

DDS 1

Les ptits devoirs du soir Du 4 septembre au 22 novembre

Exercice 211 – Moteur à courant continu*

B2-04

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$;
- $e(t) = K \omega(t)$;
- $c(t) = K i(t)$;
- $c(t) - f \omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$.

Question 2 Préciser l'ordre et la classe de H .

Question 3 Mettre $H(p)$ sous forme canonique.

Question 4 Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.

Question 5 Vérifier l'homogénéité des différentes constantes.

Éléments de corrigé :

1. $H(p) = \frac{K_m}{K_m^2 + (R+Lp)(Jp+f)}$.
2. Ordre 2, classe 0.
3. $H(p) = \frac{\frac{K_m}{K_m^2 + Rf}}{1 + \frac{(RJ+Lf)}{K_m^2 + Rf} p + \frac{LJ}{K_m^2 + Rf} p^2}$.
4. $K = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_m^2 + Rf}{LJ}}$, $\xi = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ(K_m^2 + Rf)}}$.

Corrigé voir 211.

Exercice 210 – Moteur à courant continu*

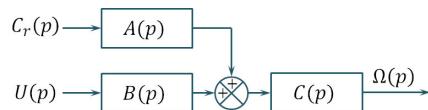
B2-07

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$;
- $e(t) = K \omega(t)$;
- $c(t) = K i(t)$;
- $c(t) + c_r(t) - f \omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Question 1 Réaliser le schéma-blocs.

Question 2 Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.



Éléments de corrigé :

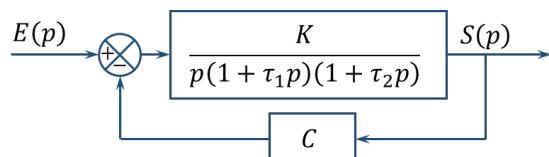
1. .
2. $A(p) = R + Lp$, $B(p) = K$, $C(p) = \frac{1}{K^2 + (f + Jp)(R + Lp)}$ (plusieurs réponses possibles).

Corrigé voir 210.

Exercice 209 – Valeur finale*

C2-03

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude E_0 .

Question 2 En déduire la valeur de l'erreur statique.

Question 3 Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est une rampe de pente k .

Question 4 En déduire la valeur de l'erreur de traînage.

Question 5 Qu'en est-il si $C = 1$?

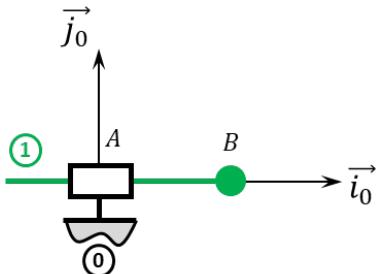
Éléments de corrigé :

1. $s_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} = \frac{E_0}{C}$.
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = E_0 - \frac{E_0}{C}$.
3. $s_\infty = \infty$.
4. $\epsilon_v = \infty$.
5. $\epsilon_v = \frac{k}{K}$.

Corrigé voir 209.

Exercice 208 – Mouvement T – *
B2-12

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

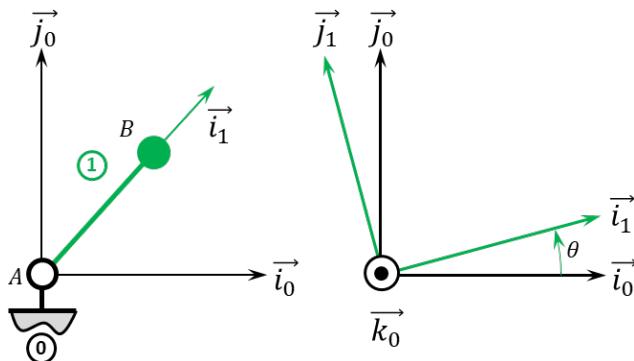
Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 10\text{mm}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = -20\text{mm}$.

Corrigé voir 208.

Exercice 207 – Mouvement R *
B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20\text{mm}$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

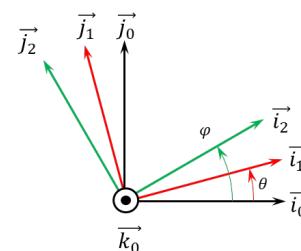
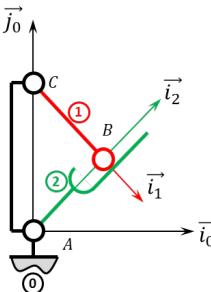
Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \pi\text{ rad}$.

Corrigé voir 207.

Exercice 206 – Barrière Sympact **
B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$. De plus, $H = 120\text{mm}$ et $R = 40\text{mm}$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 75^\circ$.

Question 4 Dans l'hypothèse où la pièce 1 peut faire des tours complets, quelle doit être la longueur minimale de la pièce 2.

Question 5 Dans l'hypothèse où la pièce 2 fait 12 cm, quel sera le débattement maximal de la pièce 1.

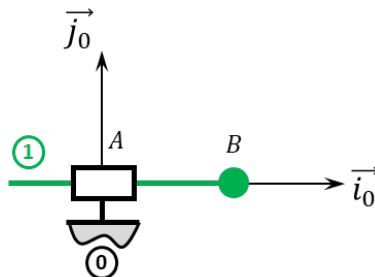
Indications :

1. .
2. .
3. .
4. 160 mm.
5. 160,8°.

Corrigé voir 206.

Exercice 205 – Mouvement T – *
C2-05
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

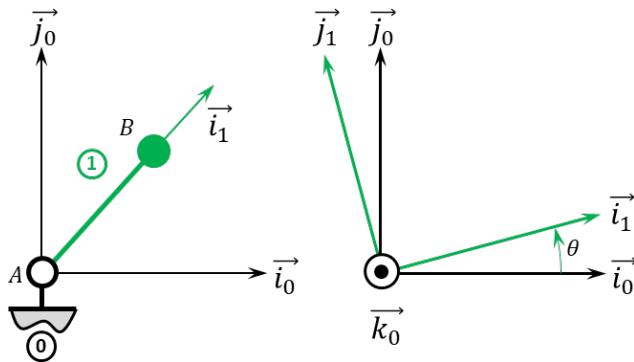
Indications :

1. .
2. $x_B(t) = \lambda(t)$.

Corrigé voir 143.

Exercice 204 – Mouvement R *
C2-05
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point **B** appartenant à **1** par rapport à **0**.

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

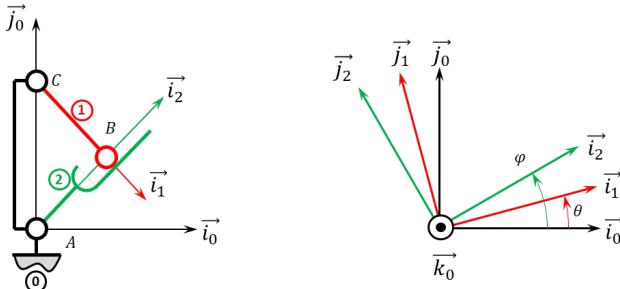
Indications :

1. .
2. .
3. $x_B(t) = R \cos \theta(t)$ et $y_B(t) = R \sin \theta(t)$.

Corrigé voir 133.

Exercice 203 – Barrière Sympact **
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$, $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_2$. De plus, $H = 120 \text{ mm}$ et $R = 40 \text{ mm}$.



Question 1 Calculer $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$?

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$?

Question 3 Justifier que $\overrightarrow{V(B, 2/1)} \cdot \vec{j}_2 = 0$.

Question 4 En déduire une relation cinématique entre les différentes grandeurs.

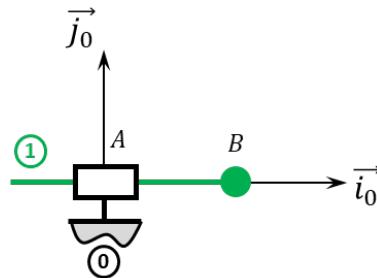
Indications :

1. $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
2. $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \lambda \dot{\varphi} \vec{j}_2$.
3. .
4. $\lambda \dot{\varphi} - R \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) = 0$.

Corrigé voir 203.

Exercice 202 – Mouvement T – *
B2-14
B2-15
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$. On note m_1 la masse du solide **1**. On note G le centre d'inertie de **1** tel que $\overrightarrow{BG} = \ell \vec{j}_1$. La pesanteur est telle que $\vec{g} = -g \vec{i}_0$. Un vérin pneumatique positionné entre **1** et **0** permet de maintenir **1** en équilibre.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le vérin pour maintenir **1** en équilibre.

Indications :

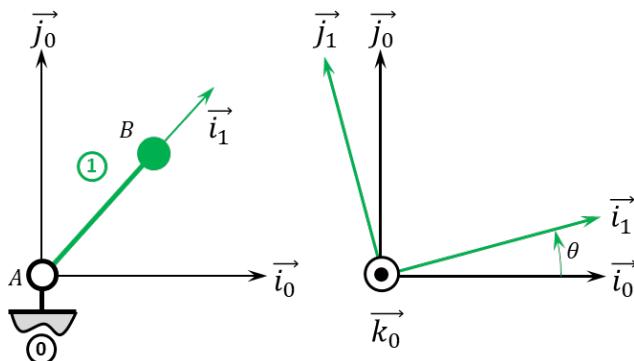
1. .
2. $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 \\ M_{01} \vec{j}_1 \\ N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A$,
 $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$, $\{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$.
3. $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 \\ N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A$, $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$, $\{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$.
4. TRS suivant \vec{i}_0 .

Corrigé voir 202.

Exercice 201 – Mouvement R *

B2-14
B2-15
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$. La liaison pivot est motorisée par un moteur dont l'action mécanique sur 1 est donnée par $\overrightarrow{C_m} = C_m \vec{k}_0$. On note m_1 la masse du solide 1 et B son centre d'inertie. La pesanteur est telle que $\overrightarrow{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le moteur pour maintenir 1 en équilibre.

Indications :

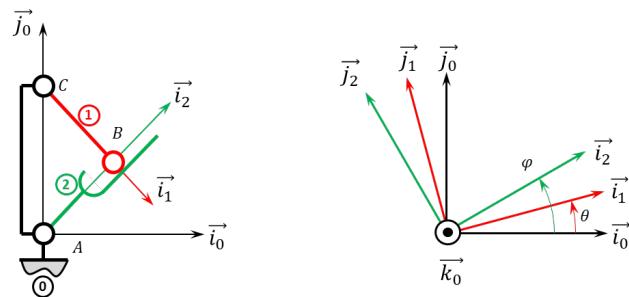
1. .
2. $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{k}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_A$,
 $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B$, $\{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A$
3. $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_A$, $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B$, $\{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A$
4. TMS en A en projection sur \vec{k}_0 .

Corrigé voir 201.

Exercice 200 – Barrière Sympact **

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$. De plus, $H = 120 \text{ mm}$ et $R = 40 \text{ mm}$.



On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ C_r \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100° . On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ($\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$). Il est au maximum lorsque $\varphi_f = 0$.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -M g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L \vec{i}_2$.

Question 1 Réaliser un graphe d'analyse.

Question 2 Expliciter C_r en fonction des différents constantes (k, φ_o, φ_f) et celles qui vous sembleraient utile.

Question 3 Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

Indications :

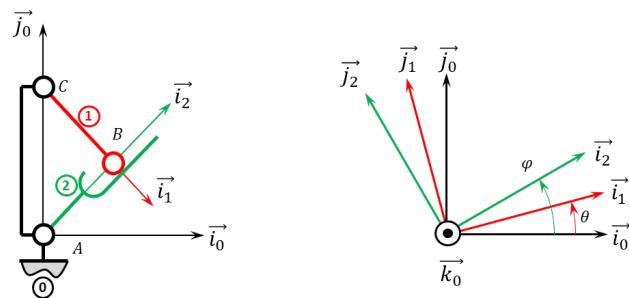
1. .
2. $C_r(\varphi) = k \frac{\pi}{2(\varphi_f - \varphi_0)} \varphi - k \frac{\pi \varphi_0}{2(\varphi_f - \varphi_0)}$ et $C_r(\varphi) = -k \varphi + k \frac{\pi}{2}$.
3. On isole 1, TMS sur (C, \vec{k}_0) . On isole 2, TMS sur (A, \vec{k}_0) .

Corrigé voir 200.

Exercice 199 – Barrière Sympact *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$. De plus, $H = 120 \text{ mm}$ et $R = 40 \text{ mm}$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

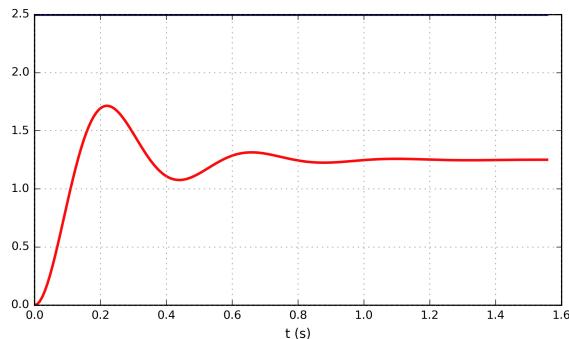
Question 2 Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

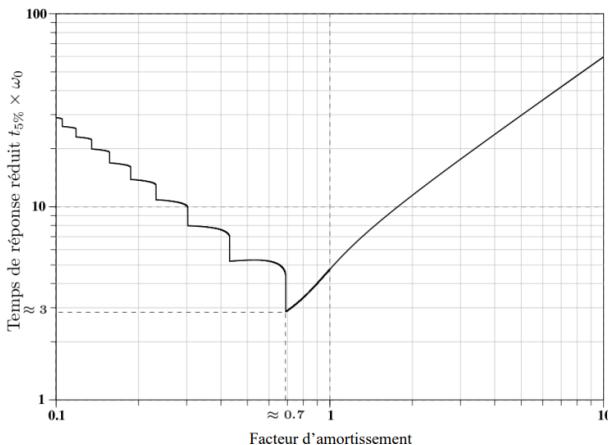
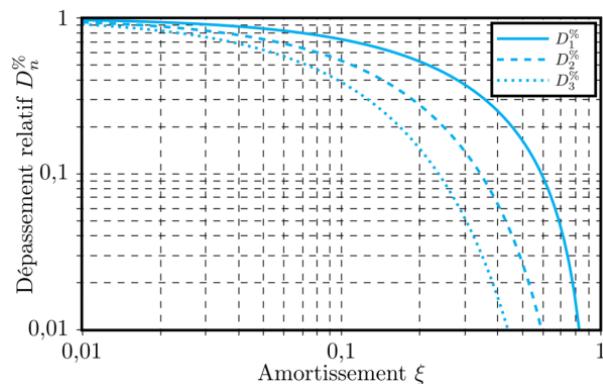
Indications :

1. .
2. $\tan \varphi(t) = \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}$.
3. $\dot{\varphi}(t) = \frac{R \dot{\theta}(t)(R + h \sin \theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)}$.
4. .



Question 2 Déterminer la fonction de transfert du système en réalisant les mesures nécessaires et en utilisant les formules appropriées.

Question 3 Déterminer la fonction de transfert du système en utilisant les abaques.



Indications :

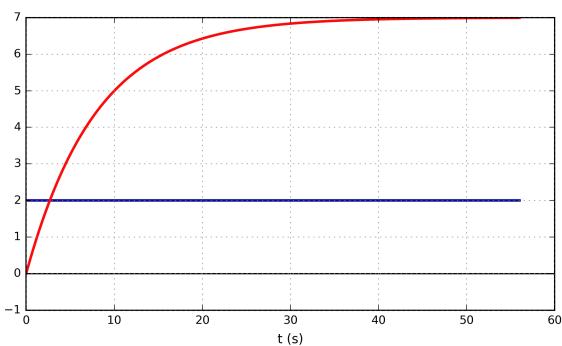
1. $H(p) = \frac{3,5}{1+8p}$.
2. $H(p) = \frac{0,5}{1 + \frac{2 \times 0,1}{14,25} p + \frac{p^2}{14,25^2}}$.
3. $H(p) = \frac{0,5}{1 + \frac{2 \times 0,3}{16} p + \frac{p^2}{16^2}}$.

Corrigé voir 197.

Exercice 197 – Identification temporelle *

B2-06

Soit la réponse à un échelon.



Question 1 Déterminer la fonction de transfert du système.

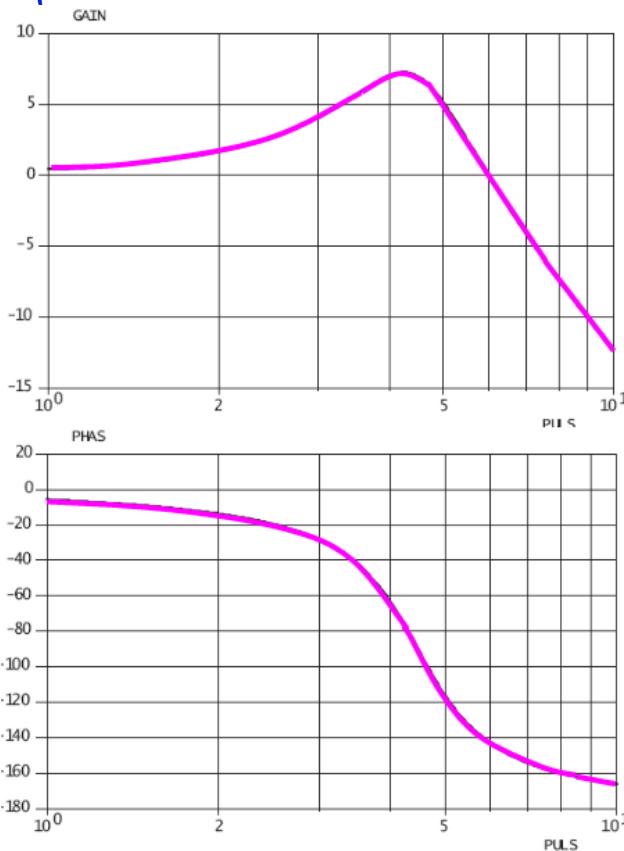
Soit la réponse à un échelon d'amplitude 2,5.

Exercice 196 – Identification *

B2-06

D'après Florestan Mathurin.

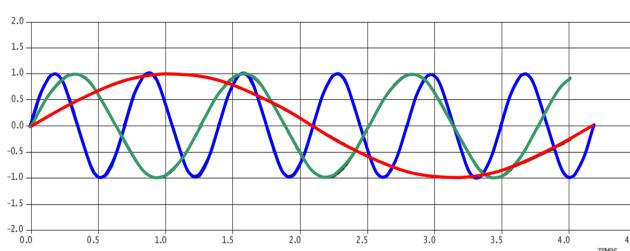
Soit un système dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



Question 1 Tracer le diagramme de Bode asymptotique.

Question 2 Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.

Le diagramme temporel ci-dessous présente 3 signaux d'entrée sinusoïdaux.



Question 3 Déterminer les périodes et les pulsations de chacun des signaux.

Question 4 En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.

Indications :

$$2. \quad H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \times 0,23}{4,5} p + \frac{p^2}{4,5^2}}$$

3. .
- Signal rouge : $T = 4,2\text{s}$ et $\omega = 1,5\text{ rad/s}$.
 - Signal vert : $T = 3,6/3 = 1,2\text{s}$ et $\omega = 5,2\text{ rad/s}$.
 - Signal bleu : $T = 4,2/6 = 0,7\text{s}$ et $\omega = 9\text{ rad/s}$.

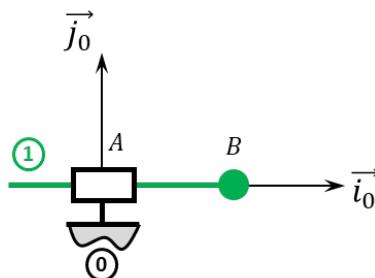
4. .
- $s(t) = 1,12 \sin(\omega t - 0,17)$.
 - $s(t) = 1,8 \sin(\omega t - 2,1)$.
 - $s(t) = 0,3 \sin(\omega t - 2,8)$.

Corrigé voir 196.

Exercice 195 – Mouvement T *

C2-07

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$. On note m_1 la masse du solide 1. On note G le centre d'inertie de 1 tel que $\vec{BG} = \ell \vec{j}_1$ ($\vec{j}_1 = \vec{j}_0$). La pesanteur est telle que $\vec{g} = -g \vec{i}_0$. Un vérin pneumatique positionné entre 1 et 0 permet de maintenir 1 en équilibre.



On donne $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ et $\{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_A$.

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

On isole 1 et on applique le théorème de la résultante statique en projection suivant \vec{i}_0 .

Question 2 Exprimer l'équation d'équilibre de la pièce 1.

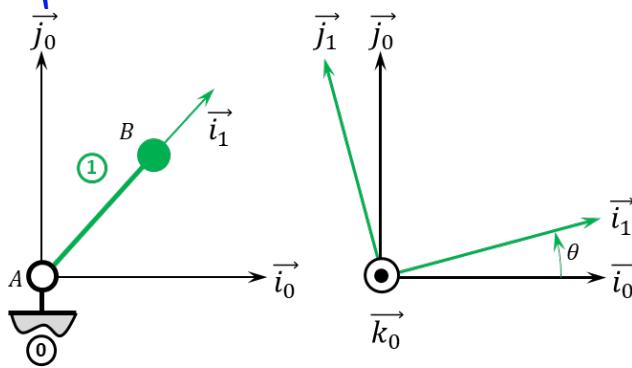
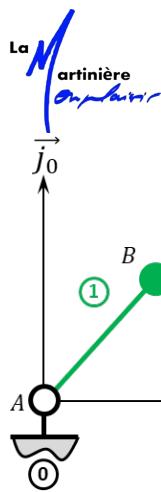
Question 3 Déterminer l'ensemble des inconnues de liaison.

Corrigé voir 195.

Exercice 194 – Mouvement R *

C2-07

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20\text{mm}$. La liaison pivot est motorisée par un moteur dont l'action mécanique sur 1 est donnée par $\vec{C}_m = C_m \vec{k}_0$. On note m_1 la masse du solide 1 et B son centre d'inertie. La pesanteur est telle que $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

On donne $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \frac{-m_1 g \vec{j}_0}{0} \right\}_B$ et $\{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \frac{\vec{C}_m \vec{k}_0}{0} \right\}_A$.

On isole 1 et on réalise un théorème du moment statique en A en projection sur \vec{k}_0 .

Question 2 Donner l'équation d'équilibre de la pièce 1.

Question 3 Déterminer l'ensemble des inconnues de liaisons.

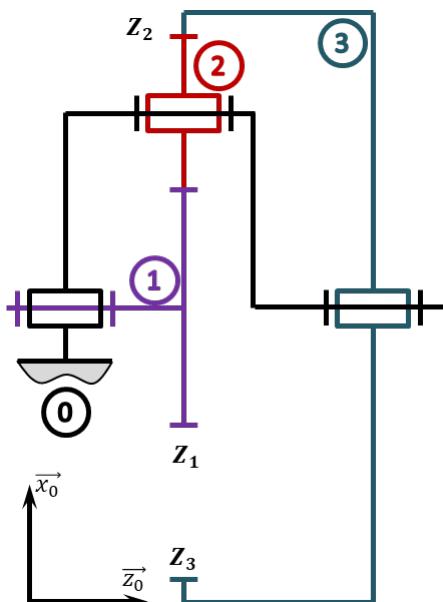
Corrigé voir 194.

Exercice 193 – Train simple *

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

Question 3 Donner une relation géométrique entre Z_1 , Z_2 et Z_3 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages.

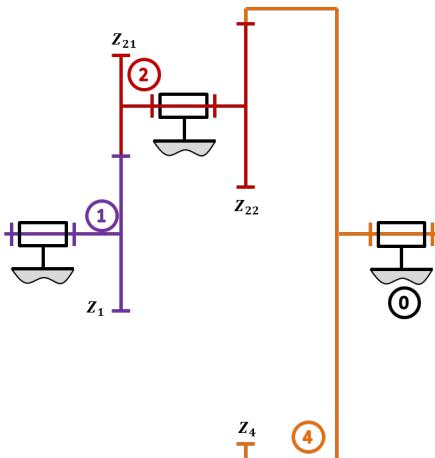
Corrigé voir 193.

Exercice 192 – Train simple *

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

Question 3 Donner une relation géométrique entre Z_1 , Z_{21} , Z_{22} et Z_4 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages (on fera l'hypothèse que toutes les roues dentées ont le même module).

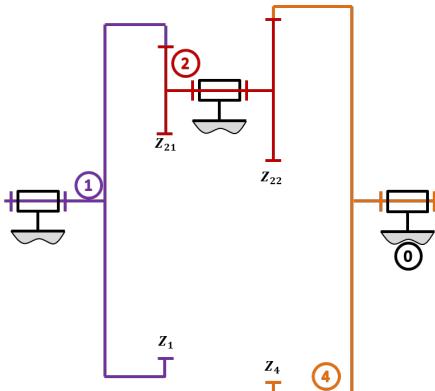
Corrigé voir 192.

Exercice 191 – Train simple *

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

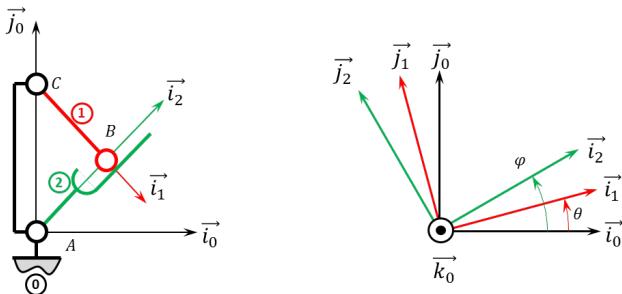
Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

Corrigé voir 191.

Exercice 190 – Barrière Sympact **

C2-07

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$, $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{i_2}$. De plus, $H = 120 \text{ mm}$ et $R = 40 \text{ mm}$.



On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Mg \overrightarrow{j_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L \overrightarrow{i_2}$.

Question 1 Réaliser un graphe d'analyse.

Question 2 Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

Question 3 Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

Question 4 Tracer, en utilisant Python, l'évolution du couple moteur en fonction de l'angle de la manivelle. On prendra $M = 1 \text{ kg}$ et $L = 0,1 \text{ m}$

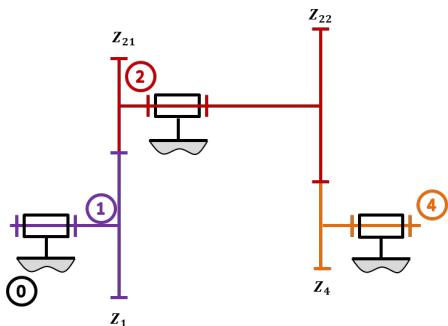
Corrigé voir 190.

Exercice 189 – Train simple *

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

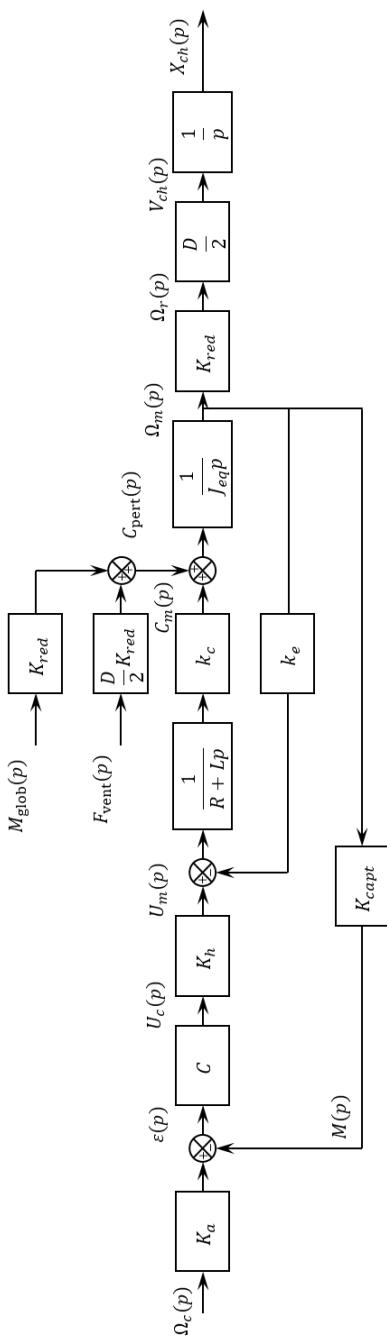
Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

Corrigé voir 189.

Exercice 188 – La Seine Musicale*

B2-07

Soit le schéma-blocs suivant.



Indications :

1. $H_f(p) = \frac{K_a}{(k_e k_c + C K_h K_{capt} k_c)} \frac{C K_h k_c}{\frac{J_{eq}(R+Lp)}{k_e k_c + C K_h K_{capt} k_c} p + 1}$.
2. $\alpha = -\frac{R}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c}, \tau = \frac{L}{R}, \gamma = \frac{R J_{eq}}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c}, \delta = \frac{L J_{eq}}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c}$.
3. $X_{ch}(p) = (H_f(p) \Omega_c(p) + H_r(p) C_{pert}(p)) \frac{D K_{red}}{2p}$.

Corrigé voir 188.

Exercice 187 – Détermination des efforts dans une structure étayée **

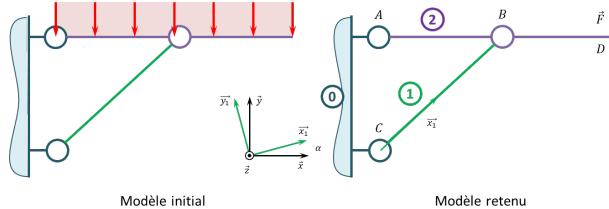
C2-07

Lors de la démolition d'une partie de la gare de Lyon Part-Dieu (en 2018), des étais ont du être posés afin de soutenir la structure supérieure.



Dans le but de dimensionner les étais, il est nécessaire de déterminer les actions mécanique dans chacune des liaisons.

Pour cela, on utilise la modélisation suivante.



On a $\overrightarrow{AB} = a \vec{x}$, $\overrightarrow{BD} = b \vec{x}$ et $\overrightarrow{CB} = L \vec{x}_1$.

Question 1 Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

Question 2 Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Question 3 Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F .

Éléments de corrigé :

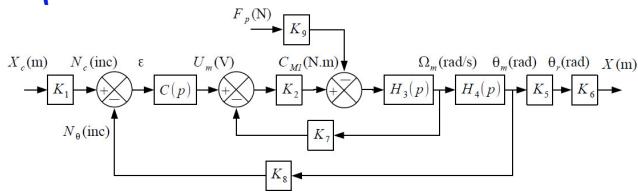
$$3. X_{02} = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha}, F_{01} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, Y_{02} = -\frac{b}{a} F.$$

Corrigé voir 187.

Exercice 186 – Machine de rééducation SysReeduc *

B2-07

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

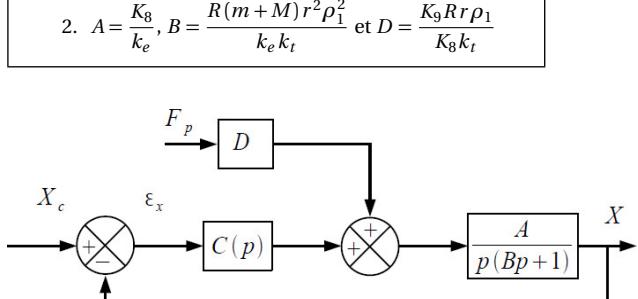
avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

1. ...
 - $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
 - $K_7 = k_e$;
 - $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$;
 - $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
 - $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
 - $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
 - $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.
2. $A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$

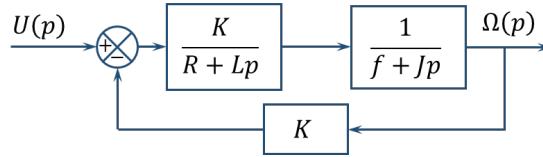


Corrigé voir 158.

Exercice 185 – Fonctions de transfert*

B2-07

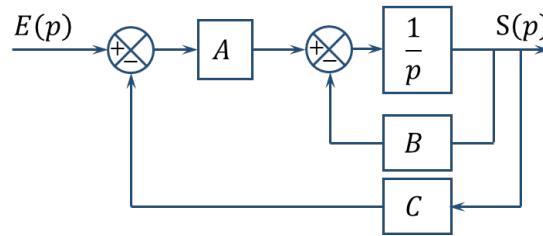
Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Indications

1. $K_{BO} = \frac{K^2}{Rf}, \omega_{BO} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}, \xi_{BO} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}Rf}$.
2. $K_{BF} = \frac{K}{K^2 + Rf}, \xi_{BF} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K^2}}$.
3. $K_{BO} = \frac{AC}{B}$ et $\tau_{BO} = \frac{1}{B}$.
4. $K_{BF} = \frac{A}{B + AC}$ et $\tau_{BF} = \frac{1}{B + AC}$.

Corrigé voir 162.

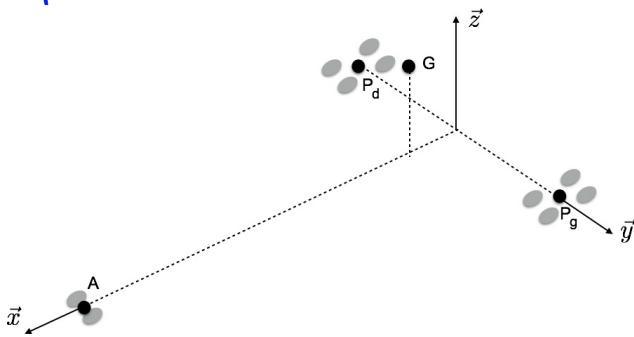
Exercice 184 – *

B2-16

La configuration du train d'atterrissement de l'avion A350-900 est de type tricycle avec :

- deux atterrisseurs principaux (gauche et droit) attachés sur la voilure, légèrement à l'arrière du centre de gravité G de l'avion et de part et d'autre du plan de symétrie vertical (O, \vec{x}, \vec{z}) de l'avion. Ils supportent l'essentiel du poids de l'avion ;
- un atterrisseur auxiliaire situé sous le nez de l'avion, qui assure l'équilibre longitudinal de l'avion au sol et permet de manœuvrer.

Les atterrisseurs principaux sont équipés de quatre roues chacun, tandis que l'atterrisseur auxiliaire est équipé de deux roues.



Les mobilités entre les différents éléments de l'avion (roues, fuselage...) ne sont pas considérées; ces éléments ne forment donc qu'une seule classe d'équivalence désignée « avion ».

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan). **Question 1** Réaliser le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales (A, \vec{z}) (atterrisseur auxiliaire), (P_g, \vec{z}) (atterrisseur principal gauche) et (P_d, \vec{z}) (atterrisseur principal droit).

Question 3 Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.

Éléments de corrigé :

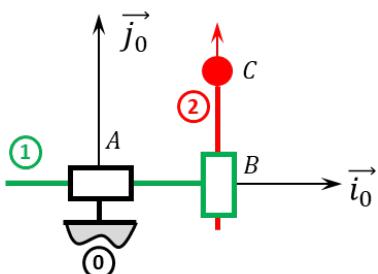
1. .
2. $h = 7$.
3. $h = 0$.

Corrigé voir 155.

Exercice 183 – Mouvement TT – *

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 10\text{mm}$ et $\mu = 10\text{mm}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 20\text{mm}$ et $\mu = 10\text{mm}$.

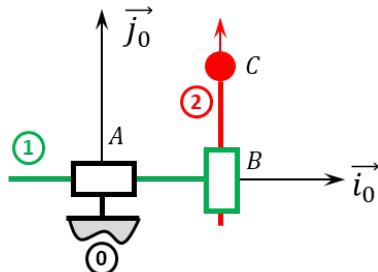
Corrigé voir 160.

Exercice 182 – Mouvement TT – *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Quel est le mouvement de 2 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10\text{cm}$ à la vitesse $v = 0,01\text{m s}^{-1}$.

Question 3 Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R .

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $V(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

Question 4 Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v , R et du temps.

Question 5 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.

Indications :

1. .
2. $x_C(t) = \lambda(t)$ et $y_C(t) = \mu(t)$.
3. $\theta(t) = \frac{v}{R} t$.
4. $\lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right)$, $\mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right)$.
5. .

Corrigé voir 157.

Exercice 181 – Banc hydraulique *

C2-03

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.

- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert : $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$ avec $K_{\text{pom}} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$; $T_2 = 5 \text{ s}$.
- Le capteur est modélisé par un gain pur : $K_{\text{cap}} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$.

La pression de consigne est de $P_{\text{con}} = 800 \text{ bars}$ et les débits de fuite sont estimés à $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

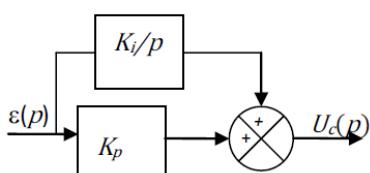
Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de 60° marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$ (voir remarque ci-dessous)
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation : $t_e \cdot \omega_{0\text{dB}} = 3$ où $\omega_{0\text{dB}}$ désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et t_e le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$, temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$, temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma bloc ci-dessous.



Question 1 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

Question 2 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

Question 3 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

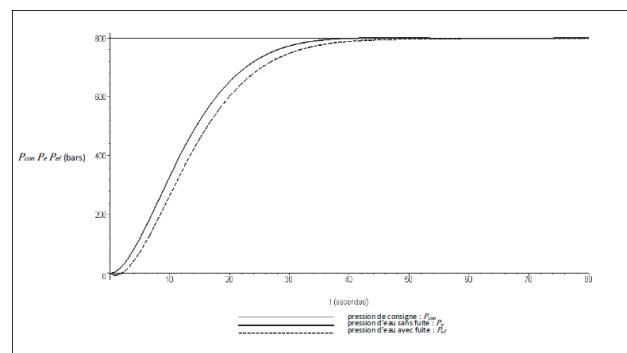
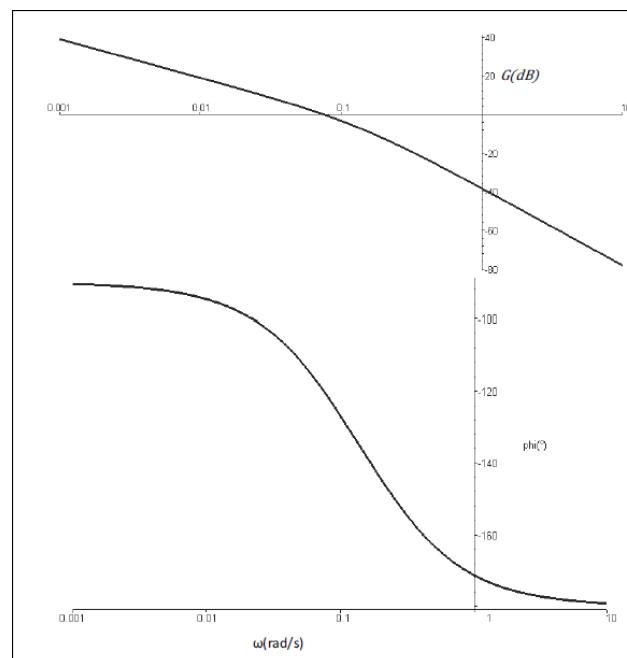
Question 4 Quelle valeur faut-il donner à $\omega_{0\text{dB}}$ pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

Question 5 Déterminer analytiquement le rapport $T = \frac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

Question 6 En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment. On donne sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

Question 7 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.



Éléments de corrigé :

$$1. C(p) = K_i \frac{1 + p \frac{K_p}{K_i}}{p}$$

2. .

3. .

4. $T = 6,79$.

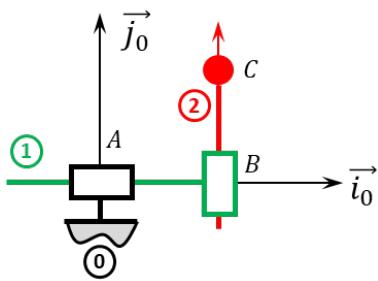
5. $K_i = 0,05$ et $K_p = 0,34$ (à vérifier).

Corrigé voir 151.

Exercice 179 – Mouvement TT – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \overrightarrow{j_0}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

Indications :

1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_{\forall p}$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \ddot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}$.

Corrigé voir 150.

Exercice 178 – Mouvement TT – *

B2-14

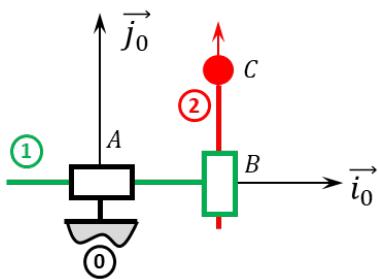
B2-15

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \overrightarrow{j_0}$. $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de 1, et m_1 sa masse. $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2 et m_2 sa masse.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

On cherche à résoudre le problème en statique. L'accélération de la pesanteur est donnée par $\overrightarrow{g} = -g \overrightarrow{j_0}$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

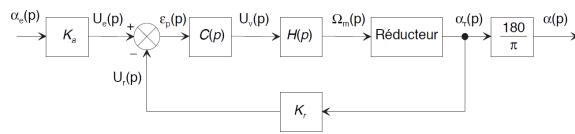
Corrigé voir 159.

Exercice 177 – Palettisation – Stabilité *

C2-03

Une boucle de position est représentée ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{30}{1 + 5 \times 10^{-3} p}$;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$: gain du capteur de position ;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- $N = 200$: rapport de transmission du réducteur (la réduction est donc de $1/N$) ;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degré ;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c .



On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$, que $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$ et que la FTBO est donnée par $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)}$ ($k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}$).

On souhaite une marge de phase de 45° .

Question 1 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Question 2 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Question 3 Déterminer l'écart de position.

Éléments de corrigé :

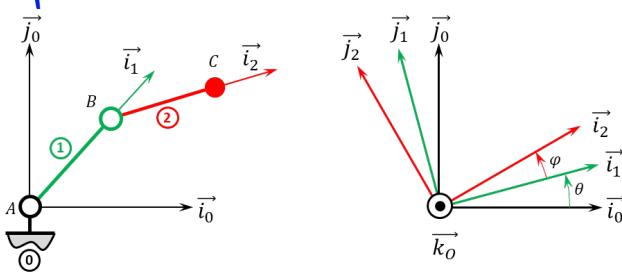
1. $k_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m}$.
2. $k_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau_m k_m k_r} = 471,1$.
3. $\varepsilon_s = 0$.

Corrigé voir 149.

Exercice 176 – Mouvement RR *

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1}$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \overrightarrow{i_2}$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = \pi$ rad.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.

Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.

Corrigé voir 147.

Exercice 175 – Mouvement RR *

B2-14

B2-15

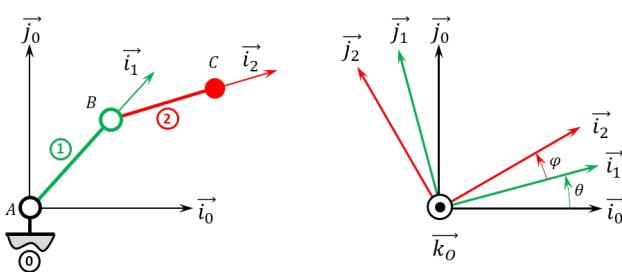
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20$ mm et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15$ mm. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 et $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}R \vec{i}_1$, on note m_1 la masse de 1;
- G_2 désigne le centre d'inertie de 2 et $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{2}L \vec{i}_2$, on note m_2 la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

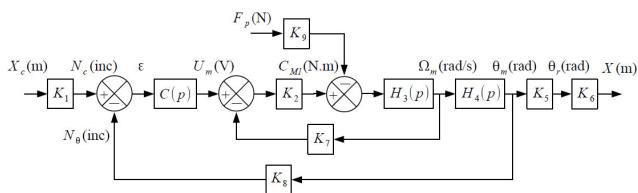
Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 146.

Exercice 174 – Machine de rééducation SysReeduc *

B2-07

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

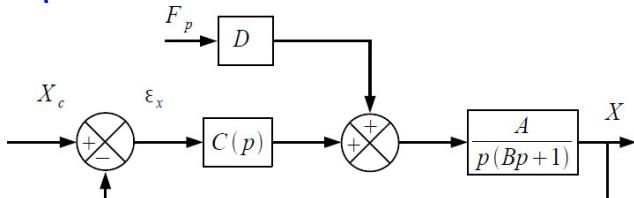
avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

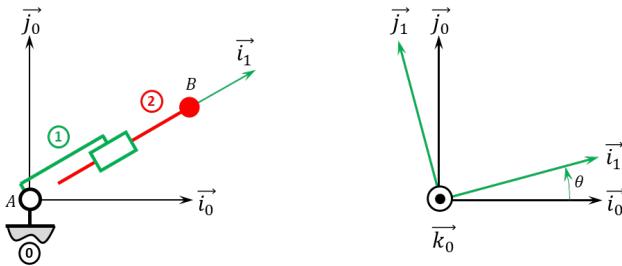
1. ...	<ul style="list-style-type: none"> • $K_2 = \frac{k_t}{R}$; • $K_7 = k_e$; • $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$; • $H_4(p) = \frac{1}{p}$; • $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$; • $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ; • $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.
2. $A = \frac{K_8}{k_e}$,	$B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$



Corrigé voir 158.

Exercice 173 – Mouvement RT *
B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$.


Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

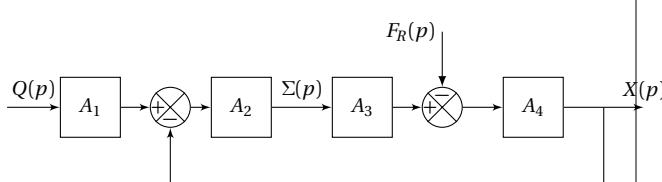
Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = 20$ mm.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = -\frac{\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = -20$ mm.

Corrigé voir 145.

Exercice 172 – Quille pendulaire*
B2-07

Le comportement d'un vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

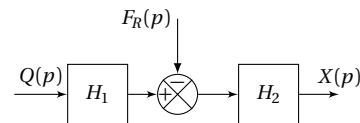
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin [$m^3 s^{-1}$];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin [m^2];
- k : raideur mécanique du vérin [$N m^{-1}$];
- V : volume d'huile de référence [m^3];
- B : coefficient de compressibilité de l'huile [$N m^{-2}$];
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- λ : coefficient de frottement visqueux [$N m^{-1} s$].

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.


Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

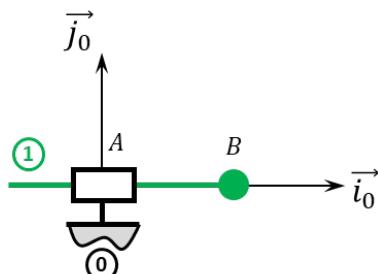
Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

1. $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
2. $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
3. $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2)}$.

Corrigé voir 158.

Exercice 171 – Mouvement T – *
C2-05
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.


Question 1 Quel est le mouvement de **I** par rapport à **0**.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **I** par rapport à **0**.

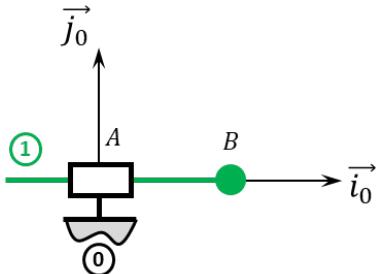
Indications :

- 1.
2. $x_B(t) = \lambda(t)$.

Corrigé voir 143.

Exercice 170 – Mouvement T – *
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0}$.



Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 2 Déterminer $\overline{\Gamma(B, 1/0)}$.

Indications :

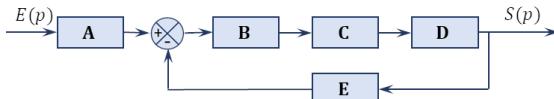
1. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} \end{array} \right\}_{\forall p}$.
2. $\overline{\Gamma(B, 1/0)} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0}$.

Corrigé voir 142.

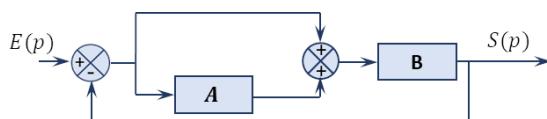
Exercice 169 – Calcul de FTBO*
B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

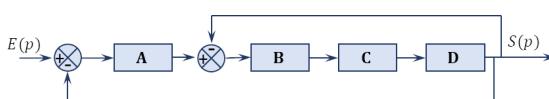
Question 1 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



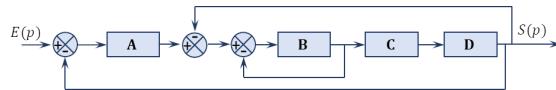
Question 2 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



Question 3 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



Question 4 Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

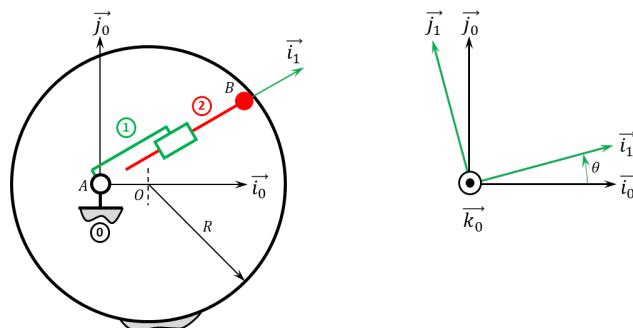


1. $\text{FTBO}(p) = BCDE$.
2. $\text{FTBO}(p) = B(1+A)$.
3. $\text{FTBO}(p) = A \frac{BCD}{1+BCD}$.
4. $\text{FTBO}(p) = \frac{ABCD}{1+B+BCD}$.

Corrigé voir 141.

Exercice 168 – Pompe à palettes **
B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e \overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_1}$. De plus $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 0 \text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \pi \text{ rad}$.

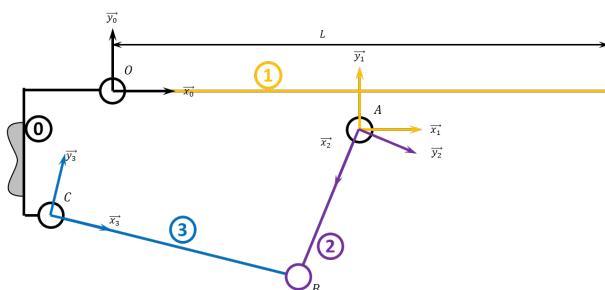
Question 4 En déduire la course de la pièce 2.

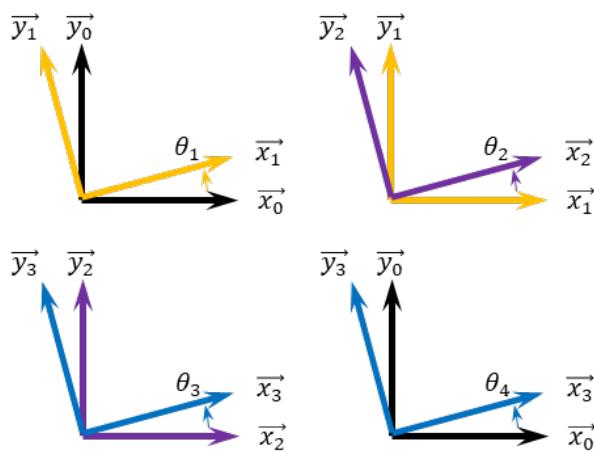
Corrigé voir 140.

Exercice 167 – Système 4 barres **
C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a \overrightarrow{x_1} - f \overrightarrow{y_1}$ avec $a = 355 \text{ mm}$ et $f = 13 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{AB} = b \overrightarrow{x_2}$ avec $b = 280 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{BC} = -c \overrightarrow{x_3}$ avec $c = 280 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{OC} = -d \overrightarrow{x_0} - e \overrightarrow{y_0}$ avec $d = 89,5 \text{ mm}$ et $e = 160 \text{ mm}$;





Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

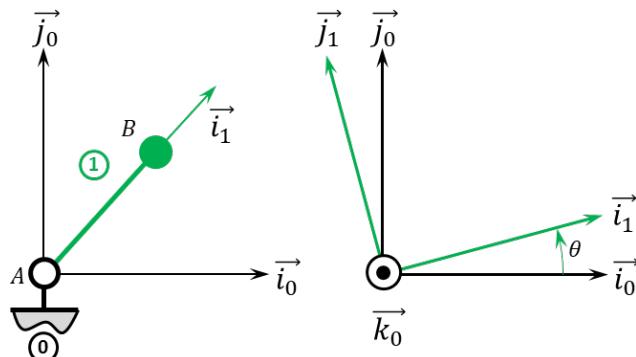
Corrigé voir 167.

Exercice 166 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

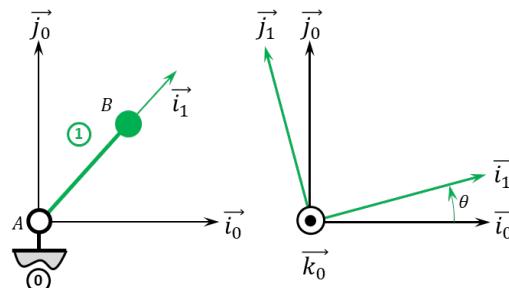
1. .
2. .
3. $x_B(t) = R \cos \theta(t)$ et $y_B(t) = R \sin \theta(t)$.

Corrigé voir 133.

Exercice 165 – Mouvement R *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par une autre méthode.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.

Indications :

1. $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
2. $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1$.
3. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{array} \right\}$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1$.

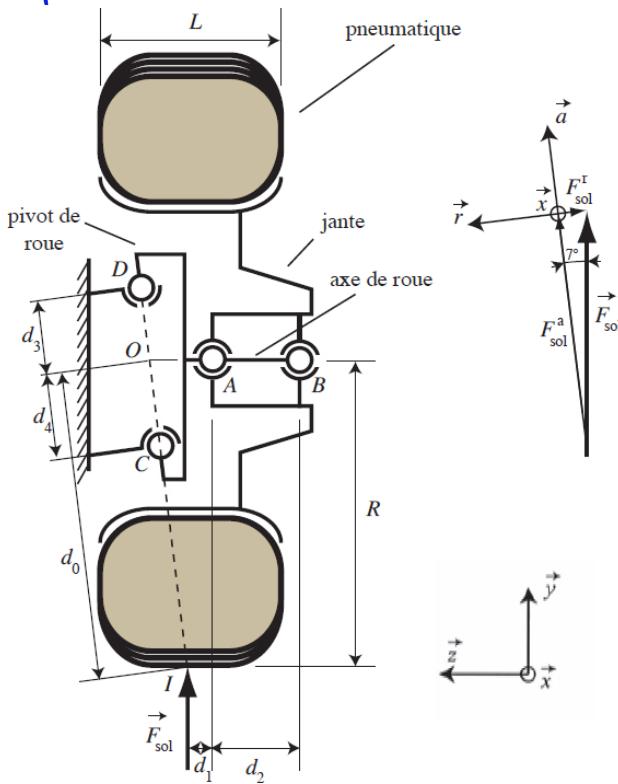
Corrigé voir 133.

Exercice 164 – Suspension automobile **

B2-14

C1-05

On s'intéresse à la liaison entre l'axe de la roue et le châssis du véhicule. Les notations adoptées seront les suivantes : F_C^a (respectivement F_C^r , F_C^x) désignera la composante suivant \vec{a} (respectivement \vec{r} , \vec{x}) de l'effort extérieur exercé en C. On procédera de même pour le point D.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

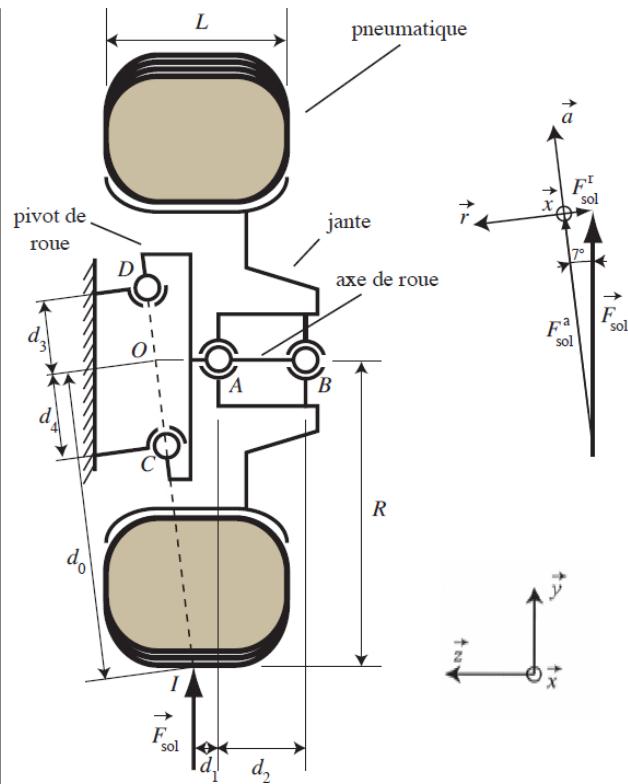
Question 2 Peut-on résoudre complètement le système ? Pourquoi ?

Corrigé voir 164.

Exercice 163 – Suspension automobile **

C2-07

On s'intéresse à la liaison entre l'axe de la roue et le châssis du véhicule. Les notations adoptées seront les suivantes : F_C^a (respectivement F_C^r , F_C^x) désignera la composante suivant \vec{a} (respectivement \vec{r} , \vec{x}) de l'effort extérieur exercé en C . On procédera de même pour le point D .



Question 1 Réaliser le graphe des liaisons en faisant apparaître les actions mécaniques. Exprimer les torseurs des actions mécaniques de chacune des liaisons.

Question 2 En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliquée au point C , en projection sur les axes de la base (\vec{a} , \vec{r} , \vec{x}) en fonction des composantes F_{sol}^a et F_{sol}^r et des dimensions d_0 , d_3 et d_4 .

Question 3 Résoudre littéralement le système.

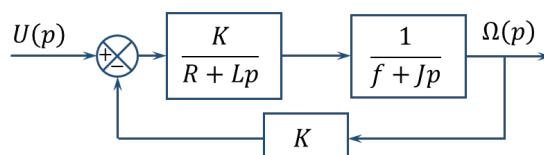
1. .
2. .
3. $Z_C = Z_D = 0, Y_D = -\frac{d_0 F_{sol}^t}{d_4 + d_3}, Y_C = -Y_D + F_{sol}^t$

Corrigé voir 163.

Exercice 162 – Fonctions de transfert*

B2-07

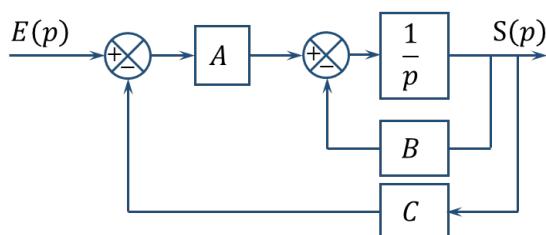
Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Soit le schéma-blocs suivant.

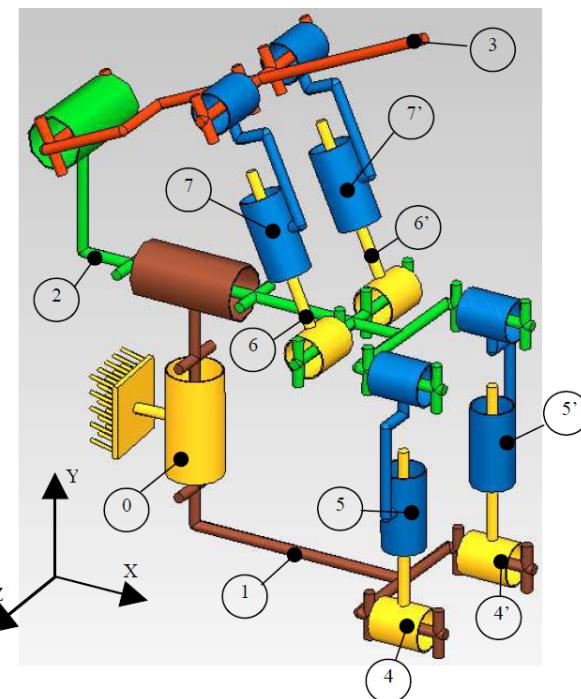


Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Indications

1. $K_{BO} = \frac{K^2}{Rf}$, $\omega_{BO} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}$, $\xi_{BO} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}Rf}$.
2. $K_{BF} = \frac{K}{K^2 + Rf}$, $\xi_{BF} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K^2}}$.
3. $K_{BO} = \frac{AC}{B}$ et $\tau_{BO} = \frac{1}{B}$.
4. $K_{BF} = \frac{A}{B + AC}$ et $\tau_{BF} = \frac{1}{B + AC}$.



Question 1 Réaliser le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

Question 3 Proposer des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

Éléments de corrigé :

1. .
2. $h = 8$.
3. .

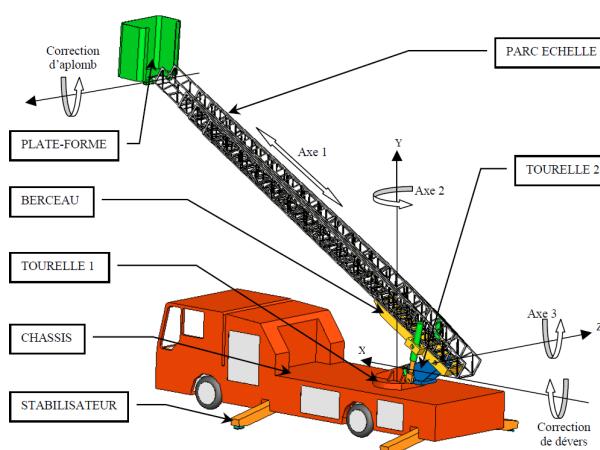
Exercice 161 – Système EPAS *

B2-16

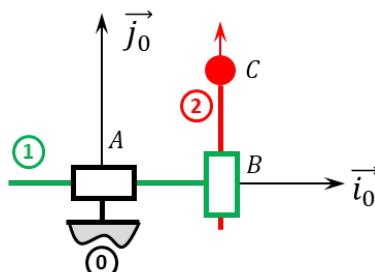
On s'intéresse à l'échelle pivotante équipant un camion de pompier.

Corrigé voir 162.

Corrigé voir 161.



On donne un schéma cinématique du système de manœuvre du parc échelle.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 10 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\lambda = 20 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.

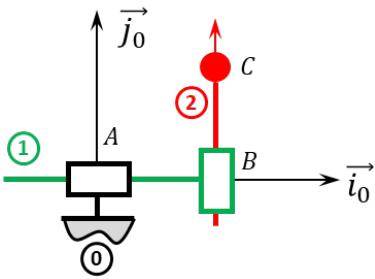
Corrigé voir 160.

Exercice 159 – Mouvement TT – *
B2-14
B2-15
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$. $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de 1, et m_1 sa masse. $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2 et m_2 sa masse.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

On cherche à résoudre le problème en statique. L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

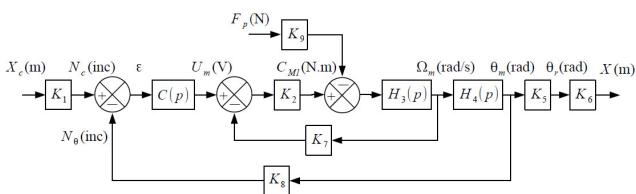
Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 159.

Exercice 158 – Machine de rééducation SysReedu *
B2-07

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

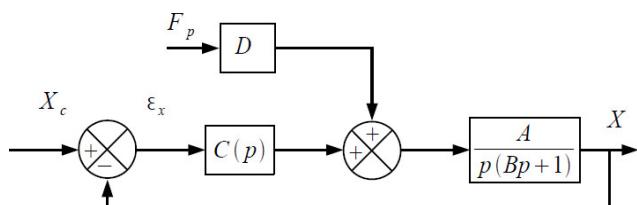
avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

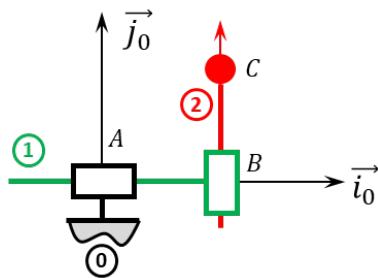
1. ...
 - $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
 - $K_7 = k_e$;
 - $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$;
 - $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
 - $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
 - $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
 - $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.
2. $A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$



Corrigé voir 158.

Exercice 157 – Mouvement TT – *
C2-05
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Éléments de corrigé :

1. $\varepsilon_{\text{con}} \% = \frac{1}{1 + K_p K_m K_{\text{pom}} K_{\text{cap}}} ;$
2. $K_p > 19 ;$
3. $\varepsilon_{\text{pert}} = \Delta Q_e \frac{K_f}{1 + K_{\text{cap}} K_p K_m K_{\text{pom}}} ;$
4. $K_p > -1 .$
5. $K_p < 0,125 .$ Il est impossible de vérifier les trois conditions avec un correcteur proportionnel.

Corrigé voir 156.

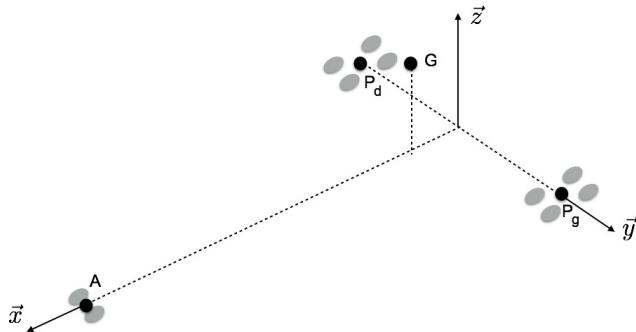
Corrigé voir 155.

Exercice 155 – *
B2-16

La configuration du train d'atterrissement de l'avion A350-900 est de type tricycle avec :

- deux atterrisseurs principaux (gauche et droit) attachés sur la voilure, légèrement à l'arrière du centre de gravité G de l'avion et de part et d'autre du plan de symétrie vertical (O, \vec{x}, \vec{z}) de l'avion. Ils supportent l'essentiel du poids de l'avion;
- un atterrisseur auxiliaire situé sous le nez de l'avion, qui assure l'équilibre longitudinal de l'avion au sol et permet de manœuvrer.

Les atterrisseurs principaux sont équipés de quatre roues chacun, tandis que l'atterrisseur auxiliaire est équipé de deux roues.



Les mobilités entre les différents éléments de l'avion (roues, fuselage...) ne sont pas considérées; ces éléments ne forment donc qu'une seule classe d'équivalence désignée « avion ».

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan). **Question 1** Réaliser le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales (A, \vec{z}) (atterrisseur auxiliaire), (P_g, \vec{z}) (atterrisseur principal gauche) et (P_d, \vec{z}) (atterrisseur principal droit).

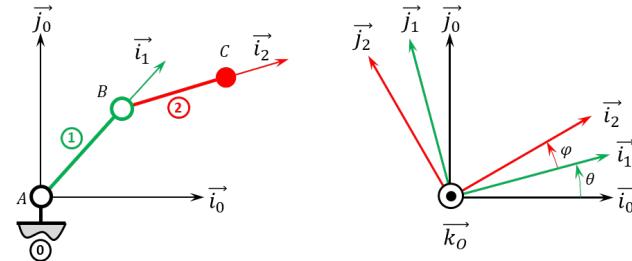
Question 3 Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.

Éléments de corrigé :

1. .
2. $h = 7 .$
3. $h = 0 .$

Exercice 154 – Mouvement RR *
C2-05
B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C .

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point C réalise un segment entre les points $[-20, 25]$ et $[20, 25]$ à la vitesse linéaire v .

Question 3 Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.

Question 4 Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C .

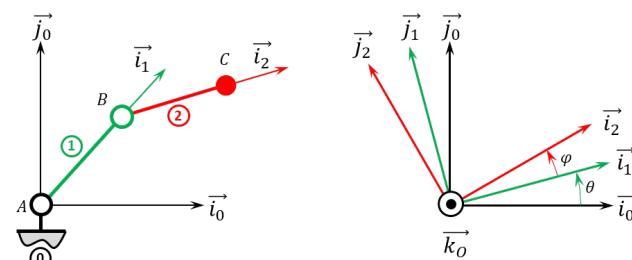
Question 5 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$.

Question 6 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.

Corrigé voir 154.

Exercice 153 – Mouvement RR *
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

Indications :

1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = R\dot{\theta}\vec{j}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{j}_2$.
2. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\vec{j}_2 + \dot{\theta}(L\vec{j}_2 + R\vec{j}_1)$ (c'est la même :)).
3. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{k}_0 \\ R\dot{\theta}\vec{j}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{j}_2 \end{array} \right\}_C$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1 + L(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})\vec{j}_2 - L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2\vec{i}_2$.

Corrigé voir 153.

Exercice 152 – *

B2-16

Question 1 Calculer l'hyperstatisme du modèle plan du mécanisme global de la pince (Figure 1).

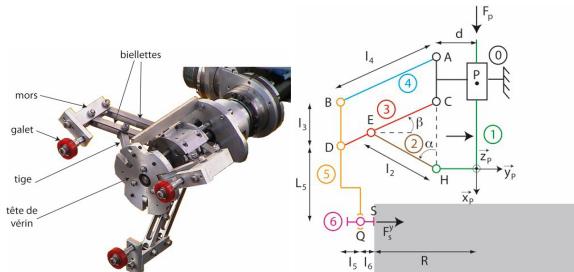


FIGURE 1 – Pince utilisée sur le système ROBOVOLC et schéma cinématique associé

Éléments de corrigé :

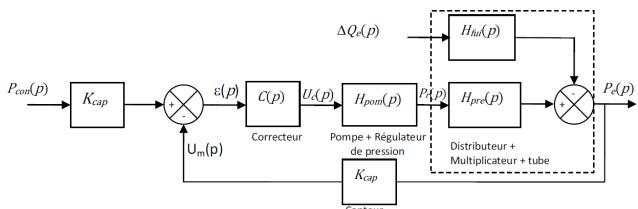
1. $h = 1$.

Corrigé voir 152.

Exercice 151 – Banc hydraulique *

C2-03

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



- $P_{\text{con}}(p)$: pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)
 $P_e(p)$: pression d'eau dans le tube (Pa)
 $U_c(p)$: tension de commande du régulateur de pression (V)
 $P_r(p)$: pression d'huile régulée (Pa)
 $\Delta Q_e(p)$: débit de fuite (m^3s^{-1})
 $U_m(p)$: tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmittances suivantes : $H_{\text{pre}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$ et $H_{\text{fui}}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$ avec $K_m = 3,24$; $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$; $T_1 = 10 \text{ s}$.
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert : $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$ avec $K_{\text{pom}} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$; $T_2 = 5 \text{ s}$.
- Le capteur est modélisé par un gain pur : $K_{\text{cap}} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$.

La pression de consigne est de $P_{\text{con}} = 800 \text{ bars}$ et les débits de fuite sont estimés à $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

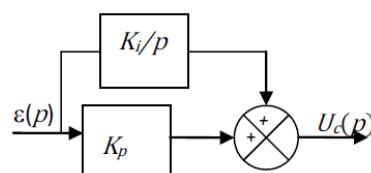
Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de 60° marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$ (voir remarque ci-dessous)
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation : $t_e \cdot \omega_{0\text{dB}} = 3$ où $\omega_{0\text{dB}}$ désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et t_e le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$, temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$, temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma bloc ci-dessous.



Question 1 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

Question 2 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

Question 3 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

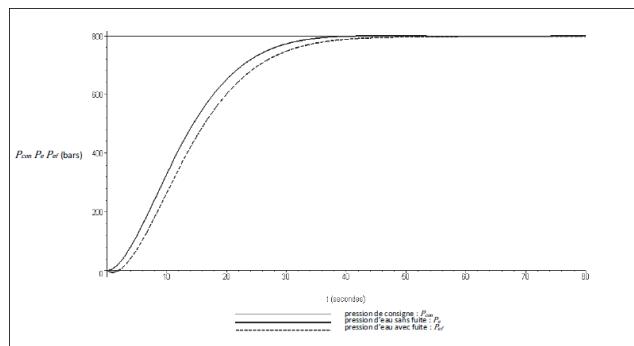
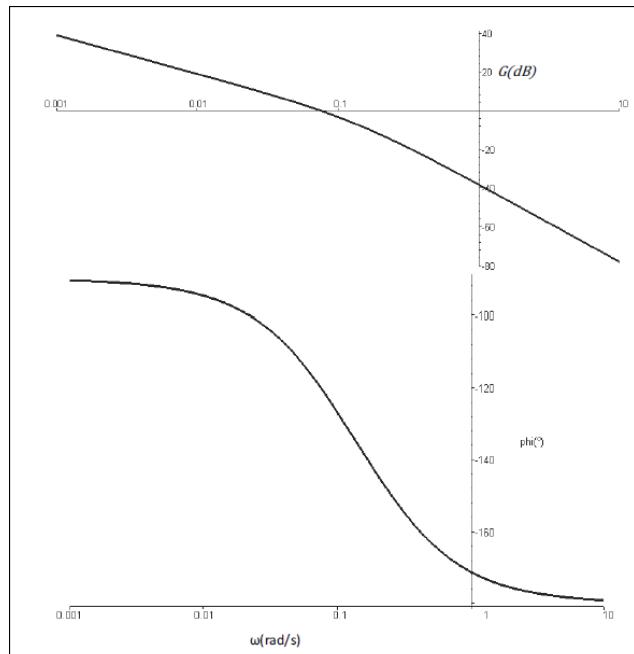
Question 4 Quelle valeur faut-il donner à ω_{0dB} pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

Question 5 Déterminer analytiquement le rapport $T = \frac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

Question 6 En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment. On donne sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

Question 7 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.



Eléments de corrigé :

$$1. C(p) = K_i \frac{1 + p \frac{K_p}{K_i}}{p}$$

$$2. .$$

$$3. .$$

$$4. T = 6,79.$$

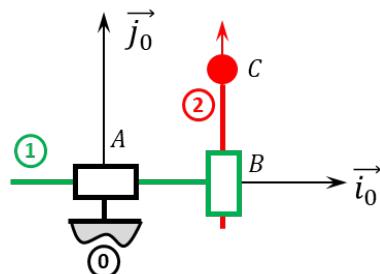
$$5. K_i = 0,05 \text{ et } K_p = 0,34 \text{ (à vérifier).}$$

Corrigé voir 151.

Exercice 150 – Mouvement TI – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

Indications :

1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0$.

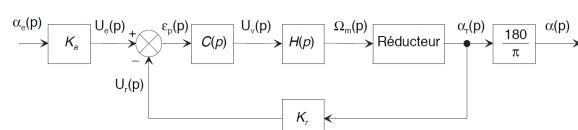
Corrigé voir 150.

Exercice 149 – Palettisation – Stabilité *

C2-03

Une boucle de position est représentée ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{30}{1 + 5 \times 10^{-3} p}$;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$: gain du capteur de position;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- $N = 200$: rapport de transmission du réducteur (la réduction est donc de $1/N$).
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degré;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c .



On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$, que $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$ et que la FTBO est donnée par $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)}$ ($k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}$).

On souhaite une marge de phase de 45° .

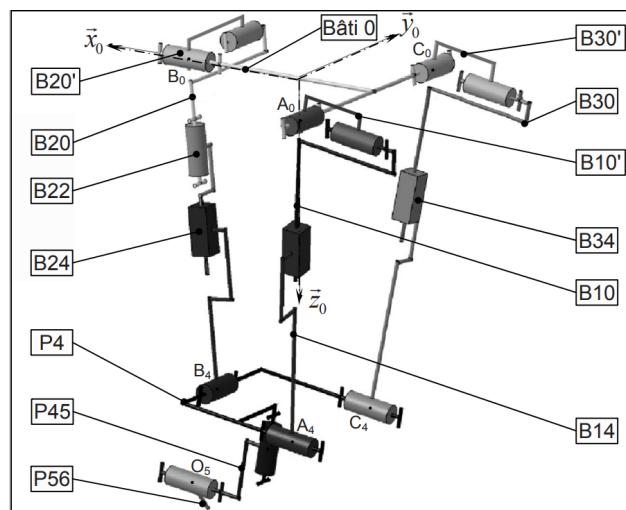
Question 1 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Question 2 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Question 3 Déterminer l'écart de position.

Éléments de corrigé :

1. $k_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m}$.
2. $k_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau_m k_m k_r} = 471,1$.
3. $\epsilon_s = 0$.



Question 1 Réaliser le graphe de liaisons.

Question 2 Calculer le degré d'hyperstatisme.

Éléments de corrigé :

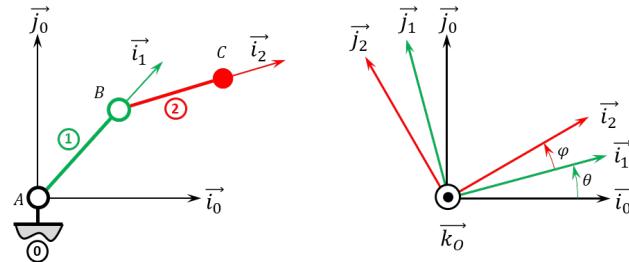
1. .
2. $h = 2$.

Corrigé voir 148.

Exercice 147 – Mouvement RR *

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\vec{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\varphi = \pi \text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

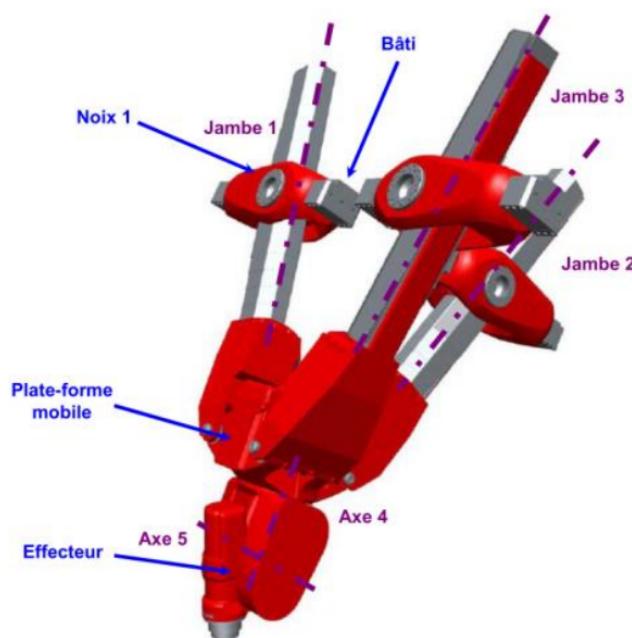
Corrigé voir 147.

Exercice 146 – Mouvement RR *

B2-14

B2-15

C1-05

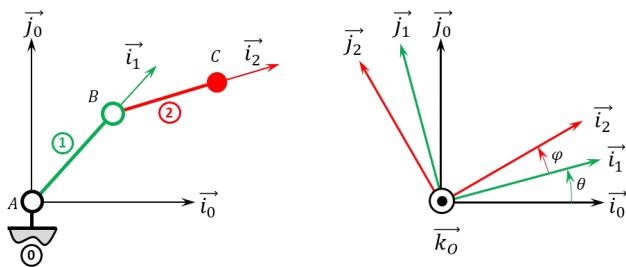


Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** et $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} R \vec{i}_1$, on note m_1 la masse de **1**;
- G_2 désigne le centre d'inertie de **2** et $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{2} L \vec{i}_2$, on note m_2 la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet de maintenir **1** en équilibre. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet de maintenir **2** en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

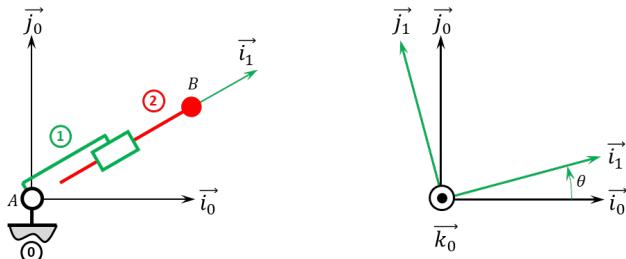
Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 146.

Exercice 145 – Mouvement RT *

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

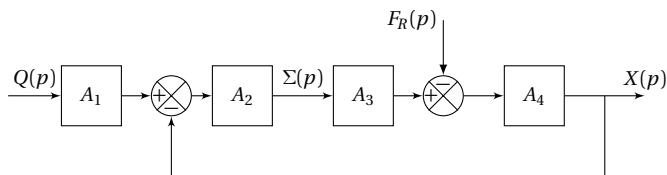
Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\lambda(t) = 20 \text{ mm}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\lambda(t) = -20 \text{ mm}$.

Exercice 144 – Quille pendulaire*

B2-07

Le comportement d'un vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

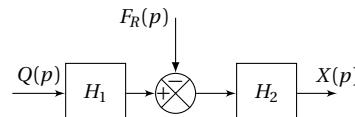
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin [m^2];
- k : raideur mécanique du vérin [N m^{-1}];
- V : volume d'huile de référence [m^3];
- B : coefficient de compressibilité de l'huile [N m^{-2}];
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- λ : coefficient de frottement visqueux [$\text{N m}^{-1} \text{s}$].

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

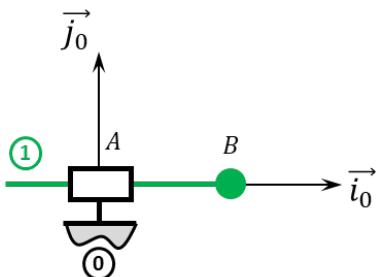
Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

- $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
- $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
- $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + KV + 2BS^2)}$.

Corrigé voir 158.

Exercice 143 – Mouvement T – *
C2-05
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

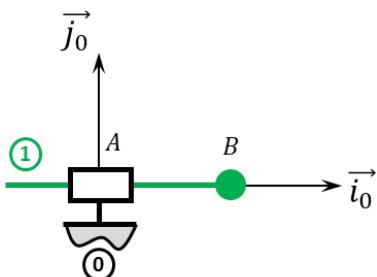
Indications :

1. .
2. $x_B(t) = \lambda(t)$.

Corrigé voir 143.

Exercice 142 – Mouvement T – *
B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 2 Déterminer $\overline{\Gamma}(B, 1/0)$.

Indications :

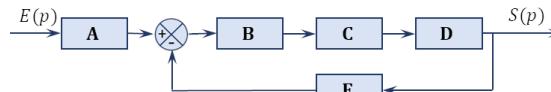
1. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
2. $\overline{\Gamma}(B, 1/0) = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0$.

Corrigé voir 142.

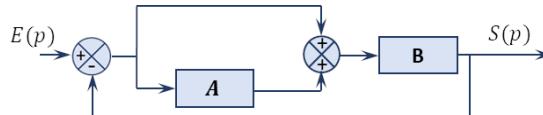
Exercice 141 – Calcul de FTBO*
B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

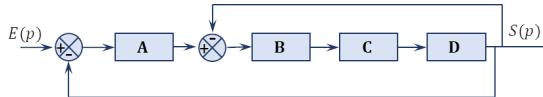
Question 1 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.



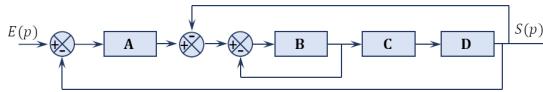
Question 2 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.



Question 3 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.



Question 4 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

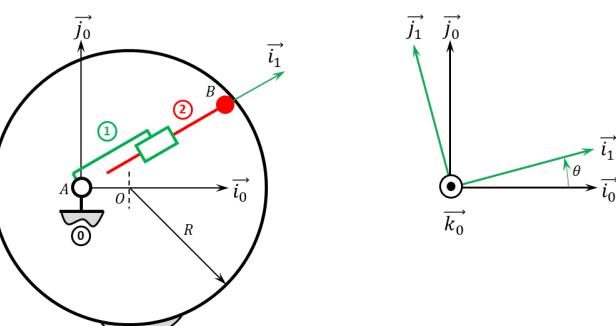


1. $\text{FTBO}(p) = BCDE$.
2. $\text{FTBO}(p) = B(1+A)$.
3. $\text{FTBO}(p) = A \frac{BCD}{1+BCD}$.
4. $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC}{1+B+BCD}$.

Corrigé voir 141.

Exercice 140 – Pompe à palettes **
B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=0 \text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=\pi \text{ rad}$.

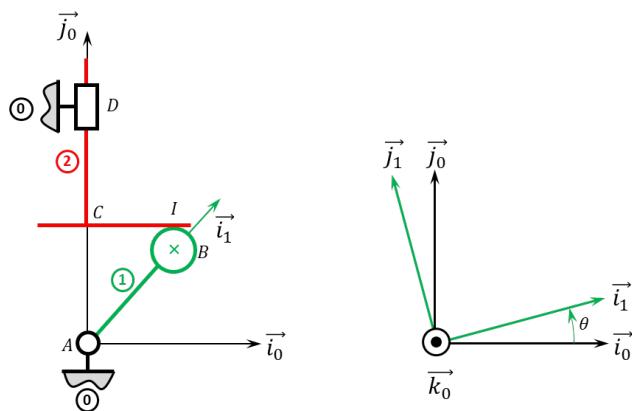
Question 4 En déduire la course de la pièce 2.

Corrigé voir 140.

Exercice 139 – Pompe à pistons radiaux **

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e \overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BI} = R \overrightarrow{j_0}$. De plus, $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 1 et 2 en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre 0 et 2.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=0 \text{ rad}$.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Question 5 En déduire la course de la pièce 2.

Corrigé voir 139.

Exercice 138 – Parallélépipède*

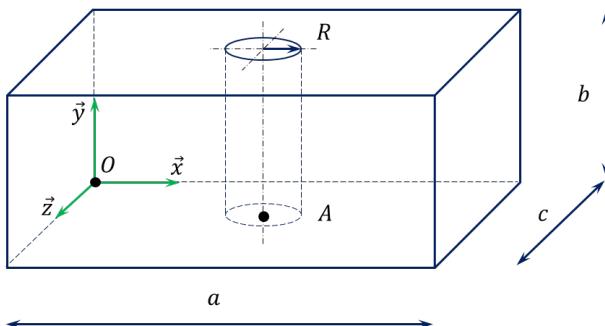
B2-10

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe (G, \vec{k}) de rayon R et de hauteur H et de masse m est donnée en

son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec $A = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)$ et $C = m \frac{R^2}{2}$.

La matrice d'inertie d'un parallélépipède de cotés a , b et c et de masse m est donnée en son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}$, $B = m \frac{a^2 + c^2}{12}$, $C = m \frac{a^2 + b^2}{12}$.

Soit la pièce suivante.



On pose $\overrightarrow{OA} = \frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}$.

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G , en A puis O .

Corrigé voir 138.

Exercice 137 – Parallélépipède percé*

B2-10

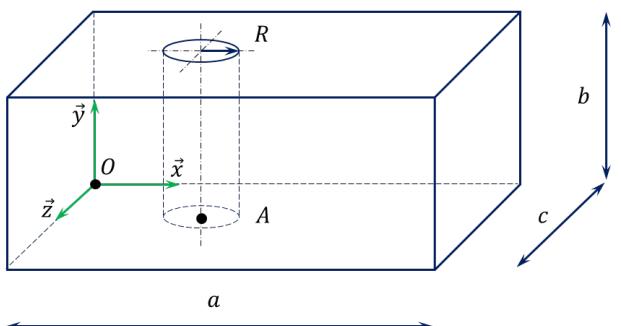
La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe (G, \vec{k}) de rayon R et de hauteur H et de masse m est donnée en

son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec $A = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)$ et $C = m \frac{R^2}{2}$.

La matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle de cotés a , b et c et de masse m est donnée en son

centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}$, $B = m \frac{a^2 + c^2}{12}$, $C = m \frac{a^2 + b^2}{12}$.

Soit la pièce suivante.



$$\text{On pose } \overrightarrow{OA} = \frac{a}{3} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}.$$

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

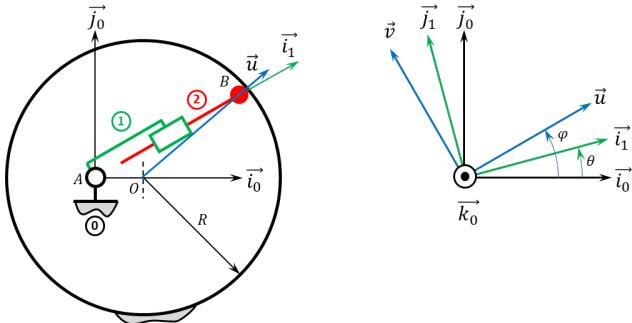
Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G .

Corrigé voir 137.

Exercice 136 – Pompe à piston radial *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 4 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

On prendra une section de piston 2 de 1 cm^2 et une fréquence de rotation de $\dot{\theta}(t) = \pi \times 2 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 5 Exprimer le débit instantané de la pompe.

Question 6 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ et $e = 15 \text{ mm}$.

Question 7 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

Indications (à vérifier...):

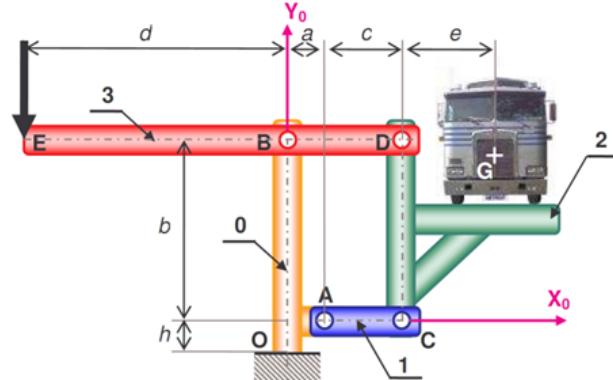
1. .
2. $\lambda(t) = e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$.
3. .
4. $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$.
5. .

Corrigé voir 136.

Exercice 135 – Pèse camion **

C1-05

On considère un bâti 0 auquel est attaché le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$. Le champ de pesanteur est $g = -g \vec{y}_0$. La barre 1 est liée au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe (A, \vec{z}_0). Le plateau porte camion 2 est lié à la barre 1 par une liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0). Le levier 3 est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe (B, \vec{z}_0). Ce levier est également lié au plateau 2 par une liaison pivot parfaite d'axe (D, \vec{z}_0). Le camion 4, de centre de masse G et de masse M inconnue, repose sur le plateau 2. L'action mécanique connue est caractérisée par : $\{_{\text{ext} \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_E$.



Question 1 Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.

Question 2 Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de F en fonction de M .

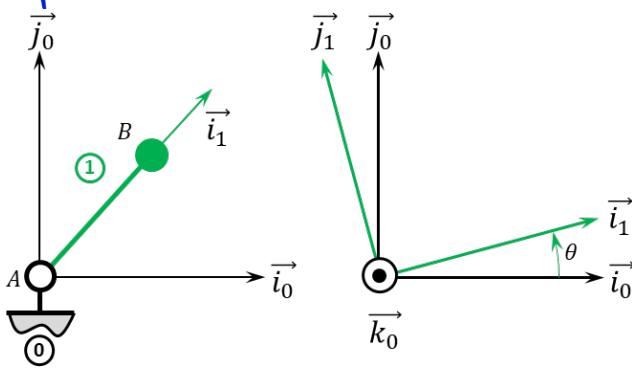
Corrigé voir 135.

Exercice 134 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

1. .
2. .
3. $x_B(t) = R \cos \theta(t)$ et $y_B(t) = R \sin \theta(t)$.

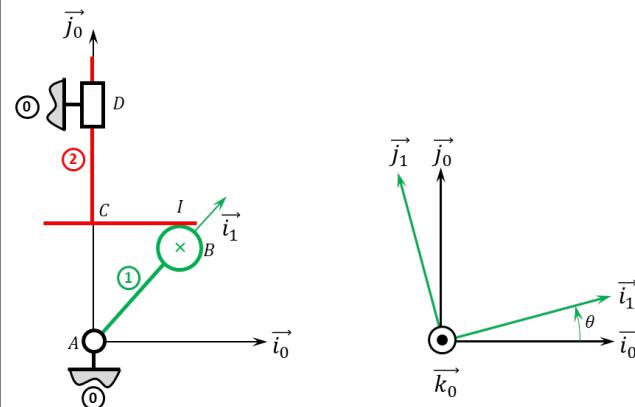
- Indications :
1. $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = R\dot{\theta}\vec{j}_1$.
 2. $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = R\ddot{\theta}\vec{j}_1$.
 3. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\vec{k}_0 \\ R\dot{\theta}\vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$.
 4. $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1$.

Corrigé voir 133.

Exercice 132 – Pompe à piston axial *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BI} = R\vec{j}_0$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\vec{j}_0$. De plus, $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 1 et 2 en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre 0 et 2.

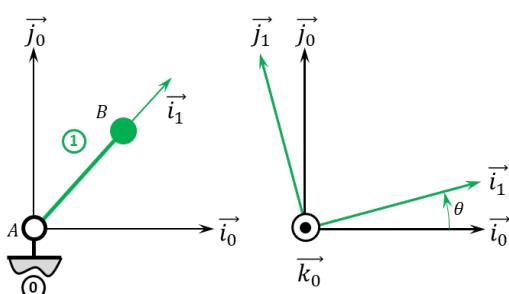


Corrigé voir 133.

Exercice 133 – Mouvement R *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$ par une autre méthode.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$.

Indications :

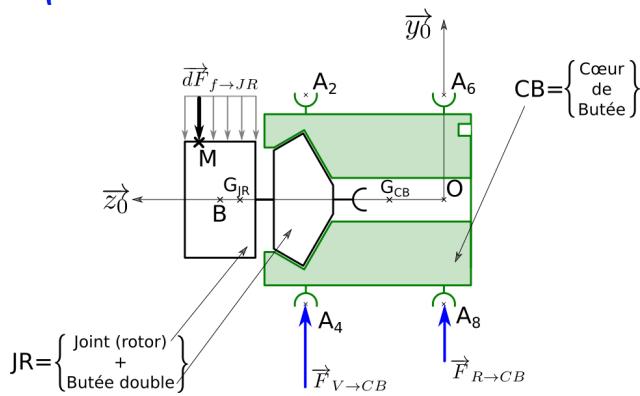
1. .
2. $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$.
3. $\dot{\lambda}(t) = e\dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.
4. $q(t) = eS\dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.
5. .

Corrigé voir 132.

Exercice 131 – Banc Balafré *

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

La figure suivante représente le paramétrage permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble $S = \{JR + CB\}$. On nommera G le centre d'inertie de l'ensemble S.


Données et hypothèses

- On note $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$ où R_J est le rayon du joint avec $R_J = 175$ mm;
- la longueur du joint est $L_J = 150$ mm. La position du point B , centre du joint est $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$ avec $z_B = 425$ mm;
- Le coeur de butée a une masse $M_{CB} = 40$ kg et la position de son centre d'inertie G_{CB} est paramétrée par $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$ avec $L_{CB} = 193$ mm;

- L'ensemble $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$ a une masse $M_{JR} = 100$ kg et la position de son centre d'inertie G_{JR} est paramétrée par $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0}$ avec $L_{JR} = 390$ mm. On notera $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$ la matrice d'inertie de l'ensemble JR au point G_{JR} exprimée dans une base $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$ liée à JR ;

- Les positions des points A_4 et A_8 sont paramétrées par $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$ avec $z_4 = 280$ mm et $R_{CB} = 150$ mm.

Question 1 Déterminer l'expression de la coordonnée z_G de \overrightarrow{OG} selon $\overrightarrow{z_0}$. Faire l'application numérique.

Question 2 Sachant que l'ensemble JR possède une symétrie de révolution par rapport à $(O, \overrightarrow{z_0})$, simplifier la matrice d'inertie $I_{G_{JR}}(JR)$.

Corrigé voir 131.

Exercice 211 – Moteur à courant continu*
B2-04

Question 1 Exprimer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$.

En passant les équations dans le domaine de Laplace, on a :

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$;
- $E(p) = K_m\Omega(p)$;
- $C(p) = K_mI(p)$;
- $C(p) - f\Omega(p) = Jp\Omega(p) \Leftrightarrow C(p) = \Omega(p)(Jp + f)$.

Vous devez savoir qu'un moteur à courant continu est piloté en tension ($U(p)$) et qu'en sortie on observe le taux de rotation ($\Omega(p)$).

En ne conservant que $U(p)$ et $\Omega(p)$, on a donc $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p) \Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + (R + Lp)\frac{C(p)}{K_m} \Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + (R + Lp)\frac{\Omega(p)(Jp + f)}{K_m} \Leftrightarrow U(p) = \left(K_m + (R + Lp)\frac{(Jp + f)}{K_m} \right) \Omega(p) \Leftrightarrow U(p) = \frac{K_m^2 + (R + Lp)(Jp + f)}{K_m} \Omega(p)$.

On a donc $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{K^2 + (R + Lp)(Jp + f)}$.

Question 2 Préciser l'ordre et la classe de H .

H est d'ordre 2 et de classe 0 car on ne peut pas mettre de p en facteur. Le terme de plus haut degré du dénominateur est de degré 2.

Question 3 Mettre $H(p)$ sous forme canonique.

$$H(p) = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2} \Leftrightarrow H(p) = \frac{\frac{K_m}{K_m^2 + Rf}}{1 + \frac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}p + \frac{LJ}{K_m^2 + Rf}p^2}.$$

Question 4 Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.

En identifiant avec la forme canonique standard, $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ soit $K = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf}$, $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{K_m^2 + Rf}$.

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{K_m^2 + Rf}.$$

$$\text{Au final, } K = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf}, \omega_0 = \sqrt{\frac{K_m^2 + Rf}{LJ}}, \xi = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ(K_m^2 + Rf)}}.$$

Question 5 Vérifier l'homogénéité des différentes constantes.

Le gain doit être en $\text{rad s}^{-1}\text{V}^{-1}$.

D'une part, $[K_m] = \text{N mA}^{-1}$. D'autre part, $[K_m] = \text{V rad}^{-1}\text{s}$. On a donc $\text{V rad}^{-1}\text{s} = \text{N mA}^{-1}$. (On pourrait aussi le montrer par une analyse dimensionnelle...)

De plus $[R] = \Omega = \frac{V}{A}$ et $[f] = \text{N m rad}^{-1}\text{s}$.

$$\text{On a donc } [K] = \frac{\text{N mA}^{-1}}{(\text{N mA}^{-1})^2 + \text{N m rad}^{-1}\text{s} \times \text{VA}^{-1}} = \frac{1}{\text{N mA}^{-1} + \text{rad}^{-1}\text{s V}} = \frac{1}{\text{rad}^{-1}\text{s V}} = \text{rad s}^{-1}\text{V}^{-1}.$$

La pulsation propre doit être en s^{-1} ou rad s^{-1} .

On a vu que $[K_m^2] = [Rf]$. De plus $[L] = H = \text{VsA}^{-1}$ et $[J] = \text{Nm rad}^{-1}\text{s}^2$ (PFD).

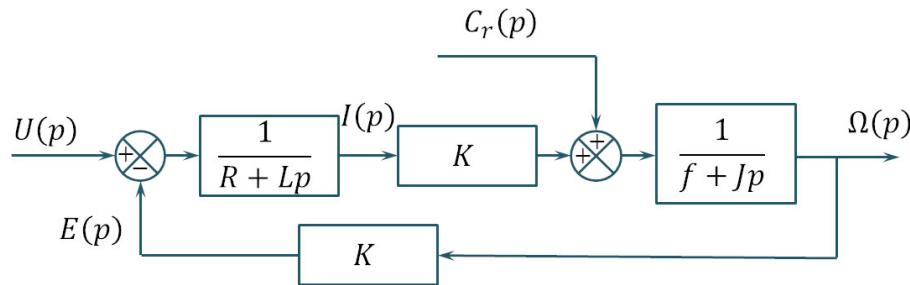
$$[\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{N}^2 \text{m}^2 \text{A}^{-2}}{\text{VsA}^{-1} \times \text{Nm rad}^{-1}\text{s}^2}} = \sqrt{\frac{\text{N m rad}}{\text{VsAs}^2}}. \text{ Or, } W = \text{N m rad s}^{-1} = \text{VA}.$$

$$\text{On a alors } [\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{N m rad s}^{-1}}{\text{Vs}^2 \text{A}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} = \text{s}^{-1}.$$

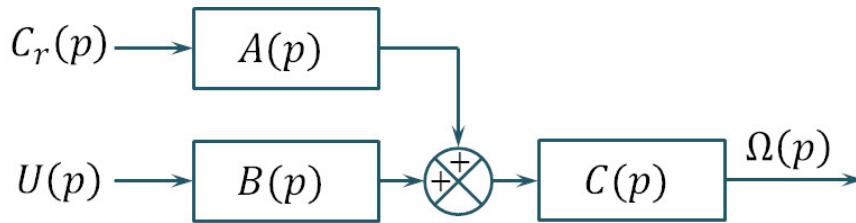
Enfin, ξ est sans unité... à vérifier :)

Exercice 210 – Moteur à courant continu*
B2-07

Question 1 Réaliser le schéma-blocs.



Question 2 Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.



En utilisant le schéma-blocs proposé, on a $\Omega(p) = (C_r(p)A(p) + U(p)B(p))C(p)$.

$$\text{D'autre part, } \Omega(p) = \left(C_r(p) + \frac{K}{R+Lp} (U(p) - K\Omega(p)) \right) \frac{1}{f+Jp}.$$

$$\text{On a donc } (f+Jp)\Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow (f+Jp)\Omega(p) + \frac{K^2}{R+Lp}\Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \left((f+Jp) + \frac{K^2}{R+Lp} \right) \Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}{R+Lp} \Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \Omega(p) = \left(C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp} \right) \frac{R+Lp}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}.$$

Dès lors plusieurs schéma-blocs peuvent répondre à la question. Par exemple, $A(p) = 1$, $B(p) = \frac{K}{R+Lp}$, $C(p) = \frac{R+Lp}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}$.

$$\text{En poursuivant, on a aussi : } \Omega(p) = (C_r(p)(R+Lp) + U(p)K) \frac{1}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}.$$

$$\text{On a donc aussi, } A(p) = R+Lp, B(p) = K, C(p) = \frac{1}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}$$

Exercice 209 – Valeur finale*

C2-03

Question 1 Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude E_0 .

$$\text{On a } H(p) = \frac{\frac{1}{p}(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{1 + \frac{CK}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}} = \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK}. \text{ En conséquence, } S(p) = E(p) \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK}.$$

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)H(p). \text{ Dans le cas où } E(p) \text{ est un échelon, on a } E(p) = \frac{E_0}{p} \text{ et donc}$$

$$s_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} = \frac{E_0}{C}.$$

Question 2 En déduire la valeur de l'erreur statique.

$$\text{L'erreur statique est donnée par } \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = E_0 - \frac{E_0}{C}.$$

Question 3 Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est une rampe de pente k .

On a maintenant $E(p) = \frac{k}{p^2}$. On a donc et donc $s_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{k}{p^2} \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} = +\infty$.

Question 4 En déduire la valeur de l'erreur de traînage.

$$\begin{aligned}\varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{k}{p^2} - \frac{k}{p^2} \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \left(1 - \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK - K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} = +\infty\end{aligned}$$

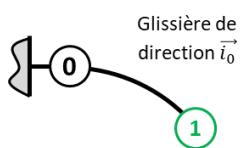
Question 5 Qu'en est-il si $C = 1$?

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK - K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + K} = \lim_{p \rightarrow 0} k \frac{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + K} = \frac{k}{K}.$$

Exercice 208 – Mouvement T – *

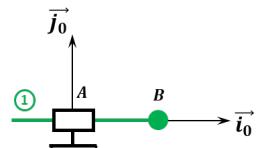
B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



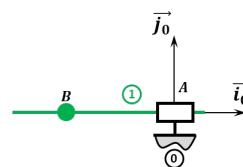
Question 2 Retracer le

schéma cinématique pour $\lambda = 10 \text{ mm}$.



Question 3 Retracer le

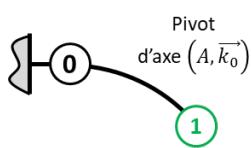
schéma cinématique pour $\lambda = -20 \text{ mm}$.



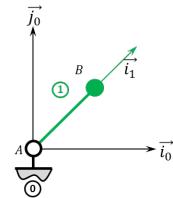
Exercice 207 – Mouvement R *

B2-12

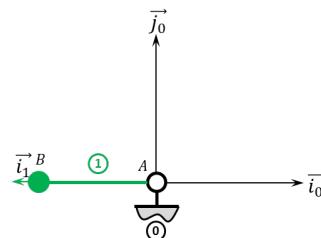
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$



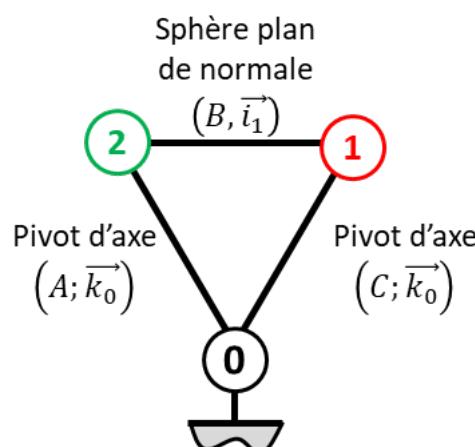
Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \pi \text{ rad.}$



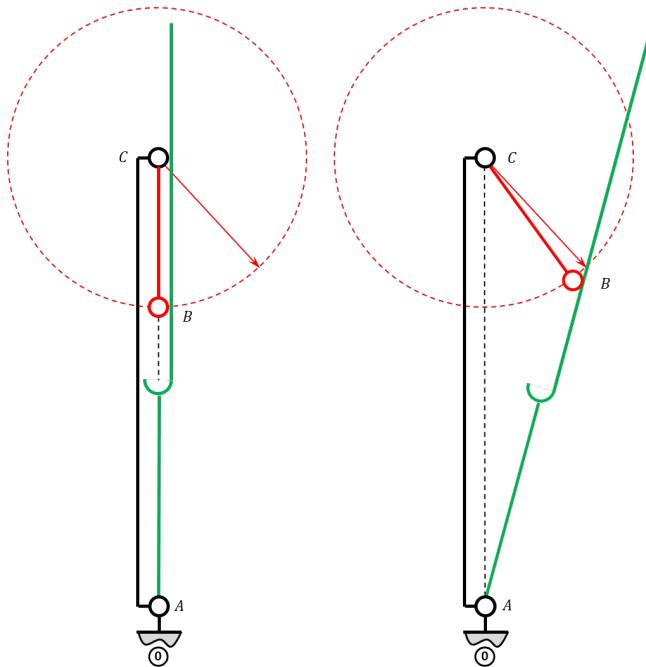
Exercice 206 – Barrière Sympact **

B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ rad.



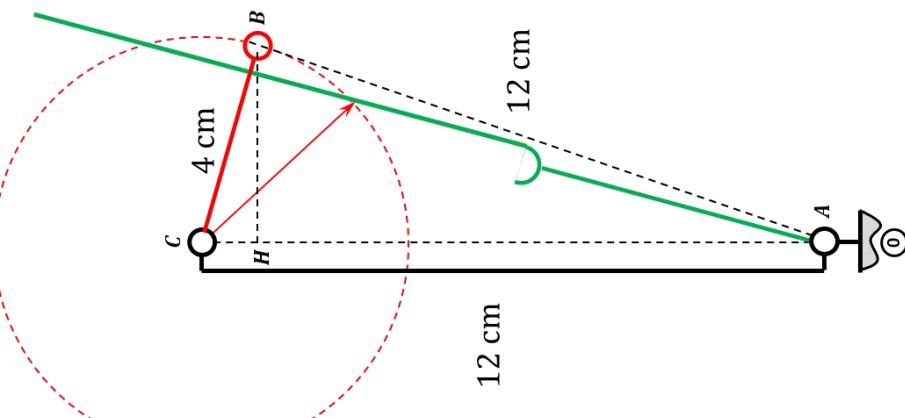
Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 75^\circ$.

Question 4 Dans l'hypothèse où la pièce 1 peut faire des tours complets, quelle doit être la longueur minimale de la pièce 2.

Dans cas, dans le pire des cas, A, B et C sont alignés (avec B au-dessus de C). Il faut donc $AB = AC + CB = 160$ mm.

Question 5 Dans l'hypothèse où la pièce 2 fait 12 cm, quel sera le débattement maximal de la pièce 1.

Comme je suis paresseux, j'ai réalisé la construction avec geogebra. On mesure $160,8^\circ$.



Exercice 205 – Mouvement T – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

1 est en translation de direction \vec{i}_0 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 204 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

1 est en rotation de centre **A** et d'axe \vec{k}_0 par rapport à **0**.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point **B** appartenant à **1** par rapport à **0**.

B est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre **A** et de rayon R).

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1 = R \cos \theta \vec{i}_0 + R \sin \theta \vec{j}_0$. La trajectoire du point **B** est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t) = R \cos \theta(t) \\ y_B(t) = R \sin \theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 203 – Barrière Sympact **

B2-13

Question 1 Calculer $\overline{V(B, 1/0)}$?

$$\overline{V(B, 1/0)} = \overline{V(C, 1/0)} + \overline{BC} \wedge \Omega(1/0) = \overrightarrow{0} - R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

(Possibilité d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 2 Calculer $\overline{V(B, 2/0)}$?

$$\overline{V(B, 2/0)} = \overline{V(A, 2/0)} + \overline{BA} \wedge \Omega(2/0) = \overrightarrow{0} - \lambda \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{k}_0 = \lambda \dot{\varphi} \vec{j}_2.$$

(Impossibilité d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 3 Justifier que $\overline{V(B, 2/1)} \cdot \vec{j}_2 = 0$.

La liaison entre **2** et **1** est une liaison ponctuelle de normale \vec{j}_2 . Il n'y a donc pas de vitesse sur cette direction (ce qui de plus provoquerait une rupture de contact en **B**).

Question 4 En déduire une relation cinématique entre les différentes grandeurs.

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse, on a $\overline{V(B, 2/1)} \cdot \vec{j}_2 = (\overline{V(B, 2/0)} - \overline{V(B, 1/0)}) \cdot \vec{j}_2 \Leftrightarrow 0 = (\lambda \dot{\varphi} \vec{j}_2 - R \dot{\theta} \vec{j}_1) \cdot \vec{j}_2 \Leftrightarrow 0 = \lambda \dot{\varphi} - R \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta)$

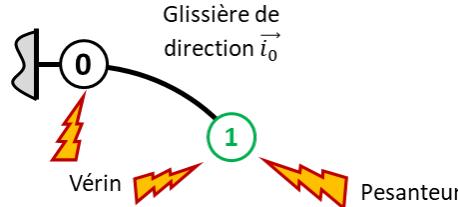
Exercice 202 – Mouvement T – *

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{k}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 + N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$$\{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 \\ N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G, \{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G.$$

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le vérin pour maintenir **1** en équilibre.

Mouvement de translation. On isole **1** et on applique le théorème de la résultante statique en projection suivant \vec{i}_0 .

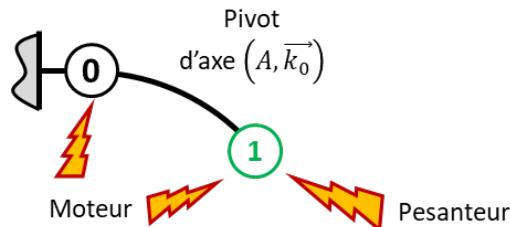
Exercice 201 – Mouvement R *

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{k}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A.$$

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A.$$

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le moteur pour maintenir **1** en équilibre.

On isole **1** et on réalise un théorème du moment statique en **A** en projection sur \vec{k}_0 .

Exercice 200 – Barrière Sympact **

C1-05

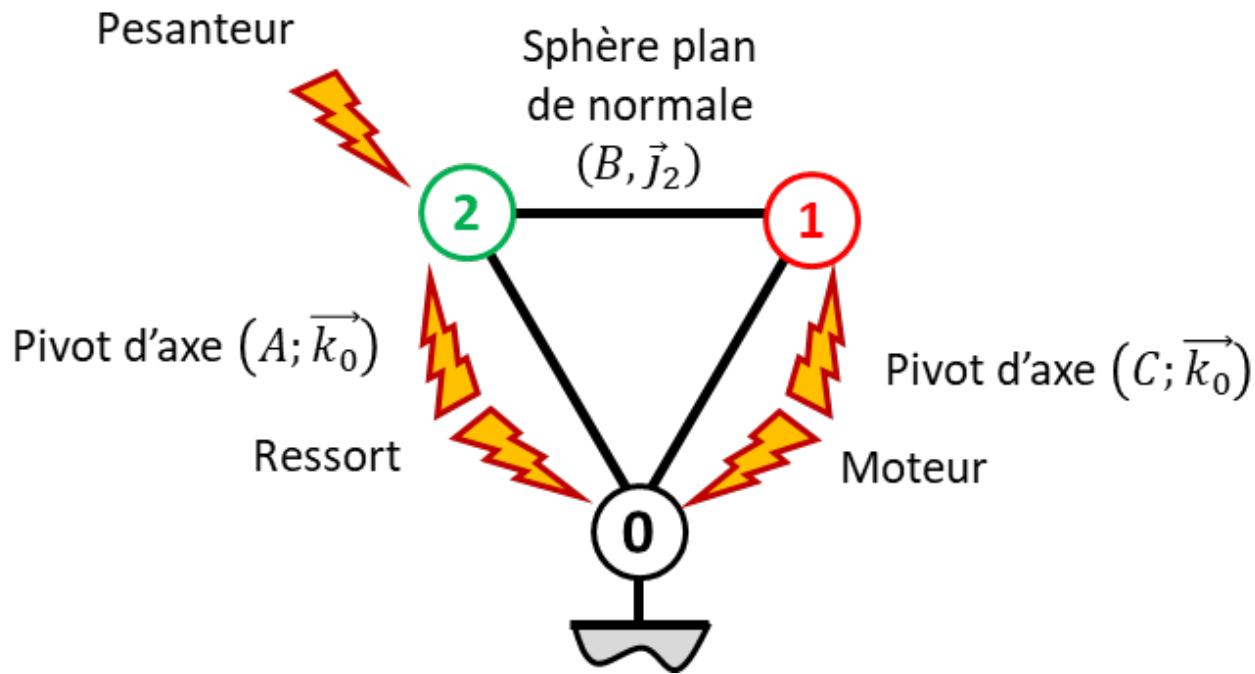
On néglige la pesanteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_r \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce **2**. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100°. On considère que le couple est nul lorsque la pièce **2** est à la verticale ($\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$). Il est au maximum lorsque $\varphi_f = 0$.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -M g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L \vec{i}_2$.

Question 1 Réaliser un graphe d'analyse.



Question 2 Expliciter C_r en fonction des différents constantes (k, φ_0, φ_f) et celles qui vous sembleraient utile. Exprimons le couple du ressort par $C_r(\varphi) = a\varphi + b$. On a d'une part, $C_r(\varphi_0) = 0$. D'autre part, on a une raideur k de 45 Nm pour un angle de rotation 100° soit $k = \frac{45}{100 \frac{\pi}{180}} = 26 \text{ Nm rad}^{-1}$. On a donc $C_r(\varphi_f) = k \frac{\pi}{2}$.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} a\varphi_0 + b = 0 \\ a\varphi_f + b = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a\varphi_0 \\ a\varphi_f - a\varphi_0 = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a\varphi_0 \\ a(\varphi_f - \varphi_0) = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a\varphi_0 \\ a = k \frac{\pi}{2(\varphi_f - \varphi_0)} \end{cases}$$

$$\text{On a donc } C_r(\varphi) = k \frac{\pi}{2(\varphi_f - \varphi_0)} \varphi - k \frac{\pi \varphi_0}{2(\varphi_f - \varphi_0)}.$$

$$\text{Avec } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi_f = 0, \text{ on a } C_r(\varphi) = -k\varphi + k \frac{\pi}{2}.$$

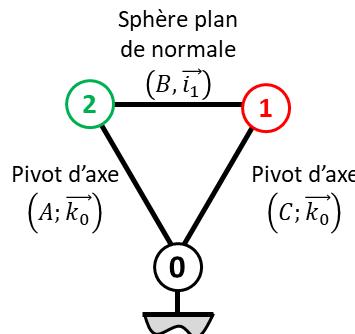
Question 3 Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur \vec{k}_0 . On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur \vec{k}_0 . On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

Exercice 199 – Barrière Sympact *

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ soit $\lambda(t)\overrightarrow{i_2} - R\overrightarrow{i_1} - h\overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$.

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère \mathcal{R}_0 , on a $\lambda(t)(\cos \varphi(t)\overrightarrow{i_0} + \sin \varphi(t)\overrightarrow{j_0}) - R(\cos \theta(t)\overrightarrow{i_0} + \sin \theta(t)\overrightarrow{j_0}) - h\overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$.

$$\text{On a alors } \begin{cases} \lambda(t)\cos \varphi(t) - R\cos \theta(t) = 0 \\ \lambda(t)\sin \varphi(t) - R\sin \theta(t) - h = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \lambda(t)\cos \varphi(t) = R\cos \theta(t) \\ \lambda(t)\sin \varphi(t) = R\sin \theta(t) + h \end{cases}.$$

En faisant le rapport des équations, on a donc : $\tan \varphi(t) = \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}$ (pour $\theta(t) \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi$).

Question 3 Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

On a : $\varphi(t) = \arctan\left(\frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}\right)$.

Pour commencer, $(R \sin \theta(t) + h)' = R\dot{\theta}(t)\cos \theta(t)$ et $(R \cos \theta(t))' = -R\dot{\theta}(t)\sin \theta(t)$.

$$\text{De plus, } \left(\frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}\right)' =$$

$$= \frac{R\dot{\theta}(t)\cos \theta(t)R\cos \theta(t) + R\dot{\theta}(t)\sin \theta(t)(R\sin \theta(t) + h)}{R^2 \cos^2 \theta(t)}$$

$$= \frac{R^2\dot{\theta}(t)\cos^2 \theta(t) + R\dot{\theta}(t)\sin \theta(t)(R\sin \theta(t) + h)}{R^2 \cos^2 \theta(t)}$$

$$= \frac{R\dot{\theta}(t)\cos^2 \theta(t) + R\sin^2 \theta(t)\dot{\theta}(t) + h\dot{\theta}(t)\sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}$$

$$= \dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}.$$

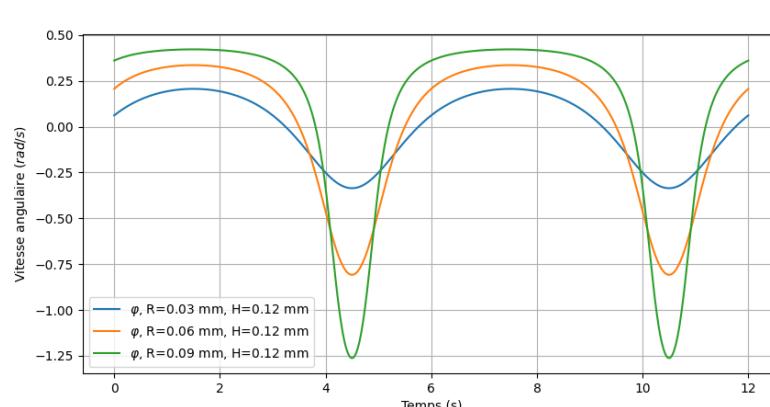
Au final,

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{1 + \left(\frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}\right)^2} = \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{1 + \frac{(R \sin \theta(t) + h)^2}{R^2 \cos^2 \theta(t)}}.$$

$$\dot{\varphi}(t) = R^2 \cos^2 \theta(t) \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{R^2 \cos^2 \theta(t) + \frac{(R \sin \theta(t) + h)^2}{R^2 \cos^2 \theta(t)}} = \frac{R\dot{\theta}(t)(R + h \sin \theta(t))}{R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) + h)^2}.$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{R\dot{\theta}(t)(R + h \sin \theta(t))}{R^2 \cos^2 \theta(t) + R^2 \sin^2 \theta(t) + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)} = \frac{R\dot{\theta}(t)(R + h \sin \theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)}.$$

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.



```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

```

```

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phiip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position angulaire ($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\theta$, R="+str(R)+" mm, H="+str(H)+" mm"))
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\varphi$, R="+str(R)+" mm, H="+str(H)+" mm"))
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_phiip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phiip = calc_phiip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse angulaire ($rad/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\theta$, R="+str(R)+" mm, H="+str(H)+" mm"))
    plt.plot(les_t,les_phiip,label=str("$\dot{\varphi}$, R="+str(R)+" mm, H="+str(H)+" mm"))
    plt.legend()
    plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phiip()

```

Exercice 198 – Diagramme de Bode*

C2-02

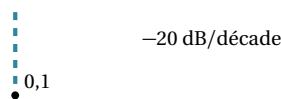
Question 1 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante : $F_1(p) = \frac{15}{1 + 10p}$.

Tracer asymptotique

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = \frac{1}{10} \text{ rad/s}$	$\omega \rightarrow \infty$
$H(p) = \frac{15}{1 + 10p}$	0 dB/décade 0°		-20 dB/décade -90°

Positionnement du diagramme de gain Lorsque que ω tend vers 0, le gain tend vers $20 \log 15 = 23,5$ dB.

23,5 dB, 0 dB/décade



Question 2 Le système est sollicité par une entrée sinusoïdale de période 6 s et d'amplitude 10. Quel est le signal de sortie ?

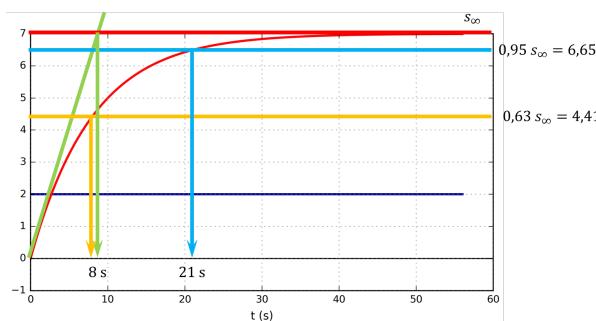
Pour une période de 60 s, la pulsation est de $\frac{2\pi}{T}$ soit $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$. Pour cette pulsation le gain est de 20 dB et le déphasage de $-\frac{\pi}{4}$.

On a donc $20 \log(S/E) = 20$ soit $S = 10E$. Le signal d'entrée est donc $e(t) = 10 \sin(0,1t)$ et le signal de sortie $s(t) = 100 \sin\left(0,1t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 197 – Identification temporelle *

B2-06

Question 1 Déterminer la fonction de transfert du système.



La tangente à l'origine est non nulle. Il n'y a pas de dépassement. On va donc identifier un système d'ordre 1 de la forme $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$.

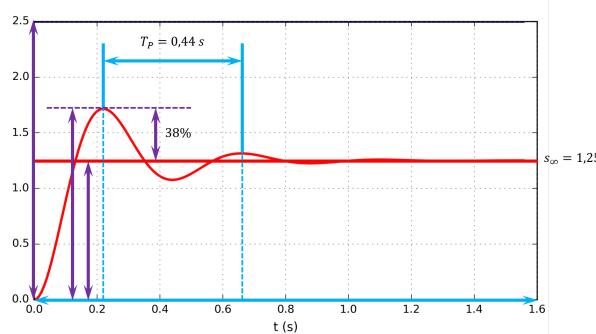
L'échelon d'entrée a une amplitude de 2. En régime permanent la valeur atteinte est de 7. On a donc $K = \frac{7}{2} = 3,5$.

Pour identifier la constante de temps, on peut :

- regarder à quel temps a lieu l'intersection entre l'asymptote en régime permanent et la tangente à l'origine;
- mesurer le temps de temps réponse à 63 %;
- mesurer le temps de temps réponse à 95 % et diviser cette valeur par 3.

On a donc $H(p) = \frac{3,5}{1 + 8p}$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert du système en réalisant les mesures nécessaires et en utilisant les formules appropriées.



La tangente à l'origine est nulle et il y a des dépassements. On modélise le système par un système d'ordre 2.

$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

On a $K = \frac{1,25}{2,5} = 0,5$.

On mesure un dépassement de $1,38 = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Leftrightarrow \ln 0,38 = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\xi^2} \ln 1,38 = -\pi\xi \Leftrightarrow (1-\xi^2)(\ln 1,38)^2 = \pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2 - \xi^2(\ln 1,38)^2 = \pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2 = \pi^2\xi^2 + \xi^2(\ln 1,38)^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2 = \xi^2(\pi^2 + (\ln 1,38)^2)$
 $\Leftrightarrow \frac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2 + (\ln 1,38)^2} = \xi^2 \Leftrightarrow \xi = \sqrt{\frac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2 + (\ln 1,38)^2}} = 0,3$.

Par ailleurs, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{0,44\sqrt{1-0,3^2}} = 14,9 \text{ rad s}^{-1}$.

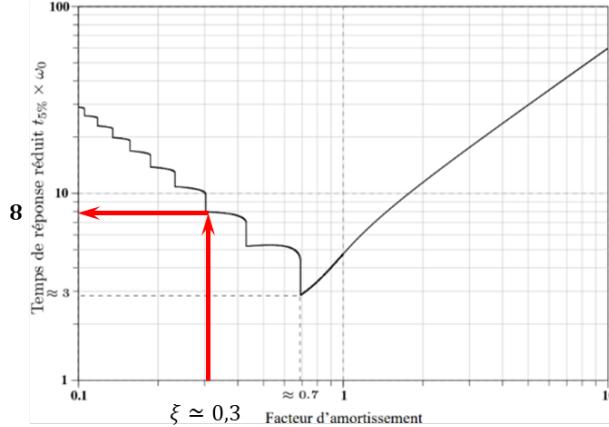
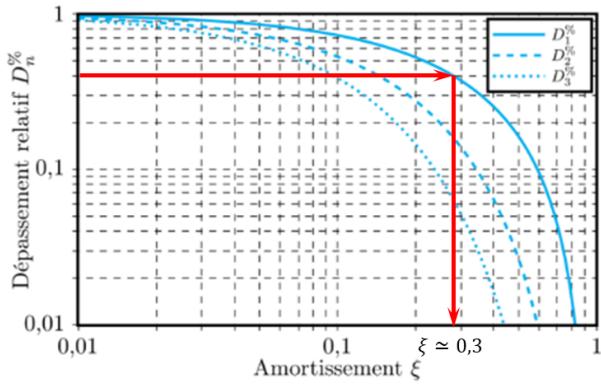
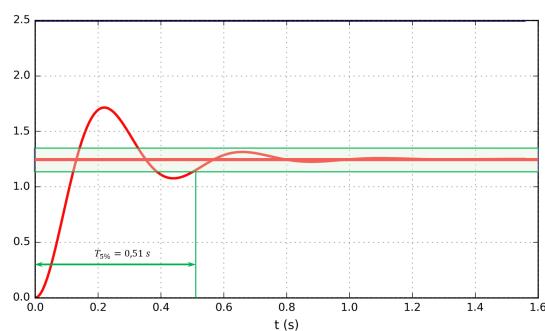
Au final, $H(p) = \frac{0,5}{1 + \frac{2 \times 0,3}{14,9} p + \frac{p^2}{14,9^2}}$.

Question 3 Déterminer la fonction de transfert du système en utilisant les abaques.

Le dépassement est de 38 %. On a donc $\xi = 0,3$.

De plus, on mesure $T_{5\%} \times \omega_0 = 8$ avec $T_{5\%} = 0,51 \text{ s}$ on a $\omega_0 = 8/0,5 \simeq 16 \text{ rad s}^{-1}$.

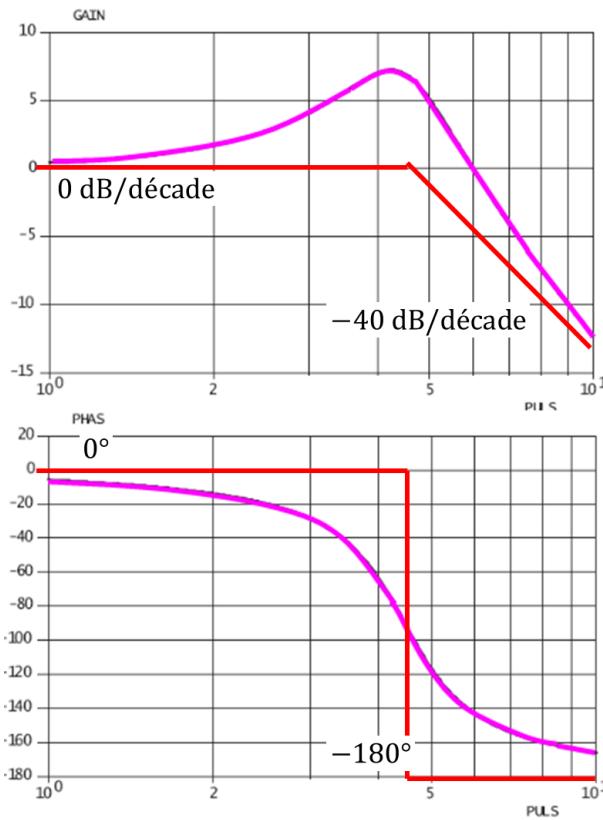
Au final, $H(p) = \frac{0,5}{1 + \frac{2 \times 0,3}{16} p + \frac{p^2}{16^2}}$.



Exercice 196 – Identification *

B2-06

Question 1 Tracer le diagramme de Bode asymptotique.



Question 2 Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.

La phase tend vers 0° lorsque ω tend vers 0 rad/s et vers -180° lorsque ω tend vers l'infini. On observe de plus une résonance. Par ailleurs le gain est nul quand ω tend vers 0 rad/s . Le système est donc d'ordre 2 avec un gain unitaire et un $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. On détermine ω_0 lorsque la phase vaut -90° .

$$\text{À ce stade, } H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{4,5}p + \frac{p^2}{4,5^2}}.$$

Enfin, on mesure un gain à la résonance de 7 dB. On a donc $20 \log A_{\max} = 7$ soit $A_{\max} = 10^{7/20} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

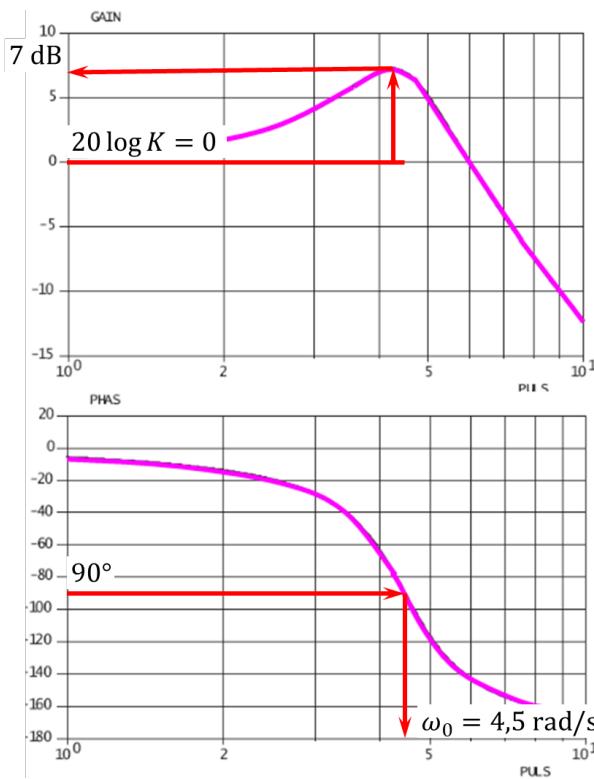
$$\text{Par suite, } \frac{1}{A_{\max}} = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow \frac{1}{A_{\max}} = 4\xi^2(1-\xi^2) \Leftrightarrow \frac{1}{A_{\max}^2} = 4\xi^2 - 4\xi^4 \Rightarrow 4\xi^4 - 4\xi^2 + \frac{1}{A_{\max}^2} = 0 \Rightarrow 4X^2 - 4X + \frac{1}{A_{\max}^2} = 0$$

$$\frac{1}{A_{\max}^2} = 0$$

$$\text{On a alors } \Delta = 16 - \frac{16}{A_{\max}^2} \text{ et } X_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{16}$$

$$\text{En réalisant les applications numériques, on a } \xi = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{\Delta}}{16}} = 0,23.$$

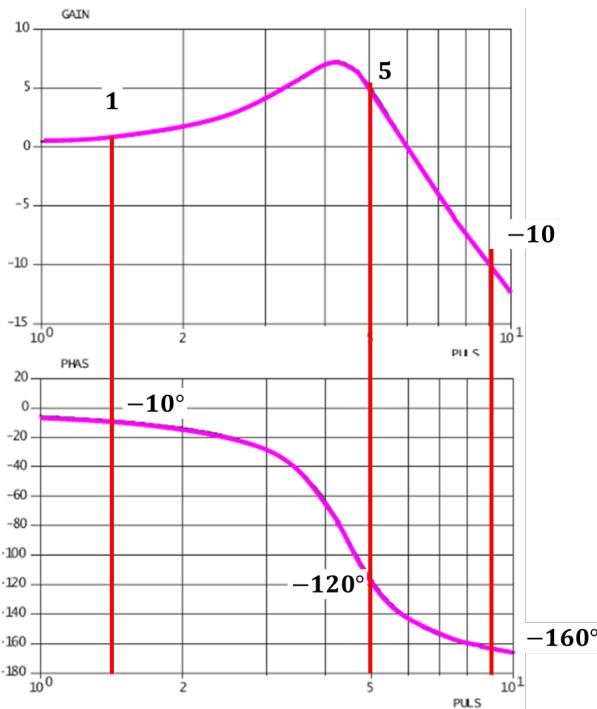
$$\text{Alors, } H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \times 0,23}{4,5}p + \frac{p^2}{4,5^2}}.$$



Question 3 Déterminer les périodes et les pulsations de chacun des signaux.

- Signal rouge : $T = 4,2 \text{ s}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,5 \text{ rad/s}$.
- Signal vert : $T = 3,6/3 = 1,2 \text{ s}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 5,2 \text{ rad/s}$.
- Signal bleu : $T = 4,2/6 = 0,7 \text{ s}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 9 \text{ rad/s}$.

Question 4 En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.

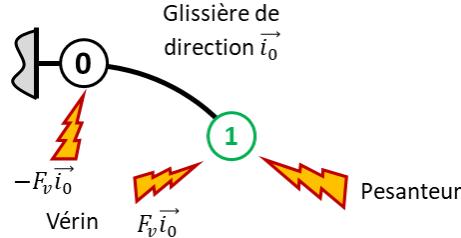


- Pour $\omega = 1,5 \text{ rad/s}$, $G_{\text{dB}} = 1 \Rightarrow 20 \log K = 1 \Rightarrow K = 10^{1/20} = 1,12$ et $\varphi = -0,17 \text{ rad}$. On a donc $s(t) = 1,12 \sin(\omega t - 0,17)$.
- Pour $\omega = 5 \text{ rad/s}$, $G_{\text{dB}} = 5 \Rightarrow K = 10^{5/20} = 1,8$ et $\varphi = -2,1 \text{ rad}$. On a donc $s(t) = 1,8 \sin(\omega t - 2,1)$.

- Pour $\omega = 9 \text{ rad/s}$ $G_{\text{dB}} = 5 \Rightarrow K = 10^{-10/20} = 0,3$ et $\varphi = -2,8 \text{ rad}$. On a donc $s(t) = 0,3 \sin(\omega t - 2,8)$.

Exercice 195 – Mouvement T *
C2-07

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Exprimer l'équation d'équilibre de la pièce 1.

- On isole 1.
- Bilan des actions mécaniques :

$$\begin{aligned} &\text{- pesanteur : } \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G; \\ &\text{- vérin : } \{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A; \\ &\text{- liaison glissière : } \{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{j}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 + N_{01} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_A. \end{aligned}$$

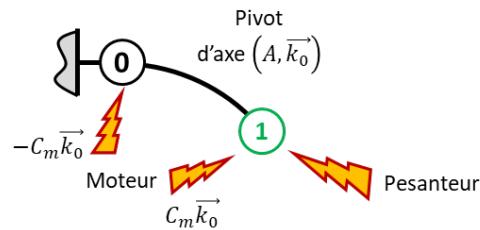
En appliquant le théorème de la résultante statique en projection suivant \vec{i}_0 , on a $-m_1 g + F_v = 0$.

Question 3 Déterminer l'ensemble des inconnues de liaison.

En A, on a $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ AG \wedge -m_1 g \vec{i}_1 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ (\lambda(t) \vec{i}_0 + \ell \vec{j}_1) \wedge -m_1 g \vec{i}_1 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ \ell m_1 g \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A$ En appliquant le PFS à 1, on a le TRS : $\begin{cases} 0 - m_1 g + F_v = 0 \\ Y_{01} = 0 \\ Z_{01} = 0 \end{cases}$ et le TMS en A : $\begin{cases} L_{01} = 0 \\ M_{01} = 0 \\ N_{01} + \ell m_1 g = 0 \end{cases}$.

Exercice 194 – Mouvement R *
C2-07

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner l'équation d'équilibre de la pièce 1.

- On isole 1.
- Bilan des actions mécaniques :
 - $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A;$
 - $\{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A;$
 - $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ et $\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 1) = \mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 1) + \overrightarrow{AB} \wedge -m_1 g \vec{j}_0 = R \vec{i}_1 \wedge -m_1 g \vec{j}_0 = -R m_1 g \vec{k}_0.$

- On réalise le théorème du moment statique en A en projection sur $\vec{k}_0 : C_m - Rm_1g = 0$.

Question 3 Déterminer l'ensemble des inconnues de liaisons.

On réalise le TRS en projection sur $\vec{i}_0 : X_{01} = 0$.

On réalise le TRS en projection sur $\vec{j}_0 : Y_{01} = m_1g$.

Exercice 193 – Train simple *

A3-05

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_3}$.

Question 3 Donner une relation géométrique entre Z_1 , Z_2 et Z_3 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages.

On a $Z_3 = 2Z_2 + Z_1$.

Exercice 192 – Train simple *

A3-05

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1Z_{22}}{Z_4Z_{21}}$.

Question 3 Donner une relation géométrique entre Z_1 , Z_{21} , Z_{22} et Z_4 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages (on fera l'hypothèse que toutes les roues dentées ont le même module).

On a $Z_1 + Z_{21} + Z_{22} = Z_4$.

Exercice 191 – Train simple *

A3-05

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1Z_{22}}{Z_4Z_{21}}$.

Exercice 190 – Barrière Sympact **

C2-07

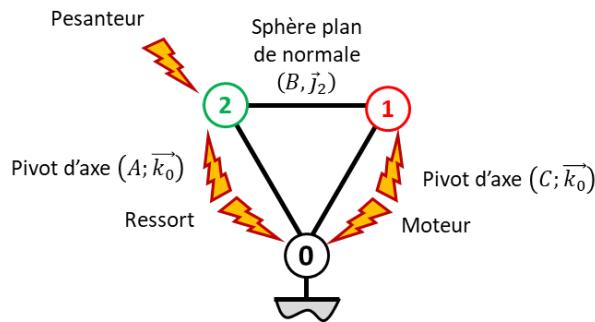
On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2.

On note $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L \vec{i}_2$.

Question 1 Réaliser un graphe d'analyse.



Question 2 Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur \vec{k}_0 . On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur \vec{k}_0 . On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

Question 3 Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

- **On isole 1.**

- **On réalise le bilan des actions mécaniques :**

- action de la pivot en C (pas de moment suivant \vec{k}_0),
- action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{j}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_B$, on a alors $\overline{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 1)} = \overline{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} + \overline{CB} \wedge \overline{R(2 \rightarrow 1)} = R \vec{i}_1 \wedge F_B \vec{j}_2 = RF_B \sin\left(\varphi - \theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{k}_0 = RF_B \cos(\varphi - \theta) \vec{k}_0;$
- $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\}$.

- **On réalise le TMS en C en projection sur \vec{k}_0 : $C_m + RF_B \cos(\varphi - \theta) = 0$.**

- **On isole 2.**

- **On réalise le bilan des actions mécaniques :**

- action de la pivot en A (pas de moment suivant \vec{k}_0),
- action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_B \vec{j}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_B$, on a alors $\overline{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} = \overline{\mathcal{M}(B, 1 \rightarrow 2)} + \overline{AB} \wedge \overline{R(1 \rightarrow 2)} = \lambda \vec{i}_2 \wedge -F_B \vec{j}_2 = -\lambda F_B \vec{k}_2$.
- $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\}$;
- action de la pesanteur : $\overline{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 2)} = \overline{\mathcal{M}(G, \text{pes} \rightarrow 2)} + \overline{AG} \wedge \overline{R(\text{pes} \rightarrow 2)} = L \vec{i}_2 \wedge -Mg \vec{j}_0 = -Mg L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{k}_0 = -Mg L \cos(\varphi) \vec{k}_0$

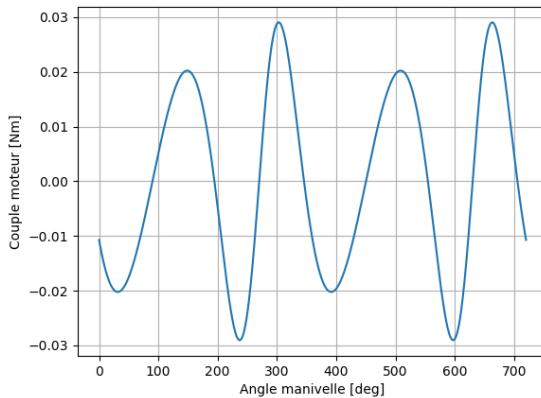
- **On réalise le TMS en C en projection sur \vec{k}_0 : $C_r - \lambda F_B - Mg L \cos \varphi = 0$.**

Au final, $C_r - \lambda F_B - Mg L \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow F_B = \frac{C_r - Mg L \cos \varphi}{\lambda}$ et

$$C_m + R \frac{C_r - Mg L \cos \varphi}{\lambda} \cos(\varphi - \theta) = 0.$$

Question 4 Tracer, en utilisant Python, l'évolution du couple moteur en fonction de l'angle de la manivelle. On prendra $M = 1 \text{ kg}$ et $L = 0,1 \text{ m}$

<https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/324a-628215/mcer>


Exercice 189 – Train simple *
A3-05
C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$.

Exercice 188 – La Seine Musicale*
B2-07

Question 1 En considérant que la perturbation $C_{pert}(p)$ est nulle, déterminer $H_f(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ sous forme canonique.

Réduction de la boucle du moteur à courant continu : $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{k_c}{R+Lp} \frac{1}{J_{eq}p}}{1 + \frac{k_c}{R+Lp} \frac{k_e}{J_{eq}p}} = \frac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p + k_e k_c}$.

On a alors,

$$\begin{aligned} \frac{X_{ch}(p)}{\Omega_c(p)} &= K_a \frac{\frac{CK_h}{(R+Lp)J_{eq}p + k_e k_c} \frac{k_c}{k_c}}{1 + CK_h K_{capt} \frac{(R+Lp)J_{eq}p + k_e k_c}{k_c}} \\ &= K_a \frac{\frac{CK_h k_c}{(R+Lp)J_{eq}p + k_e k_c + CK_h K_{capt} k_c}}{\frac{K_a}{(k_e k_c + CK_h K_{capt} k_c)} \frac{J_{eq}(R+Lp)}{k_e k_c + CK_h K_{capt} k_c} p + 1}. \end{aligned}$$

Question 2 En prenant $\Omega_c(p) = 0$, exprimer la fonction de transfert $H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ en la mettant sous la forme : $H_r(p) = -\frac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p + \delta p^2}$. Exprimer α, τ, γ et δ en fonction des différents paramètres de l'étude.

Par lecture directe du schéma-blocs, on a $\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p} (C_{pert}(p) + C_m(p))$.

De plus, $C_m(p) = (U_m(p) - k_e \Omega_m(p)) \frac{k_c}{R+Lp}$ et $U_m(p) = \varepsilon(p) C K_h = -\Omega_m(p) C K_h K_{capt}$.

On a donc,

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p} C_{pert}(p) + \frac{1}{J_{eq}p} (-\Omega_m(p) C K_h K_{capt} - k_e \Omega_m(p)) \frac{k_c}{R+Lp}.$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p} C_{pert}(p) + \frac{1}{J_{eq}p} \Omega_m(p) (-C K_h K_{capt} - k_e) \frac{k_c}{R+Lp}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \Omega_m(p) \left(1 + \frac{1}{J_{eq}p} (C K_h K_{capt} + k_e) \frac{k_c}{R + Lp} \right) = \frac{1}{J_{eq}p} C_{pert}(p) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)} = \frac{\frac{1}{J_{eq}p}}{\left(1 + \frac{1}{J_{eq}p} (C K_h K_{capt} + k_e) \frac{k_c}{R + Lp} \right)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)} = \frac{R + Lp}{J_{eq}p(R + Lp) + (C K_h K_{capt} + k_e) k_c} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)} = \frac{R}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c} \frac{1 + \frac{L}{R} p}{\frac{J_{eq}}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c} p(R + Lp) + 1}.
 \end{aligned}$$

Par identification, on a alors : $\alpha = -\frac{R}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c}$,

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$\gamma = \frac{R J_{eq}}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c}$$

$$\delta = \frac{L J_{eq}}{(C K_h K_{capt} + k_e) k_c}.$$

Question 3 Exprimer $X_{ch}(p)$ en fonction de $\Omega_m(p)$ et $C_{pert}(p)$.

D'une part, $\Omega_m(p) = H_f(p)\Omega_c(p)$ quand il n'y a pas de perturbation. D'autre part, $\Omega_m(p) = H_r(p)C_{pert}(p)$ quand il n'y a pas de perturbation.

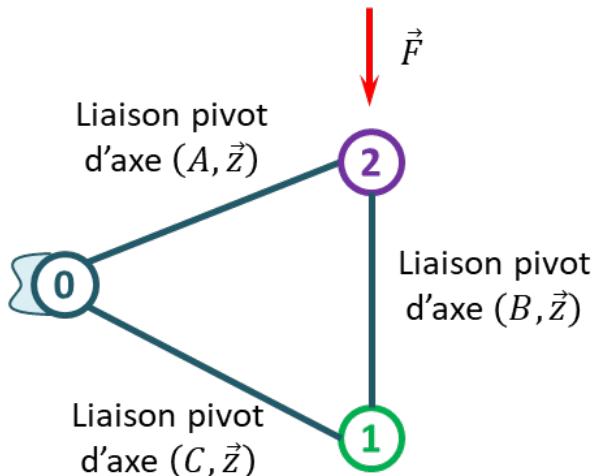
Par superposition, on a donc $\Omega_m(p) = H_f(p)\Omega_c(p) + H_r(p)C_{pert}(p)$.

Par suite, $X_{ch}(p) = (H_f(p)\Omega_c(p) + H_r(p)C_{pert}(p)) \frac{D K_{red}}{2p}$.

Exercice 187 – Détermination des efforts dans une structure étayée **

C2-07

Question 1 Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).



Question 2 Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs**. En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :

- on isole 1 et on réalise le PFS;
- on isole 2 et on réalise le PFS en B.

Question 3 Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F .

On isole 1. On réalise le BAME :

- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$;
- $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = 0$.

$$\text{Résolution : } \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{01} \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_A.$$

On isole 2. On réalise le BAME :

- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{02} \vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_{02} \vec{x} + Y_{02} \vec{y} \\ -a Y_{02} \vec{z} \end{array} \right\}_A$;
- $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{01} \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_B$;
- $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -Fb \vec{z} \end{array} \right\}_C$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2)\} = 0.$$

Résolution :

$$\begin{cases} X_{02} + F_{01} \cos \alpha = 0 \\ Y_{02} + F_{01} \sin \alpha - F = 0 \\ -a Y_{02} - Fb = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{02} = -F_{01} \cos \alpha = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha} \\ F_{01} = \frac{F - Y_{02}}{\sin \alpha} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha} \\ Y_{02} = -\frac{b}{a} F \end{cases}$$

Exercice 186 – Machine de rééducation SysReeduc *

B2-07

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

On a :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + R I(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres);
- enfin, K_1 convertit des mètres en incrément. X_c est la consigne que doit respectée X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_6 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

D'une part,

$$X(p) = ((X_C(p) - X(p)) C(p) - F_p(p) D) \frac{A}{p(Bp+1)}$$

$$X(p) = \frac{A(X_C(p) - X(p)) C(p)}{p(Bp+1)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp+1)}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R r \rho_1} (Bp+1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}} \\ &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{R}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R}}{p(Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R} \frac{R}{k_e k_t}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{k_e k_t} \frac{R r \rho_1}{R r \rho_1}}{p(Bp+1) + C(p) \frac{R r \rho_1}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}} \\ &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{k_e k_t} \frac{R r \rho_1}{K_8}}{p(Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} \\ &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_8}{k_e} \frac{k_e}{K_8} \frac{K_9}{k_e k_t} \frac{R r \rho_1}{K_8}}{p(Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} \\ &\text{On a donc } A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t} \text{ et } D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}. \end{aligned}$$

Exercice 185 – Fonctions de transfert*

B2-07

Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a } \text{FTBO}(p) = \frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)} = \frac{K^2}{Rf + RJp + Lfp + LJp^2} = \frac{K^2}{Rf \left(1 + p \frac{RJ + Lf}{Rf} + \frac{LJ}{Rf} p^2\right)}.$$

$$\text{On a donc } K_{\text{BO}} = \frac{K^2}{Rf}, \omega_{\text{BO}} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}, \frac{2\xi_{\text{BO}}}{\omega_{\text{BO}}} = \frac{RJ + Lf}{Rf} \Leftrightarrow \xi_{\text{BO}} = \omega_{\text{BO}} \frac{RJ + Lf}{2Rf} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}} \frac{RJ + Lf}{2Rf} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}Rf}.$$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a } \text{FTBF}(p) = \frac{\frac{K}{(R+Lp)(f+Jp)}}{1 + \frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}} = \frac{K}{(R+Lp)(f+Jp) + K^2} = \frac{K}{\frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} p + \frac{LJ}{Rf + K^2} p^2 + 1}.$$

$$\text{On a donc } K_{\text{BF}} = \frac{K}{K^2 + Rf}, \omega_{\text{BF}} = \sqrt{\frac{Rf + K^2}{LJ}}, \frac{2\xi_{\text{BF}}}{\omega_{\text{BF}}} = \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} \Leftrightarrow \xi_{\text{BO}} = \omega_{\text{BF}} \frac{RJ + Lf}{2(Rf + K^2)} = \sqrt{\frac{Rf + K^2}{LJ}} \frac{RJ + Lf}{2(Rf + K^2)}$$

$$\xi_{\text{BF}} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K^2}}.$$

Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Si on note $R(p)$ la seconde entrée du **premier comparateur** et $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur,

$$\text{FTBO}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{R(p)} = A \times \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{B}{p}} \times C = \frac{AC}{B+p} = \frac{AC}{1 + \frac{p}{B}}. \text{ On a donc } K_{\text{BO}} = \frac{AC}{B} \text{ et } \tau_{\text{BO}} = \frac{1}{B}.$$

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

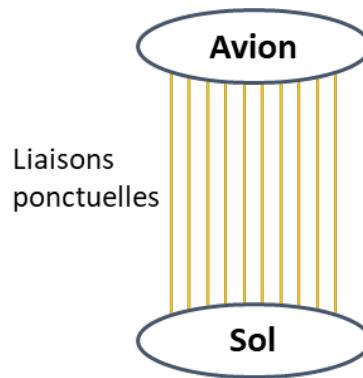
$$\text{On a } \text{FTBF}(p) = \frac{\frac{A}{B+p}}{1 + \frac{AC}{B+p}} = \frac{A}{B+p+AC} = \frac{A}{1 + \frac{p}{B+AC}}.$$

$$\text{On a donc } K_{\text{BF}} = \frac{A}{B+AC} \text{ et } \tau_{\text{BF}} = \frac{1}{B+AC}.$$

Exercice 184 – *

B2-16

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan). **Question 1** Réaliser le graphhe des liaisons.



Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.

La liaison de l'avion avec le sol est assimilable à une liaison appui-plan de normale \vec{z} . Il y a donc 3 mobilités (1 rotation autour de \vec{z} , 1 translation selon \vec{x} et 1 translation suivant \vec{y}).

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_s = 10 \times 1 = 10$ (8 liaisons ponctuelles avec 1 inconnue statique par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 6 + 10 = 7$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (10 - 2 + 1) \times 6 = 54$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_c = 10 \times 5 = 50$ (8 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 50 + 54 = 7$.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales (A, \vec{z}') (atterrisseur auxiliaire), (P_g, \vec{z}') (atterrisseur principal gauche) et (P_d, \vec{z}') (atterrisseur principal droit).

Question 3 Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_s = 3 \times 1 = 3$.

En conséquences, $h = 3 - 6 + 3 = 0$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

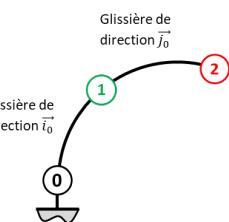
- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (3 - 2 + 1) \times 6 = 12$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_c = 3 \times 5 = 15$ (3 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison);

En conséquences, $h = 3 - 15 + 12 = 0$.

Exercice 183 – Mouvement TT – *

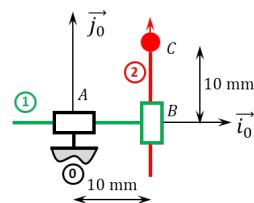
B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



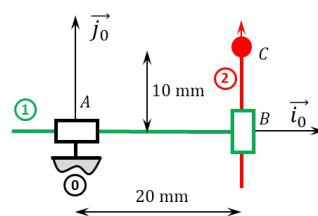
Question 2 Retracer le

schéma cinématique pour $\lambda = 10 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.



Question 3 Retracer le

schéma cinématique pour $\lambda = 20 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.



Exercice 182 – Mouvement TT – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de $\mathbf{2}$ par rapport à $\mathbf{0}$.

Le point C a un mouvement quelconque dans le plan $(A, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de $\mathbf{2}$ par rapport à $\mathbf{0}$.

On a $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{i}_0 + \mu(t) \vec{j}_0$ et donc, on a directement $\begin{cases} x_C(t) = \lambda(t) \\ y_C(t) = \mu(t) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10\text{ cm}$ à la vitesse $v = 0,01\text{ m s}^{-1}$.

Question 3 Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R .

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

On a $v = R\dot{\theta}(t)$. Par intégration, $\theta(t) = \frac{v}{R}t$ (avec $\theta(t) = 0\text{ rad}$ pour $t = 0\text{ s}$).

Question 4 Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v , R et du temps.

Exprimons la trajectoire du point C : $\overrightarrow{AC} = R\vec{e}_r = R \cos \theta(t) \vec{i}_0 + R \sin \theta(t) \vec{j}_0$. Par identification $\lambda(t) = R \cos \theta(t)$ et $\mu(t) = R \sin \theta(t)$.

Au final, $\begin{cases} \lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \\ \mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \end{cases}$.

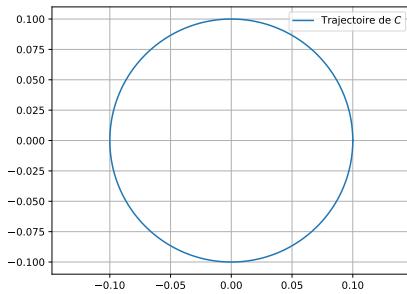
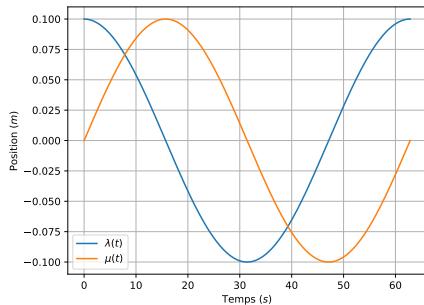
Question 5 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0, T, 200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t, les_lambda, label="$\\lambda(t)$")
plt.plot(les_t, les_mu, label="$\\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps ($s$)")
plt.ylabel("Position ($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()

plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda, les_mu, label="Trajectoire de $C$")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```


Exercice 181 – Banc hydraulique *
C2-03

Question 1 Déterminer, en fonction de K_p , ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Le débit de fuite est nul; donc $\Delta Q_e(p) = 0$.

Cas 1 : cours sur la précision connu – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie

La FTBO est de classe nulle ($C(p)$ est un gain, $H_{pom}(p)$ et $H_{pre}(p)$ de classe 0). Le gain de la Boucle ouverte est $K_{BO} = K_p K_m K_{pom} K_{cap}$.

Si l'entrée est un échelon d'amplitude P_0 , l'écart statique est donc donné par $\varepsilon_S = \frac{P_0}{1 + K_{BO}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_m K_{pom} K_{cap}}$.

Cas 2 : cours sur la précision peu connu – À savoir faire, mais on perd un peu de temps... – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie Si on connaît quand même un petit peu son cours, on a $\varepsilon(p) = \frac{P_{con}(p)}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}}$.

$$\text{On a alors, } \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{P_0}{p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

Cas 3 : cours sur la précision pas connu – À savoir faire, mais on perd beaucoup peu de temps...

$$\begin{aligned} \text{En utilisant la formule de Black, on a } P_e(p) &= P_{con}(p) K_{cap} \frac{K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}} \\ &= P_{con}(p) K_{cap} (p) \frac{K_p K_{pom} K_m}{(1 + T_2 p)(1 + T_1 p) + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En passant à la valeur finale avec une entrée échelon, on a } \lim_{t \rightarrow +\infty} P_e(t) &= P_0 K_{cap} \frac{K_p K_{pom} K_m}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} \\ \text{L'écart statique est donc donné par } \varepsilon_S &= P_0 - P_0 \frac{K_p K_{pom} K_m K_{cap}}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} = P_0 \frac{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap} - K_p K_{pom} K_m K_{cap}}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} \\ &= \frac{P_0}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} \end{aligned}$$

Question 2 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

On souhaite que l'écart statique soit inférieur à 5% soit 0,05 pour une entrée unitaire.

$$\text{On cherche donc } K_p \text{ tel que } \frac{1}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} < 0,05 \Leftrightarrow 1 < 0,05(1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 0,05}{0,05 K_{pom} K_m K_{cap}} < K_p$$

$$\text{Soit } K_p > \frac{1 - 0,05}{0,05 \times 1,234 \times 10^7 \times 3,24 \times 2,5 \times 10^{-8}} \Rightarrow K_p > 19.$$

Question 3 Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p la fonction de transfert en régulation définie par : $H_{pert}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$. En déduire, en fonction de K_p , ε_{pert} définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

Dans ce cas il n'y a pas d'intégrateur avant la perturbation échelon. Il faut savoir faire le calcul.

On peut utiliser la « lecture directe » : $P_e(p) = P_r(p)H_{pre} - \Delta Q_e(p)H_{fui}(p) = H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)\varepsilon(p) - \Delta Q_e(p)H_{fui}(p) = -H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}P_e(p) - \Delta Q_e(p)H_{fui}(p)$.

$$\Leftrightarrow P_e(p)(1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}) = -\Delta Q_e(p)H_{fui}(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)} = -\frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}}$$

$$\text{Calculons } \varepsilon_{pert}(p) = -\frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}} \Delta Q_e(p) K_{cap}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \varepsilon_{pert} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \times \frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p)H_{pom}(p)C(p)K_{cap}} \frac{\Delta Q_0}{p} K_{cap} \\ &= -\frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap}}{1 + K_m K_{pom} K_P K_{cap}} \end{aligned}$$

Question 4 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{pert} à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Pour $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, il faut $\varepsilon_{pert} < 40 \times 10^5 \text{ (Pa)}$ soit

$$\frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap}}{1 + K_m K_{pom} K_P K_{cap}} < 40 \times 10^5 \Rightarrow K_f \Delta Q_0 K_{cap} < 40 \times 10^5 (1 + K_m K_{pom} K_P K_{cap}) \Rightarrow \frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap} - 40 \times 10^5}{40 \times 10^5 K_m K_{pom} K_{cap}} < K_P \Rightarrow K_P > -1$$

Question 5 Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Je vous laisse faire le calcul... Il faut savoir le faire le plus vite possible. Il faut d'abord calculer la FTBF, la mettre sous forme canonique, déterminer $\xi_{BF} = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2 (1 + K_P K_M K_{pom} K_{cap})}}$ puis déterminer K_P tel que $\xi_{BF} = 1$.

Exercice 180 – Banc hydraulique *

C2-03

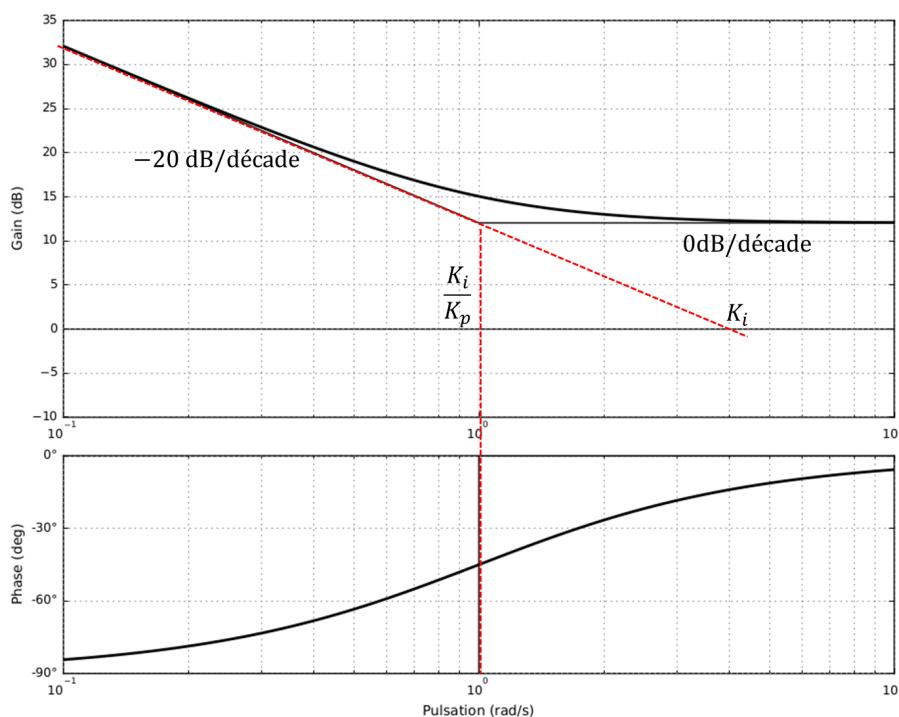
Question 1 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

$$\text{On a } C(p) = \frac{K_i}{p} + K_p = \frac{K_i + p K_p}{p} = K_i \frac{1 + p \frac{K_p}{K_i}}{p}.$$

Question 2 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = \frac{K_i}{K_p}$	$\omega \rightarrow \infty$
$\frac{K_i}{p}$	-20dB/Décade -90°	-20dB/Décade -90°	
$1 + \frac{K_p}{K_i} p$	0dB/Décade 0°	+20dB/Décade +90°	
$C(p)$	-20dB/Décade -90°	0dB/Décade 0°	

Coupe l'axe des abscisses en $\omega = K_i$



Question 3 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

Ce correcteur augmente la classe de la FTBO donc augmente la précision. Cependant, il réduit la phase. Il faut donc veiller à ce que la pulsation de cassure soit réglée de telle sorte que le système ne soit pas déstabilisé.

Question 4 Quelle valeur faut-il donner à ω_{0dB} pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?
D'après la remarque, on a $t_e \omega_{0dB} = 3$ soit $\omega_{0dB} = 3/t_e = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 5 Déterminer analytiquement le rapport $T = \frac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

Calculons la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée : $F_{BO} = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}$.

Le correcteur doit être réglé pour que $\omega_{0dB} = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$.

Calculons la marge de phase. $\arg(F_{BO}) = -\arg(1 + T_1 p) - \arg(1 + T_2 p) = -\arctan T_1 \omega - \arctan T_2 \omega$ On a donc $\arg(F_{BO}(0,075)) = -\arctan(10 \times 0,075) - \arctan(5 \times 0,075) = -57^\circ$ soit une marge de phase de -123° .

Pour atteindre une marge de phase de 60° , on peut donc baisser la phase de 63° .

Calculons $\arg(C(j\omega)) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}\omega\right)$.

On cherche donc $\frac{K_i}{K_p}$ tel que $\arg(C(0,075)) = -63$ Soit $-90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = -63 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = 27$
 $\Rightarrow \frac{K_p}{K_i}0,075 = 0,51 \Leftrightarrow \frac{K_p}{K_i} = 6,79$.

Question 6 En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

Il faut chercher K_i et K_p pour respecter ω_{0dB} . Recherchons le gain de la boucle ouverte non corrigée pour ω_{0dB} .

$$G_{dB}(F_{BO}) = 20 \log(K_{pom} K_m K_{cap}) - 20 \log(\sqrt{1^2 + T_1^2 \omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1^2 + T_2^2 \omega^2})$$

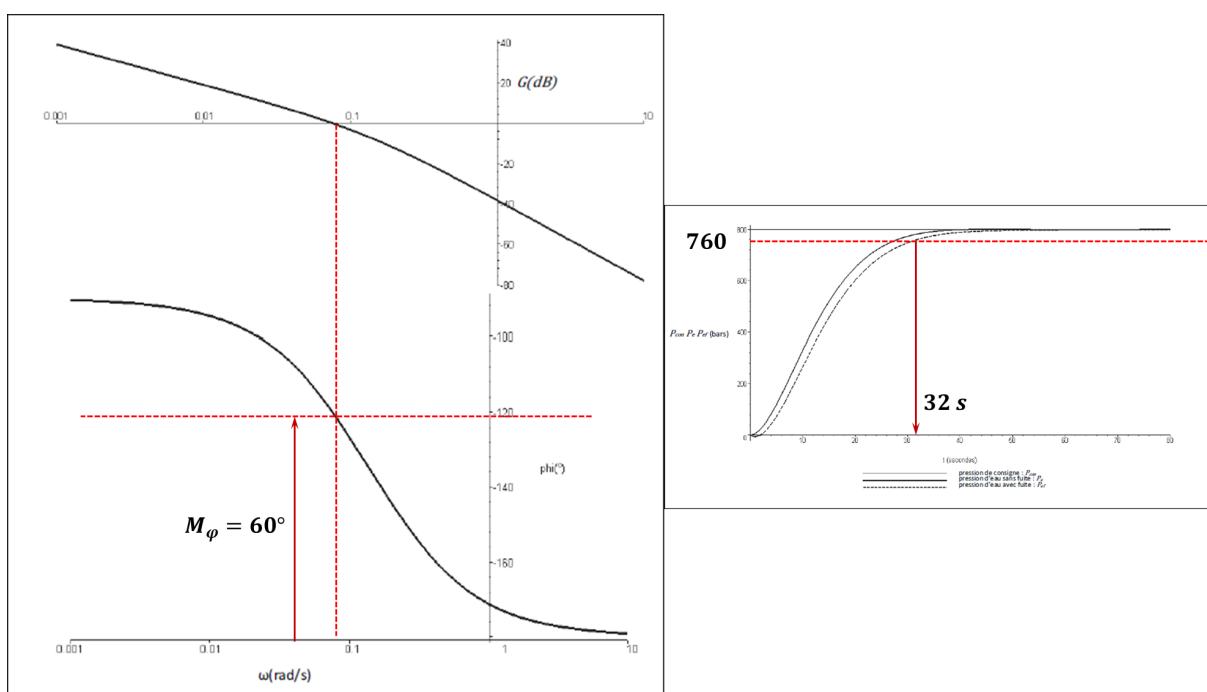
On a alors $G_{dB}(F_{BO})(0,075) = -0,004 - 1,94 - 0,57 = 2,52 \text{ dB}$.

Il faut donc baisser le gain de $2,52 \text{ dB}$ $G_{dB}(C(p)) = 20 \log K_i - 20 \log \omega + 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{K_p}{K_i} \right)^2 \omega^2} \right)$

On a alors $G_{dB}(C(0,075)) = 20 \log K_i + 22,5 + 1 = -2,52$ soit $K_i = 10^{-\frac{2,52 + 1 + 22,5}{20}} = 0,05$.

Par suite, $K_p = 6,79 \times 0,05 = 0,34$.

(A vérifier).

Question 7 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.


- Stabilité :

- Marge de phase mesurée : 60° **cdc ok**.
- Marge de gain mesurée : infini **cdc ok**.

- Rapidité : $t_e = 32 \text{ s} < 40 \text{ s}$ **cdc ok.**
- Précision : écart statique nul **cdc ok.**
- Amortissement : nul **cdc ok.**

Exercice 179 – Mouvement TT – *
B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Par dérivation vectorielle, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}$.

Par composition du torseur cinématique, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

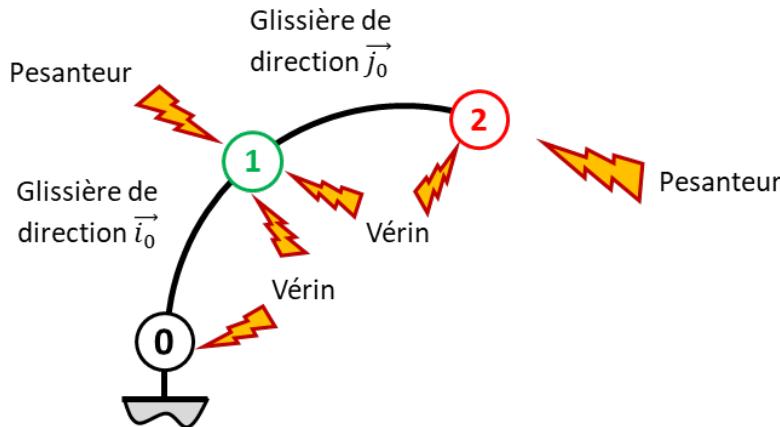
$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C,2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \ddot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}.$$

Exercice 178 – Mouvement TT – *
B2-14
B2-15
C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \overrightarrow{j_0} + Z_{01} \overrightarrow{k_0} \\ L_{01} \overrightarrow{i_0} + M_{01} \overrightarrow{j_0} + N_{01} \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \overrightarrow{i_0} + Z_{12} \overrightarrow{k_0} \\ L_{12} \overrightarrow{i_0} + M_{12} \overrightarrow{j_0} + N_{12} \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \overrightarrow{j_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \overrightarrow{j_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{v1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_1 \overrightarrow{i_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{v2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_2 \overrightarrow{j_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \vec{j}_0 \\ N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \vec{i}_0 \\ N_{12} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{C, \mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{v1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Vérin entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{v2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_2 \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole 2 et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{j}_0 ;
- on isole 1+2 et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{i}_0 .

Exercice 177 – Palettisation – Stabilité *
C2-03

On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$, que $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$ et que la FTBO est donnée par $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)}$ ($k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}$).

On souhaite une marge de phase de 45° .

Question 1 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

On souhaite une marge de phase de 45° . On cherche donc ω_φ tel que $\varphi(\omega_\varphi) = -180 + 45 = -135^\circ$.

$$\varphi(\omega) = -90 - \arg(1 + \tau_m j \omega) = -90 - \arctan(\tau_m \omega).$$

$$\text{On a donc } \varphi(\omega_\varphi) = -135 \Leftrightarrow -90 - \arctan(\tau_m \omega_\varphi) = -135 \Leftrightarrow -\arctan(\tau_m \omega_\varphi) = -45 \Leftrightarrow \arctan(\tau_m \omega_\varphi) = 45$$

$$\Rightarrow \tau_m \omega_\varphi = 1 \Rightarrow \omega_\varphi = \frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \Rightarrow \omega_\varphi = 200 \text{ rad s}^{-1}.$$

Par suite, il faut que le gain soit nul en ω_φ .

$$\text{On a donc } G_{dB}(\omega) = 20 \log k_{BO} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau_m^2}. \text{ En } \omega_\varphi = \frac{1}{\tau_m} : G_{dB}(\omega_\varphi) = 0 \Leftrightarrow 20 \log k_{BO} - 20 \log \frac{1}{\tau_m} - 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_m^2} \tau_m^2} = 0 \Leftrightarrow \log k_{BO} + \log \tau_m - \log \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \log \frac{k_{BO} \tau_m}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{k_{BO} \tau_m}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow k_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m}.$$

(A vérifier) $k_{BO} = 282,8$.

Question 2 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

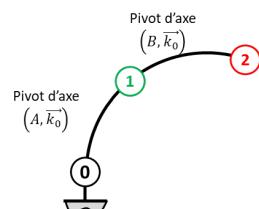
$$k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}; \text{ donc } k_c = \frac{N k_{BO}}{k_m k_r} = \frac{200 \times 282,8}{4 \times 30} = 471.$$

Question 3 Déterminer l'écart de position.

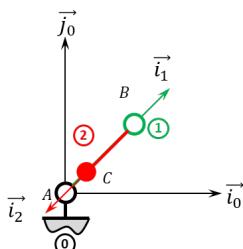
Il y a une intégration dans la correcteur. La FTBO est de classe 1 est le système est précis en position.

Exercice 176 – Mouvement RR *
B2-12

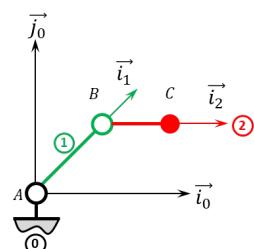
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



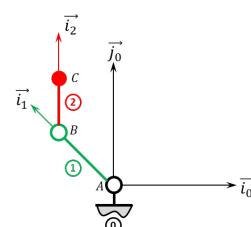
Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = \pi$ rad.



Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.



Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.



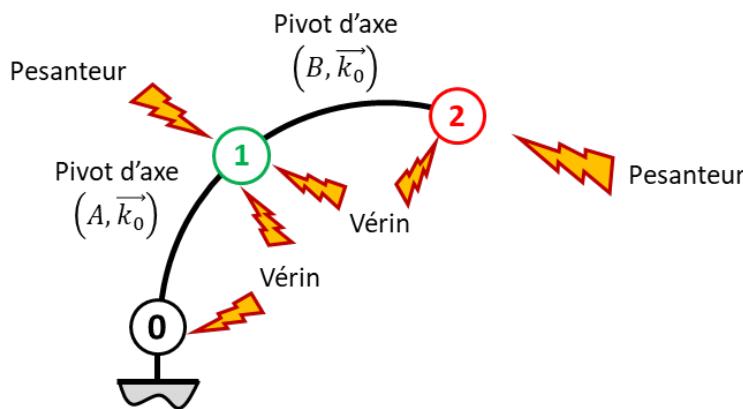
Exercice 175 – Mouvement RR *

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 + Z_{01} \vec{k}_0 \\ M_{01} \vec{j}_0 + N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 + Z_{12} \vec{k}_1 \\ M_{12} \vec{j}_1 + N_{12} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant aux mobilités :

- on isole **2** et on réalise le théorème du moment statique en *A* en projection sur \vec{k}_0 ;
- on isole **1+2** et on réalise le théorème du moment statique en *B* en projection sur \vec{k}_0 .

Exercice 174 – Machine de rééducation SysReeduc *

B2-07

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

On a :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + R I(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres);
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera *A*, *B* et *D* en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

D'une part,

$$\begin{aligned} X(p) &= ((X_C(p) - X(p)) C(p) - F_p(p) D) \frac{A}{p(Bp+1)} \\ X(p) &= \frac{A(X_C(p) - X(p)) C(p)}{p(Bp+1)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp+1)} \\ \Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p(Bp+1)} &= \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp+1)}. \Leftrightarrow X(p) \left(\frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1)} + \frac{AF_p(p)D}{p(Bp+1)} \\ \Leftrightarrow X(p) &= \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1) + AC(p)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)}. \end{aligned}$$

D'autre part, $X(p) = \Omega_m(p) H_4(p) K_5 K_6$, $U_m(p) = (X_c(p) K_1 - \theta_m(p) K_8) C(p)$, $\theta_m(p) = \Omega_m(p) H_4(p)$.

$$\Omega_m(p) = ((U_m(p) - \Omega_m(p) K_7) K_2 - F_p(p) K_9) H_3(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p) (1 + K_7 K_2 H_3(p)) = U_m(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9$$

$$X(p) = (U_m(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = ((X_c(p) K_1 - \theta_m(p) K_8) C(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow X(p) = \left(\left(X_c(p)K_1 - X(p) \frac{K_8}{K_5 K_6} \right) C(p)H_3(p)K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9 \right) \frac{H_4(p)K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = \left((X_c(p) - X(p)) C(p)H_3(p)K_1 K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9 \right) \frac{H_4(p)K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) \left(1 + C(p)H_3(p)K_1 K_2 \frac{H_4(p)K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)} \right) = (X_c(p)C(p)H_3(p)K_1 K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)} \\
 &\boxed{\Leftrightarrow X(p)(1 + K_7 K_2 H_3(p) + C(p)H_3(p)K_1 K_2 H_4(p)K_5 K_6) = (X_c(p)C(p)H_3(p)K_1 K_2 - F_p(p)H_3(p)K_9)H_4(p)K_5 K_6}.
 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow X(p) \left(1 + K_7 K_2 \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} \frac{K_8}{K_5 K_6} K_2 \frac{1}{p} K_5 K_6 \right) = \left(X_c(p)C(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} \frac{K_8}{K_5 K_6} K_2 - F_p(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} \frac{K_9}{K_5 K_6} \right) \\
 &\Leftrightarrow X(p) \left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} k_t}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \right) = \left(X_c(p)C(p) \frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \frac{k_t}{R} - F_p(p) \frac{K_9}{(M+m)r\rho_1 p^2} \right) \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \frac{k_t}{R}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} k_t}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \right)} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1 p^2}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} k_t}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \right)} \quad \text{DDS}
 \end{aligned}$$

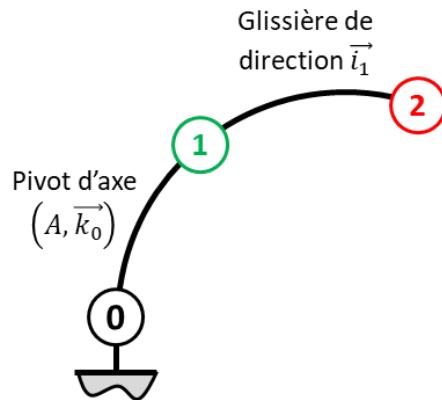
$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{1/R}}{\left((M+m)r^2\rho_1^2 p^2 + \frac{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2 \frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2 K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \right)} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{1}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} k_t}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} + C(p) \frac{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2 \frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \right)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2 + p \frac{k_e k_t}{R} + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{1}}{\left((M+m)r\rho_1 p^2 + \frac{(M+m)r\rho_1 p^2 \frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{(M+m)r\rho_1 p^2 K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} \right)} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2 + p \frac{k_e k_t}{R} + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1 p^2 + \frac{p k_e k_t}{R r \rho_1} + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} \left(\frac{R}{k_e k_t} (M+m)r^2\rho_1^2 p + 1 \right) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{R r \rho_1} \left(\frac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_e k_t} p + 1 \right) + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp + 1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{R r \rho_1} (Bp + 1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp + 1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{R r \rho_1} (Bp + 1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{R}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R}}{p (Bp + 1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R} \frac{R}{k_e k_t}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{p (Bp + 1) + C(p) \frac{R r \rho_1}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p (Bp + 1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{K_9 \frac{R r \rho_1}{k_e k_t}}}{p (Bp + 1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1) + C(p)\frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_8 k_e}{k_e} K_9 \frac{R r \rho_1}{k_e k_t}}{p(Bp+1) + C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

On a donc $A = \frac{K_8}{k_e}$, $B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$.

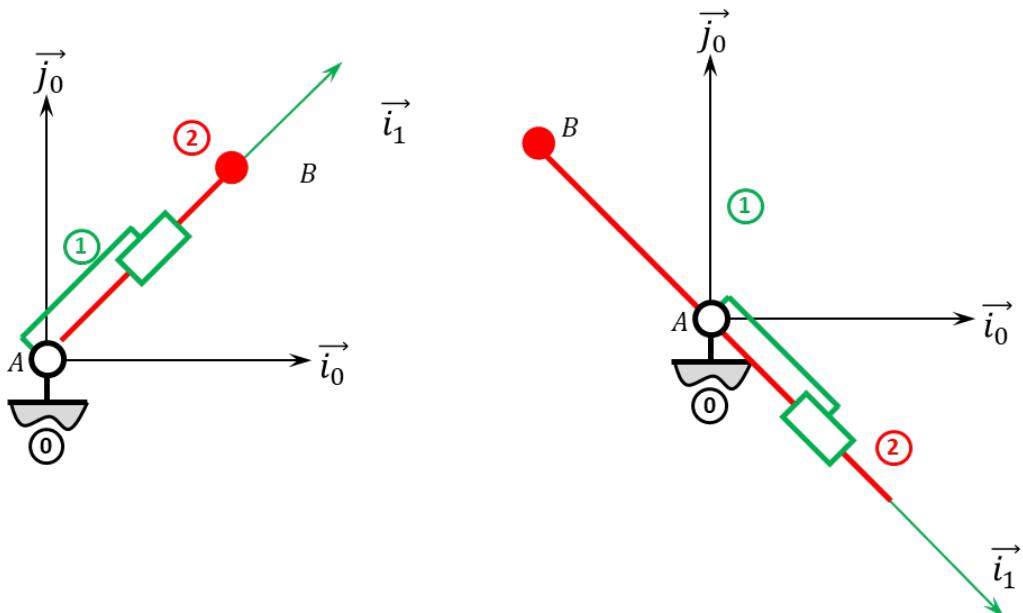
Exercice 173 – Mouvement RT*
B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = 20$ mm.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{-\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = -20$ mm.


Exercice 172 – Quille pendulaire*
B2-07

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2(Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.

Au final, $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

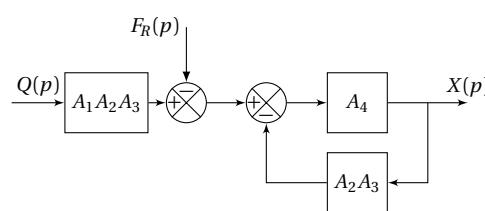
Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$ et $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$.

On a donc $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p) = \frac{2BS}{pV}$ et $H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}$.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Dans ce cas, $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2)}$.

Exercice 171 – Mouvement T – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **T** par rapport à **0**.

T est en translation de direction \vec{i}_0 par rapport à **0**.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **T** par rapport à **0**.

On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{i}_0$. La trajectoire du point **B** est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 170 – Mouvement T – *

B2-13

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point **B**.

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t)\vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

$$\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0}.$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(B, 1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0}.$$

Exercice 169 – Calcul de FTBO*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = BCDE.$$

Question 2 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = B(1+A).$$

Question 3 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = A \frac{BCD}{1+BCD}.$$

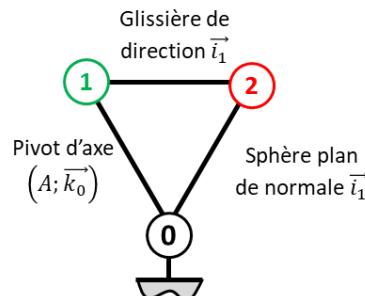
Question 4 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = A \frac{\frac{B}{1+B}CD}{1 + \frac{B}{1+B}CD} = \frac{ABCD}{1+B+BCD}.$$

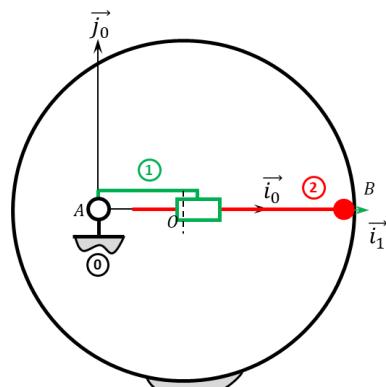
Exercice 168 – Pompe à palettes **

B2-12

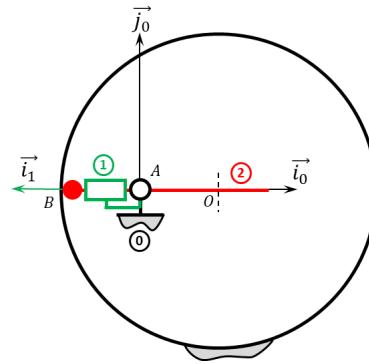
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 0 \text{ rad}$.



Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \pi \text{ rad}$.



Question 4 En déduire la course de la pièce 2.

La course de la pièce 2 est donnée par la différence entre la longueur AB maximale et AB minimale : $c = 30 - 10 = 20 \text{ mm}$.

Exercice 167 – Système 4 barres **

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Exercice 166 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

1 est en rotation de centre A et d'axe \vec{k}_0 par rapport à 0.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

B est en rotation par rapport à 0 (cercle de centre A et de rayon R).

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

On a $\vec{AB} = R \vec{i}_1 = R \cos \theta \vec{i}_0 + R \sin \theta \vec{j}_0$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t) = R \cos \theta(t) \\ y_B(t) = R \sin \theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 165 – Mouvement R *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par dérivation vectorielle.

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \frac{d}{dt} [\vec{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0}$. Or $\frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{i}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1$.
D'où $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par une autre méthode.

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} - R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

On a directement $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$.

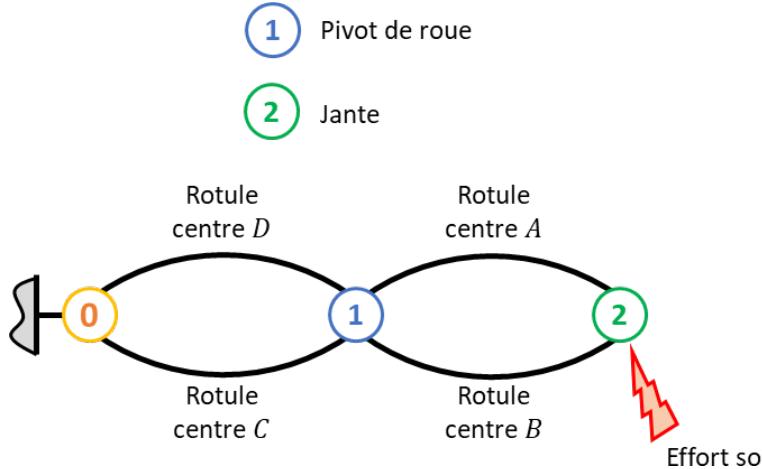
$$\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(B, 1/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1}. \text{ (En effet, } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1} \text{.)}$$

Exercice 164 – Suspension automobile **

B2-14

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Peut-on résoudre complètement le système? Pourquoi?

Calculons le degré d'hyperstatisme :

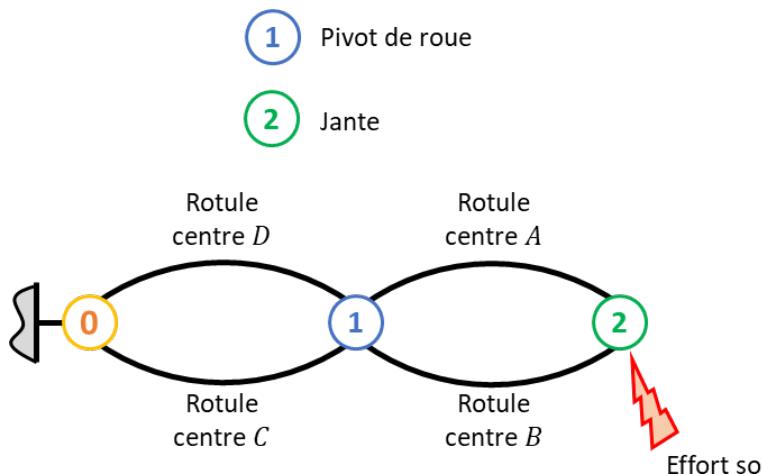
- mobilités : $m = 2$ (rotations autour de \overrightarrow{a} et de \overrightarrow{z});
- inconnues statiques : $I_s = 3 \times 4 = 12$;
- équations : $E_s = 2 \times 6 = 12$.
- $h = m - E_s + I_s = 2 - 12 + 12 = 2$.

On ne peut donc pas déterminer toutes les actions mécaniques.

Exercice 163 – Suspension automobile **

C2-07

Question 1 Réaliser le graphe des liaisons en faisant apparaître les actions mécaniques. Exprimer les torseurs des actions mécaniques de chacune des liaisons.



On a :

- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1_C)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_C \overrightarrow{a} + Y_C \overrightarrow{r} + Z_C \overrightarrow{x} \\ 0 \end{array} \right\}_C ;$
- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1_D)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_D \overrightarrow{a} + Y_D \overrightarrow{r} + Z_D \overrightarrow{x} \\ 0 \end{array} \right\}_D ;$
- $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1_A)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_A \overrightarrow{a} + Y_A \overrightarrow{r} + Z_A \overrightarrow{x} \\ 0 \end{array} \right\}_A ;$

$$\bullet \{ \mathcal{T}(2 \rightarrow 1_B) \} = \left\{ \begin{array}{c} X_B \vec{a} + Y_B \vec{r} + Z_B \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B.$$

Question 2 En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliquée au point C, en projection sur les axes de la base $(\vec{a}, \vec{r}, \vec{x})$ en fonction des composantes F_{sol}^a et F_{sol}^r et des dimensions d_0 , d_3 et d_4 .

On isole l'ensemble demandé.

BAME :

$$\bullet \{ \mathcal{T}(0 \rightarrow 1_C) \};$$

$$\bullet \{ \mathcal{T}(0 \rightarrow 1_D) \} = \left\{ \begin{array}{c} X_D \vec{a} + Y_D \vec{r} + Z_D \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} X_D \vec{a} + Y_D \vec{r} + Z_D \vec{x} \\ (d_4 + d_3) Y_D \vec{x} - (d_4 + d_3) Z_D \vec{r} \end{array} \right\}_C \overline{\mathcal{M}(C, 0 \rightarrow 1_D)} = \overline{\mathcal{M}(D, 0 \rightarrow 1_D)} +$$

$$\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1_D)} = (d_4 + d_3) \vec{a} \wedge (X_D \vec{a} + Y_D \vec{r} + Z_D \vec{x}) = (d_4 + d_3) \vec{a} \wedge Y_D \vec{r} + (d_4 + d_3) \vec{a} \wedge Z_D \vec{x} = (d_4 + d_3) Y_D \vec{x} - (d_4 + d_3) Z_D \vec{r}.$$

$$\bullet \{ \mathcal{T}(\text{Sol} \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{c} F_{sol}^a \vec{a} - F_{sol}^r \vec{r} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_{sol}^a \vec{a} - F_{sol}^r \vec{r} \\ d_0 F_{sol}^r \vec{x} \end{array} \right\}_C.$$

On applique le PFS en C et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_C + X_D + F_{sol}^a = 0 \\ Y_C + Y_D - F_{sol}^r = 0 \\ Z_C + Z_D = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ -(d_4 + d_3) Z_D = 0 \\ (d_4 + d_3) Y_D + d_0 F_{sol}^r = 0 \end{array} \right.$$

Question 3 Résoudre littéralement le système.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_C + X_D + F_{sol}^a = 0 \\ Y_C = -Y_D + F_{sol}^r \\ Z_C = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ Z_D = 0 \\ Y_D = -\frac{d_0 F_{sol}^r}{d_4 + d_3} \end{array} \right.$$

Exercice 162 – Fonctions de transfert*

B2-07

Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a FTBO}(p) = \frac{K^2}{(R + Lp)(f + Jp)} = \frac{K^2}{Rf + RJp + Lfp + LJp^2} = \frac{K^2}{Rf \left(1 + p \frac{RJ + Lf}{Rf} + \frac{LJ}{Rf} p^2 \right)}.$$

$$\text{On a donc } K_{BO} = \frac{K^2}{Rf}, \omega_{BO} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}, \frac{2\xi_{BO}}{\omega_{BO}} = \frac{RJ + Lf}{Rf} \Leftrightarrow \xi_{BO} = \omega_{BO} \frac{RJ + Lf}{2Rf} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}} \frac{RJ + Lf}{2Rf} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJRf}}.$$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a FTBF}(p) = \frac{\frac{K}{(R + Lp)(f + Jp)}}{1 + \frac{K^2}{(R + Lp)(f + Jp)}} = \frac{K}{(R + Lp)(f + Jp) + K^2} = \frac{\frac{K}{RJ + Lf} p + \frac{LJ}{Rf + K^2} p^2 + 1}{\frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} p + \frac{LJ}{Rf + K^2} p^2 + 1}.$$

$$\text{On a donc } K_{BF} = \frac{K}{R^2 + Rf}, \omega_{BF} = \sqrt{\frac{Rf + K^2}{LJ}}, \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} \Leftrightarrow \xi_{BO} = \omega_{BF} \frac{RJ + Lf}{2(Rf + K^2)} = \sqrt{\frac{Rf + K^2}{LJ}} \frac{RJ + Lf}{2(Rf + K^2)}$$

$$\xi_{BF} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K^2}}.$$

Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Si on note $R(p)$ la seconde entrée du **premier comparateur** et $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur,

$$\text{FTBO}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{R(p)} = A \times \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{B}{p}} \times C = \frac{AC}{B + p} = \frac{\frac{AC}{B}}{1 + \frac{B}{p}}. \text{ On a donc } K_{BO} = \frac{AC}{B} \text{ et } \tau_{BO} = \frac{1}{B}.$$

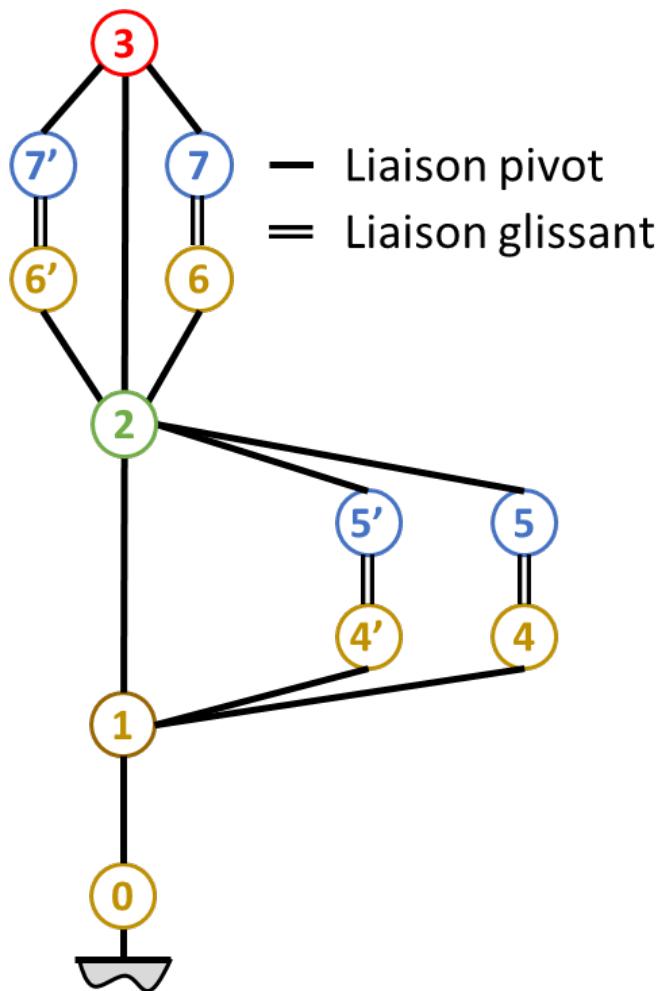
Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a } \text{FTBF}(p) = \frac{\frac{A}{B+p}}{1 + \frac{AC}{B+p}} = \frac{A}{B+p+AC} = \frac{A}{1 + \frac{p}{B+AC}}.$$

$$\text{On a donc } K_{\text{BF}} = \frac{A}{B+AC} \text{ et } \tau_{\text{BF}} = \frac{1}{B+AC}.$$

Exercice 161 – Système EPAS *
B2-16

Question 1 Réaliser le graphe des liaisons.



Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

Détermination des mobilités :

- rotation de l'ensemble des pièces en rotation autour de \vec{y} grâce à la pivot entre 0 et 1;
- rotation de la pivot entre 1 et 2 par mouvements opposés des pivots glissant 4–5 et 4'–5';
- rotation de la pivot entre 2 et 3 par mouvements simultanés des pivots glissant 6–7 et 6'–7'.

On a donc $m = 3$.

Méthode cinématique :

- nombre de cycles : 15 liaisons et 12 solides, $\gamma = L - S + 1 = 4$;
- nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6 \times 4 = 24$;
- nombre d'inconnues cinématiques : $I_c = 4 \times 2 + 11 \times 1 = 19$;
- hyperstaticité : $h = m - I_c + E_c = 3 - 19 + 24 = 8$.

Méthode statique :

- nombre d'équations statiques : $E_s = 6 \times 11 = 66$;
- nombre d'inconnues statiques : $I_s = 4 \times 4 + 11 \times 5 = 71$;
- hyperstaticité : $h = m - E_s + I_s = 3 - 66 + 71 = 8$.

Question 3 Proposer des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.

On va chercher à rendre le système isostatique tout en conservant une même architecture pour des branches en

parallèles.

Dans le cycle 1-2-5-4-1 pris indépendamment du reste du mécanisme on a :

- $m = 1$;
- $I_c = 1 + 1 + 2 + 1 = 4$;
- $E_c = 6 \times 1$;
- $h_1 = m - I_c + E_c = 2 - 4 + 6 = 4$.

En remplaçant la pivot entre 1 et 4 par une linéaire annulaire, on ajoute 3 inconnues cinématiques et 1 mobilité.

On a donc $h_1 = 2$. On peut faire le même changement pour les liaisons 4'-5', 2-6, 2-6'.

On a donc :

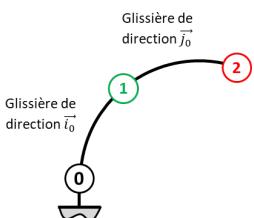
- $m = 7$
- nombre de cycles : 15 liaisons et 12 solides, $\gamma = L - S + 1 = 4$;
- nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6 \times 4 = 24$;
- nombre d'inconnues cinématiques : $I_c = 4 \times 2 + 7 \times 1 + 4 \times 4 = 31$;
- hyperstaticité : $h = m - I_c + E_c = 7 - 31 + 24 = 0$.

(Vérifier que les linéaires annulaires n'ajoutent pas des mobiltés supplémentaires...)

Exercice 160 – Mouvement TT – *

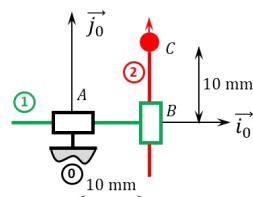
B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



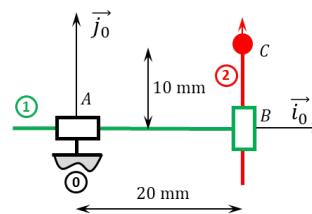
Question 2 Retracer le

schéma cinématique pour $\lambda = 10 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.



Question 3 Retracer le

schéma cinématique pour $\lambda = 20 \text{ mm}$ et $\mu = 10 \text{ mm}$.



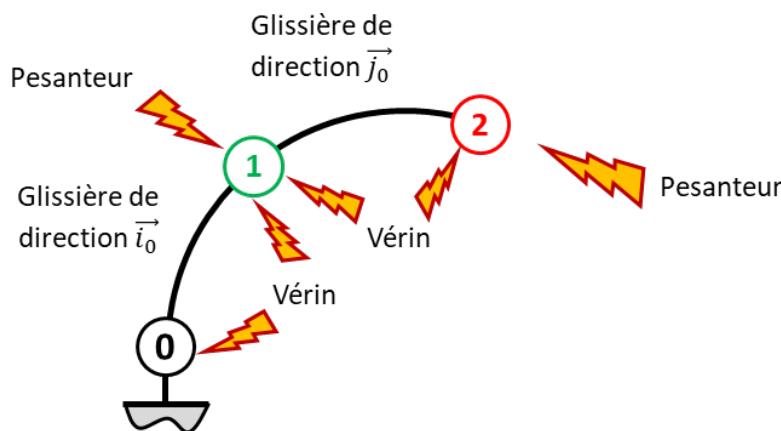
Exercice 159 – Mouvement TT – *

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_0 + Z_{01} \vec{k}_0 \\ L_{01} \vec{i}_0 + M_{01} \vec{j}_0 + N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_0 + Z_{12} \vec{k}_0 \\ L_{12} \vec{i}_0 + M_{12} \vec{j}_0 + N_{12} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_0}$.
- Vérité entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{v1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Vérité entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{v2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_2 \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

- Glissière entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \vec{j}_0 \\ N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}_0}$.
- Glissière entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \vec{i}_0 \\ N_{12} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_0}$.
- Vérité entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{v1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.
- Vérité entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{v2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_2 \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_0}$.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant la mobilité :

- on isole 2 et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{j}_0 ;
- on isole 1+2 et on réalise le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{i}_0 .

Exercice 158 – Machine de rééducation SysReeduc *

B2-07

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

On a :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + R I(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)r\rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres);
- enfin, K_1 convertit des mètres en incrément. X_c est la consigne que doit respectée X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

D'une part,

$$X(p) = ((X_C(p) - X(p))C(p) - F_P(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)}$$

$$X(p) = \frac{A(X_C(p) - X(p))C(p)}{p(Bp+1)} - \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p(Bp+1)} = \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1)} - \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1)}. \Leftrightarrow X(p) \left(\frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1)} + \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1) + AC(p)} - \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)}.$$

D'autre part, $X(p) = \Omega_m(p)H_4(p)K_5K_6$, $U_m(p) = (X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8)C(p)$, $\theta_m(p) = \Omega_m(p)H_4(p)$.

$$\Omega_m(p) = ((U_m(p) - \Omega_m(p)K_7)K_2 - F_P(p)K_9)H_3(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)(1 + K_7K_2H_3(p)) = U_m(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9$$

$$X(p) = (U_m(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = ((X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8)C(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \left(\left(X_c(p)K_1 - X(p) \frac{K_8}{K_5K_6} \right) C(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9 \right) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = ((X_c(p) - X(p))C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) \left(1 + C(p)H_3(p)K_1K_2 \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)} \right) = (X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9) \frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) \left(1 + K_7K_2H_3(p) + C(p)H_3(p)K_1K_2H_4(p)K_5K_6 \right) = (X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9)H_4(p)K_5K_6.$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow X(p) \left(1 + K_7K_2 \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} \frac{K_8}{K_5K_6} K_2 \frac{1}{p} K_5K_6 \right) = \left(X_c(p)C(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} \frac{K_8}{K_5K_6} K_2 - F_P(p) \frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} \frac{K_9}{K_5K_6} \right).$$

$$\Leftrightarrow X(p) \left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right) = \left(X_c(p)C(p) \frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \frac{k_t}{R} - F_P(p) \frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2} \right).$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \frac{k_t}{R}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)} - F_P(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \frac{k_e k_t}{R}}{\left((M+m)r^2\rho_1^2p^2 + \frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 \frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)} - F_P(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{\frac{K_8}{R} \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 + p \frac{k_e k_t}{R} + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_P(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left((M+m)r\rho_1p^2 + \frac{(M+m)r\rho_1p^2 \frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p) \frac{(M+m)r\rho_1p^2 K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} \right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2 + p \frac{k_e k_t}{R} + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_P(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left((M+m)r\rho_1p^2 + \frac{p k_e k_t}{R r \rho_1} + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1} \right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} \left(\frac{R}{k_e k_t} (M+m)r^2\rho_1^2p + 1 \right) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_P(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{p \frac{k_e k_t}{R r \rho_1} \left(\frac{(M+m)r^2\rho_1^2}{k_e k_t} p + 1 \right) + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) - \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R r \rho_1} (Bp+1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) - \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R r \rho_1} (Bp+1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) - \frac{\frac{R}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R}}{p (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R} \frac{R}{k_e k_t}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{k_e k_t} \frac{R r \rho_1}{R r \rho_1}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{R r \rho_1}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R r \rho_1}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) - \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{k_e k_t} \frac{R r \rho_1}{R r \rho_1}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} \\
 &\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) - \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_8}{k_e} \frac{k_e}{K_8} \frac{K_9}{k_e k_t} \frac{R r \rho_1}{R r \rho_1}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}}
 \end{aligned}$$

On a donc $A = \frac{K_8}{k_e}$, $B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$.

Exercice 157 – Mouvement $\overline{11}$ – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de $\mathbf{2}$ par rapport à $\mathbf{0}$.

Le point C a un mouvement quelconque dans le plan $(A, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de $\mathbf{2}$ par rapport à $\mathbf{0}$.

On a $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0} + \mu(t) \overrightarrow{j_0}$ et donc, on a directement $\begin{cases} x_C(t) = \lambda(t) \\ y_C(t) = \mu(t) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10\text{ cm}$ à la vitesse $v = 0,01\text{ m s}^{-1}$.

Question 3 Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R .

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta}$.

On a $v = R \dot{\theta}(t)$. Par intégration, $\theta(t) = \frac{v}{R} t$ (avec $\theta(0) = 0\text{ rad}$ pour $t = 0\text{ s}$).

Question 4 Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v , R et du temps.

Exprimons la trajectoire du point C : $\overrightarrow{AC} = R \overrightarrow{e_r} = R \cos \theta(t) \overrightarrow{i_0} + R \sin \theta(t) \overrightarrow{j_0}$. Par identification $\lambda(t) = R \cos \theta(t)$ et $\mu(t) = R \sin \theta(t)$.

Au final, $\begin{cases} \lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right) \\ \mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right) \end{cases}$.

Question 5 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

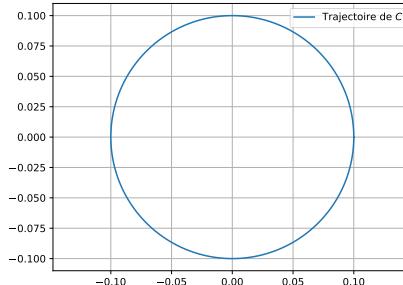
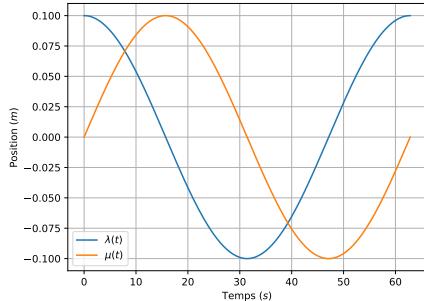
# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

```

```

les_t = np.linspace(0,T,200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t,les_lambda,label="$\lambda(t)$")
plt.plot(les_t,les_mu,label="$\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps ($s$)")
plt.ylabel("Position ($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()

plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda,les_mu,label="Trajectoire de $C$")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
    
```



Exercice 156 – Banc hydraulique *

C2-03

Question 1 Déterminer, en fonction de K_p , ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Le débit de fuite est nul; donc $\Delta Q_e(p)=0$.

Cas 1 : cours sur la précision connu – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie

La FTBO est de classe nulle ($C(p)$ est un gain, $H_{pom}(p)$ et $H_{pre}(p)$ de classe 0). Le gain de la Boucle ouverte est $K_{BO} = K_p K_m K_{pom} K_{cap}$.

Si l'entrée est un échelon d'amplitude P_0 , l'écart statique est donc donné par $\varepsilon_S = \frac{P_0}{1 + K_{BO}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_m K_{pom} K_{cap}}$.

Cas 2 : cours sur la précision peu connu – À savoir faire, mais on perd un peu de temps... – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie Si on connaît quand même un petit peu son cours, on a $\varepsilon(p) = \frac{P_{con}(p)}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}}$.

$$\text{On a alors, } \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{P_0}{p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

Cas 3 : cours sur la précision pas connu – À savoir faire, mais on perd beaucoup peu de temps...

$$\begin{aligned} \text{En utilisant la formule de Black, on a } P_e(p) &= P_{con}(p) K_{cap} \frac{\frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}} \\ &= P_{con}(p) K_{cap} \frac{K_p K_{pom} K_m}{(1 + T_2 p)(1 + T_1 p) + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} \end{aligned}$$

$$\text{En passant à la valeur finale avec une entrée échelon, on a } \lim_{t \rightarrow +\infty} P_e(t) = P_0 K_{cap} \frac{K_p K_{pom} K_m}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$$

$$\text{L'écart statique est donc donné par } \varepsilon_S = P_0 - P_0 \frac{K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}{1 + K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}} = P_0 \frac{1 + K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}} - K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}{1 + K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}} \\ = \frac{P_0}{1 + K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}}$$

Question 2 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

On souhaite que l'écart statique soit inférieur à 5% soit 0,05 pour une entrée unitaire.

$$\begin{aligned} \text{On cherche donc } K_p \text{ tel que } \frac{1}{1 + K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}} < 0,05 \Leftrightarrow 1 < 0,05(1 + K_P K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}) \\ \Leftrightarrow \frac{1 - 0,05}{0,05 K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}} < K_p \\ \text{Soit } K_p > \frac{1 - 0,05}{0,05 \times 1,234 \times 10^7 \times 3,24 \times 2,5 \times 10^{-8}} \Rightarrow K_p > 19. \end{aligned}$$

Question 3 Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p la fonction de transfert en régulation définie par : $H_{\text{pert}}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$. En déduire, en fonction de K_p , $\varepsilon_{\text{pert}}$ définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

Dans ce cas il n'y a pas d'intégrateur avant la perturbation échelon. Il faut savoir faire le calcul.

$$\begin{aligned} \text{On peut utiliser la « lecture directe » : } P_e(p) &= P_r(p)H_{\text{pre}} - \Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p) = H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)\varepsilon(p) - \Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p) \\ &= -H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}P_e(p) - \Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p) \\ \Leftrightarrow P_e(p)(1 + H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}) &= -\Delta Q_e(p)H_{\text{fui}}(p) \\ \Leftrightarrow \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)} &= -\frac{H_{\text{fui}}(p)}{1 + H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}} \\ \text{Calculons } \varepsilon_{\text{pert}}(p) &= -\frac{H_{\text{fui}}(p)}{1 + H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}} \Delta Q_e(p)K_{\text{cap}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \varepsilon_{\text{pert}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{H_{\text{fui}}(p)}{1 + H_{\text{pre}}(p)H_{\text{pom}}(p)C(p)K_{\text{cap}}} \frac{\Delta Q_0}{p} K_{\text{cap}} \\ &= -\frac{K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}}}{1 + K_m K_{\text{pom}} K_p K_{\text{cap}}} \end{aligned}$$

Question 4 Proposer un réglage de K_p pour limiter $\varepsilon_{\text{pert}}$ à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Pour $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, il faut $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \times 10^5 \text{ (Pa)}$ soit

$$\frac{K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}}}{1 + K_m K_{\text{pom}} K_p K_{\text{cap}}} < 40 \times 10^5 \Rightarrow K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}} < 40 \times 10^5 (1 + K_m K_{\text{pom}} K_p K_{\text{cap}}) \Rightarrow \frac{K_f \Delta Q_0 K_{\text{cap}} - 40 \times 10^5}{40 \times 10^5 K_m K_{\text{pom}} K_{\text{cap}}} < K_p \Rightarrow K_p > -1$$

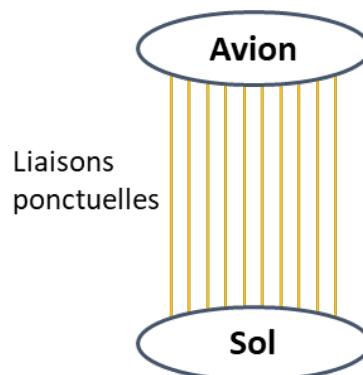
Question 5 Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Je vous laisse faire le calcul... Il faut savoir le faire le plus vite possible. Il faut d'abord calculer la FTBF, la mettre sous forme canonique, déterminer $\xi_{\text{BF}} = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2 (1 + K_p K_M K_{\text{pom}} K_{\text{cap}})}}$ puis déterminer K_p tel que $\xi_{\text{BF}} = 1$.

Exercice 155 – *

B2-16

On modélise chacune des 8 liaisons au sol par une liaison ponctuelle (sphère-plan). **Question 1** Réaliser le graphe des liaisons.



Question 2 Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.

La liaison de l'avion avec le sol est assimilable à une liaison appui-plan de normale \vec{z} . Il y a donc 3 mobilités (1 rotation autour de \vec{z} , 1 translation selon \vec{x} et 1 translation suivant \vec{y}).

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_s = 10 \times 1 = 10$ (8 liaisons ponctuelles avec 1 inconnue statique par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 6 + 10 = 7$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (10 - 2 + 1) \times 6 = 54$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_c = 10 \times 5 = 50$ (8 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison).

En conséquences, $h = 3 - 50 + 54 = 7$.

Pour simplifier l'étude, les actions mécaniques de contact entre chaque atterrisseur et le sol sont modélisées globalement par un effort ponctuel vertical. Ainsi la modélisation introduit trois liaisons ponctuelles de normales ($A; \vec{z}$) (atterrisseur auxiliaire), ($P_g; \vec{z}$) (atterrisseur principal gauche) et ($P_d; \vec{z}$) (atterrisseur principal droit).

Question 3 Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.

En utilisant une méthode statique, on a $h = m - E_s + I_s$ avec :

- $m = 3$;
- $E_s = 1 \times 6 = 6$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_s = 3 \times 1 = 3$.

En conséquences, $h = 3 - 6 + 3 = 0$.

En utilisant une méthode cinématique, on a $h = m - I_c + E_c$ avec :

- $m = 3$;
- $E_c = \gamma \times 6 = (3 - 2 + 1) \times 6 = 12$ (on ne peut isoler que l'avion);
- $I_c = 3 \times 5 = 15$ (3 liaisons ponctuelles avec 5 inconnues cinématiques par liaison);

En conséquences, $h = 3 - 15 + 12 = 0$.

Exercice 154 – Mouvement RR *

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Le point C peut atteindre tous les points situés compris entre deux cercles de rayon 5 mm et de rayon 25 mm.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de 2 par rapport à 0.

On a $\vec{AC} = R\vec{i}_1 + L\vec{j}_2$. On projetant ce vecteur dans le repère $\mathcal{R}_A i_0 j_0 k_0$ on a

$$\vec{AC} = R(\cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0) + L(\cos(\theta + \varphi) \vec{i}_0 + \sin(\theta + \varphi) \vec{j}_0). \text{ On a donc : } \begin{cases} x_C(t) = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ y_C(t) = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

Question 3 Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.

Distance à parcourir : 0,05 m. Durée du parcours : $T = \frac{0,05}{v}$.

Question 4 Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.

$\forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right], y_C(t) = 0,025$. Pour $t = 0$, $x_C(0) = -0,025$. On a alors $x_C(t) = -0,025 + vt$.

Au final, $\forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right], \begin{cases} x_C(t) = -0,025 + vt \\ y_C(t) = 0,025 \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

Question 5 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$.

Afin que le point C suive un segment, il faut donc que $\begin{cases} -0,025 + vt = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,025 + vt - R \cos \theta = L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-0,025 + v t - R \cos \theta)^2 = L^2 \cos^2(\theta + \varphi) \\ (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2 \sin^2(\theta + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-0,025 + v t - R \cos \theta)^2 + (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2$$

$$\Rightarrow 0,025^2 + v^2 t^2 + R^2 \cos^2 \theta - 2 \times 0,025 v t + 2 R \cos \theta - v t R \cos \theta + 0,025^2 + R^2 \sin^2 \theta - 2 \times 0,025 R \sin \theta = L^2$$

$$\Rightarrow (2 - v t) \cos \theta - 2 \times 0,025 \sin \theta = \frac{L^2}{R} - \frac{2 \times 0,025^2}{R} - \frac{v^2 t^2}{R} - R + 2 \times 0,025 \frac{v t}{R}$$

Équation trigonométrique de la forme $a \cos x + b \sin x = c$.

Il y a donc une solution analytique. On peut aussi résoudre l'équation numériquement.

Une fois $\theta(t)$ déterminée, on a $0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \Rightarrow \arcsin\left(\frac{0,025 - R \sin \theta(t)}{L}\right) - \theta(t) = \varphi(t)$

Question 6 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.

Exercice 153 – Mouvement RR *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{R_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{R_0} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{R_0} = R \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{R_0} + L \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{R_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}.$$

(Avec $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{R_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}$).

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par composition.

On a $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)}$.

$$\overrightarrow{V(C, 2/1)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -L \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{k_0} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}.$$

$$\overrightarrow{V(C, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = (-L \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1}).$$

Au final, $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} + \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1})$.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$. Pour sommer les torseurs, il faut écrire les vecteurs vitesses au même point, ici en C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \\ R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C, 2/0)}]_{R_0} = \frac{d}{dt} [R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}]_{R_0}.$$

De plus, $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{R_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1}$ et $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{R_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_2} = -(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{i_2}$.

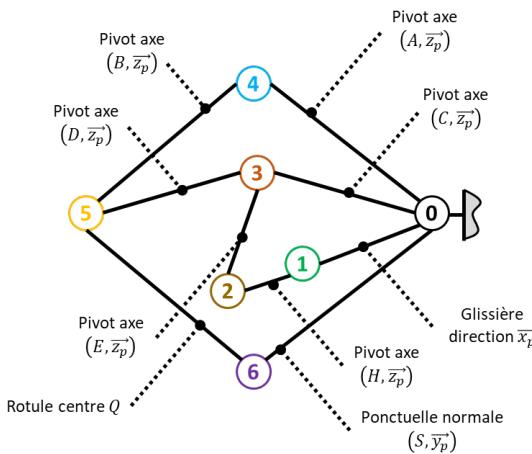
$$\text{On a donc } \overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1} + L(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} - L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \overrightarrow{i_2}.$$

Exercice 152 – *

B2-16

Question 1 Calculer l'hyperstatisme du modèle plan du mécanisme global de la pince (Figure 1).

Le graphe de liaisons est donné figure suivante.



- Dans le plan, on a $m = 2$: mobilité correspondant au serrage de la pièce et rotation de 6 autour de l'axe (Q, \vec{z}_p) .
- $I_c = 6 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 3 = 10$ (6 pivots, 1 glissière et 1 ponctuelle dans le plan) ;
- $E_c = 3 \times 3 = 9$
- $h = m - I_c + E_c = 2 - 10 + 9 = 1$.

Exercice 151 – Banc hydraulique *

C2-03

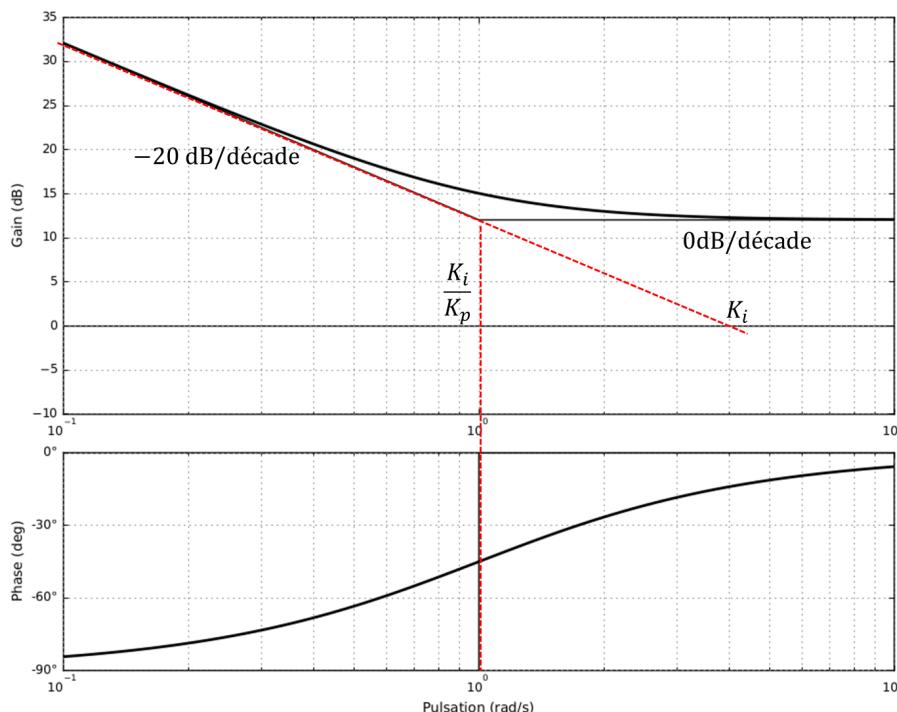
Question 1 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

$$\text{On a } C(p) = \frac{K_i}{p} + K_p = \frac{K_i + pK_p}{p} = K_i \frac{1 + p \frac{K_p}{K_i}}{p}.$$

Question 2 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = \frac{K_i}{K_p}$	$\omega \rightarrow \infty$
$\frac{K_i}{p}$	-20dB/Décade -90°	-20dB/Décade -90°	
$1 + \frac{K_p}{K_i} p$	0dB/Décade 0°	+20dB/Décade +90°	
$C(p)$	-20dB/Décade -90°	0dB/Décade 0°	

Coupe l'axe des abscisses en $\omega = K_i$



Question 3 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

Ce correcteur augmente la classe de la FTBO donc augmente la précision. Cependant, il réduit la phase. Il faut donc

veiller à ce que la pulsation de cassure soit réglée de telle sorte que le système ne soit pas déstabilisé.

Question 4 Quelle valeur faut-il donner à $\omega_{0\text{dB}}$ pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?
D'après la remarque, on a $t_e \omega_{0\text{dB}} = 3$ soit $\omega_{0\text{dB}} = 3/t_e = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 5 Déterminer analytiquement le rapport $T = \frac{K_p}{K_i}$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

Calculons la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée : $F_{\text{BO}} = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{\text{cap}}$.

Le correcteur doit être réglé pour que $\omega_{0\text{dB}} = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$.

Calculons la marge de phase. $\arg(F_{\text{BO}}) = -\arg(1 + T_1 p) - \arg(1 + T_2 p) = -\arctan T_1 \omega - \arctan T_2 \omega$. On a donc $\arg(F_{\text{BO}}(0,075)) = -\arctan(10 \times 0,075) - \arctan(5 \times 0,075) = -57^\circ$ soit une marge de phase de -123° .

Pour atteindre une marge de phase de 60° , on peut donc baisser la phase de 63° .

Calculons $\arg(C(j\omega)) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}\omega\right)$.

On cherche donc $\frac{K_i}{K_p}$ tel que $\arg(C(0,075)) = -63$. Soit $-90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = -63 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = 27$
 $\Rightarrow \frac{K_p}{K_i}0,075 = 0,51 \Leftrightarrow \frac{K_p}{K_i} = 6,79$.

Question 6 En déduire les valeurs de K_i et K_p qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

Il faut chercher K_i et K_p pour respecter $\omega_{0\text{dB}}$. Recherchons le gain de la boucle ouverte non corrigée pour $\omega_{0\text{dB}}$.

$$G_{\text{dB}}(F_{\text{BO}}) = 20 \log(K_{\text{pom}} K_m K_{\text{cap}}) - 20 \log(\sqrt{1^2 + T_1^2 \omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1^2 + T_2^2 \omega^2})$$

$$\text{On a alors } G_{\text{dB}}(F_{\text{BO}})(0,075) = -0,004 - 1,94 - 0,57 = 2,52 \text{ dB}$$

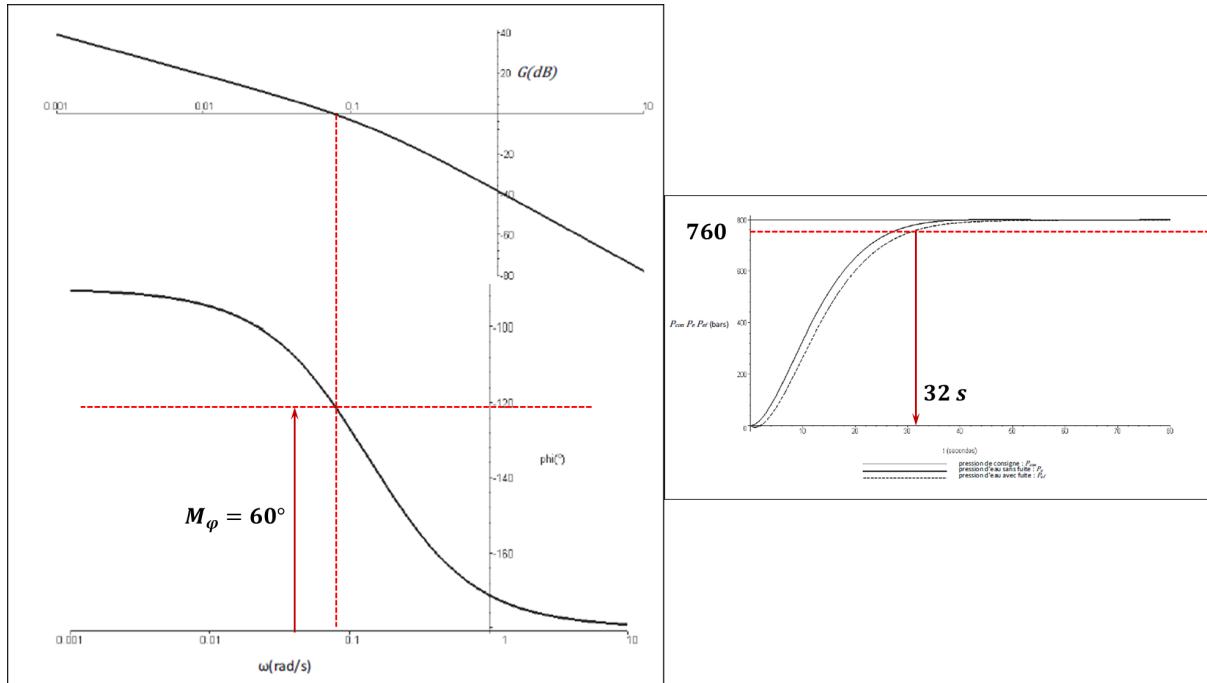
Il faut donc baisser le gain de 2,52 dB. $G_{\text{dB}}(C(p)) = 20 \log K_i - 20 \log \omega + 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{K_p}{K_i} \right)^2 \omega^2} \right)$

$$\text{On a alors } G_{\text{dB}}(C(0,075)) = 20 \log K_i + 22,5 + 1 = -2,52 \text{ soit } K_i = 10^{-\frac{2,52 + 1 + 22,5}{20}} = 0,05$$

Par suite, $K_p = 6,79 \times 0,05 = 0,34$.

(A vérifier).

Question 7 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.



- Stabilité :
 - Marge de phase mesurée : 60° **cdc ok**.
 - Marge de gain mesurée : infini **cdc ok**.
- Rapidité : $t_e = 32 \text{ s} < 40 \text{ s}$ **cdc ok**.
- Précision : écart statique nul **cdc ok**.

- Amortissement : nul **cdc ok.**

Exercice 150 – Mouvement TI – *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Par dérivation vectorielle, on a : $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}$.

Par composition du torseur cinématique, on a : $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \ddot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}.$$

Exercice 149 – Palettisation – Stabilité *

C2-03

On montre que la fonction de transfert du réducteur est $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$, que $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$, et que la FTBO est donnée par $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)}$ ($k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}$).

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 1 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

On souhaite une marge de phase de 45°. On cherche donc ω_φ tel que $\varphi(\omega_\varphi) = -180 + 45 = -135^\circ$.

$$\varphi(\omega) = -90 - \arg(1 + \tau_m j\omega) = -90 - \arctan(\tau_m \omega).$$

On a donc $\varphi(\omega_\varphi) = -135 \Leftrightarrow -90 - \arctan(\tau_m \omega_\varphi) = -135 \Leftrightarrow -\arctan(\tau_m \omega_\varphi) = -45 \Leftrightarrow \arctan(\tau_m \omega_\varphi) = 45 \Rightarrow \tau_m \omega_\varphi = 1 \Rightarrow \omega_\varphi = \frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \Rightarrow \omega_\varphi = 200 \text{ rad s}^{-1}$.

Par suite, il faut que le gain soit nul en ω_φ .

On a donc $G_{dB}(\omega) = 20 \log k_{BO} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau_m^2}$. En $\omega_\varphi = \frac{1}{\tau_m}$: $G_{dB}(\omega_\varphi) = 0 \Leftrightarrow 20 \log k_{BO} - 20 \log \frac{1}{\tau_m} - 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_m^2} \tau_m^2} = 0 \Leftrightarrow \log k_{BO} + \log \tau_m - \log \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \log \frac{k_{BO} \tau_m}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{k_{BO} \tau_m}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow k_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_m}$.
(A vérifier) $k_{BO} = 282,8$.

Question 2 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

$$k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}; \text{ donc } k_c = \frac{N k_{BO}}{k_m k_r} = \frac{200 \times 282,8}{4 \times 30} = 471.$$

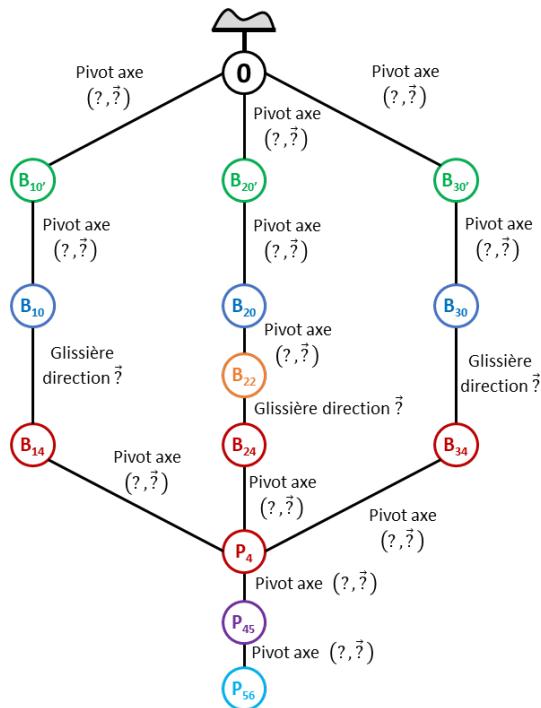
Question 3 Déterminer l'écart de position.

Il y a une intégration dans la correcteur. La FTBO est de classe 1 est le système est précis en position.

Exercice 148 – Triptéor *

B2-16

Question 1 Réaliser le graphe de liaisons.



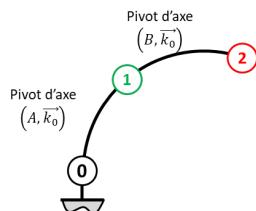
Question 2 Calculer le degré d'hyperstatisme.

- $m = 5$: translations des 3 glissières et rotations des deux dernières pivot;
- $I_c = 15$;
- $E_c = 12$;
- $h = m - I_c + E_c = 5 - 15 + 12 = 2$.

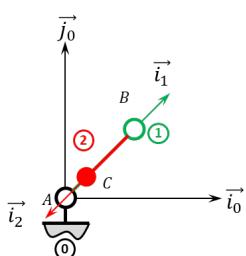
Exercice 147 – Mouvement RR *

B2-12

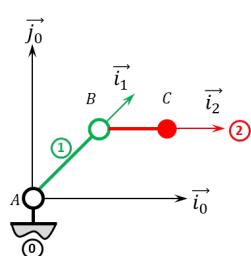
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



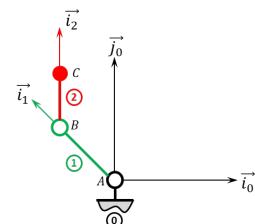
Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = \pi$ rad.



Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.



Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ rad et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rad.



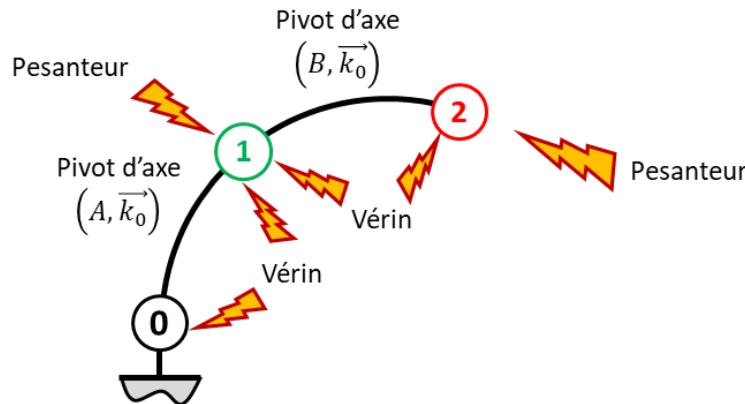
Exercice 146 – Mouvement RR *

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 + Z_{01} \vec{k}_0 \\ M_{01} \vec{j}_0 + N_{01} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 + Z_{12} \vec{k}_1 \\ M_{12} \vec{j}_1 + N_{12} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 3 Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_0 + Y_{01} \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Pivot entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{i}_1 + Y_{12} \vec{j}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1, \mathcal{R}_0}$.
- Pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0_{m1} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$.
- Moteur entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(1_{m2} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2 \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{B, \mathcal{R}_0}$.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

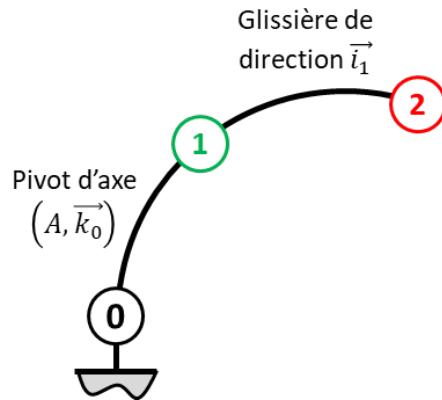
C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant aux mobilités :

- on isole 2 et on réalise le théorème du moment statique en A en projection sur \vec{k}_0 ;
- on isole 1+2 et on réalise le théorème du moment statique en B en projection sur \vec{k}_0 .

Exercice 145 – Mouvement RT *

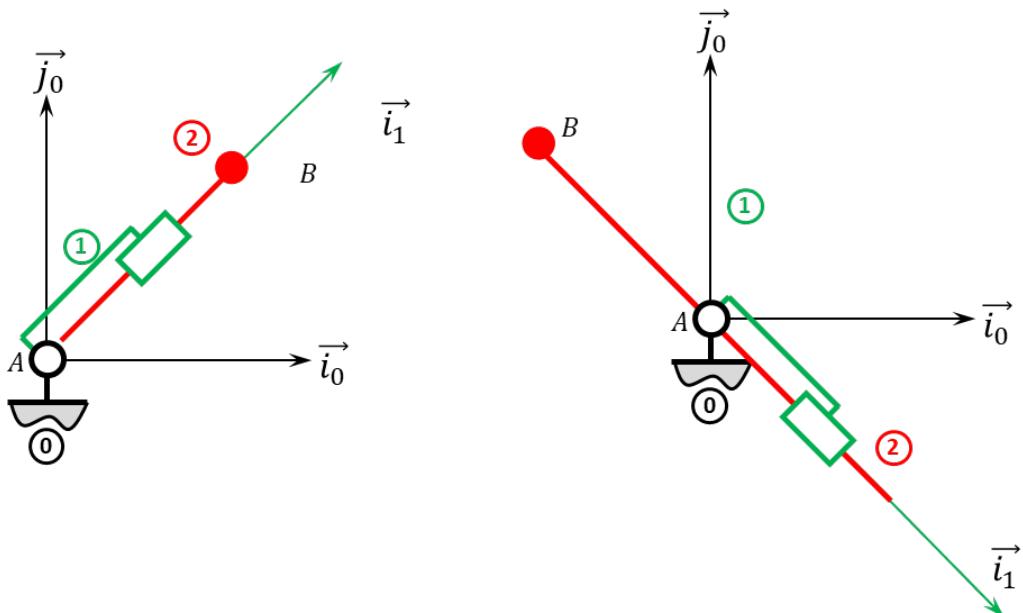
B2-12

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = 20$ mm.

Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta = -\frac{\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = -20$ mm.



Exercice 144 – Quille pendulaire*

B2-07

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.

Au final, $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

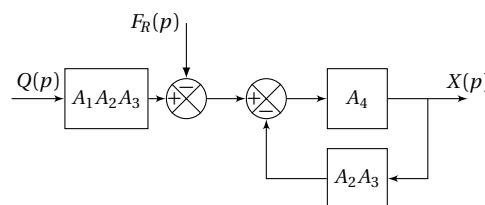
Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = (H_1 Q(p) - F_R(p)) H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3 \Sigma(p))$ et $\Sigma(p) = A_2(A_1 Q(p) - X(p))$.

On a donc $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3 A_2(A_1 Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2 A_3 A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3 A_2 A_1 Q(p))$. On a donc $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) = \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}.$$

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

$$\text{Dans ce cas, } \frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p) H_2(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + KV + 2BS^2)}.$$

Exercice 143 – Mouvement T – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

1 est en translation de direction \vec{i}_0 par rapport à **0**.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$. La trajectoire du point **B** est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$ dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 142 – Mouvement T – *

B2-13

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point **B**.

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

$$\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

Question 2 Déterminer $\overline{\Gamma(B, 1/0)}$.

$$\overline{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(B, 1/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

Exercice 141 – Calcul de FTBO*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = BCDE.$$

Question 2 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = B(1+A).$$

Question 3 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = A \frac{BCD}{1+BCD}.$$

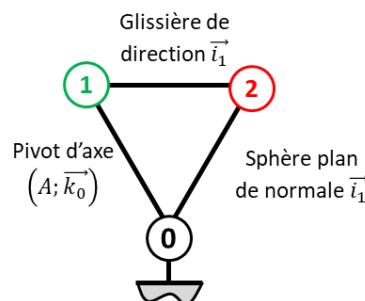
Question 4 Déterminer la FTBO dans le cas suivant.

$$\text{FTBO}(p) = A \frac{\frac{B}{1+B}CD}{1+\frac{B}{1+B}CD} = \frac{ABCD}{1+B+BCD}.$$

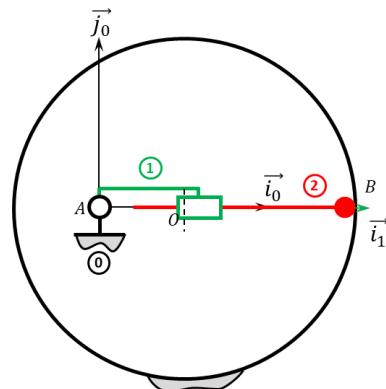
Exercice 140 – Pompe à palettes **

B2-12

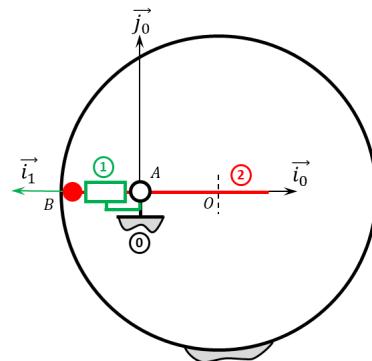
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = 0 \text{ rad}$.



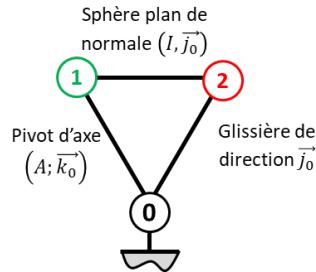
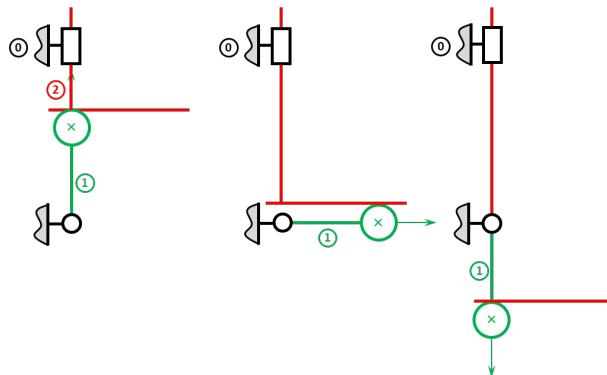
Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t) = \pi \text{ rad}$.



Question 4 En déduire la course de la pièce 2.

La course de la pièce 2 est donnée par la différence entre la longueur AB maximale et AB minimale : $c = 30 - 10 =$

20 mm.

Exercice 139 – Pompe à pistons radiaux **
B2-12
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=0 \text{ rad.}$
Question 3 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$
Question 4 Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=-\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

Question 5 En déduire la course de la pièce 2.

La course est de

Exercice 138 – Parallélépipède*
B2-10
Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

 Pour des raisons de symétrie, on a directement $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2}\vec{x} + \frac{b}{2}\vec{y} + \frac{c}{2}\vec{z}$.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G , en A puis O .

Notons (1) le parallélépipède rectangle et (2) le cylindre (plein). On note $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On a $I_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$

et $I_G(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ (attention l'axe du cylindre est \vec{y}).

On a donc $I_G(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Par ailleurs, $m = m_1 - m_2$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{2}\vec{y}$; donc $I_A(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 + m\frac{b^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 + m\frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{OG} = \frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}; \text{ donc } I_O(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

Exercice 137 – Parallélépipède percé*
B2-10

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

On note m_C la masse du cylindre (plein) et m_P la masse du parallélépipède. On a alors $m = m_P - m_C$. De plus, $\overrightarrow{OG_p} = \frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{OG_c} = \frac{a}{3} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z}$.

$$\text{On a alors } m \overrightarrow{OG} = m_p \overrightarrow{OG_p} - m_c \overrightarrow{OG_c} = m_p \left(\frac{a}{2} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z} \right) - m_c \left(\frac{a}{3} \overrightarrow{x} + \frac{b}{2} \overrightarrow{y} + \frac{c}{2} \overrightarrow{z} \right).$$

$$\text{Par suite, } \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \left(\frac{m_p}{2} - \frac{m_c}{3} \right) \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}.$$

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G .

$$\text{Les plans } (G, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \text{ et } (G, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}) \text{ sont des plans de symétrie. On a donc } I_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

On déplace la matrice du parallélépipède rectangle en G.

$$\text{On a } I_{G_p}(P) = \begin{pmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & C_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{G_p G} = \overrightarrow{G_p O} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \left(\frac{m_p}{2} - \frac{m_c}{3} \right) \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \left(\frac{m_p}{2} - \frac{m_c}{3} \right) - \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$$\text{Ainsi, } I_G(P) = I_{G_p}(P) + m_p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p + m_p \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_p + m_p \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On déplace la matrice du cylindre en G.

$$\text{De même } I_{G_c}(C) = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{G_c G} = \overrightarrow{G_c O} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3} \\ -\frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \left(\frac{m_p}{2} - \frac{m_c}{3} \right) \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \left(\frac{m_p}{2} - \frac{m_c}{3} \right) - \frac{a}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Delta'_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$$\text{Ainsi, } I_G(C) = I_{G_c}(C) + m_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta'^2_x & 0 \\ 0 & 0 & \Delta'^2_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c + m_c \Delta'^2_x & 0 \\ 0 & 0 & A_c + m_c \Delta'^2_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

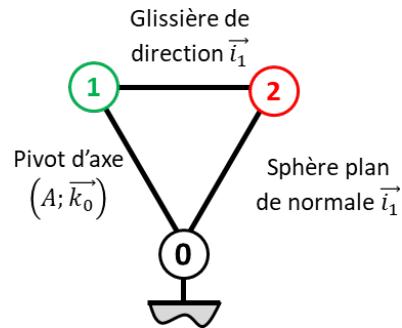
Bilan.

Au final, $I_G(E) = I_G(P) - I_G(C)$ et

$$I_G(E) = \begin{pmatrix} A_p - A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_p + m_p \Delta_x^2 - B_c - m_c \Delta'^2_x & 0 \\ 0 & 0 & C_p + m_p \Delta_x^2 - A_c - m_c \Delta'^2_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Exercice 136 – Pompe à piston radial *
C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$ soit $-e\overrightarrow{i_0} + \lambda\overrightarrow{i_1} - R\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -e\overrightarrow{i_0} + \lambda(t)\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0} + \lambda(t)\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0} - R\cos\varphi(t)\overrightarrow{i_0} - R\sin\varphi(t)\overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$.

En projetant les expressions sur $\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{j_0}$, on a : $\begin{cases} -e + \lambda(t)\cos\theta(t) - R\cos\varphi(t) = 0 \\ \lambda(t)\sin\theta(t) - R\sin\varphi(t) = 0 \end{cases}$

On cherche à supprimer $\varphi(t)$; donc

$$\begin{cases} -e + \lambda(t)\cos\theta(t) = R\cos\varphi(t) \\ \lambda(t)\sin\theta(t) = R\sin\varphi(t) \end{cases}$$

En éllevant au carré les expressions et en sommant, on obtient $R^2 = (-e + \lambda(t)\cos\theta(t))^2 + \lambda(t)^2\sin^2\theta(t) \Rightarrow R^2 = (-e + \lambda(t)\cos\theta(t))^2 + \lambda(t)^2\sin^2\theta(t)$

$$\Rightarrow R^2 = e^2 - 2e\lambda(t)\cos\theta(t) + \lambda(t)^2.$$

Résolution de l'équation : $\lambda(t)^2 - 2e\lambda(t)\cos\theta(t) + e^2 - R^2 = 0$.

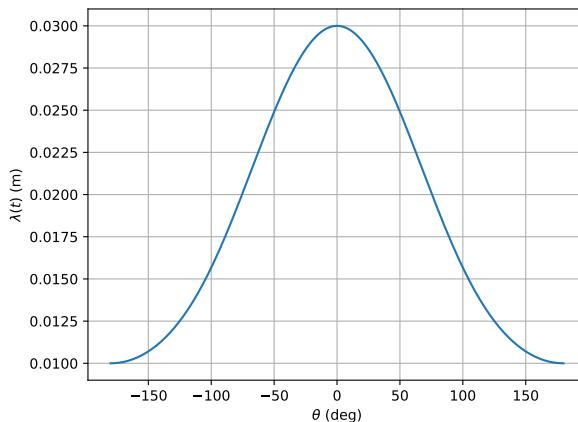
$$\text{On a } \Delta = (-2e\cos\theta(t))^2 - 4(e^2 - R^2) = 4e^2\cos^2\theta(t) - 4e^2 + 4R^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{2e\cos\theta(t) \pm \sqrt{4e^2\cos^2\theta(t) - 4e^2 + 4R^2}}{2} \\ &= e\cos\theta(t) \pm \sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2} \end{aligned}$$

Question 3 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

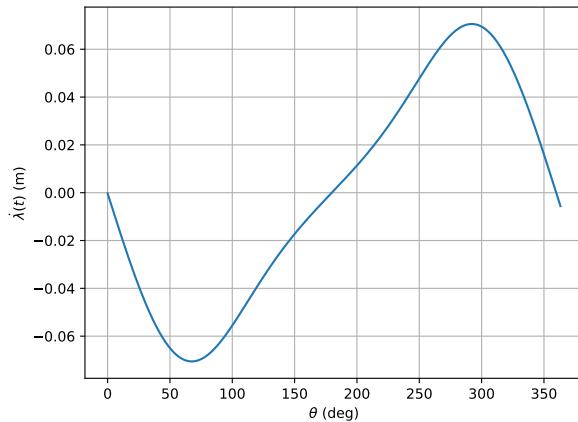
On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.



Question 4 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}_+(t) = -e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \frac{1}{2}(e^2\cos^2\theta(t))'(e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}}$
 $= -e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) - \frac{e^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2}}$.

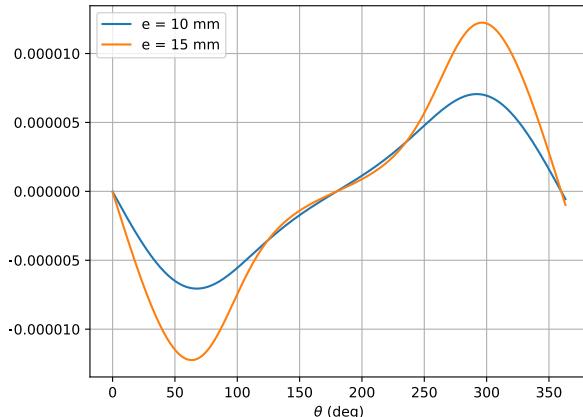
À revoir



Question 5 Exprimer le débit instantané de la pompe.

Le débit instantané de la pompe est donné par $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.

Question 6 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ et $e = 15 \text{ mm}$.



Question 7 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m²

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200:]
    les_q3 = S*les_lambdap[400:]
    les_q4 = S*les_lambdap[600:]
    les_q5 = S*les_lambdap[800:]
```

```

# On conserve que les valeurs que sur un tour
les_q1 = les_q1[:1000]
les_q2 = les_q2[:1000]
les_q3 = les_q3[:1000]
les_q4 = les_q4[:1000]
les_q5 = les_q5[:1000]
plt.grid()

les_t = les_t[:1000]
les_theta = les_theta[:1000]

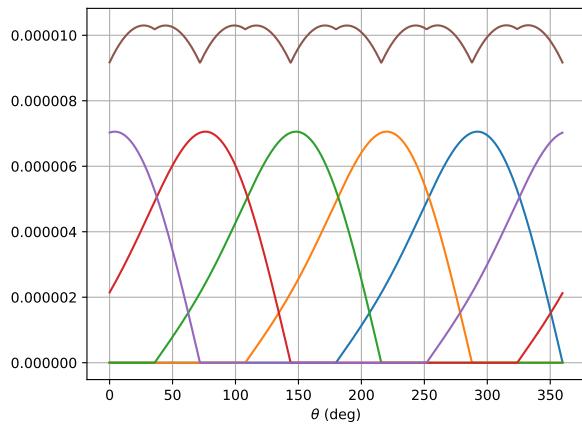
plt.xlabel("$\theta$ (deg)")
plt.ylabel("Débit instantané $m^3s^{-1}$")

# On conserve que les valeurs positives (débit)
for i in range(len(les_q1)):
    if les_q1[i]<0:
        les_q1[i]=0
    if les_q2[i]<0:
        les_q2[i]=0
    if les_q3[i]<0:
        les_q3[i]=0
    if les_q4[i]<0:
        les_q4[i]=0
    if les_q5[i]<0:
        les_q5[i]=0

plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q5)

# Le débit instantané est la somme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
#plt.show()
# plt.savefig("10_05_c.pdf")

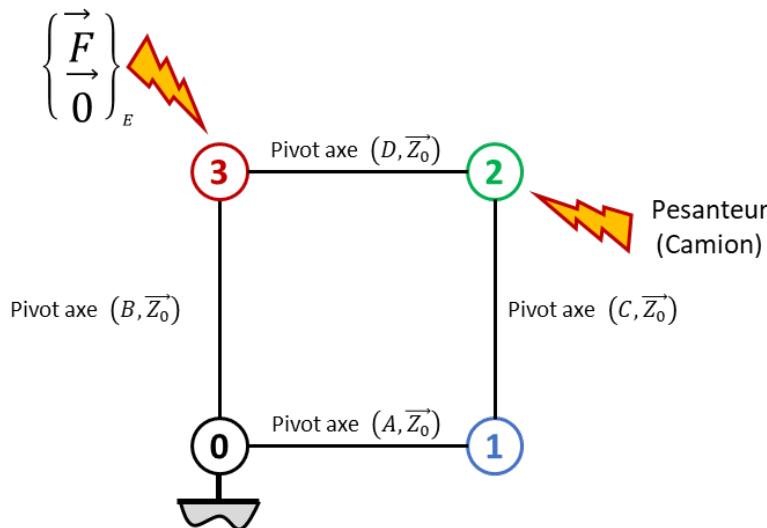
```



Exercice 135 – Pèse camion **

C1-05

Question 1 Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.



En faisant l'hypothèse de problème plan, on a 8 inconnues statiques.

Question 2 Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de F en fonction de M .

- On commence par isoler **1** soumis à 2 glisseurs. D'après le PFS, les actions mécaniques en A et en C sont dirigées suivant la direction \vec{x}_0 .
- On isole ensuite **2**. Le solide **2** étant en translation circulaire, on réalise un TRS suivant \vec{y}_0 .
- On isole enfint **3**. Le solide **3** étant en rotation autour de (B, \vec{z}_0) par rapport à **0**, on réalise un TMS en B suivant \vec{z}_0 .

Exercice 134 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

1 est en rotation de centre **A** et d'axe \vec{k}_0 par rapport à **0**.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point **B** appartenant à **1** par rapport à **0**.

B est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre **A** et de rayon R).

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1 = R \cos \theta \vec{i}_0 + R \sin \theta \vec{j}_0$. La trajectoire du point **B** est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t) = R \cos \theta(t) \\ y_B(t) = R \sin \theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 133 – Mouvement R *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$ par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0}. \text{ Or } \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_1} = \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{i}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

D'où $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$ par une autre méthode.

$$\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} - R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point **B**.

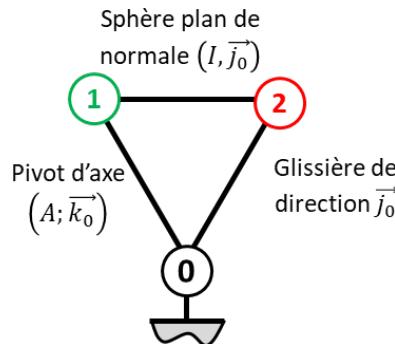
$$\text{On a directement } \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B.$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(B, 1/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1}. \text{ (En effet, } \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{j_1} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{j_1} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1}.)$$

Exercice 132 – Pompe à piston axial *
C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

En écrivant la fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

On a donc, $e \overrightarrow{i_1} + R \overrightarrow{j_0} + \mu \overrightarrow{i_0} - \lambda(t) \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$. En projetant l'expression sur $\overrightarrow{j_0}$ (dans ce cas, l'expression suivant $\overrightarrow{i_0}$ n'est pas utile) : $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$.

On a donc, $\lambda(t) = e \sin \theta + R$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.

Question 4 On note S la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

En notant $q(t)$ le débit instantané, $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.

Question 5 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 10 \text{ mm}$ ainsi que pour $e = 20 \text{ mm}$ et $R = 5 \text{ mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1 \text{ cm}^2$.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

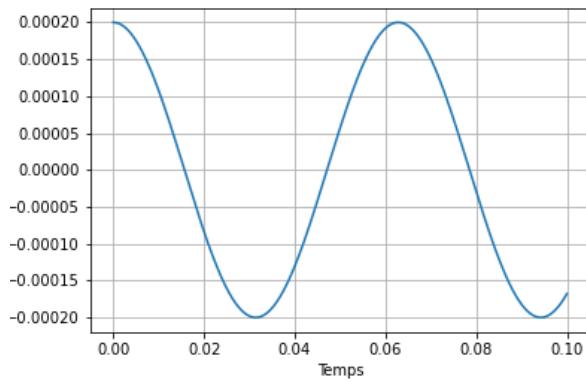
    return res

def calc_lambdap(theta,w):
    res = e*w*np.cos(theta)
    return res
```

```

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit (${m}^{-3}s^{-1}$)")
    plt.grid()
    plt.savefig("11_02_c.png")
    plt.show()

plot_debit()
    
```


Exercice 131 – Banc Balafre *

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Déterminer l'expression de la coordonnée z_G de \overrightarrow{OG} selon $\overrightarrow{z_0}$. Faire l'application numérique.

Question 2 Sachant que l'ensemble JR possède une symétrie de révolution par rapport à $(O, \overrightarrow{z_0})$, simplifier la matrice d'inertie $I_{G_{JR}}(JR)$.