

7 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

7.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0) , alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \mathcal{T} \left(\overrightarrow{E} \rightarrow E \right) \right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G .
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

7.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général	1
7.2 Torseur cinétique	2
7.3 Torseur dynamique	4

B2-10

Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

7.1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0) , la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement

de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

7.1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

7.2 Torseur cinétique

7.2.1 Définition

Définition –

Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) \, dm \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) \, dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur cinétique, $\overrightarrow{R_c(S/R_0)}$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$.
- Le moment cinétique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)}$.

7.2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété –

Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

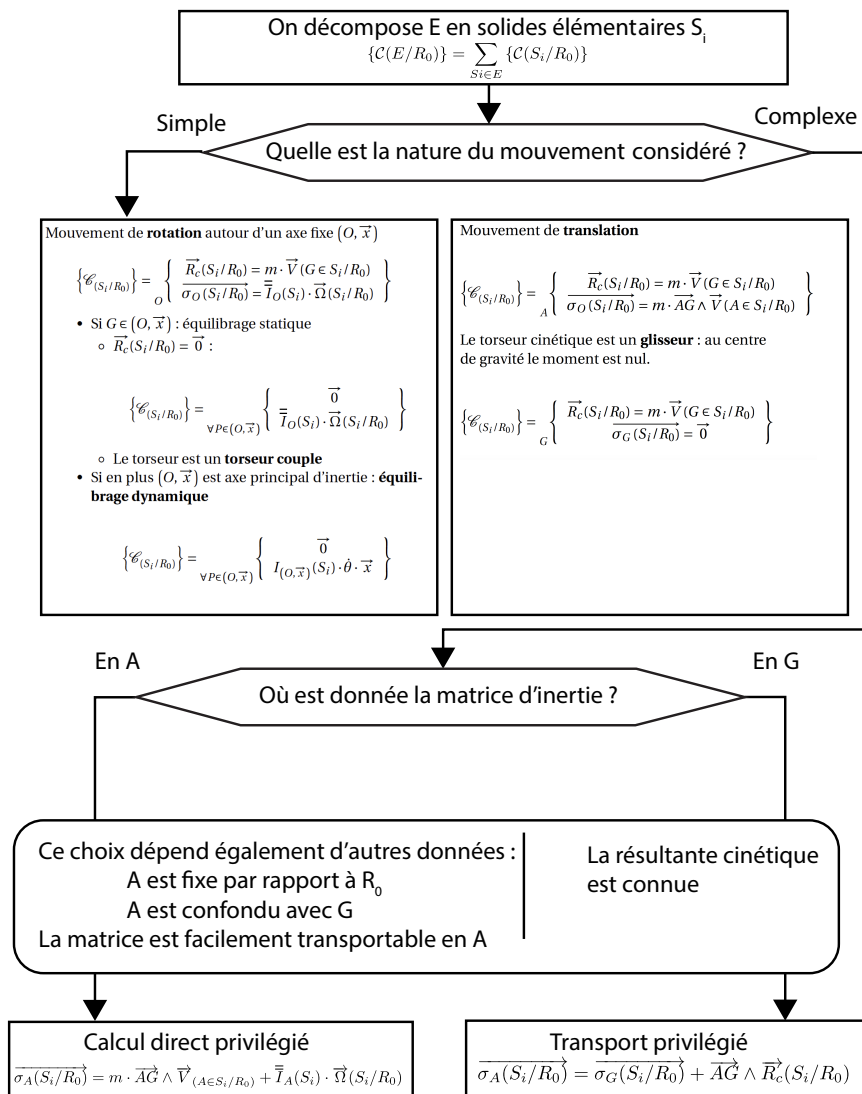
$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}(A, S/R_0).$$

7.2.3 Cas particuliers

- ▶ En appliquant cette formule en un point A **fixe** dans le mouvement de S/R_0 , on a : $\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$.
- ▶ En appliquant cette formule en G , **centre d'inertie** de S , on a : $\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$.

7.2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



7.3 Torseur dynamique

7.3.1 Définition

Définition – Torseur dynamique

Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = \int_{P \in S} \vec{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\vec{R}_d(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G/R_0)$.
- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_d(S/R_0)$.

7.3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété –

Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

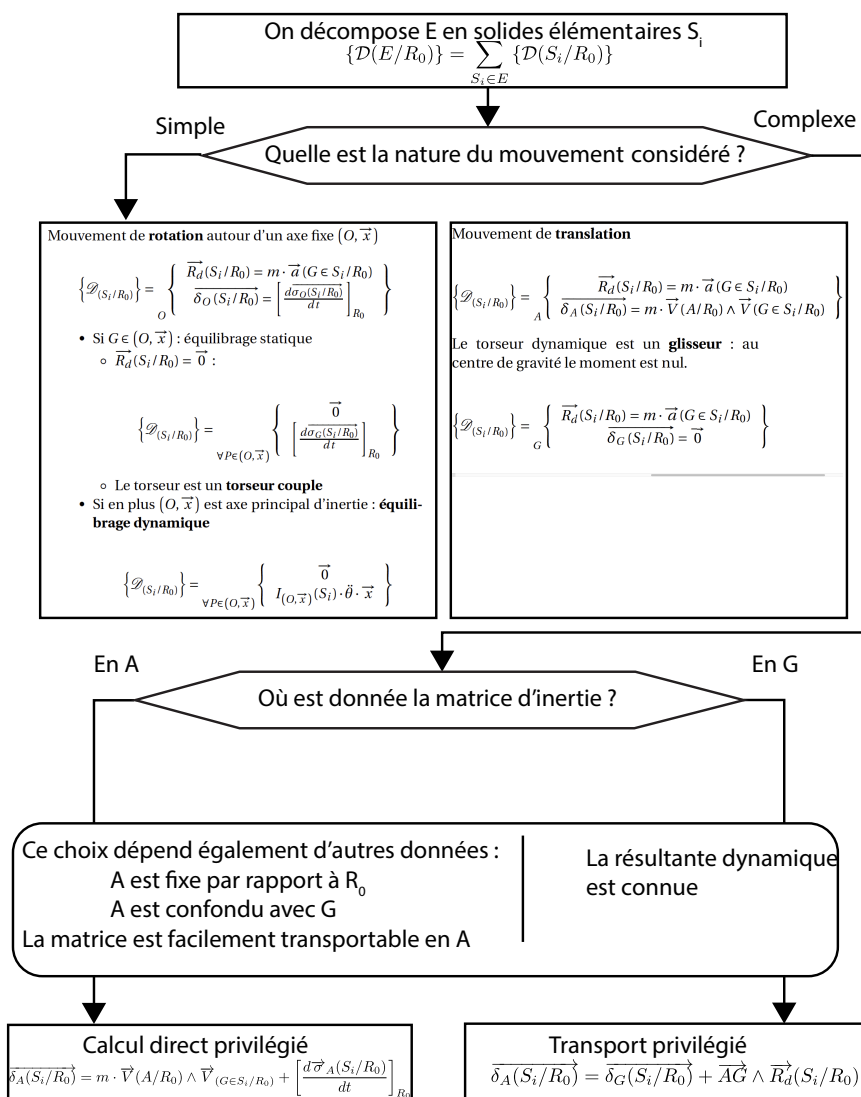
- Relation entre les **résultantes** : $\vec{R}_d(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{R}_c(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.
- Relation entre les **moments** : $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{VA}(A/R_0) \wedge \vec{R}_c(S/R_0)$.

7.3.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point O fixe dans R_0 , on a : $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.
- En appliquant cette formule en un point G , **centre d'inertie de S** , on a : $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.

7.3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Bilan

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans \mathcal{R}_0 A
Torseur cinétique $\{\mathcal{C}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G, S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) + m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A, S/R_0) \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G, S/R_0) \\ \vec{\sigma}(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G, S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) \end{array} \right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G, S/R_0) \\ \vec{\delta}(A, S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{R}_c(S/R_0) \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G, S/R_0) \\ \vec{\delta}(G, S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G, S/R_0) \\ \vec{\delta}(A, S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_A$

Application 1

Pompe à plateau – Sujet

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

C1-05

C2-08

C2-09

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

Paramétrage

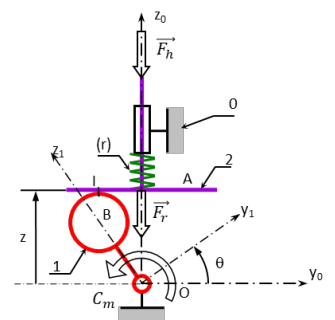
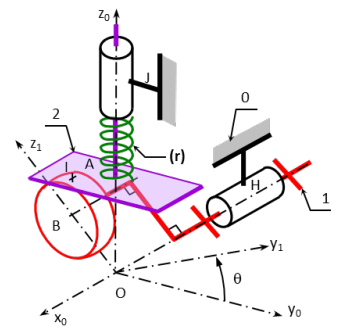
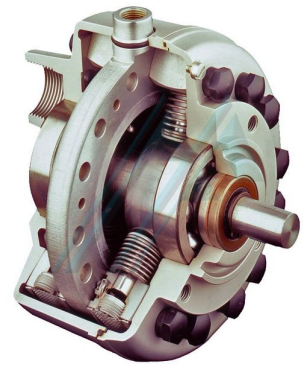
Le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- ▶ $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$;
- ▶ $\vec{OB} = e\vec{z}_1, \vec{BI} = R\vec{z}_0, \vec{OA} = z\vec{z}_0$.

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) . Le piston (2) possède une masse m_2 . Le ressort (r), de raideur k , est toujours comprimé. Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, l'effort de compression est égal à $\vec{F}_0 = -F_0\vec{z}_0$. Un moteur exerce un couple connu de moment $\vec{C}_m = C_m\vec{x}_0$ sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe (O, \vec{z}_0) et de résultante $\vec{F}_h = -F_h\vec{z}_0$.

Résolution cinématique

Question 1 En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer z en fonction de θ et de constantes du problème. Déterminer alors $\vec{V}(A, 2/0)$ et $\vec{\Gamma}(A, 2/0)$.



Résolution dynamique

Question 2 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le PFD.

Question 3 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Résolution énergétique – Pour plus tard...

Question 4 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Question 5 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Pour aller plus loin...

Question 6 En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Application 2

Pendule – Sujet

Mise en situation

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.

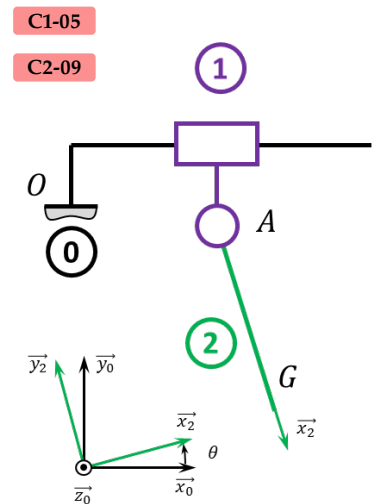
- ▶ On note 1 la pièce de masse M_1 et de centre de gravité G_1 . $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - h\overrightarrow{y_0}$.
- ▶ On note 2 la pièce de masse M_2 et de centre de gravité G et de matrice d'inertie

$$I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}. \text{ On a } \overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{x_2}$$

Travail à réaliser

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$ en utilisant deux méthodes différentes.

Question 2 En déduire le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$.

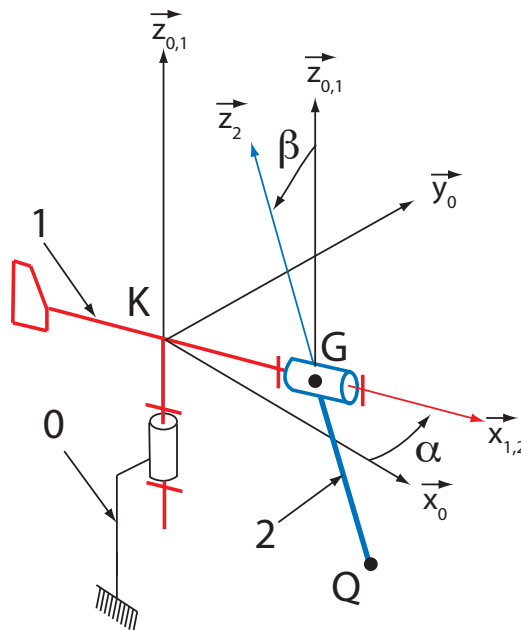


Application 3

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Émilien Durif.

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M

sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\overrightarrow{KG} = a \overrightarrow{x_1}$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{I}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\overrightarrow{GQ} = -b\overrightarrow{z_2}$.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Question 3 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

Question 6 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Question 7 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment dynamique $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\overrightarrow{z_0} : \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Éléments de correction

1.

$$2. C_m = \left(\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)} \right) \cdot \overrightarrow{z_0}$$

$$3. \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J \dot{\alpha}$$

$$4. \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}$$

$$5. \overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [ab\dot{\beta}\overrightarrow{z_2} + a^2\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} + b^2\dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + ba\dot{\alpha}\cos\beta \cdot \overrightarrow{x_1} + b^2\dot{\alpha}\sin\beta\overrightarrow{y_2}]$$

$$6. \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = J \ddot{\alpha}.$$

$$7. \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + Ma^2] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta [B - C].$$

$$8. \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = m [ab(\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)]$$

$$9. C_m = -mab\dot{\beta}^2 \sin \beta$$

Application 4

Régulateur centrifuge – Sujet

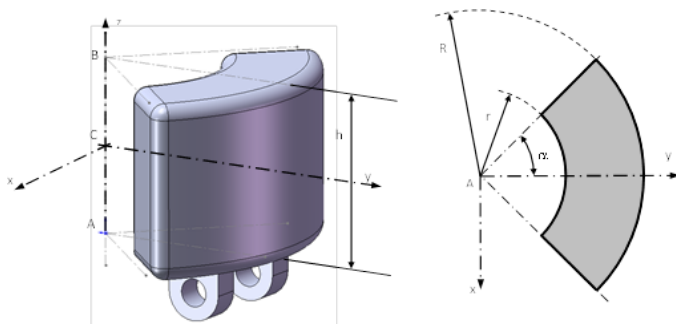
C. Gamelon & P. Dubois.

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-contre.

- ▶ (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0).
- ▶ (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1).
- ▶ $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- ▶ $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$.
- ▶ $\vec{O_0G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- ▶ $\vec{O_0O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- ▶ $\vec{O_2G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



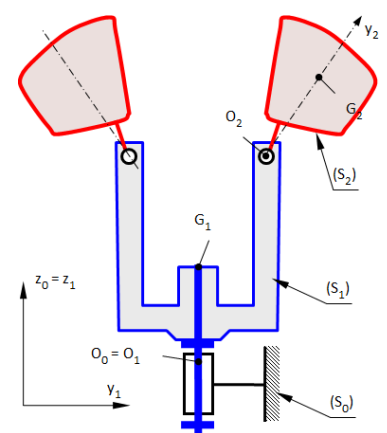
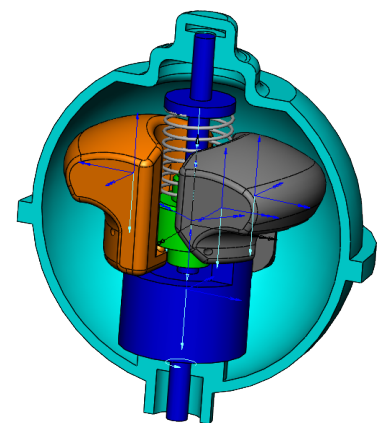
Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

C1-05

C2-09



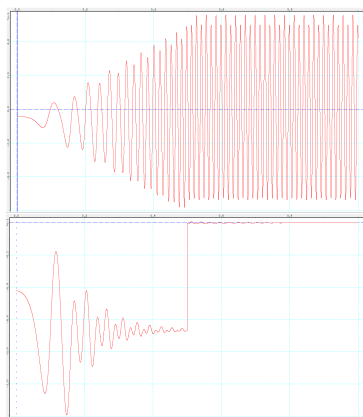
Question 3 Déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 et le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).



Question 7 Commenter ces résultats.

TD 1

Stabilisateur passif d'image – Sujet

Mines Ponts 2018 – PSI.

C1-05

C2-09

Mise en situation

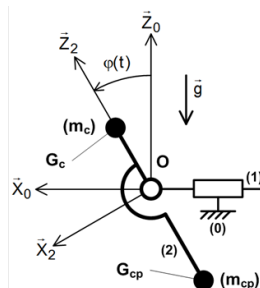
Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif. Le but de ce sujet est de s'intéresser au support de la caméra assurant la liaison entre le bras de l'utilisateur et la caméra elle-même.

Le stabilisateur se compose principalement de trois objets :

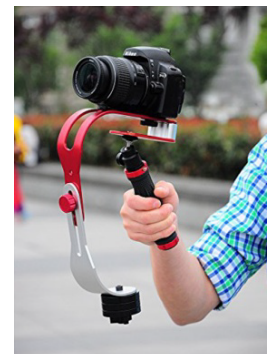
- ▶ une poignée orientable (1) manipulée directement par le photographe, liée au support (2) en O ;
- ▶ un support rigide (2) (**supposé sans masse**) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle m_c placée en G_c ;
- ▶ un contrepoids lié à (2) et assimilé à une masse ponctuelle m_{cp} placée en G_{cp} .



Système réel



Modèle utilisé



L'utilisateur tient fermement la poignée (1) dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le (**porteur + (1)**) ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

Dans le cas général, le mouvement du bras par rapport au référentiel terrestre est quelconque (6 degrés de libertés). Ici, on se limite à un mouvement de translation. Dans le cas général, afin que la caméra soit en position verticale, le support doit permettre 3 rotations dans la liaison avec (**porteur + (1)**). Ici on se limite à la stabilisation d'une seule rotation.

Objectif

Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.

Travail demandé

On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur **(1)** est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble **(E)=Support(2) + Caméra(C) + Contrepoids(Cp)** est en équilibre stable en position verticale. On note $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{V}(P, 1/0) = v(t)\vec{X}_0 \end{array} \right\}_{VP}$. On note $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. De plus, $\vec{OG}_C = L_C \vec{Z}_2$ et $\vec{OG}_{CP} = -L_{CP} \vec{Z}_2$.

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Afin de quantifier la modification d'attitude de (E), l'équation de mouvement est linéarisée autour de la position d'équilibre (verticale) en supposant que les valeurs de l'angle restent faibles. On transpose cette équation différentielle dans le domaine de Laplace et on note $\mathcal{L}(\varphi(t)) = \Phi(p)$ et $\mathcal{L}(a(t)) = A(p)$. Afin de conserver la fluidité des images lors de travelling, les fluctuations indésirables des mouvements du porteur ne doivent pas être intégralement transmises à (E).

On suppose que $a(t) = a_0 \sin(\omega_a t)$ avec $a_0 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$ et $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp} et g .

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) . En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de (E) selon l'axe (O, \vec{y}_0) .

Éléments de correction

- $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = (L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = (M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C) \cos \varphi.$
- $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}.$
- .
- $0,03^\circ.$
- .

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.