extraire la plus petite valeur. Ainsi, `file.pop()` renvoie `1` et la file contient alors les éléments `[12,4,5]`. En réitérant `file.pop()` renverra la valeur `4` et la file contient désormais les éléments `[12,5]`.
Soit une file de priorité comprenant les éléments suivants : `file = [(1,2),(2,5),(0,1)]`. La méthode `pop` permetttra d'extraire le couple pour lequel la première valeur est la plus petite.
Ainsi, `file.pop()` renvoie `(0,1)` et la file contient alors les éléments `[(1,2),(2,5)]` etc.

**Exemple –**

*[Jules Svartz]* La figure suivante représente le déroulement de l'algorithme de Dijkstra sur un graphe à 5 sommets, depuis la source $s$. Pour chaque sommet $u$ on a fait figurer la valeur $d[u]$ à l'intérieur du cercle. Les arcs en gras représentent l'évolution de la liste des prédecesseurs.




On peut donc commencer par implémenter une fonction `cherche_min` permettant de trouver le sommet `i` vérifiant `d[i]` minimal parmi les sommets n'ayant pas été traités.

```
def cherche_min(d, traites):
    """ Renvoie le sommet i vérifiant d[i] minimal et traites[i] faux, s'il
    existe un tel sommet
    tel que d[i] != inf. Sinon, renvoie -1 """
    n=len(d)
    x=-1
    for i in range(n):
        if not traites[i] and d[i] != float('inf') and (x==-1 or d[x]>d[i]):
            x=i
    return x
```

On donne alors l'algorithme de Dijkstra.

```
def dijkstra_mat(G,s):
    """
    G donné par matrice d'adjacence. Renvoie les poids chemins de plus petits
    poids depuis s.
    """
    n=len(G)
    d = [float('inf')]*n
    d[s]=0
    traites = [False]*n
    while True:
        x=cherche_min(d,traites)
        if x==-1:
            return d
        for i in range(n):
            d[i]=min(d[i], d[x]+G[x][i])
        traites[x]=True
```

**Propriété –**

Pour $n$ sommets et $a$ arcs, il existe un algorithme de Dijkstra telle de complexité $\mathcal{O}(a + n \log n)$.

**Exemple –**

Reprendre le graphe précédent et utiliser l'algorithme de Dijkstra en partant du sommet $t$.

**Sources**

- Cours de Quentin Fortier.
- Cours de Jules Svartz, Lycée Masséna.
- https://www.youtube.com/watch?v=GC-nBgi9r0U

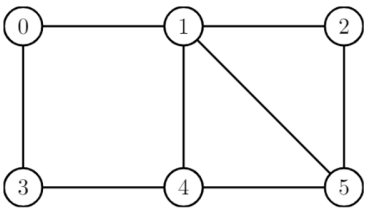
# Exercice d'application – Coloration d'un graphe

*D'après ressources de Quentin Fortier*

## Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, où $V$ est un ensemble de sommets et $E$ un ensemble d'arêtes. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un $k$-coloriage de $G$ est une fonction $c : V \mapsto \{0, \dots, k-1\}$ telle que : $\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.

Dit autrement, un $k$-coloriage donne une couleur (qu'on suppose être un entier entre 0 et $k-1$, pour simplifier) à chaque sommet, tel que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes. Suivant les questions, on utilisera soit une matrice d'adjacence, soit une liste d'adjacence. Attention à ne pas les confondre. Soit $G_1$ le graphe ci-contre.




**Question 1** Écrire une ou plusieurs instruction(s) Python pour définir $G_1$ par liste d'adjacence.

**Question 2** Donner une 3-coloration pour $G_1$. On pourra recopier $G_1$ en mettant, à côté de chaque sommet, une couleur (c'est-à-dire 0, 1 ou 2).

**Question 3** Justifier que $G_1$ ne possède pas de 2-coloration.

**Question 4** Si $n$ est le nombre de sommets d'un graphe $G$, montrer que $G$ possède une $n$-coloration. Dans toute la suite, on représente une $k$-coloration par une liste `C` telle que `C[i]` est la couleur (entre `0` et `k - 1`) du sommet `i`.

**Question 5** Écrire une fonction `valid(G, C)` déterminant si la coloration `C` est valide sur le graphe représenté par la liste d'adjacence `G`.

Par exemple, si `G1` est la liste d'adjacence de $G_1$, `valid(G1, [0, 0, 1, 2, 3, 4])` doit renvoyer `False` (car les sommets 0 et 1 sont adjacents et sont tous les deux coloriés avec la couleur 0) mais `valid(G1, [3, 0, 1, 0, 3, 4])` doit renvoyer `True` (toutes les arêtes ont bien des extremités de couleurs différentes).

## Degré

**Question 6** Écrire une fonction `deg(G, v)` renvoyant le degré d'un sommet dans le graphe `G` représenté par liste d'adjacence.

**Question 7** Écrire une fonction `deg\_max(G)` calculant le degré maximum d'un sommet dans le graphe `G` représenté par liste d'adjacence. On appelle $\Delta(G)$ ce nombre.

Il existe un algorithme simple donnant une $(\Delta(G)+1)$-coloration pour un graphe $G$ : considérer chaque sommet $v$ un par un (de 0 à $n-1$, où $n$ est le nombre de sommets) et lui donner la plus petite couleur n'apparaissant pas parmi les voisins de $v$.

**Question 8** Écrire une fonction `delta\_color(G)` renvoyant une $(\Delta(G)+1)$-coloration de `G` représenté par matrice d'adjacence. Le résultat sera donc une liste `C` telle que `C[v]` est la couleur donnée à `v`.

## Clique

Une clique d'un graphe `G` est un sous-graphe complet, c'est-à-dire un ensemble de sommets contenant toutes les arêtes possibles entre deux sommets. La taille d'une clique est son nombre de sommets. Par exemple, l'ensemble de sommets $\{1, 2, 5\}$ forme une clique de taille 3 de $G_1$, puisque ces 3 sommets sont tous reliés par des arêtes.

**Question 9** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que s'il existe une clique de taille $k$ dans $G$, alors $G$ n'est pas $(k-1)$-coloriable.

**Question 10** Écrire une fonction `is\_clique(G, V)` déterminant si la liste des sommets `V` forme une clique dans la matrice d'adjacence `G`, c'est-à-dire si tous les sommets de `V` sont reliés 2 à 2.

Par exemple, si `G1` est la matrice d'adjacence de `G1`, `is\_clique(G1, [1, 2, 5])` doit renvoyer `True` mais `is\_clique(G1, [1, 2, 3])` doit renvoyer `False`.

## 2-coloration par parcours en profondeur

On veut écrire un algorithme pour obtenir une 2-coloration d'un graphe connexe $G$. Pour cela, on exécute un parcours en profondeur depuis un sommet $v$ quelconque (par exemple le sommet 0) de $G$, que l'on colorie avec la couleur 0, puis on colorie les voisins de $v$ avec la couleur 1, puis les voisins des voisins avec la couleur 0... On pourra utiliser le fait que si $c \in \{0, 1\}$ est une couleur, alors $1-c$ est l'autre couleur ($1-c=1$ si $c=0$ et $1-c=0$ si $c=1$). Si, à un moment de l'algorithme, on doit colorier un sommet avec une couleur alors qu'il a déjà été colorié d'une couleur différente, $G$ n'est pas 2-coloriable.

On stockera le coloriage dans une liste `C` (comme pour la première partie) qui sera aussi utilisée pour savoir si un sommet a déjà été visité.

**Question 11** Compléter le code suivant pour renvoyer un 2-coloriage dans le graphe $G$ représenté par liste d'adjacence. Si $G$ n'a pas de 2-coloriage, on renverra `False`.

```
def 2_color(G):
    # définir une liste C donnant un coloriage pour chaque sommet, avec initialement que des -1
    def aux(v, c): # parcours en profondeur sur v, en lui donnant la couleur c
        # Si v a déjà la couleur 1 - c, renvoyer False
        # Si v a déjà la couleur c, renvoyer True
        # Mettre la couleur c dans C[v]
        # Appeler récursivement aux(w, 1 - c) pour chaque w voisin de v.
        # Si un de ces appels renvoie False, renvoyer False aussi. Sinon, renvoyer True.
```

```
    # Appeler aux(0, 0). Si cela renvoie False, renvoyer False. Sinon,
    renvoyer C
```

**Question 12** Si le graphe n'est pas connexe, il faut appliquer l'algorithme précédent sur chaque composante connexe. Modifier la fonction précédente pour le faire.

## Comptage du nombre de couleurs

Étant donnée une liste d'entiers (des couleurs), non forcément consécutifs, on veut savoir quel est le nombre d'entiers différents (le nombre de couleurs). Par exemple, le nombre de valeurs différentes de `[1, 4, 0, 4, 1]` est 3 (il y a 3 entiers différents : 0, 1, 4). Pour cela, on étudie trois méthodes différentes (et indépendantes).

**Question 13** Écrire une fonction `ncolor1(C)` renvoyant le nombre d'entiers différents dans une liste `C`, en utilisant 2 boucles `for`. On pourra traduire le pseudo-code suivant en Python.

```
def ncolor1(C):
    L = [] # L va contenir les différentes valeurs de C
    # Pour tout élément c de C
        # Si c n'appartient pas à L
            # Alors ajouter c à L
    # Renvoyer la taille de L
```

**Question 14** Quelle est la complexité de `ncolor1(C)`, en fonction de la taille $n$ de `C` ?

Si `L` est une liste, `L.sort()` permet de trier les éléments de `L` (par ordre croissant). `L.sort()` modifie `L` (mais ne renvoie pas de valeur). On admet que `L.sort()` est en complexité $\mathcal{O}(n\log(n))$, où $n$ est le nombre d'éléments de `L`.

**Question 15** Écrire une fonction `ncolor2(C)` renvoyant le nombre d'entiers différents dans une liste `C`, en triant `C`. Cette fonction doit être en complexité $\mathcal{O}(n\log(n))$ où $n$ est la taille de `C`, et on demande de justifier cette complexité.

Une 3ème méthode consiste à utiliser une liste `B` de booléens de taille $p$, où $p$ est le maximum de `C`, telle que `B[i]` vaut `True` si et seulement si `i` est dans `C`.

**Question 16** Écrire une fonction `ncolor3(C)` renvoyant le nombre d'entiers différents dans une liste `C`, en créant et utilisant une telle liste `B`. `ncolor3(C)` doit être en complexité $\mathcal{O}(n+p)$ et on justifiera cette complexité.