Culture algorithmique 5

5.1 Intégration numérique

Hypothèse

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$. On note $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

5.1.1 Principe des méthodes des rectangles

Définition –

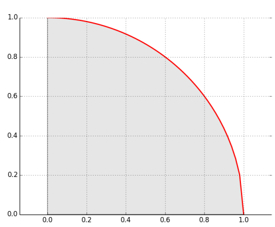
Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 0, à savoir une fonction constante. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un rectangle. Plusieurs choix sont possibles.

Rectangles à gauche $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)\,f(a)$

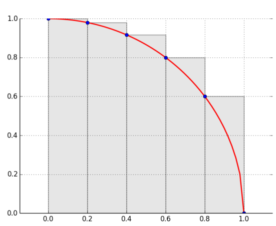
Point milieu $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)\,f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Rectangles à droite $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)\,f(b)$

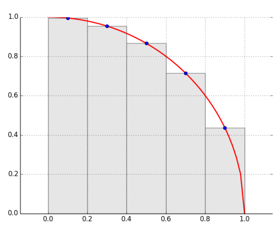
5.1.2 Interprétation graphique



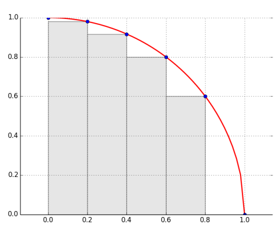
Calcul intégral



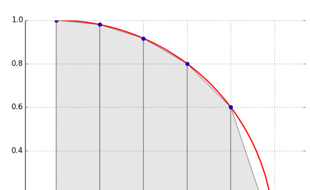
Rectangles à gauche



Point milieu



Rectangles à droite



5.1.3 Principe des méthodes des trapèzes

Définition –

Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 1, à savoir une fonction affine. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un trapèze : $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Notion d'erreur d'intégration

Résultat –

Dans chaque cas, on intègre f sur n subdivisions régulières de I.

Erreur sur la méthode des rectangles à gauche et à droite

Soit f fonction dérivable sur $I = [a,b]$ et dont f' est continue sur I. Soit M_1 un majorant de f' sur I. L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles à droite ou à gauche est telle que $\varepsilon \leq \dfrac{M_1}{2n}$.

Erreur sur la méthode des rectangles – point milieu

Si de plus f est deux fois dérivables sur $I = [a,b]$ et f'' est continue sur I, on note M_2 un majorant de f'' sur I.L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles – point milieu est telle que $\varepsilon \leq \dfrac{M_2}{12n^2}$.

Erreur sur la méthode des trapèzes

L'erreur commiseε est telle qu'il existe un entier M tel que $\varepsilon \leq \dfrac{M}{12n^2}$.

Bibliothèque Python

Il est possible d'intégrer une fonction en utilisant les modules de la bibliothèque `scipy` :

```python
from scipy.integrate import quad
from math import sin
# Définition des bornes de gauche et de droite
g,d = -1,1
def f(x):
    return sin(x)

I,erreur = quad(f,g,d)
print(I,erreur)
```

5.1.4 Implémentation des algorithmes d'intégration

Méthode des rectangles à gauche

```python
def integrale_rectangles_gauche(f,a,b,nb):
    """
    Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la
    méthode des rectangles à gauche.
    Keywords arguments :
    f -- fonction à valeur dans IR
    a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
```

```
    b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
    nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
    """
    res = 0
    pas = (b-a)/nb
    x = a
    while x<b:
        res = res + f(x)
        x = x + pas
    return res*pas
```

Méthode des rectangles à droite

```
def integrale_rectangles_droite(f,a,b,nb):
    """
    Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la
    méthode des rectangles à droite.
    Keywords arguments :
    f -- fonction à valeur dans IR
    a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
    b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
    nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
    """
    res = 0
    pas = (b-a)/nb
    x = a+pas
    while x<=b:
        res = res + f(x)
        x = x + pas
    return res*pas
```

Méthode des rectangles – Point milieu

```
def integrale_rectangles_milieu(f,a,b,nb):
    """
    Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la m
    éthode du point milieu.
    Keywords arguments :
    f -- fonction à valeur dans IR
    a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
    b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
    nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
    """
    res = 0
    pas = (b-a)/nb
    x = a+pas/2
    while x<b:
        res = res + f(x)
        x = x + pas
    return res*pas
```

Méthode des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment

```
def integrale_trapeze(f,a,b,nb):
    """
```

```python
    Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la m
    éthode des trapèzes.
    Keywords arguments :
    f -- fonction à valeur dans IR
    a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
    b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
    nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
    """
    res = 0
    pas = (b-a)/nb
    x = a+pas
    while x<b:
        res = res + f(x)
        x = x + pas
    res = pas*(res+(f(a)+f(b))/2)
    return res
```