Table des matières

Application 1
Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

C1-05

C2-09

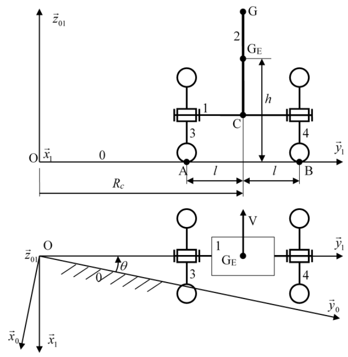
Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :



- la route **(0)** est munie du repère $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme **(1)** a pour centre de gravité C. Le conducteur **(2)** a pour centre de gravité G. Les roues 3 et 4,de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe $\left(C,\overrightarrow{y_1}\right)$. L'ensemble $E = 1 + 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E. Il est animée d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans $\mathcal{R}_0$ est $\mathcal{R}_C$. Le repère lié à 1 est $\mathcal{R}_1$ tel que $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_{01}} =$ et on note $\theta = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.

On donne $\overrightarrow{OG_E} = R_C\overrightarrow{y_1} + h\overrightarrow{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est : $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.

Hypothèse

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\overrightarrow{G_EA} = -l\overrightarrow{y_1} - h\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{G_EB} = l\overrightarrow{y_1} - h\overrightarrow{z_0}$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale $\overrightarrow{z_{01}}$. Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} = -T_A\overrightarrow{y_1} + N_A\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 4)} = -T_B\overrightarrow{y_1} + N_B\overrightarrow{z_1}$.
- On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$ sont constants.
- L'accélération de la pesanteur est $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{z_0}$. Accélération de la pesanteur, $g = 10\,\text{ms}^{-2}$.

- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2$: $m_E = 134\,\text{kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35\,\text{cm}$, $h = 86\,\text{cm}$.

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de $20\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C. Exprimer la vitesse linéaire $V_L = ||\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}||$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C.

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A, T_B, N_A, N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_1}$. En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de $20\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ dans un virage de rayon de courbure 10 m.	Interdit

Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B.

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta\left(B,E/\mathcal{R}_0\right)}\cdot\overrightarrow{x_1}$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ en projection sur $\overrightarrow{x_1}$.

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$, en projection sur $\overrightarrow{x_1}$, écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta\left(B,E/\mathcal{R}_0\right)}\cdot\overrightarrow{x_1}$ et des données du problème.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Éléments de correction -5cm

1. $\overrightarrow{V\left(G_E/\mathcal{R}_0\right)} = -R_C\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$ et $V_L = R_C\dot{\theta}$.
2. $\overrightarrow{\Gamma\left(G_E/\mathcal{R}_0\right)} = -R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}$.
3. $T_A + T_B \leq f\left(N_A + N_B\right)$
4. $N_A + N_B - m_E g = 0$.
5. $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.
6. $36\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.
7. $\left\{\mathcal{D}\left(E/\mathcal{R}_0\right)\right\} = \left\{\begin{array}{l} -m_E R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} \\ -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}\end{array}\right\}_{G_E}$.
8. $\overrightarrow{\delta\left(B,E/\mathcal{R}_0\right)}\cdot\overrightarrow{x_1} = \left(D + h m_E R_C\right)\dot{\theta}^2$.
9. $N_A = \dfrac{l m_E g - \left(D + h m_E R_C\right)\dot{\theta}^2}{2l}$.
10. $N_A \geq 0$.
11. $V_L \leq 6{,}38\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 22{,}9\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$

Application 1
Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

C1-05

C2-09

Présentation

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C. Exprimer la vitesse linéaire $V_L = ||\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}||$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction

On a $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$. On a alors $V_L = R_C\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C.

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} - R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} = -R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} \text{ } (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A, T_B, N_A, N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq fN_A$ et $T_B \leq fN_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

Correction

E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d(E/\mathcal{R}_0)} = -m_E R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}$ (pas de projection sur $\overrightarrow{z_0}$. On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur E ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{z_{01}}$, on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_1}$. En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Correction

En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_1}$, on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$. En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\dfrac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

La vitesse limite est donc de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ soient $36\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ce qui satisfait le cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.

Correction

Au centre d'inertie de E, on a $\overrightarrow{\delta\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega\left(E/\mathcal{R}_0\right)} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_0}$.
On a donc, $\overrightarrow{\sigma\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} = -E\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - D\dot{\theta}\overrightarrow{y_1} + C\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}$. On a donc $\overrightarrow{\delta\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}$.
En conséquence, $\left\{\mathcal{D}\left(E/\mathcal{R}_0\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} \\ -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} \end{array}\right\}_{G_E}$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_1}$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ en projection sur $\overrightarrow{x_1}$.

Correction

$\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} = \overrightarrow{\delta\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d\left(B/E\right)} = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + \left(h\overrightarrow{z_0} - l\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \left(-m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1}\right) = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1}$. $\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(D + h m_E R_C\right)\dot{\theta}^2$.

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$, en projection sur $\overrightarrow{x_1}$, écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_1}$ et des données du problème.

Correction

On a :

- $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \overrightarrow{z_{01}} = \left(-l\overrightarrow{y_1} + h\overrightarrow{z_0}\right) \wedge -m_E g \overrightarrow{z_{01}} = l m_E g \overrightarrow{x_1}$;
- $\overrightarrow{BA} \wedge \left(-T_A\overrightarrow{y_1} + N_A\overrightarrow{z_1}\right) = -2l\overrightarrow{y_1} \wedge \left(-T_A\overrightarrow{y_1} + N_A\overrightarrow{z_1}\right) = -2lN_A\overrightarrow{x_1}$.

En appliquent le TMD en B suivant $\overrightarrow{x_1}$, on a : $l m_E g - 2lN_A = \left(D + h m_E R_C\right)\dot{\theta}^2$.
Au final, $N_A = \dfrac{l m_E g - \left(D + h m_E R_C\right)\dot{\theta}^2}{2l}$.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

Correction

Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

$N_A \simeq \dfrac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$.Ce qui est positif (pas de basculement).

$N_A \geq 0 \Rightarrow \dfrac{l m_E g - (D + h m_E R_C)\,\dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow lg - hR_C\dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow lg - hV_L^2/R_C \geq 0$
$\Rightarrow lg \geq hV_L^2/R_C \Rightarrow \sqrt{\dfrac{R_C l g}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6{,}38\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 22{,}9\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. CDCF Validé.