



## 10 Résolution d'un problème de dynamique

### 10.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

1. Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).
2. Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et écrire le torseur associé.
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan.
5. Faire des produits vectoriels le plus vite possible.
6. Calculer un torseur dynamique.

10.1	Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer . . .	1
10.2	Les types de problèmes	1
10.3	Stratégie d'isolement . .	1
10.4	Loi de mouvement en trapèze . . . . .	5

C1-05

C2-08

C2-09

### 10.2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la dynamique a pour objectif de :

1. déterminer une loi de mouvement;
2. déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Le cas 1 est le plus souvent rencontré. L'objectif est de trouver une équation différentielle **indépendamment des actions dans les liaisons** et liant positions, vitesses, accélérations, dimensions et propriétés massiques. Cette loi permet généralement de dimensionner les actionneurs d'un système (couple moteur ou effort à fournir par un actionneur linéaire – vérin par exemple –).

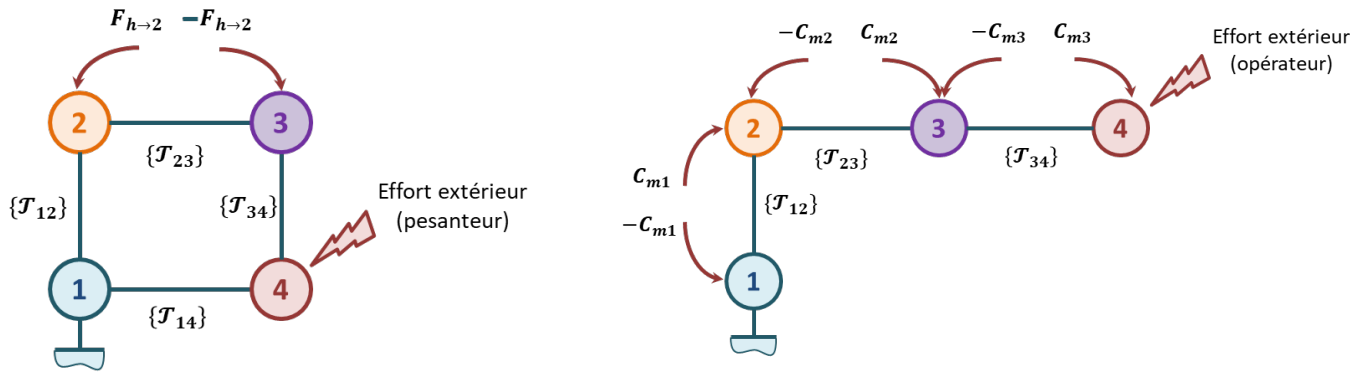
Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'équations à écrire. C'est cette stratégie que nous allons présenter.

Dans le cas 2, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFD.

### 10.3 Stratégie d'isolement

#### 10.3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.



### Remarques :

- Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on matérialise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. **C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins.** Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.

### 10.3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs

On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs... Mais cela vous le saviez :). Cependant, en dynamique ce cas est rare. On peut le rencontrer, dans le cas des problèmes plans, lorsque la masse d'un solide est négligée.

### 10.3.3 Cas des chaînes ouvertes

C'est le cas le plus rencontré en dynamique.

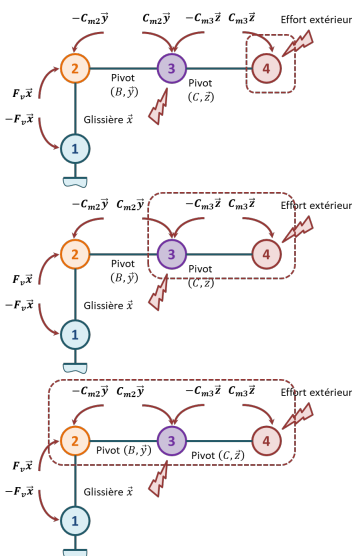
On commence par isoler le bout de chaîne. Puis on réalise le théorème correspondant à la mobilité de cet ensemble et on poursuit le raisonnement.

Ainsi, pour la figure ci-contre :

1. pour obtenir  $C_{m3}$ , on isole 4 et on fait un théorème du moment dynamique en C en projection sur  $\vec{z}$  ;
2. pour obtenir  $C_{m2}$ , on isole  $\{4+3\}$  et on fait un théorème du moment dynamique en B en projection sur  $\vec{y}$  ;
3. pour obtenir  $F_v$ , on isole  $\{4+3+2\}$  et on fait un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  .

### 10.3.4 Cas des chaînes fermées

Ce cas n'est pas le plus fréquent. Lorsqu'on désire obtenir la loi de mouvement d'une chaîne fermée, il est généralement plus rapide d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique que nous aborderons plus tard.

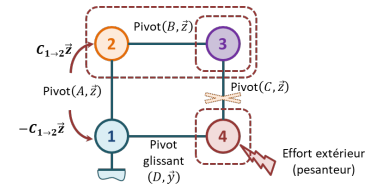


Pour les chaînes fermées, on va réaliser une coupure « fictive » dans le système et reprendre la méthode précédente.

L'objectif est que toutes les équations dynamiques fassent apparaître les inconnues statiques d'une seule et même liaison. Cela permettra finalement de disposer d'assez d'équations pour supprimer ces inconnues de liaisons.

Pour l'exemple ci-contre :

1. on isole 4 et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}$  ;
2. on isole 3 et on réalise un théorème du moment dynamique en B en projection sur  $\vec{z}$  ;
3. on isole {2+3} et on réalise un théorème du moment dynamique en A en projection sur  $\vec{z}$  .



### 10.3.5 Cas des véhicules

Dans les cas des véhicules, l'application du PFD permet de déterminer

- les conditions de dérapages en ligne droite ou en virage ;
- les conditions de basculent en ligne droite ou en virage.

#### Véhicule qui accélère, sans glissement des roues

La figure 10.1 permet de modéliser (partiellement) les actions mécaniques sur un véhicule en ligne droite. En faisant les hypothèses suivantes :

- véhicule qui accélère et roues avant motrices,
- problème plan ;
- masse des roues négligeables ;

il en résulte que la roue arrière (dont l'inertie est nulle si la masse est négligeable) est soumise à deux glisseurs (pivot dans le plan avec le châssis et contact ponctuel avec le sol). En conséquence, il n'y a pas d'effort tangentiel dans cette liaison.

De plus en phase d'accélération et d'adhérence de la roue avant, l'effort tangentiel de la roue sur le sol est vers l'avant.

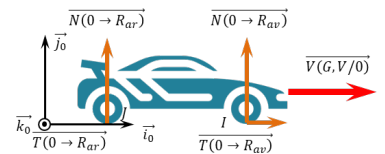


FIGURE 10.1 – Véhicule en mouvement

#### Freinage, roues bloquées

On se met dans le cas d'un freinage sur toutes les roues et ces roues se bloquent. Le véhicule glisse et l'effort tangentiel s'oppose au mouvement. On est dans le cas d'un glissement, donc on est sur le cône de frottement.

La loi de mouvement peut s'obtenir en isolant tout le véhicule et en réalisant un **théorème de la résultante dynamique** suivant  $\vec{i}_0$ . Le TRD sur  $\vec{j}_0$ , le TMD (par exemple en I) et les lois de Coulomb permettent de supprimer les inconnues de liaison.

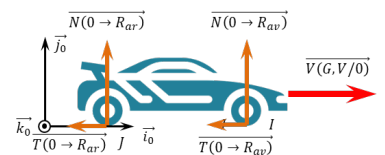


FIGURE 10.2 – Freinage et glissade ...

#### Dérapage en rond point

Si on dérape (figure ??), c'est nécessairement suivant la direction  $\vec{k}_1$ . La loi de mouvement, ou les conditions de dérapage, peuvent s'obtenir en isolant tout le véhicule et en réalisant un **théorème de la résultante dynamique** suivant  $\vec{i}_0$ . La tendance au dérapement étant vers l'extérieur du virage, les efforts tangentiels sont nécessairement orientés vers l'intérieur du virage.

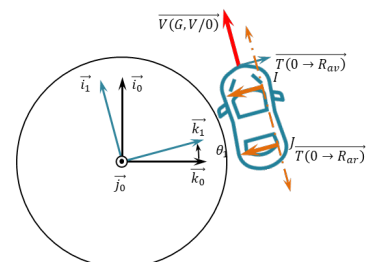


FIGURE 10.3 – Dérapage

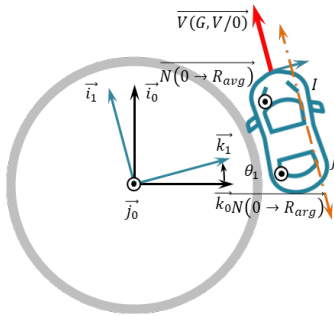


FIGURE 10.4 – Tonneau

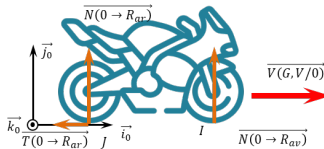


FIGURE 10.5 – Wheeling

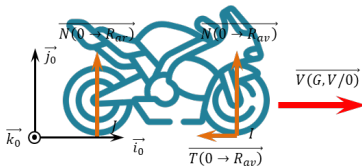


FIGURE 10.6 – Soleil

### Tonneau en rond point

Si la voiture part en tonneau (figure ?? c'est nécessairement en pivotant autour de l'axe  $\overrightarrow{IJ}$ ). Pour déterminer les conditions de tonneau, il faudra donc d'une part réaliser un **théorème du moment dynamique** en  $I$  ou en  $J$  en projection suivant la direction  $\overrightarrow{IJ}$  (c'est-à-dire vecteur  $\vec{i}_1$ ). On cherchera alors la condition où les efforts normaux sur les roues intérieures seront nulles.

### Wheeling en moto

On souhaite savoir dans quelles conditions il est possible de faire un wheeling en moto, c'est à dire pour quelle accélération, la roue avant va se décoller du sol. Ce mouvement correspond à une rotation de la moto autour de la roue arrière.

Pour traduire ce mouvement, on isole l'ensemble de la moto et on réalise un **théorème du moment dynamique** en  $J$  en on détermine à quelle condition l'effort normal sur la roue avant est nul.

### Soleil en moto

On souhaite savoir dans quelles conditions il est possible de décoller la roue arrière, c'est à dire pour quelle décelération, la roue arrière va se décoller du sol lors d'un freinage sur la roue avant uniquement (roue avant bloquée). Ce mouvement correspond à une rotation de la moto autour de la roue avant.

Pour traduire ce mouvement, on isole l'ensemble de la moto et on réalise un **théorème du moment dynamique** en  $I$  en on détermine à quelle condition l'effort normal sur la roue arrière est nul.

## 10.3.6 Il y a plus qu'à ...

### Produit mixte

Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un théorème suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(B, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, 1 \rightarrow 2) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2)) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2)) \cdot \vec{z} \dots$  et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} = (\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$ .

### Projection de la dérivée et dérivée de la projection...

On pourra utiliser judicieusement le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt} [\vec{V}(t)]_{\mathcal{B}_0} \cdot \vec{u}(t) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(t) \cdot \vec{u}(t)] - \vec{V}(t) \cdot \frac{d}{dt} [\vec{u}(t)]_{\mathcal{B}_0}$$

On reconnaîtra que  $(uv)' = u'v + uv'$  et donc  $u'v = (uv)' - uv'$ .

## 10.4 Loi de mouvement

En règle générale, les lois de mouvement permettent d'exprimer le couple moteur ou l'effort à fournir pour un vérin pour réaliser un déplacement. Ces lois sont des équations différentielles d'ordre 2. En général, il n'est pas nécessaire de résoudre ces équations différentielles car le mouvement est forcé par la commande.

Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- ▶ phase 1 mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croît de façon linéaire et la position de façon parabolique ;
- ▶ phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement ;
- ▶ phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante est négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.

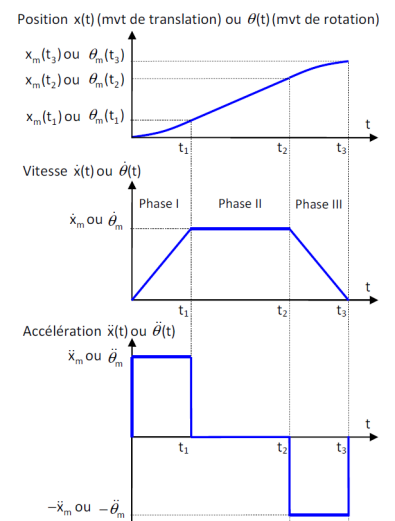
Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

- ▶ d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse/accélération ;
- ▶ de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération accélérations maximale ;
- ▶ de déterminer la hauteur du palier de vitesse ;
- ▶ de déterminer la distance parcourue.

### Résultat –

Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

- ▶  $t_1 = \frac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par  $\frac{1}{2}t_1\dot{x}_m$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par  $2 \cdot \frac{1}{2}t_1\dot{x}_m + (t_2 - t_1)\dot{x}_m$ .



	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \frac{1}{2}\ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t - t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\frac{1}{2}\ddot{x}_m(t - t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t - t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\ddot{x}_m(t - t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$