

Modélisation géométrique – Lois entrées-sorties

6

6.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

| | |
|---|---|
| 6.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques | 1 |
| 6.2 Résolution des lois entrée-sortie | 2 |

Méthode – Modélisation d'un système mécanique réel

Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- identifier les classes d'équivalence cinématique, c'est-à-dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement;
- identifier les surfaces de contact entre les classes d'équivalence;
- associer une liaison cinématique aux surfaces de contact;
- tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'équivalence et respectant leur positionnement relatif;
- relier les liaisons de manière filaire;
- indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'équivalence.

Méthode – Paramétrage d'un mécanisme cinématique

Pour paramétrier un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'équivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'équivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'équivalence).

Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

- si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation);
- si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.

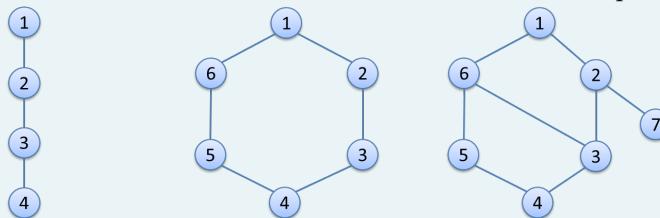
Définition – Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

- les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment);
- les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :

Les chaînes ouvertes Les chaînes fermées Les chaînes complexes



6.2 Résolution des lois entrée–sortie

Méthode –

Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétriser le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

Méthode –

Méthodes pour manipuler les systèmes équations :

1. Pour supprimer une longueur λ : on met les deux équations sous la forme $\lambda =$ et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle φ : on met une équation sous la forme $\cos \varphi =$ et la seconde sous la forme $\sin \varphi =$ et on utilise la relation $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

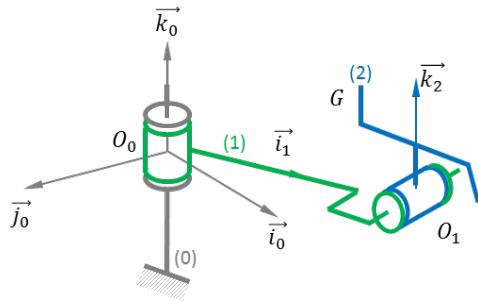
Méthode – Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.

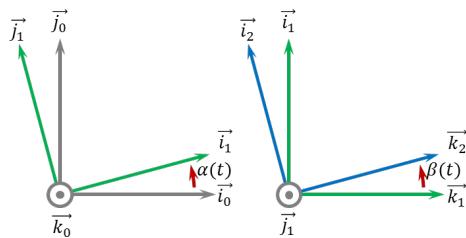
Application 1

Centrifugeuse humaine – Sujet

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0 O_1} = a \vec{i}_1$;
- $\overrightarrow{O_1 G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$.

Trajectographie

Question 1 Donner la trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 .

Cinématique

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$.

Accélération

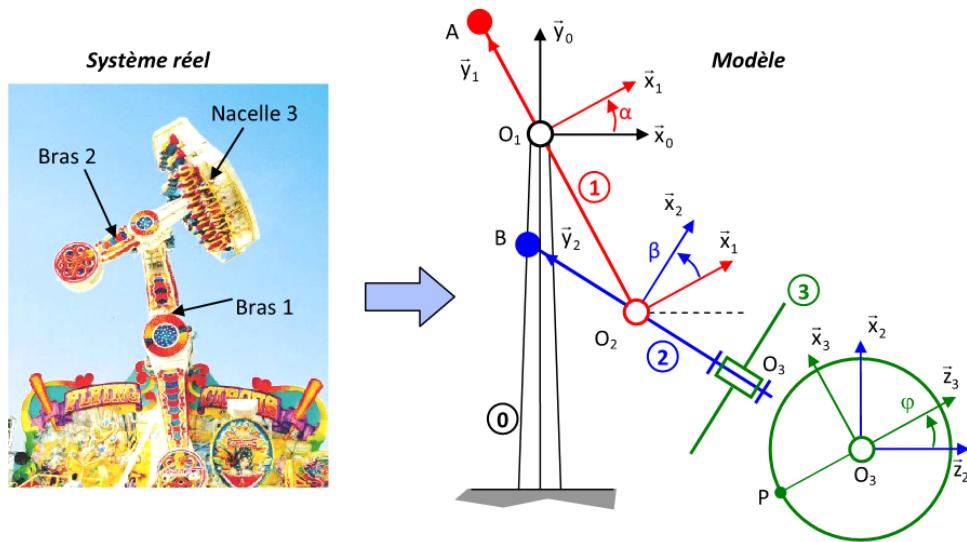
Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(G, S_2/S_0)}$.

Application 2

Magic Arms – Sujet

Florestan Mathurin.

La manège Magic Arms dont la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 pièces disposées sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaires (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par ordinateur.



Le manège, schématisé ci-dessus, comporte :

- ▶ un bras principal 1 assimilé à une barre AO_1O_2 . Il est en liaison pivot parfait d'axe (O_1, \vec{z}_1) caractérisée par le paramètre α avec le bâti 0. On pose $\overrightarrow{O_1O_2} = -l_1\vec{y}_1$;
- ▶ un bras secondaire 2 assimilé à une barre BO_2O_3 . Il est en liaison pivot parfait d'axe (O_2, \vec{z}_2) caractérisée par le paramètre β avec le bras principal 1. On pose $\overrightarrow{O_2O_3} = -l_2\vec{y}_2$;
- ▶ une nacelle 2 assimilée à un disque de centre O_3 et de rayon R . Elle est en liaison parfaite d'axe (O_3, \vec{y}_2) caractérisée par le paramètre φ avec le bras 2. On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel P tel que $\overrightarrow{O_3P} = -R\vec{z}_3$.

Question 1 Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

Question 2 Calculer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 4 Calculer les produits vectoriels suivants : $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3, \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2, \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2, \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1, \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0, \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$.

Question 5 Calculer $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$, $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$ et $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

Question 6 Déterminer les valeurs des paramètres $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$ puis l'expression analytique des positions angulaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et $\varphi(t)$ dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes en sachant qu'à l'instant $t = 17$ s, on a $\alpha = 10,5$ rad, $\beta = 3,76$ rad et $\varphi = -10,676$ rad.

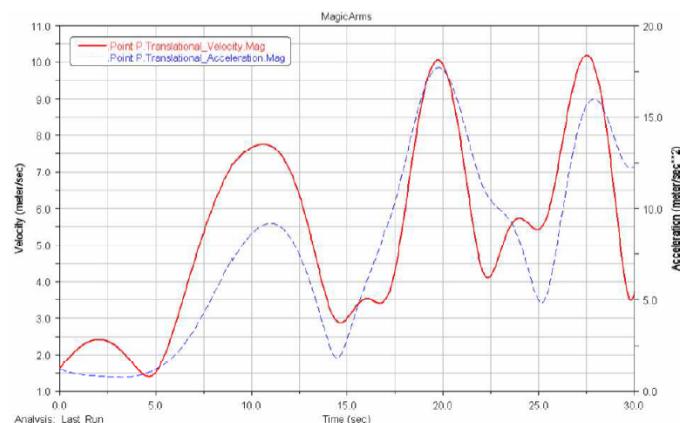
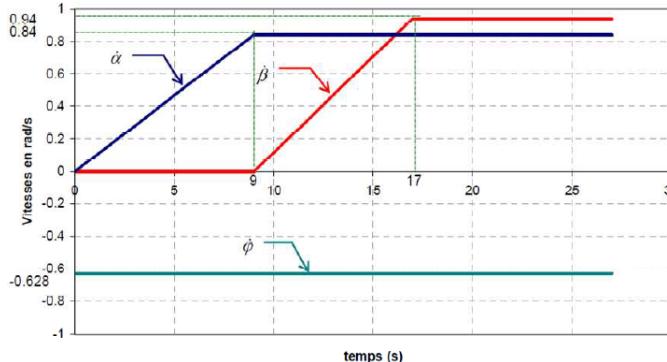
Question 7 Déterminer les valeurs numériques à l'instant $t_1 = 19,8$ s de α , β et φ .

Question 8 On pose $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2}\vec{x}_2 + V_{y2}\vec{y}_2 + V_{z2}\vec{z}_2$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2} , V_{y2} , V_{z2} puis les valeurs numériques de à $t_1 = 19,8$ s. (On donne : $l_1 = 3,9$ m, $l_2 = 2,87$ m, $R = 2,61$ m.)

Question 9 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$.

Question 10 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Le graphe ci-dessous (à droite), obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager P par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accélération du passager P par rapport au bâti 0 en fonction du temps.



Question 11 Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps $t_1 = 19,8$ s.

Question 12 Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

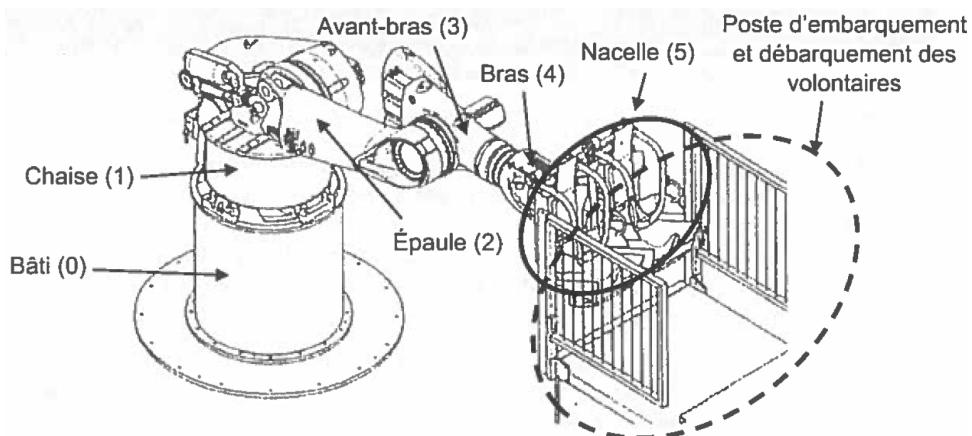
Application 3

Danse avec les robots – Sujet

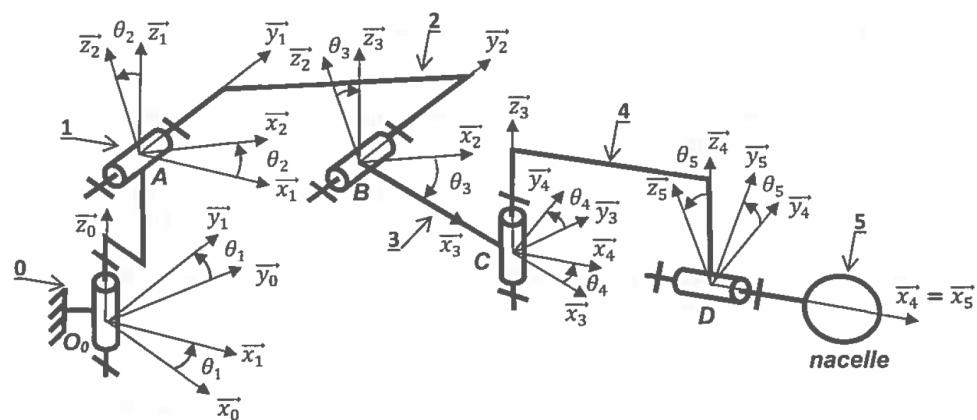
ICNA 2017.

« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remués au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.



On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

- ▶ On note $\mathcal{R}_0 = \left(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.
- ▶ On note $\mathcal{R}_1 = \left(O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$ le repère associé à la chaise 1 et $\theta_1 = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right)$ l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- ▶ On note $\mathcal{R}_2 = \left(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2\right)$ le repère associé à l'épaule 2, $\overrightarrow{O_0A} = a\vec{z}_0 + b\vec{x}_1$ et $\theta_2 = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = \left(\vec{z}_1, \vec{z}_2\right)$ l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.

- ▶ On note $\mathcal{R}_3 = \left(B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 \right)$ le repère associé à l'avant-bras 3, $\overrightarrow{AB} = c\vec{x}_2$ et $\theta_3 = \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 \right) = \left(\vec{z}_2, \vec{z}_3 \right)$ l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- ▶ On note $\mathcal{R}_4 = \left(C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4 \right)$ le repère associé au bras 4, $\overrightarrow{BC} = d\vec{x}_3$ et $\theta_4 = \left(\vec{x}_3, \vec{x}_4 \right) = \left(\vec{y}_3, \vec{y}_4 \right)$ l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- ▶ On note $\mathcal{R}_5 = \left(D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5 \right)$ le repère associé à la nacelle 5, $\overrightarrow{CD} = e\vec{x}_4$ et $\theta_5 = \left(\vec{y}_4, \vec{y}_5 \right) = \left(\vec{z}_4, \vec{z}_5 \right)$ l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaire + harnais) est tel que $\overrightarrow{DG} = f\vec{x}_4 + h\vec{z}_5$.

On définit la position du point G dans la base $\mathcal{B}_0 = \left(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ telle que $\overrightarrow{O_0G} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$.

Question 1 Tracer les figures planes de changement de repère.

Question 2 Exprimer la position du point G suivant \vec{x}_0 .

Objectif

Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

Question 3 Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{V(G, 5/0)}$.

On limite désormais l'étude dans au cas où $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad s}^{-1}$, $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$.

Question 4 Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{\Gamma(G, 5/0)}$.

Question 5 Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.

Application 4

Robot de peinture – Sujet

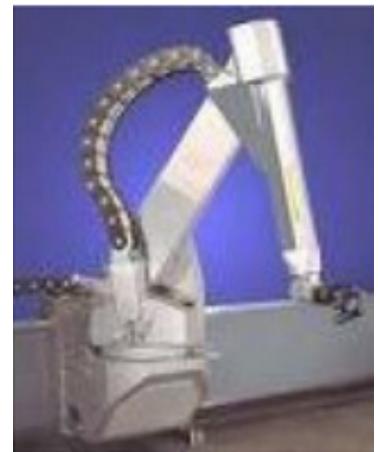
Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Robot de peinture

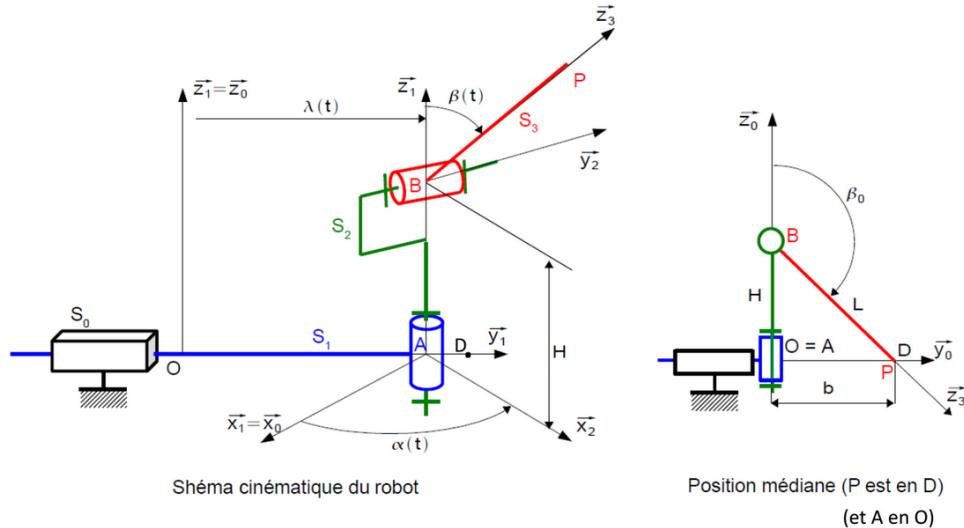
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



| Exigences techniques | Critère | Niveau |
|----------------------|--------------------------------|-------------------|
| 1.7 | Vitesse de déplacement relatif | Vitesse constante |



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Le chariot S_1 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en mouvement de translation de direction \vec{y}_0 par rapport au bâti S_0 de repère $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le corps S_2 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{z}_0) avec le chariot S_1 .

Le bras S_3 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{y}_2) avec le corps S_2 .

Question 1 Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

Question 2 Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_0$.

Question 6 Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants : $\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_2$, $\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$.

On a $\overrightarrow{OD} = b\vec{y}_0$ avec $b = \sqrt{L^2 - H^2}$. On désire que P décrive la droite (D, \vec{x}_0) à vitesse constante V , conformément au cahier des charges.

Question 7 Représenter sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, puis sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, les positions des points O, D, A, B et P du robot lorsque celui-ci est en position extrême (A est en D).

Question 8 Traduire, à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ le fait que P se déplace à la vitesse V selon \vec{x}_0 . En déduire $\dot{\beta}$.

Question 9 Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L, V, α et β_0 .

Question 10 A l'aide de la figure précédente, exprimer β_0 en fonction de b et L .

Question 11 Exprimer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V, b et α .

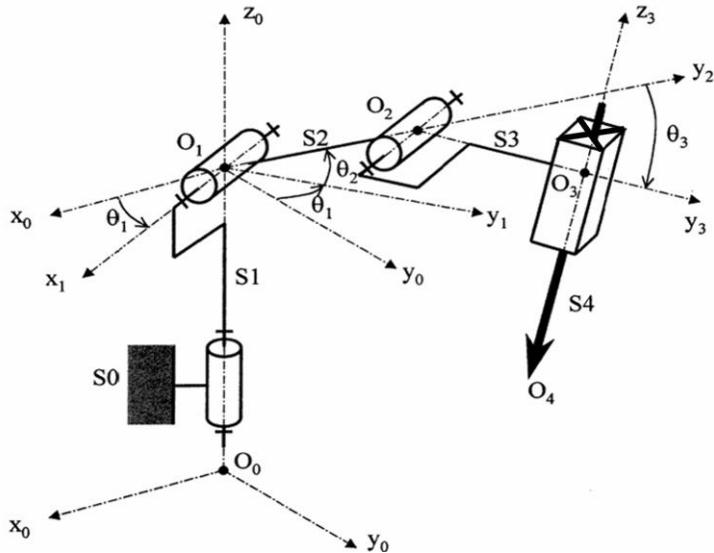
Application 5

Robot soudeur – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



Ce robot est constitué de cinq solides :

- ▶ le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que \vec{z}_0 vertical ascendant;
- ▶ le fût 1, de repère associé $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$;
- ▶ le bras 2, de repère associé $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$;
- ▶ l'avant-bras 3, de repère associé $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$;
- ▶ la buse 4, de repère associé $\mathcal{R}_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3$.

Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

Paramètres du mouvement :

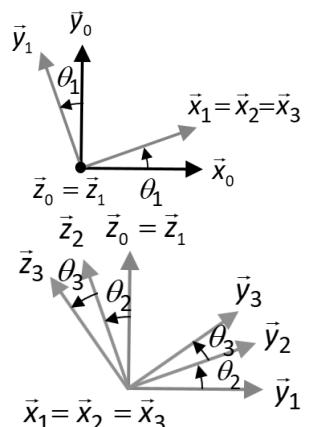
- ▶ $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- ▶ $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
- ▶ $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$;
- ▶ $\vec{O}_3\vec{O}_4 = \lambda \vec{z}_3$.

Caractéristiques géométriques :

- ▶ $\overrightarrow{O_0O_1} = L_1 \vec{z}_0$;
- ▶ $\overrightarrow{O_1O_2} = L_2 \vec{y}_2$;
- ▶ $\overrightarrow{O_2O_3} = L_3 \vec{y}_3$.

Les figures de changement de base sont données ci-contre.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :



- ▶ exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre O_0 et de rayon R .
- ▶ exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite (O_0, \vec{y}_0) : réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- ▶ exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant \vec{y}_0 soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante : V .

Objectif

Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

Question 1 Préciser une condition sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 2 Préciser deux conditions sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 3 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point O_4 puis calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_4, 4/0)}$.

Question 4 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ qui traduit l'exigence Ex3.

Question 5 On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position $\theta_1 = 0$, traduire alors la condition $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ en deux relations vectorielles.

Question 6 En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.

Application 6

Capsuleuse de bocaux – Galet – Sujet

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

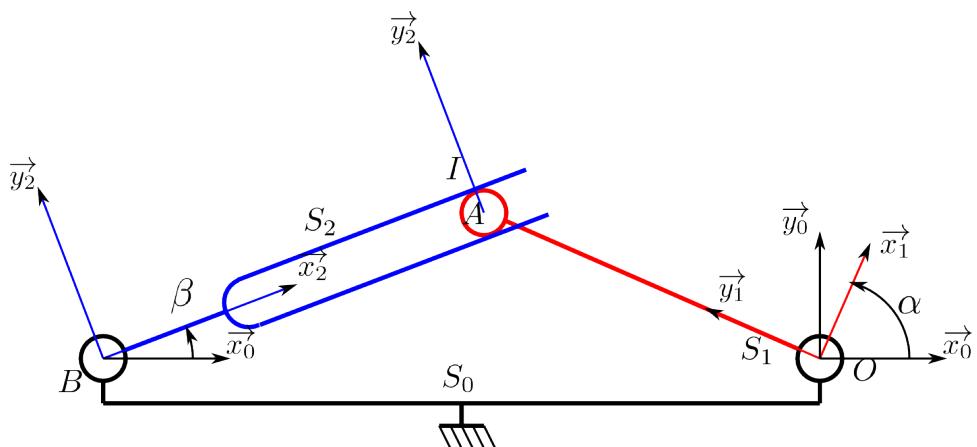
Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute.**

Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :

- $\mathcal{R} = \left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ le repère lié au bâti S_0 . On note $\overrightarrow{OB} = -L\vec{x}_0$ avec $L = 145 \text{ mm}$;
- $\mathcal{R}_1 = \left(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$ le repère lié à l'arbre S_1 . On pose $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$ avec $R = 141 \text{ mm}$ et $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. L'arbre S_1 est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a : $\dot{\alpha} = 10 \text{ tr/min}$;
- $\mathcal{R}_2 = \left(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 \right)$ le repère lié à l'arbre S_2 . On pose $\overrightarrow{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$, $\overrightarrow{AI} = r\vec{y}_2$ et $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$;



Question 1 Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

Question 2 Établir la loi entrée/sortie du système.

Question 3 Donner une méthode permettant de valider le cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

Question 4 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$.

Question 5 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

Question 6 En déduire l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$ dans la base \mathcal{R}_2 . On donne $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$.

Question 7 D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide S_1 par rapport à S_2 ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

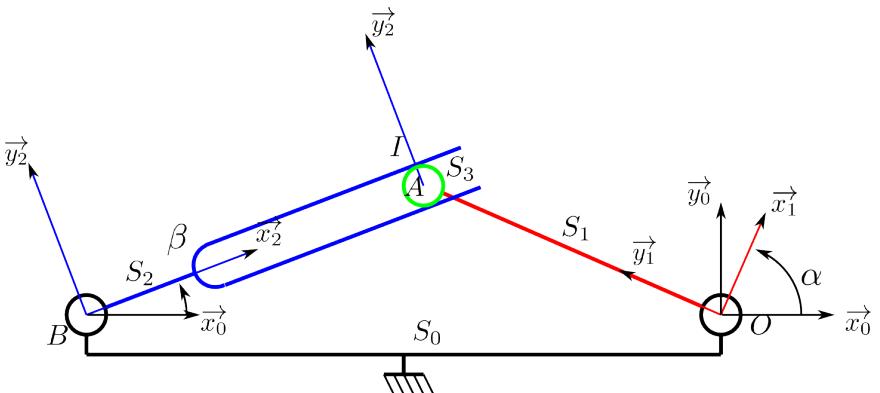
Question 8 $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$ est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse? Si oui, comment? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet S_3 en bout de l'arbre S_1 . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le S_2 . S_3 et S_1 sont en liaison pivot d'axe \vec{z}_0 et de centre A .



Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



Question 9 Quelle est la modification sur le paramétrage du système?

Question 10 Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement**?

Question 11 Calculer la vitesse de rotation du galet $\dot{\gamma}$ en commençant par exprimer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$? Indice : décomposer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ en fonction des mouvements connus.

Question 12 Valider le choix du galet.

Application 7

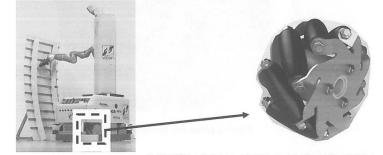
OMNIROB – Le robot collaboratif de l'usine du futur d'Airbus – Sujet

Objectif

Déterminer le modèle cinématique direct ou inverse de la commande Omnirob.
Valider le critère de mobilité omnidirectionnelle et analyser les limites du modèle.

Les roues utilisés pour le robot omnirob sont des roues holonomes également appelées Mecanum (voir figure suivante) qui sont mises en mouvement par quatre moteurs commandés indépendamment. La surface de roulement de ces roues spéciales est pourvue de rouleaux ellipsoïdes répartis sur la circonférence à un angle de 45°.

Le paramétrage cinématique est donné dans les pages suivantes.



En analysant la géométrie du contact entre les rouleaux et le sol, proposer la liaison équivalente entre le châssis 3 et le sol.

Hypothèses :

- ▶ Les roues sont parfaitement symétriques par rapport aux plans $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$ et $(O_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.
- ▶ Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Données :

- ▶ Le nombre de rouleaux 1 par roue est $n = 8$.
- ▶ Les rouleaux sont inclinés d'un angle $\alpha_a = -45^\circ$ par rapport à l'axe de rotation de la roue.

Notations : torseurs cinématiques.

- ▶ Le torseur cinématique de 3/0 pourra s'exprimer dans la base locale du robot $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ avec les notations $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3}$
- $$\left\{ \begin{array}{l} \phi \vec{z}_3 = \omega \vec{z}_3 \\ V_{RX} \vec{x}_3 + V_{RY} \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3}.$$

Dans le mouvement de rotation de la roue a, le rouleau 1 reste en contact avec le sol suivant la corde $I_{1a_ext}I_{1a_int}$ (annexe 4).

On peut alors démontrer que la fluctuation du rayon r de l'ellipsoïde est telle que :

$$\Delta r \% = \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) \sin \alpha_a \text{ avec } n \text{ le nombre de rouleaux.}$$

Pour les roues de cette étude, $\alpha_a = -45^\circ$ et $n = 8$ rouleaux, on obtient une fluctuation de rayon de 14 % lorsque le point de contact I_{1a} se déplace le long de la corde de rouleau 1. On supposera donc le rayon r comme étant constant.

Déterminer $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)}$ en fonction du paramétrage du robot dans la base \mathcal{B}_3 .

On constate que la variation d'angle θ_{2a} lors du contact d'un rouleau avec le sol reste faible, $\theta_{2a} << 1$. Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de $\cos \theta_{2a}$, on

$$\text{gardera pour la suite du sujet une expression de la vitesse } \overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$$

En vous aidant de l'annexe 3, déterminer $\overrightarrow{V(I_{1a}, 2/3)}$ en fonction du paramétrage du robot.

En vous aidant de l'annexe 1, déterminer $\overrightarrow{V(I_{1a}, 3/0)}$ en fonction du paramétrage du robot et des notations du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}$ proposées.

Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(I_{1a}, 3/0)}$.

Afin d'établir le modèle cinématique du robot, on introduit une notation classique en robotique avec les vecteurs suivants :

- \dot{q}_k étant le vecteur des vitesses articulaires des roues $k = a, b, c$ et d tel que $\dot{q}_k = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2k} \\ \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2k} \\ \omega_{1k} \\ \omega \end{pmatrix}$. On aura par exemple pour la roue a le vecteur $\dot{q}_a = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$.

- \dot{q} étant le vecteur des vitesses articulaires pilotées donc les vitesses des 4 moteurs

$$\text{des roues } a, b, c \text{ et } d \text{ tel que } \dot{q} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix};$$

- \dot{X}_R étant le vecteur des vitesses opérationnelles du robot tel que $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} \text{ exprimé dans la base locale } \mathcal{B}_3 \text{ du robot.}$$

Dans un premier temps nous allons chercher les relations entre $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ pour $k = a, b, c$ et d .

À partir des équations des questions 2 à 4, déduire de la condition de roulement sans glissement du rouleau 1 par rapport au sol 0 la relation $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ pour la roue a . On utilisera les notations proposées et ton rappelle que l'on note $\omega = \dot{\varphi}$.

La relation précédente pourra se noter $\dot{X}_R = \mathcal{J}_a \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$ avec \mathcal{J}_a la matrice jacobienne relative à la roue a .

De façon analogue en prenant $\lambda, -\lambda, \ell$ ou $-\ell$ on trouve rapidement les matrices jacobiniennes relatives aux roues b, c et d .

\dot{X}_R étant unique on peut obtenir 4 équations faisant intervenir uniquement les 4 inconnues articulaires $\omega_{2a}, \omega_{2b}, \omega_{2c}$ et ω_{2d} que l'on souhaite déterminer.

En effet, pour chaque relation $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ on peut écrire pour :

- la roue a : $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2a} + (\lambda + \ell)\omega$ (eq1);

- la roue b : $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2b} + (\lambda + \ell)\omega$ (eq2);
- la roue c : $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2c} - (\lambda + \ell)\omega$ (eq3);
- la roue d : $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2d} - (\lambda + \ell)\omega$ (eq4).

Trouver le modèle cinématique direct (MCD) revient à obtenir $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$. Ainsi on remarquera que les coordonnées de \dot{X}_R se déduisent facilement en utilisant les simplifications issues des 3 combinaisons :

- (eq1)+(eq2)+(eq3)+(eq4);
- (eq2)-(eq1)+(eq4)-(eq3);
- (eq1)+(eq2)-(eq3)-(eq4).

Déduire de ces 3 simplifications, le modèle cinématique direct (MCD) du robot, $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$.

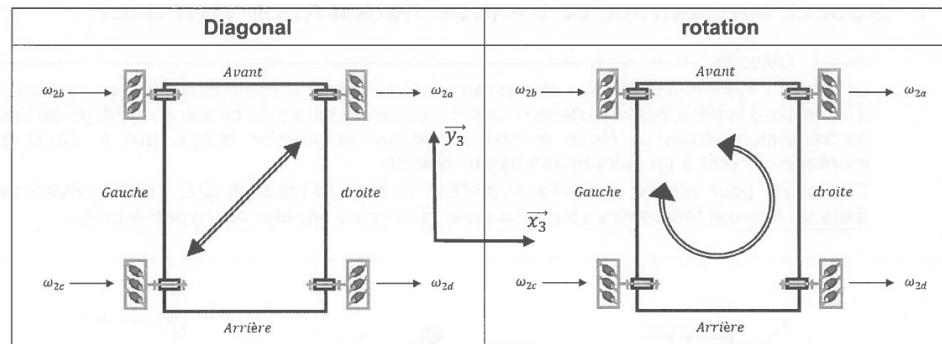
Déduire également à l'aide des équations (eq1), (eq2), (eq3), (eq4), le modèle cinématique inverse (MCI) du robot $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$.

Le contrôle du robot peut également être envisagé dans l'espace de travail lié au bâti à savoir le système de coordonnées du repère global.

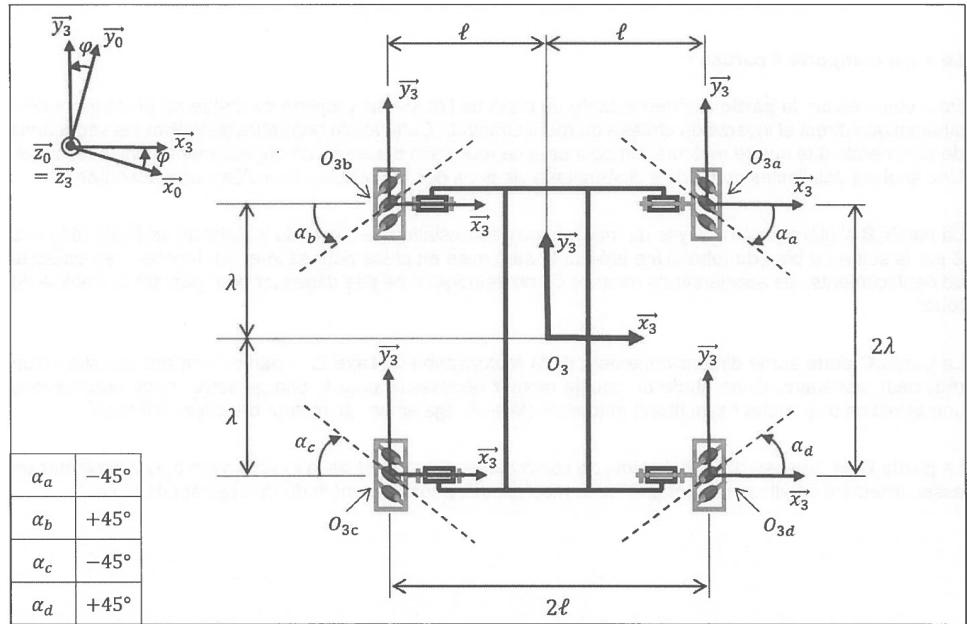
En notant $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3} \left\{ \begin{array}{l} \phi \overrightarrow{z_0} = \omega \overrightarrow{z_0} \\ V_X \overrightarrow{x_0} + V_Y \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_3}$ le torseur cinématique de 3/0 dans la base $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$, le changement de base étant une rotation d'un angle φ selon $\overrightarrow{z_0}$, il vient immédiatement

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ \omega \end{pmatrix}.$$

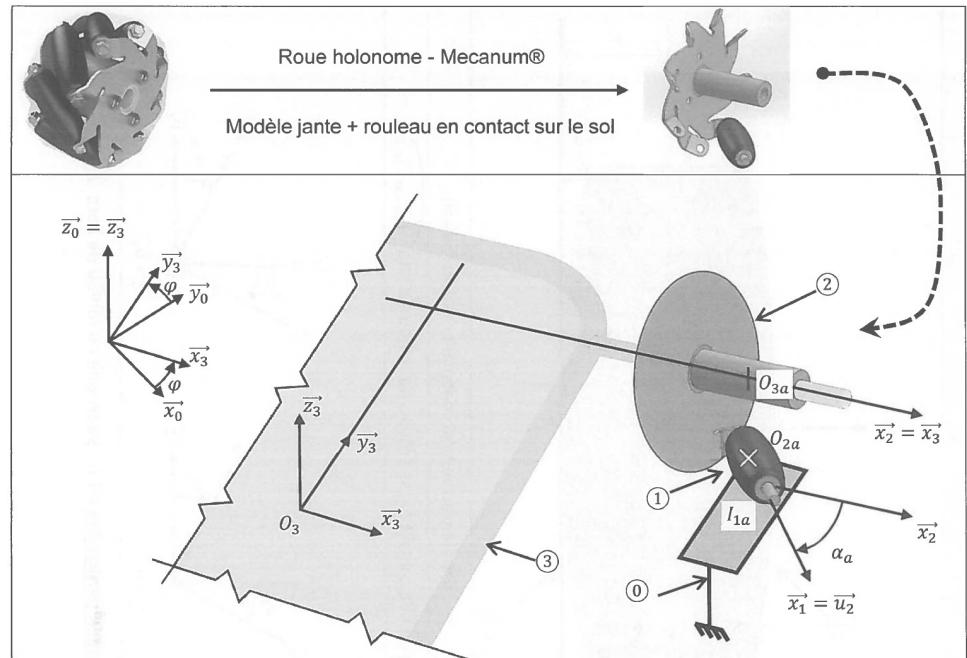
À partir des résultats précédents, indiquer comment commander la vitesse de rotation des moteurs des 4 roues a , b , c et d pour que le robot se déplace suivant une direction diagonale puis tourne sur lui-même, ω_m est une vitesse de rotation algébrique.



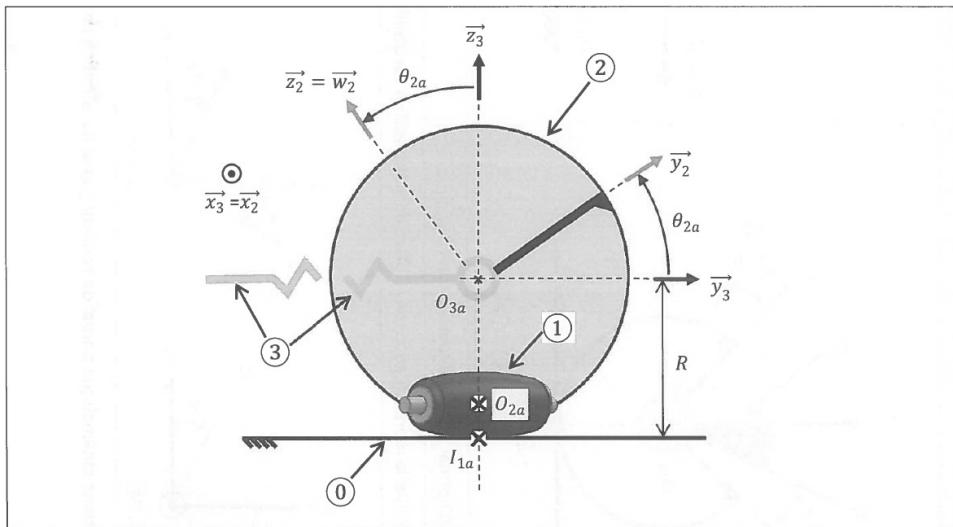
Conclure sur le comportement omnidirectionnel du robot des limites possibles.



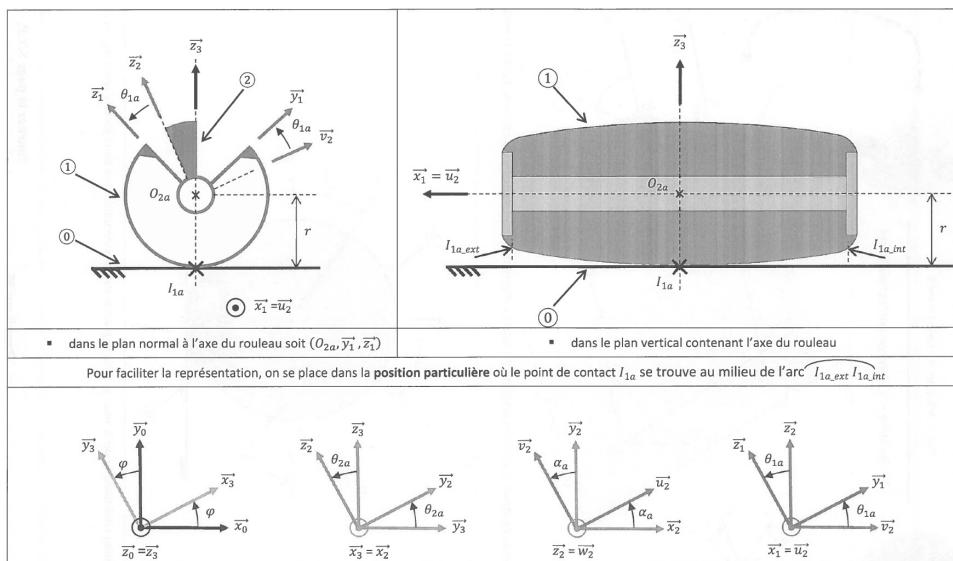
Annexe 1 : Schéma cinématique plan du robot – Paramétrages repères robot et repère global



Annexe 2 : Schéma cinématique 3D de principe du robot – Représentation partielle du châssis 3 avec la roue a



Annexe 3 : Schéma cinématique de la roue a dans le plan vertical contenant l'axe de la jante 2
soit $(O_{3a}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$



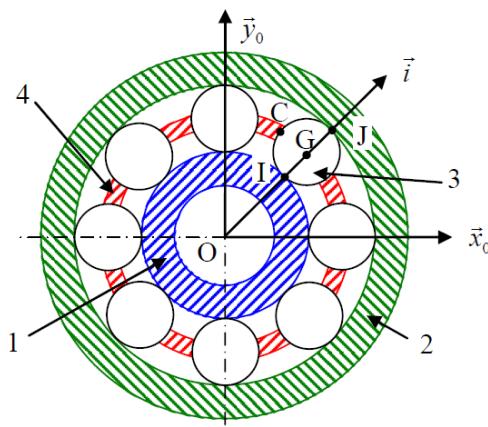
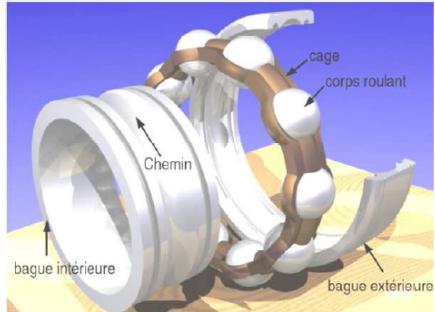
Annexe 4 : Schéma cinématique partiel du rouleau 1 seul de la roue a dans la position particulière où I_{1a} se trouve au milieu de l'arc $I_{1a_ext} I_{1a_int}$.

Application 8

Roulement à billes – Sujet

Un roulement mécanique est un élément technologique permettant le positionnement, la transmission des efforts et la rotation entre deux pièces par roulement. Ce composant mécanique interposé entre les deux pièces optimise le frottement et la précision de la liaison. Un roulement à billes se présente sous la forme de deux bagues coaxiales entre lesquelles sont placées des billes maintenues espacées par une cage. La fonction de la cage est donc de maintenir deux billes consécutives à distance égale l'une de l'autre lors du fonctionnement du roulement mais elle entraîne aussi des effets nuisibles car il existe un phénomène de glissement entre la cage et les billes. **L'objectif est d'étudier ce phénomène de glissement.**

Ressources de Renan Bonnard.



On désigne par :

- ▶ $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère associé au bâti 0;
- ▶ $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bague intérieure 1 en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti 0 tel que $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- ▶ $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bague extérieure 2 en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti 0 tel que $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$;
- ▶ $\mathcal{R}_3 = (G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bille 3 qui roule sans glisser sur 1 en I et sur 2 en J et dont on peut considérer qu'elle est en liaison pivot d'axe (G, \vec{z}_0) avec la cage 4 tel que $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$;
- ▶ $\mathcal{R}_4 = (O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ le repère associé à la cage 4 en mouvement de rotation autour de (O, \vec{z}_0) tel que $\theta_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$.

Pour faciliter les calculs on définit le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z}_0)$ tel que, à tout instant, le vecteur \vec{i} possède la même direction et le même sens que le vecteur \overrightarrow{OG} . Ce repère n'est lié à aucun solide en particulier et ne sert qu'à exprimer simplement les différents termes cinématiques évoqué dans l'énoncé. On pose :

$$\omega_k = \dot{\theta}_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad \overrightarrow{OI} = r_1 \vec{i} \quad \overrightarrow{OJ} = r_2 \vec{i}$$

$$\overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \vec{j}$$

Question 1 Réaliser les figures planes correspondant au paramétrage du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{V(O, 1/0)}$ et $\overrightarrow{V(I, 1/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$, $\overrightarrow{V(O, 2/0)}$ et $\overrightarrow{V(J, 2/0)}$.

Question 4 Exprimer les conditions de roulement sans glissement en I et J . Établir les expression des vecteurs $\overrightarrow{V(I, 3/0)}$ et $\overrightarrow{V(J, 3/0)}$.

Question 5 En déduire l'expression de ω_3 en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

Question 6 Déterminer $\overrightarrow{V(G, 3/0)}$ en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

Question 7 Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de la bille 3 par rapport à la cage 4 au point C en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

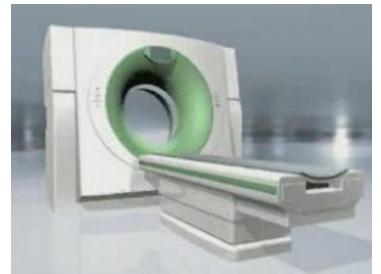
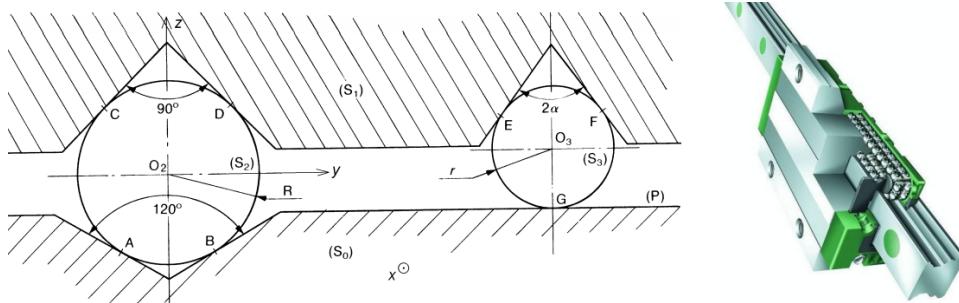
Application 9

Guidage linéaire de systèmes médicaux

– Sujet

L'étude suivante porte sur le guidage en translation d'un chariot de scanner médical S1 par rapport au bâti de la machine S0. Ce guidage est réalisé par deux séries de billes, S2 et S3, qui roulent dans des rainures en V.

La figure ci-dessous présente, en coupe, la réalisation technologique de ce guidage.



Les billes S2 de rayon R roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à 90° usinée dans S1 et sur les plans d'une autre rainure en V d'angle égal à 120° usinée dans S0. Les billes S3 de rayon r roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à 2α usinée dans S1 et sur le plan (P) de S0.

On note $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ v \vec{x} \end{array} \right\}_{VP}$ le torseur cinématique du mouvement du chariot S1 par rapport au bâti S0.

On pose $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega_{20} \vec{y}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega_{30} \vec{y}$.

Question 1 Traduire les conditions de non glissement. En déduire quelques axes instantanés de rotation.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ en fonction de v , puis $\overrightarrow{V(E, 3/0)}$ en fonction de v . Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ en fonction de ω_{20} , puis $\overrightarrow{V(E, 3/0)}$ en fonction de ω_{30} . En déduire une relation entre ω_{20} et v , puis une relation entre ω_{30} et v .

Question 3 En déduire les torseurs cinématiques des mouvements de S2/S0 et S3/S0 en fonction de v et des caractéristiques géométriques.

Question 4 Préciser les composantes de roulement et de pivotement en G et B .

Question 5 Déterminer les vecteurs vitesses des centres des billes dans leur mouvement par rapport au bâti S0 : $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$ et $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$.

Question 6 Déterminer α pour que ces vecteurs vitesses soient identiques.