

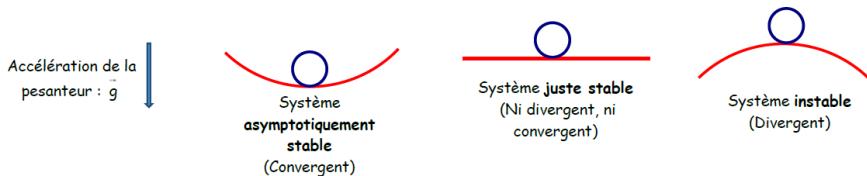
2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

2.1 Stabilité des systèmes asservis

2.1.1 Notion de stabilité

Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



Premières définitions

Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- ▶ abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- ▶ son régime transitoire finit par disparaître;
- ▶ sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- ▶ sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

Remarque

La stabilité d'un système est indépendante de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

2.1 Stabilité des systèmes asservis	1
2.2 Rapidité des systèmes asservis	6
2.3 Précision des systèmes asservis	8

C1-01

C2-03

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.
Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionale.

Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionale tend vers zéro au cours du temps.

Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles p_i de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle.

- les pôles réels (de type $p = -a$) induisent des modes du type e^{-at} ;
- les pôles complexes conjugués (de type $p = -a \pm j\omega$) induisent des modes du type $e^{-at} \sin \omega t$.

On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

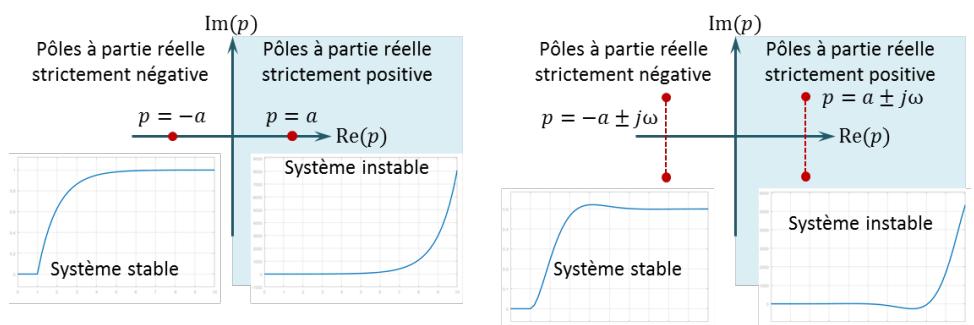


FIGURE 2.1 – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.

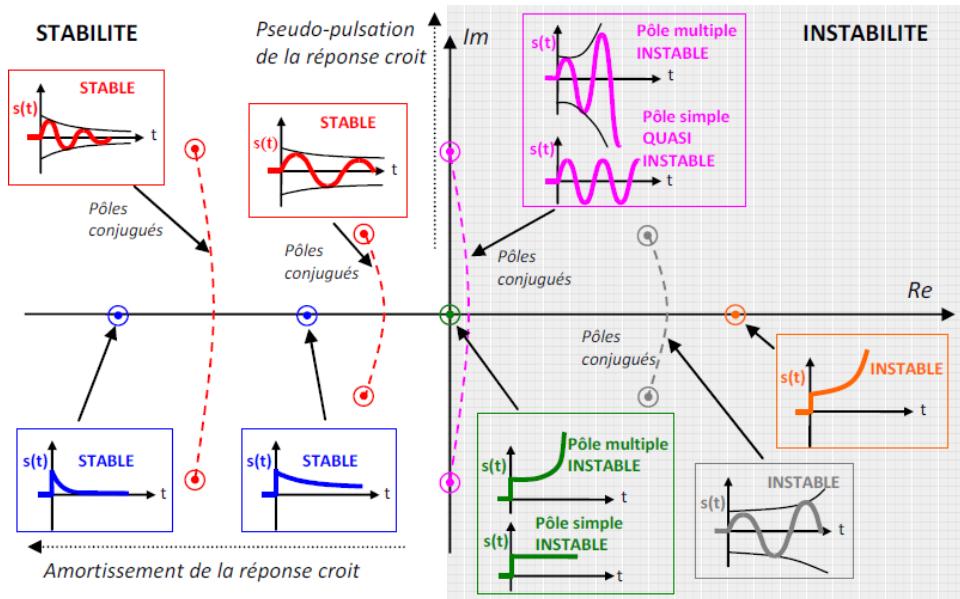


FIGURE 2.2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [F. Mathurin].

Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

Remarque

On peut montrer que :

- ▶ **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- ▶ **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2a_1 > a_3a_0$.

Pôles dominants [1]

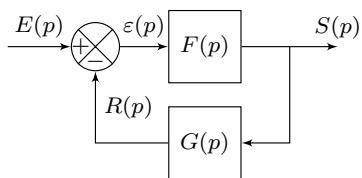
Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

2.1.2 Marges de stabilité

Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$.

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}$.

Définition – Équation caractéristique

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p) = 0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1 + H_{BO}(p) = 0$.

Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1 + H_{BO}(p) = 0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p) = -1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1; 0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de -180° .

Résultat –

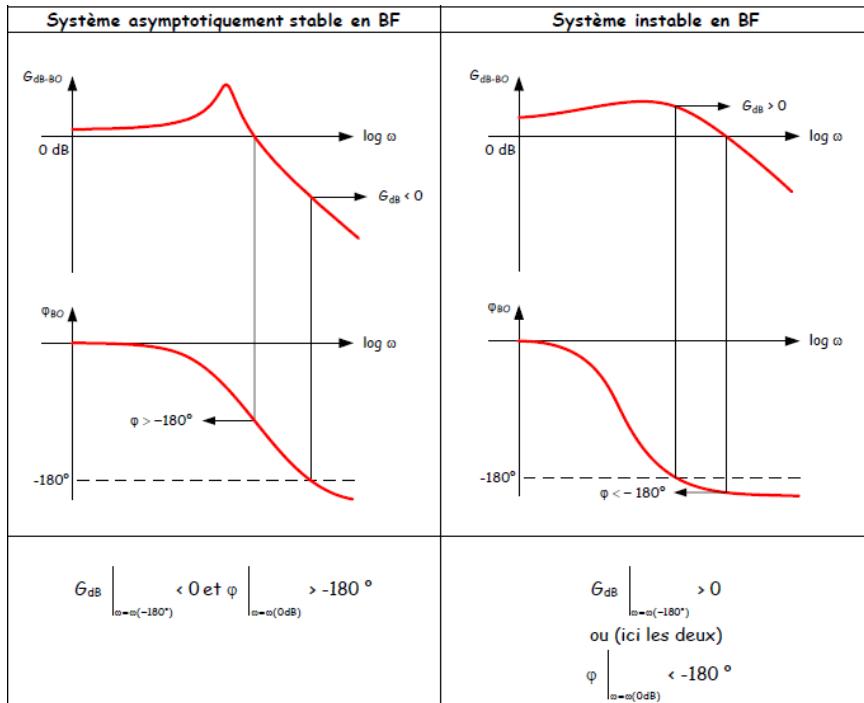
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

$$G_{dB}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0dB}} > -180^\circ.$$

En notant ω_{-180° la pulsation pour laquelle la phase vaut -180° et ω_{0dB} la pulsation pour laquelle le gain est nul.

Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

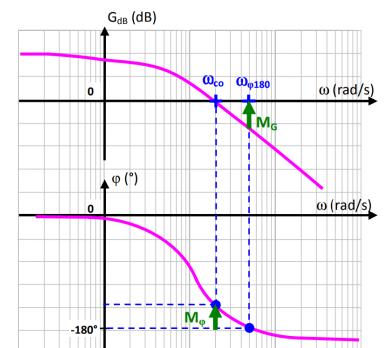
- ▶ la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- ▶ la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$.

Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$ où $\omega_{\varphi180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180^\circ$.



La marge de gain permet compte de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

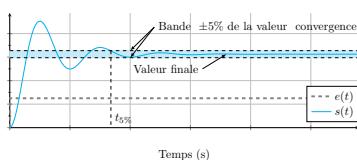
- ▶ la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- ▶ le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- ▶ le système n'est pas invariant au cours du temps;
- ▶ on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- ▶ certaines non linéarités sont ignorées.

2.2 Rapidité des systèmes asservis

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Temps de réponse à 5%



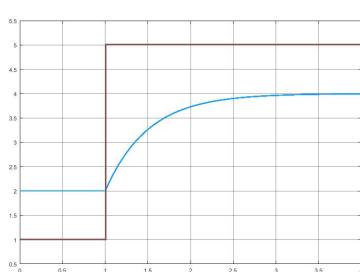
Méthode – Détermination du temps de réponse

En pratique, on détermine le temps de réponse à 5%.

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

Résultat –

Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.



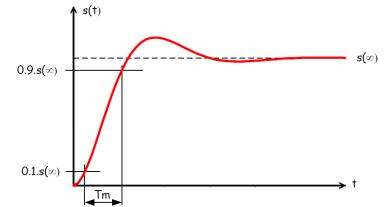
Exemple – Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

Les pièges du temps de réponse à 5% :

- ▶ le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini**;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractérise la « vivacité » d'un système.



2.2.2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par 3τ .

Résultat –

Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par $\text{FTBF}(p) = \frac{K}{1 + \tau p + K}$. La constante de temps est alors $\tau_{\text{BF}} = \frac{\tau}{1 + K}$.

Résultat –

Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

Systèmes d'ordre 2

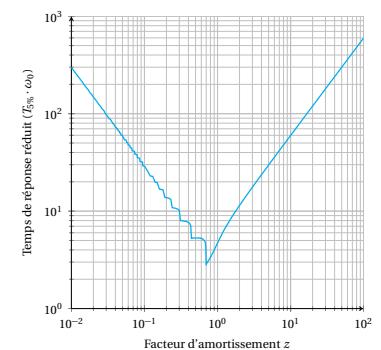
Résultat –

Pour un système du second, à ξ constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient $K_{\text{BF}} = \frac{K}{1 + K}$, $\omega_{\text{BF}} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$, $\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$.

Résultat –

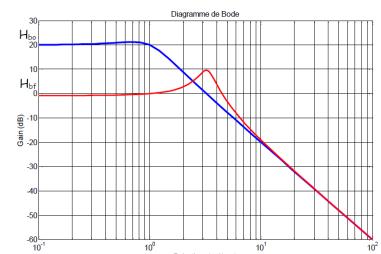
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de ξ_{BF} le système peut devenir plus ou moins rapide.



2.2.3 Résultats dans le diagramme de Bode

Résultat –

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.



Résultat -

Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.

2.3 Précision des systèmes asservis

2.3.1 Système non perturbé

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

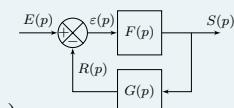
Définition -

La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.

Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :

$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \iff \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

**Définition -**

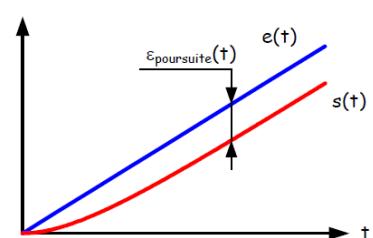
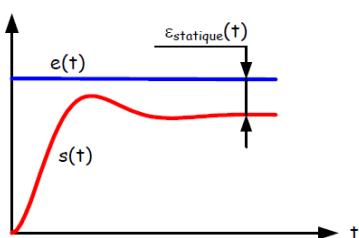
Un système est précis pour une entrée lorsque $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$.

Définition -

~

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

- ▶ écart statique, système sollicité par une entrée échelon : $e(t) = E_0$ et $E(p) = \frac{E_0}{p}$;
- ▶ écart en vitesse ou en poursuite, système sollicité par une rampe : $e(t) = Vt$ et $E(p) = \frac{V}{p^2}$;
- ▶ écart en accélération : système sollicité par une parabole, $e(t) = At^2$ et $E(p) = \frac{A}{p^3}$.



Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p) \iff \varepsilon(p)(1 + F(p)G(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)G(p)}$.

Résultat –

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

Poursuivons ...

On a $\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}$ avec $m < n$.

FTBO de classe nulle

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.

FTBO de classe 1

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{V}{K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = +\infty$.

FTBO de classe 2

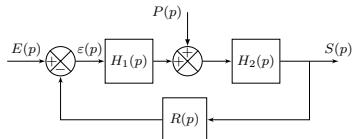
- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{A}{K_{BO}}$.

Résultat -

Classe	Consigne échelon $e(t) = E_0$ $E(p) = \frac{E_0}{p}$	Consigne en rampe $e(t) = Vt$ $E(p) = \frac{V}{p^2}$	Consigne parabolique $e(t) = At^2$ $E(p) = \frac{A}{p^3}$
0	$\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	$\varepsilon_V = +\infty$	$\varepsilon_A = +\infty$
1	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = \frac{V}{K_{BO}}$	$\varepsilon_A = +\infty$
2	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = 0$	$\varepsilon_A = \frac{A}{K_{BO}}$

Remarque

L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

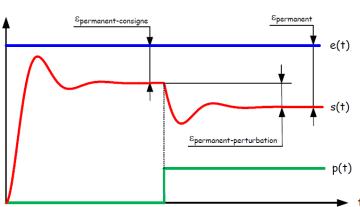
2.3.2 Système perturbé

Soit le schéma-blocs ci-contre.

L'écart est caractérisé par le soustracteur principal, c'est-à-dire celui situé le plus à gauche du schéma-blocs.

Par lecture directe, on a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)(H_2(p)(P(p) + \varepsilon(p)H_1(p)))$
 $\iff \varepsilon(p) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \iff \varepsilon(p)(1 + R(p)H_1(p)H_2(p)) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)} - \frac{R(p)H_2(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p).$

On a donc : $\varepsilon(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + FTBO(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\frac{R(p)H_2(p)}{1 + FTBO(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$

**Résultat -**

Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain K_1 important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.

Application 1

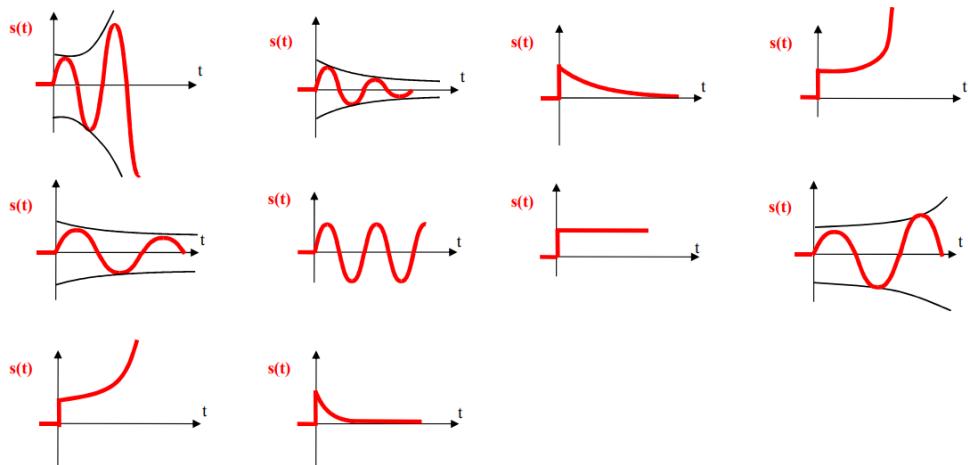
Stabilité des systèmes – Sujet

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03



Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

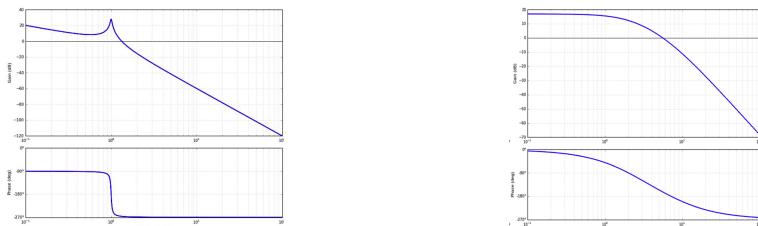
- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$ | 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 2. $-3, -2, 0;$ | 5. $-j, j, -1, 1;$ | 8. $2, -1, -3;$ |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 6. $-1, +1;$ | 9. $-6, -4, 7.$ |

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

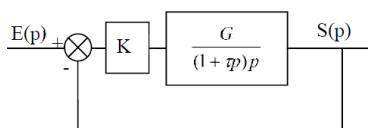


Exercice 4 – Étude de la stabilité

Objectif

- ▶ Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- ▶ La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45 °.

On donne le schéma ci-contre.



On a $K = 1$, $\tau = 0,1$ et $G = 20$.

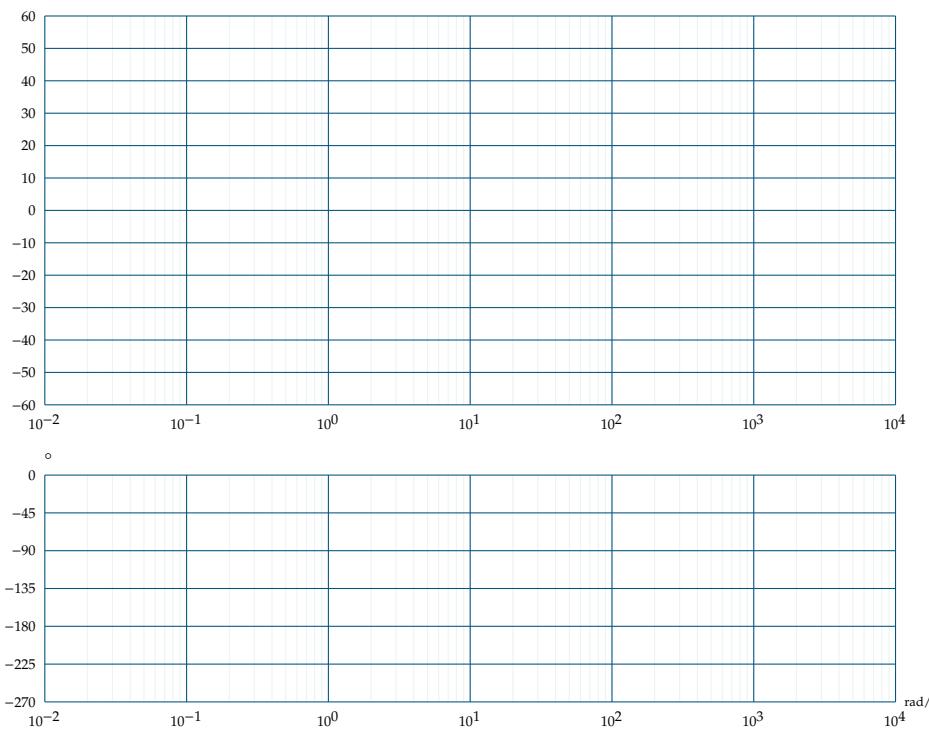
Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.



Application 1

Stabilité des systèmes – Corrigé

Exercice 1 – Réponse impulsionale (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

Exercice 4 – Étude de la stabilité

Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

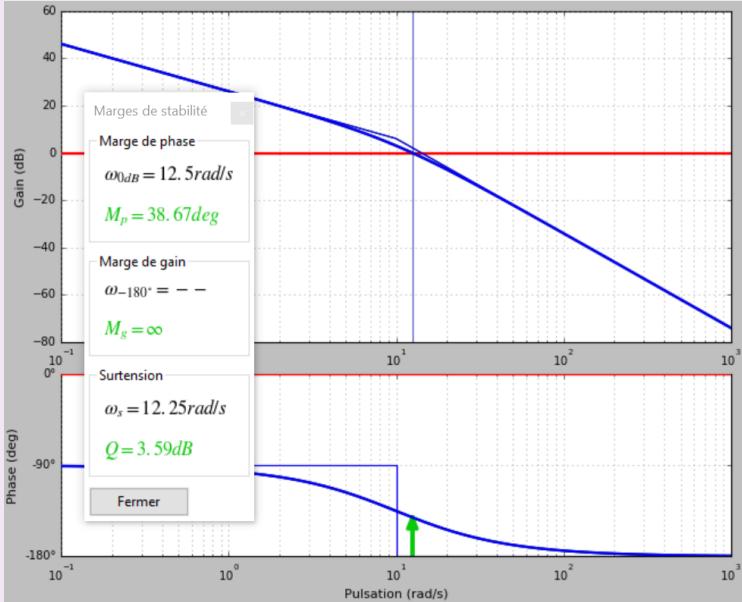
Correction

$$\text{Ici on a } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$$

$$\text{Erreur statique (entrée échelon)} : \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe)} : \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = \frac{1}{20}$$

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Correction

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Correction

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Correction

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c) - (-180)$.

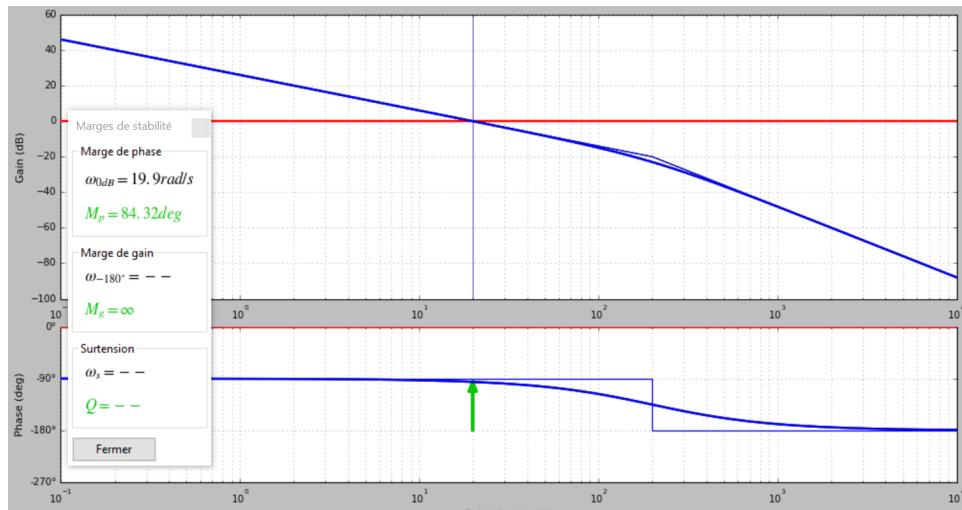
Cherchons ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$. On a $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$.
 $20 \log |FTBO(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20 \log 20 - 20 \log \omega \sqrt{1 + 0,01\omega^2}$.
 $G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1 + 0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1 + 0,01\omega_c^2)$ On pose $x = \omega_c^2$ et on a :
 $400 = x (1 + 0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$. On a donc $\Delta = 412,3^2$ et $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$
on conserve la racine positive et $x_1 = 156,15$ et $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$.
 $\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1 + 0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$.
La marge de phase est donc de $38,66^\circ$.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.

Correction

Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau = 0,005$



Application 2

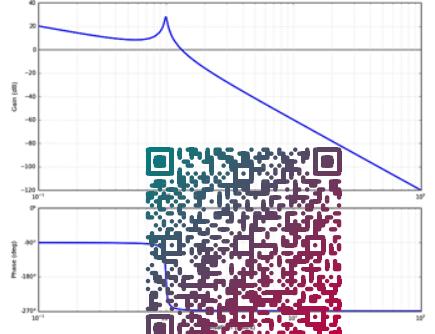
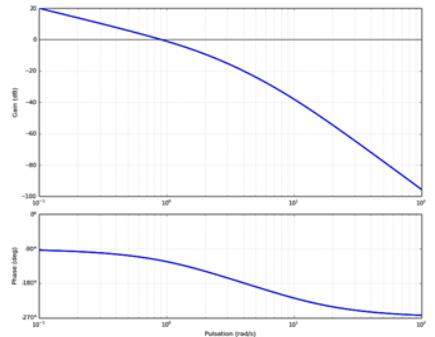
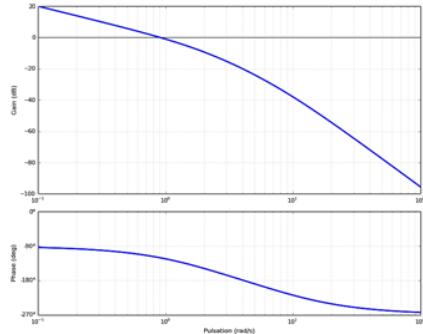
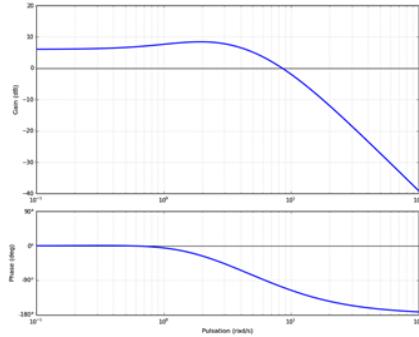
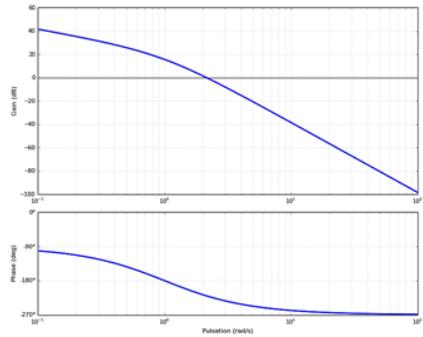
Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

C2-03

P. Dupas?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.



Application 2

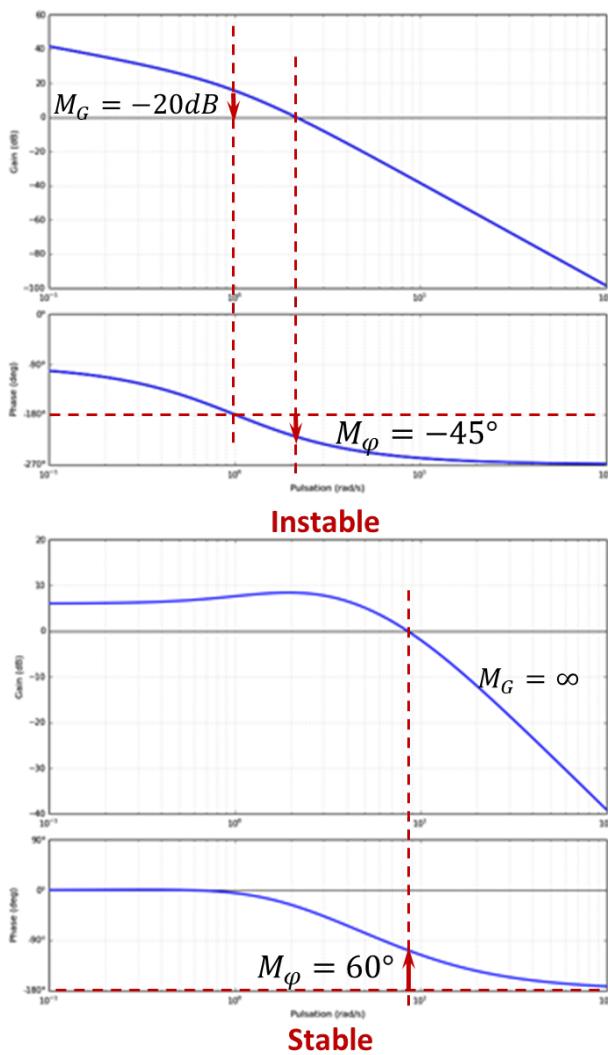
Stabilité des systèmes – Corrigé

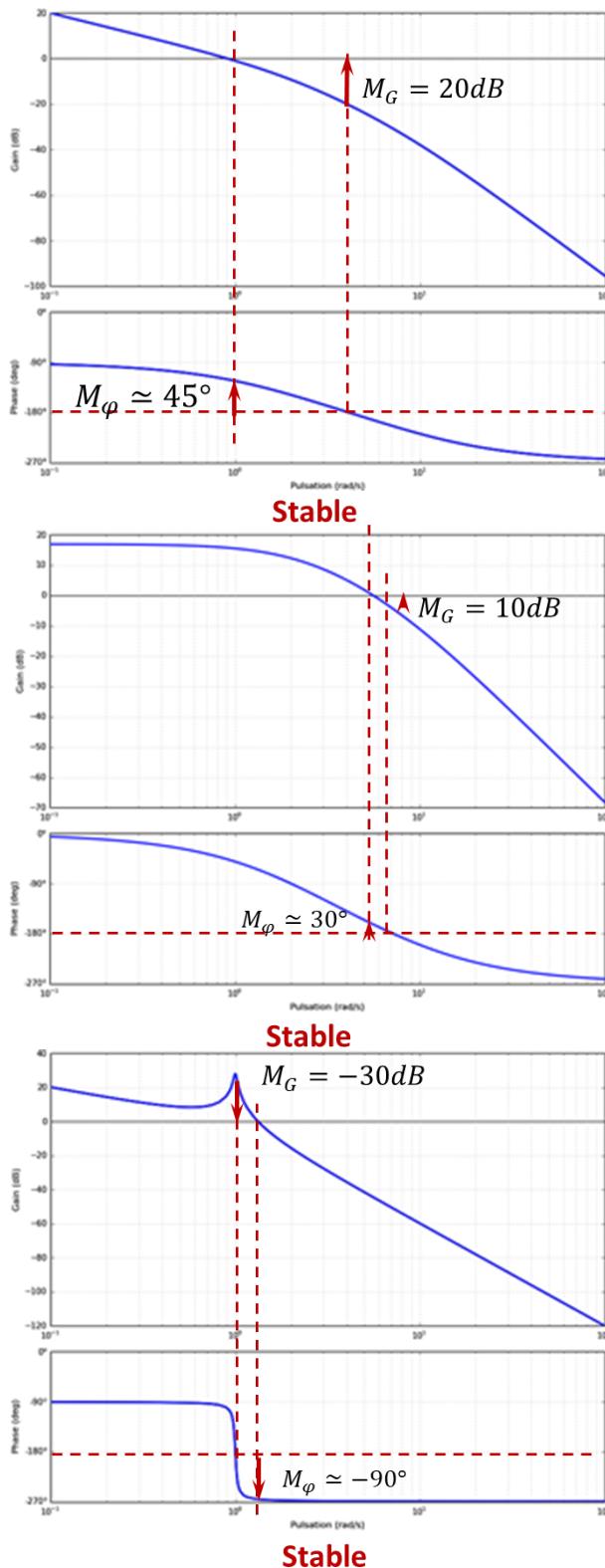
C1-01

C2-03

P. Dupas?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

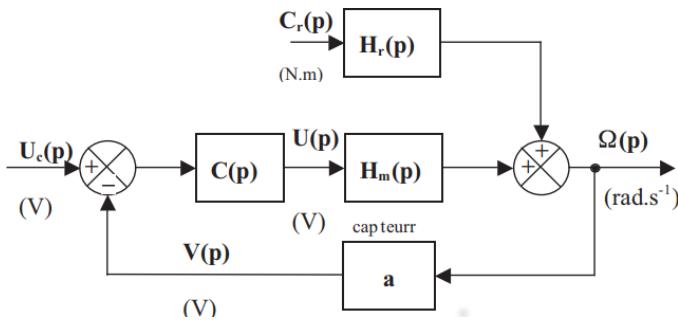




Application 3

Précision des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$.

Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

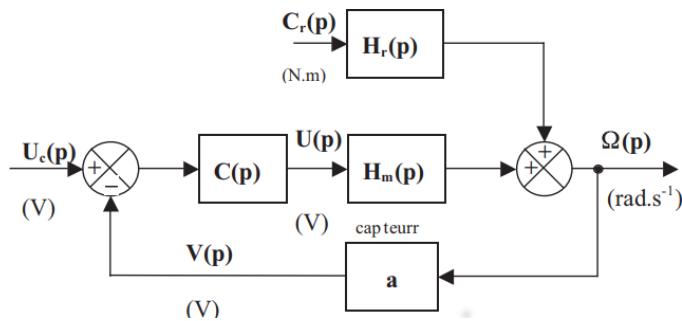
On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

Application 3

Précision des systèmes – Corrigé

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$.

Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

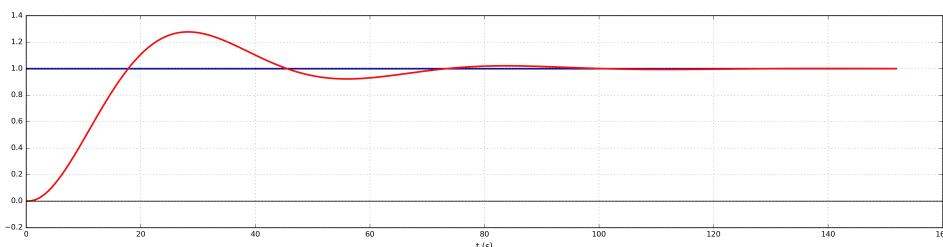
Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



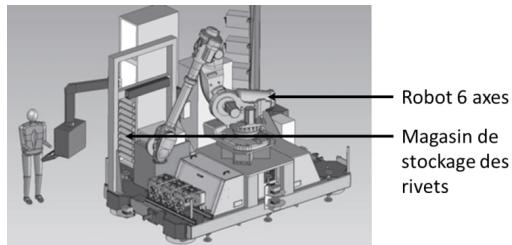
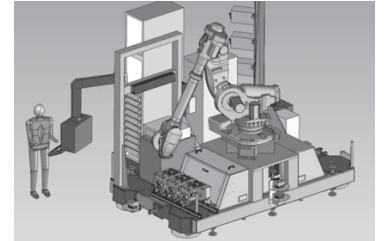
Application 4

Cellule d'assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

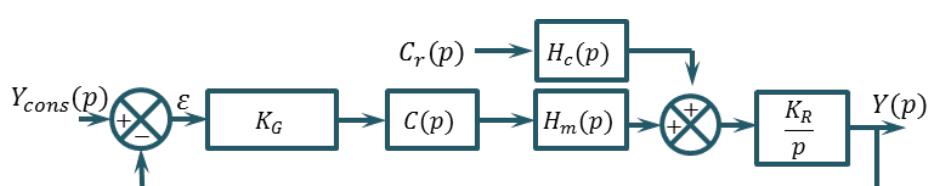


Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant C_r dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



$$H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} \quad \text{et}$$

$$\frac{(R + Lp) K_M}{K_C} \\ H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}.$$

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

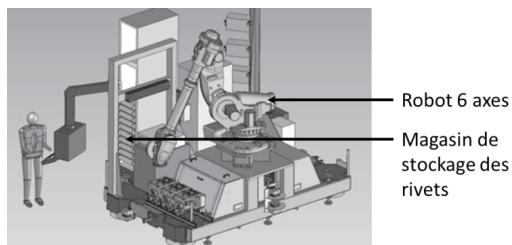
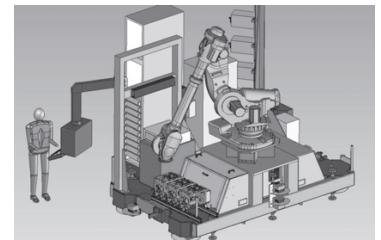
Application 4

Cellule d'assemblage pour avion Falcon Corrigé

E3A – PSI 2015.

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :

Si $C_r(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \\ &\quad . \end{aligned}$$

Correction

Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C (1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \end{aligned}$$

On a donc : $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction



TD 1

Drone quadri-rotor – Sujet

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction \vec{z}) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe (O, \vec{x})) et en tangage (rotation autour de l'axe (O, \vec{y})) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ($\frac{\omega_2}{\omega_4}$ pour le roulis et $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

u représente la tension de commande du moteur, $\omega(t)$ son taux de rotation, τ et k_v des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme $k_q\omega^2$ provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en ω^2 , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement ω_0 , fréquence

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 %
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s



de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$ où $\delta\omega$ et δu représentent des petites variations de ω et u autour du point de fonctionnement.

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 . On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction \vec{Z} , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. La masse totale du drone est $m = 240$ g. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 . La poussée F varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant F à la fréquence de rotation ω en rad/s.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

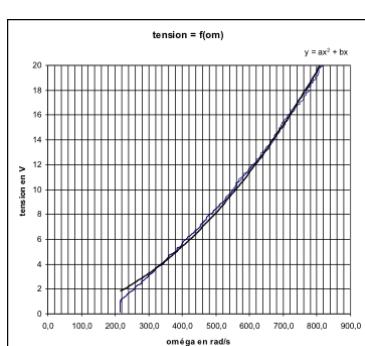
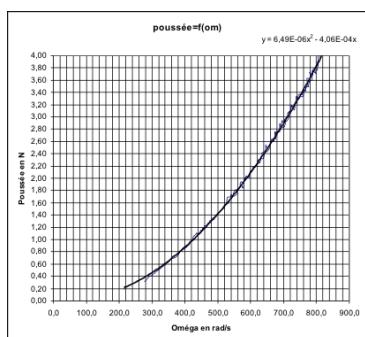
Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande u et la fréquence de rotation ω en rad/s en régime permanent lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme $y = ax^2 + bx$. On donne la constante de temps du moteur : $\tau = 125$ ms.

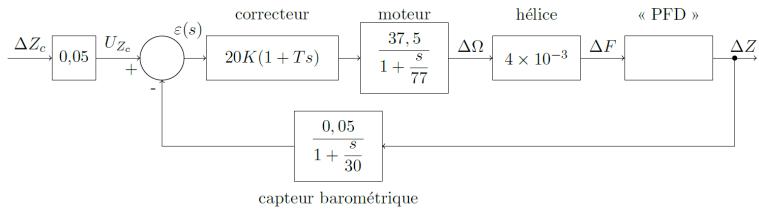
Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement ω_0 , par le schéma-bloc suivant :





Le gain du capteur barométrique est de $0,05 \text{ V m}^{-1}$. On pose $z(t) = z_0 + \delta z(t)$, $\Delta Z(p)$ la transformée de Laplace de $\delta z(t)$, $F = F_0 + \delta F$ représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire : $m\ddot{z} = 4F - mg$.

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté $K_{BO} = 2,5K$. La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 2.3, en gras avec un correcteur proportionnel ($T = 0$) et en trait fin avec le correcteur retenu ($K = 1$ et $T = 0,2s$).

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2s$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0 \text{ dB}} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure 2.4 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain K précédemment déterminée.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

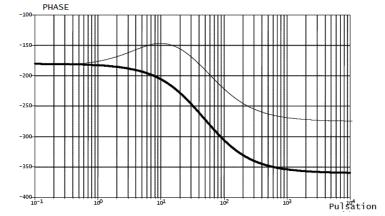


FIGURE 2.3 – Courbe de phase

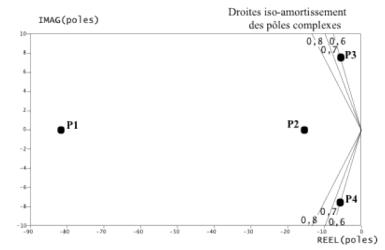
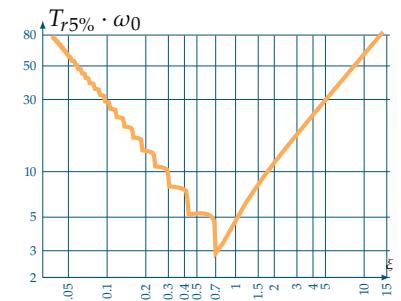


FIGURE 2.4 – Carte des pôles



Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Éléments de correction

1. $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0;$
2. $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}.$
3. $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$ et $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}.$
4. $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}.$
5. $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}.$
6. $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$ et $k_b = \frac{a}{b\tau}.$
7. $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}.$
- 8.
- 9.
10. $K = 17,9.$
11. FTBO de classe 2, ε_s nul.
12. $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j.$
13. $\xi = 0,6$
- 14.
15. $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}.$ $\omega_n \simeq 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16. $t_{5\%} \simeq 0,61 \text{ s}.$





TD 1

Drone quadri-rotor – Corrigé

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

C1-01

C2-03

Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Correction

En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence, $\delta u = 0$ et $\delta\omega = 0$.

On a donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$. En notant ω_0 et u_0 les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$.

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction

On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$$

$$\Rightarrow \frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(\omega_0 + \delta\omega) - k_q(\omega_0 + \delta\omega)^2 + \frac{k_v}{\tau}(u_0 + \delta u)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega_0 - \frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}u_0 + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{Or } \frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0 \text{ (question précédente)}; \text{ donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

Au final, $A = \frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}$.

On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$ et donc

$$\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}. \text{ En conséquence, } K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \frac{k_v}{1 + \tau k_q 2\omega_0}.$$

$$\tau_m = \frac{\tau}{1 + \tau k_q 2\omega_0}$$

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 .

Correction

On a $4F_0 = mg$. Le poids du drone est de $0,240 \times 9,81 = 2,3544$ N. Chaque moteur doit donc exercer $\frac{2,3544}{4} = 0,59$ N.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Correction

En lisant le graphe, on obtient $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

Correction

Lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$, on a $u = a\omega^2 + b\omega_0$. Par ailleurs en régime stationnaire, on a

$$\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0. \text{ Il en résulte que } u_0 = \frac{1}{k_v}\omega_0 + \frac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2.$$

On a donc $a = \frac{k_q\tau}{k_v}$ et $b = \frac{1}{k_v}$. On a donc b tel que [V] = [B][s⁻¹] et [B] = [V][s]. On a donc k_v en [V⁻¹s⁻¹].

Par ailleurs, [V] = [k_q][s][Vs][s⁻²] et k_q n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de

fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Correction

On a vu que $4_0F = mg$.

Par ailleurs, $m\ddot{z} = 4F - mg$ et donc, $m \frac{d(z_0 + \delta z(t))}{dt} = 4(F_0 + \delta F(t)) - mg$ et $m \frac{d(\delta z(t))}{dt} = 4\delta F(t)$. Dans le domaine de Laplace, on a $mp^2 \Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$. En conséquences, $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}$.

La FTBO s'exprime alors par $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$.

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2\text{ s}$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Correction

On a $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$. Les pulsations de cassure sont alors : 5 rad s^{-1} , 30 rad s^{-1} et 77 rad s^{-1} . Les pentes sont alors :

- ▶ pour $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade ;
- ▶ pour $5\text{ rad s}^{-1} < \omega < 30\text{ rad s}^{-1}$: -20 dB/décade ;
- ▶ pour $30\text{ rad s}^{-1} < \omega < 77\text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade
- ▶ pour $\omega > 77\text{ rad s}^{-1}$: -60 dB/décade .

Pour une pulsation de $10 \times 10^{-2}\text{ rad s}^{-1}$, on a $FTBO(p) \approx \frac{2,5}{p^2}$. On a donc un gain $\approx 20\log\left(\frac{2,5}{0,01^2}\right) \approx 88\text{ dB}$. Reste à tracer...

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0\text{dB}} = 1,5\text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Correction

Si on considère que pour $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$, on a $H_{BO}(p) \approx \frac{2,5K}{p^2}$. Dans ces conditions, pour $K = 1$, on a $\left|\frac{2,5}{-\omega^2}\right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \approx 1,58\text{ rad s}^{-1}$.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Correction

En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation ω_{-145} pour laquelle la phase est de $-180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$, soit $\arg FTBO(j\omega) = -145^\circ$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur

Python ou autre. Il y a surement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite K tel que $|FTBO(j\omega_{-145})| = 1$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

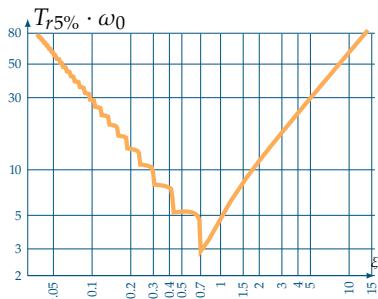
Correction

La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Correction

Les pôles dominants sont $P_2 \approx -15, P_3 \approx -5 + 8i, P_4 \approx -5 - 8i$.



Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Correction

Dans ce cas, on ne prend que P_3 et P_4 . $\xi = 0,6$.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

Correction

Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Correction

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Correction

TD 2

Stabilisateur actif d'image – Sujet

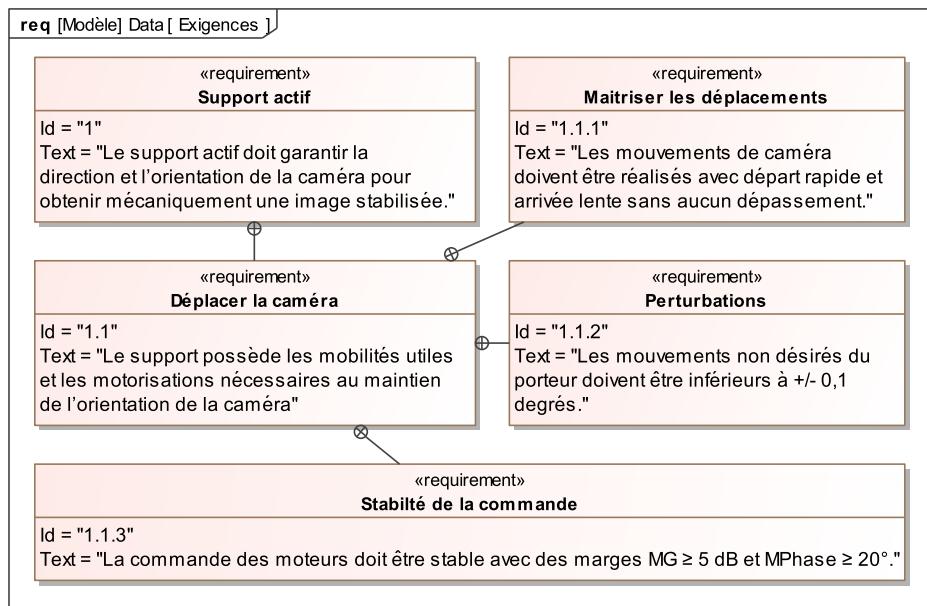
Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne

présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur K_m ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique A et de constante de temps τ_m .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur $\text{com}(t)$ et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Le réglage retenu est tel que $K_m A = 1$. **Le retour K_D agit par un sommateur.** Dans cette étude, $A_i(p) = 1$.

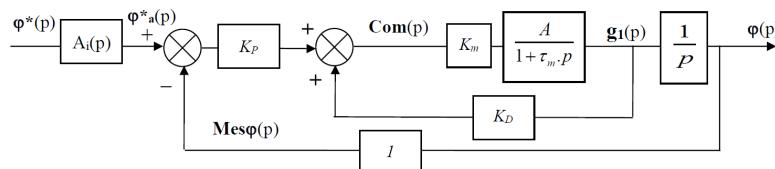


FIGURE 2.5 – Modèle 1 de l'axe de tangage.

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqués.

En accord avec les résultats précédents, on fixe $K_D = 0,5$ et $\tau_m = 0,2\text{s}$. Dans un premier temps on impose $K_p = 10\text{s}^{-1}$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ($A_1(p) = 1$). On considère ici que la consigne est constante donc $\varphi_a^*(t) = 0$. Une perturbation $\text{Pe}(p)$ agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle $\text{Com}(p)$ la transformée de Laplace de la commande du moteur $\text{com}(t)$.

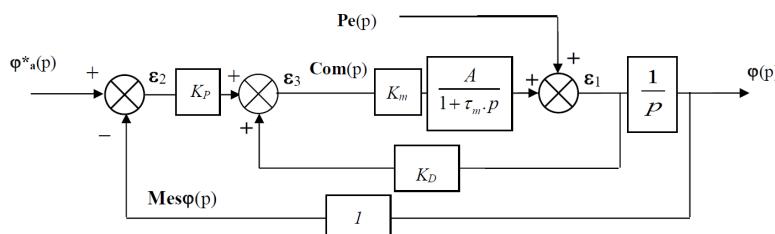
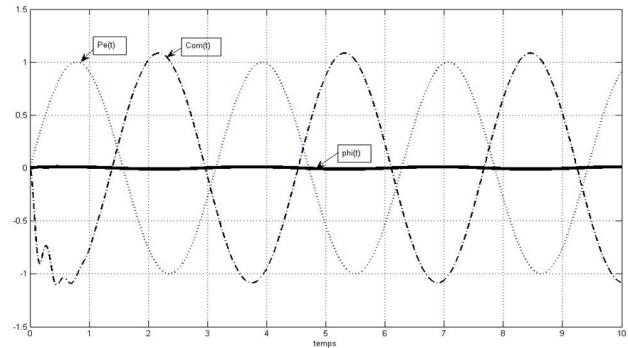
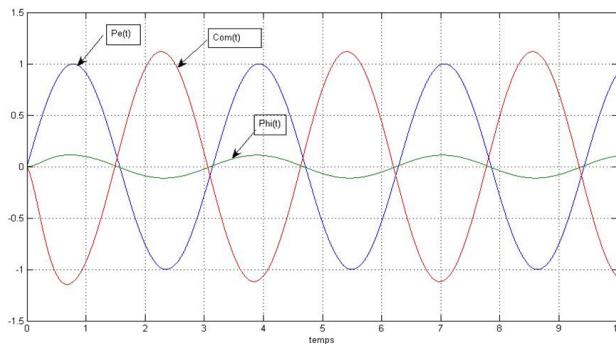


FIGURE 2.6 – Modèle 2 de l'axe de tangage.

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $\text{Pe}(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $\text{com}(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{\text{Mesφ}(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$.



Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5$ dB et une marge de phase $M\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

ω (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	-112°	-135°	-153°	-160°	-166°
$20 \log F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

Le figure suivante (droite) présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $\text{Com}(t)$ relativement à $\text{Pe}(t)$ en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure précédente – droite).

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

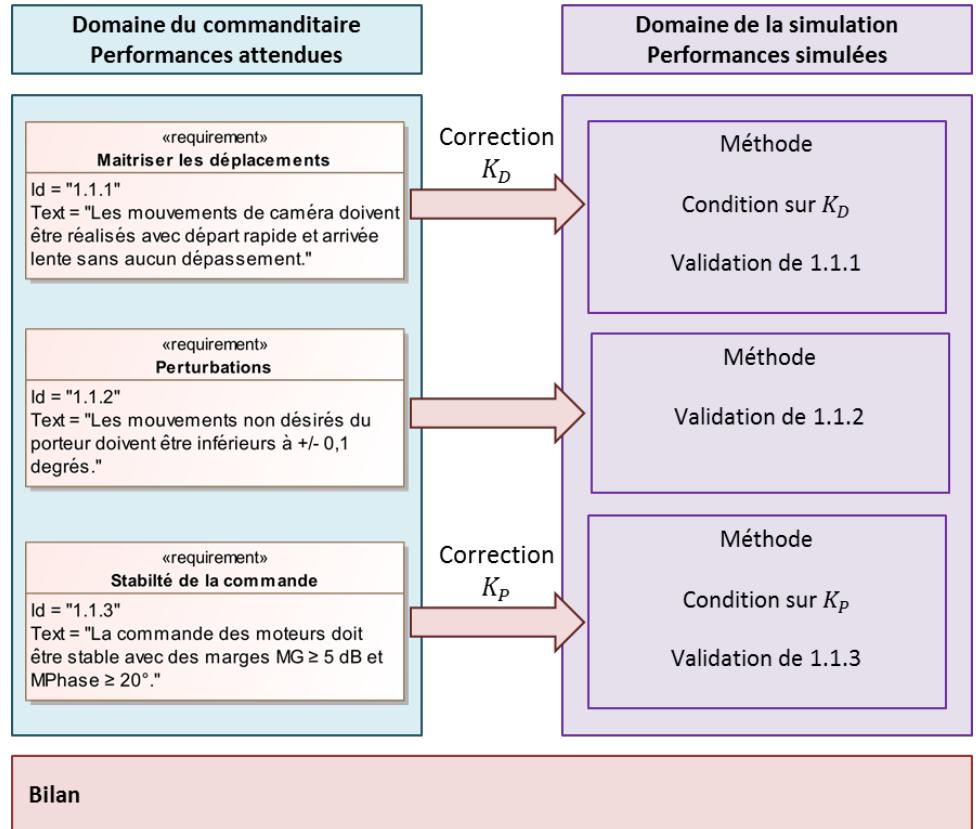
Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



Éléments de correction

1. $\frac{FTBO(p)}{K_p} = \frac{p(1 + \tau_m p - K_D)}{K_p}$
et $\frac{FTBF(p)}{K_p} = \frac{A_i(p)}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_p}$.
2. $K_D < 1$.
- 3.
4. $\frac{Stab(p)}{K_D - K_p} = \frac{(pK_D - K_p)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_p)}$.
5. $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = -1$.
6. $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$
et $\frac{Pert(p)}{1 + \tau_m p} = \frac{p(1 + \tau_m p) + (K_p - pK_D) A K_m}{p(1 + \tau_m p) + (K_p - pK_D) A K_m}$.
7. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ$.
8. $K_p < 1, 41$.
9. .
10. .



TD 2

Stabilisateur actif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

Mise en situation

Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).



Correction

Attention au signe du comparateur de la boucle imbriquée !

On définit la FTBO par $FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{Mes\varphi(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur.

On a d'une part $G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}$. On a alors $FTBO(p) = \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$.

Si on définit la FTBF par $FTBF(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}$, on a $FTBF(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$

$= A_i(p) \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_p}$.

Au final, $FTBO(p) = \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$ et $FTBF(p) = A_i(p) \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_p}$.

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

Correction

Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur $D(p)$ de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$ et donc nécessairement, $1 - K_D > 0$ et $K_D < 1$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Correction

$$\text{On a : } \text{FTBF}(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}.$$

$$\text{On a alors } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}} \text{ et } \xi = \frac{1 - K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1 - K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1. \text{ Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.}$$

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Correction

$$\text{On a } \varepsilon_2(p) = -\text{Mes}(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p) \frac{1}{p}. \text{ Par ailleurs, } \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}.$$

$$\text{On a donc } \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left(\frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \right) =$$

$$\text{Pe}(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)} = \text{Pe}(p).$$

$$\text{On a donc } \text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}.$$

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $\text{Pe}(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $\text{com}(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Com}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Stab}(p) \text{Pe}(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1 \text{ si } AK_m = 1.$$

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer

la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$.

Correction

On a $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$ (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$ et $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)$.

En conséquences, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p} \iff \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) +$

$$\varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p) \Leftrightarrow p\varphi(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p)$$

$$\text{et donc } \text{Pert}(p) = \frac{1}{p\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} = \frac{1}{p\left(1 + \frac{K_P - pK_D}{p}\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} =$$

$$\frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}.$$

Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\text{Pert}(p)\text{Pe}(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_P A K_m} = \frac{1}{K_P} = 0,1^\circ. \end{aligned}$$

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5 \text{ dB}$ et une marge de phase $M\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

Correction

Pour une marge de phase de 20° , la phase doit être de -160° lorsque le gain est nul. Or en -160° le gain est de -3 dB . Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer K_P tel que $20 \log K_P = 3$ soit $K_P < 10^{\frac{3}{20}} \approx 1,41$.

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $\text{Com}(t)$ relativement à $\text{Pe}(t)$ en utilisant le résultat de la question 5.

Correction

La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question 5). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de $0,1^\circ$ et $-0,1^\circ$.

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

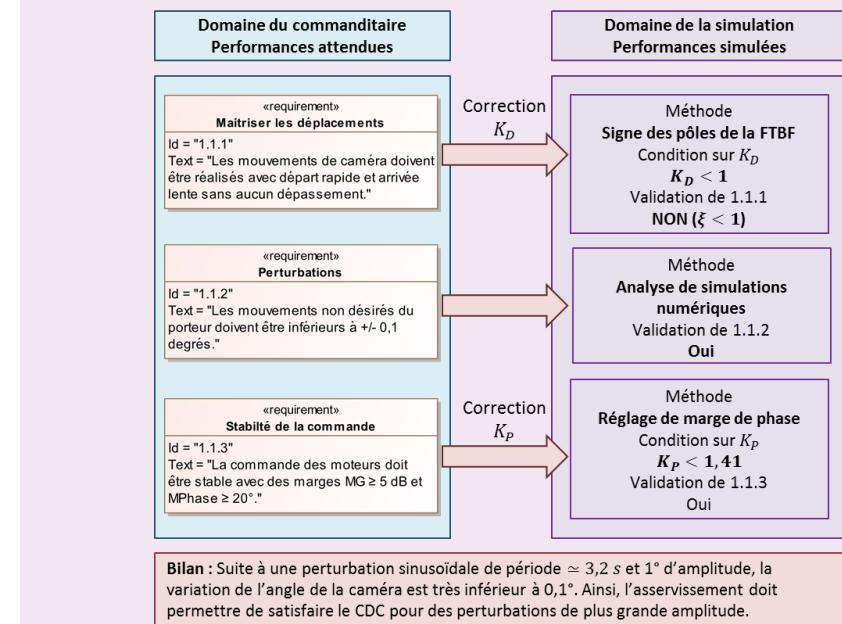
Correction

Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à 0,1 degrés (en valeur absolue).

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

Correction



TD 3

Direction automobile découplée – Sujet

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.16).

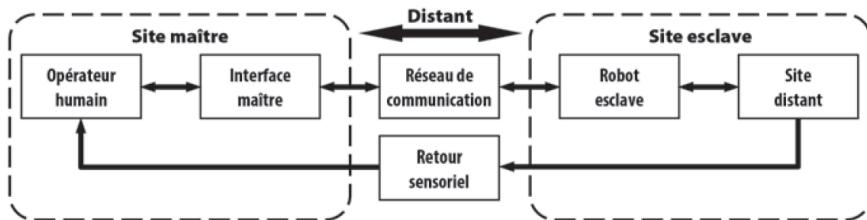


FIGURE 2.7 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.23) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.17.

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v(G_v)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe (G_v, \vec{x}_v) ;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);

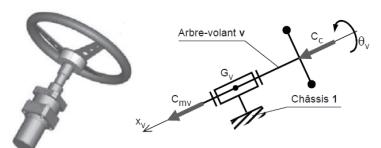


FIGURE 2.8 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x}_v$ et $C_{mv} \vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.18 où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta_v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{cv}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv} .

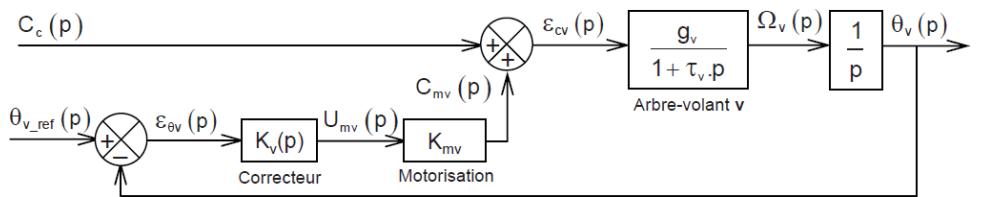


FIGURE 2.9 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $\tau_v = 0,1 \text{ s}$ et $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv} .

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité?

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p) \varepsilon_{\theta_v}(p)$ sous la forme $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta_v}(p) = \frac{\theta_{v_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

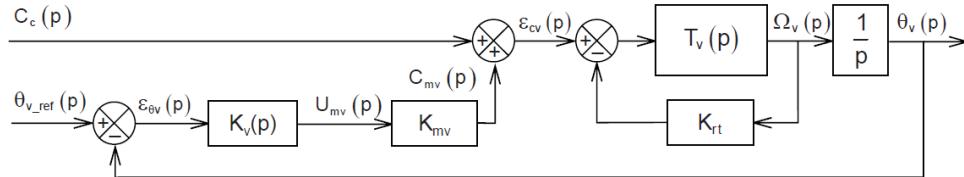
On donne (Figure 2.19) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α .

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0 , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis (Figure 2.19) pour justifier la réponse.

On donne (Figure 2.20), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1^{er} dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique



Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt} . Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v .

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv} , g_v , τ_v , K_i , α et β .

On donne sur la Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (Figure 2.22), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement

On note :

- ▶ $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ▶ ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$.

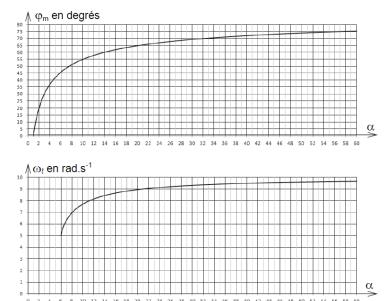


FIGURE 2.10 – Aboques de réglage de $H(p)$ en fréquentiel

FIGURE 2.12 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

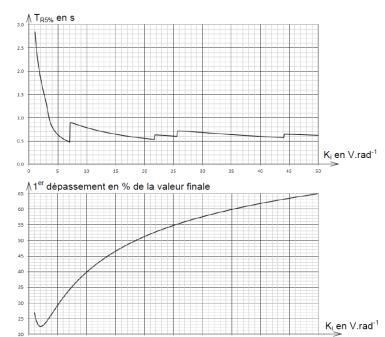


FIGURE 2.11 – Aboques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée

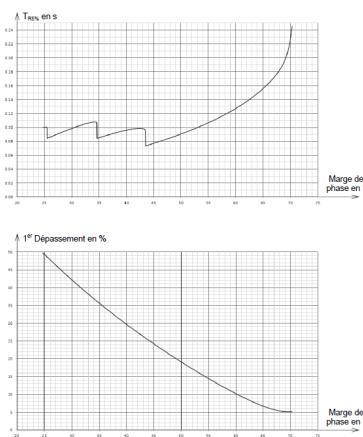


FIGURE 2.13 – Abaques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique

Éléments de correction

1. .
2. $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v}$ et $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}$, $\alpha > 1$.
3. $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$ et $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$.
4. .
5. $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$.
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g v}$
10. $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g v}{\alpha \tau_v}$.
11. .
12. $M_\varphi = 58^\circ$.
13. $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$.
14. .
15. .

en réponse à un échelon d'angle θ_{v_ref} , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec $\beta = 1/6$.

Question 12 Donner par lecture des abaques (Figure 2.22), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.

Question 13 Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de $FTBO_{v2}(p)$, tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de K_i permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

Question 14 Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

Question 15 Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles seraient les conséquences sur les performances du système ?



Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.	<ul style="list-style-type: none"> 1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0 2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle <ul style="list-style-type: none"> - pour une consigne en échelon - pour une consigne en rampe de pente Ω_{v0} 4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple <ul style="list-style-type: none"> - pour une perturbation en échelon - pour une perturbation en rampe de pente C_{e0} 5- Stabilité <ul style="list-style-type: none"> - Marge de phase - Marge de gain 6- Amortissement <ul style="list-style-type: none"> - 1^{er} dépassement en réponse indicielle (boucle fermée) 	<ul style="list-style-type: none"> 30 rad/s (≈ 5 Hz) 0,1 s nulle $\leq 0,5\%$ de Ω_{v0} nulle $\leq 10\%$ de C_{e0} 45° 20 dB 0% 	<ul style="list-style-type: none"> mini ± 20 ms aucune $\pm 0,2\%$ aucune $\pm 5\%$ mini mini 15% maxi

FIGURE 2.14 – Exigences

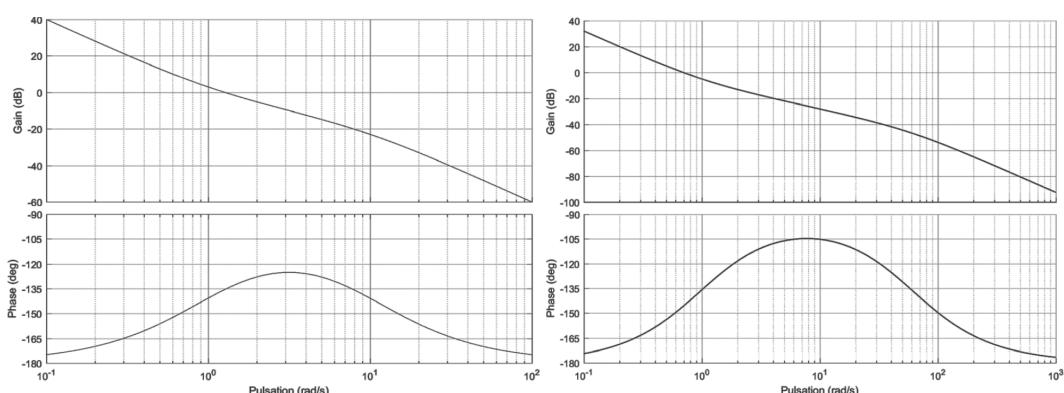


FIGURE 2.15 – Lieux de transfert de $FTBO_{v1}(p)$ et $FTBO_{v2}(p)$

TD 3

Direction automobile découplée – Corrigé

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découplée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.16).

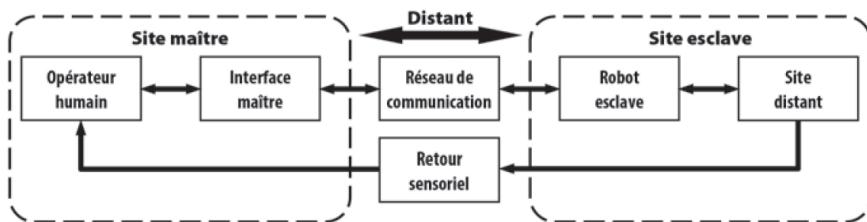


FIGURE 2.16 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découplée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.23) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.17.

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v(G_v)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe (G_v, \vec{x}_v) ;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);

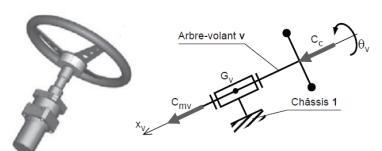


FIGURE 2.17 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x}_v$ et $C_{mv} \vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.18 où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta_v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{cv}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv} .

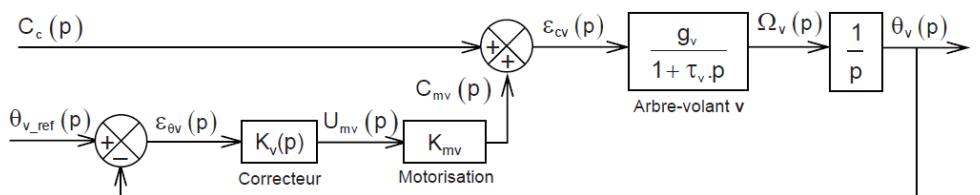


FIGURE 2.18 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $\tau_v = 0,1 \text{ s}$ et $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv} .

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

Correction

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = FTBO_{v1}(p)\varepsilon_{\theta_v}(p)$ sous la forme $FTBO_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

Correction

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta v}(p) = \frac{\theta_{v_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

Correction

On donne [Figure 2.24](#) le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Correction

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

Correction

On donne ([Figure 2.19](#)) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α .

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0 , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis ([Figure 2.19](#)) pour justifier la réponse.

Correction

On donne ([Figure 2.20](#)), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1^{er} dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

On note :

- $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$.

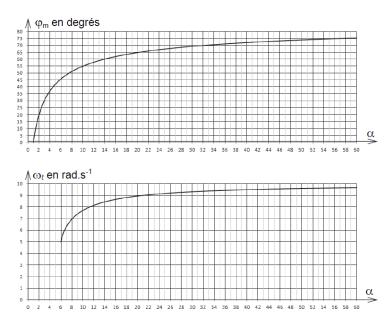


FIGURE 2.19 – ABAQUES DE RÉGLAGE DE $H(p)$ EN FRÉQUENTIEL

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

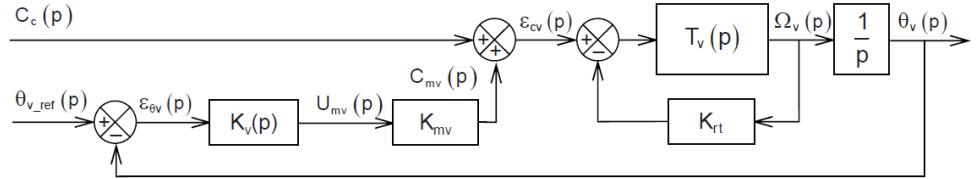


FIGURE 2.21 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Correction

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{\text{cv}}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt} . Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v .

Correction

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2} \frac{1 + \beta \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv} , g_v , τ_v , K_i , α et β .

Correction

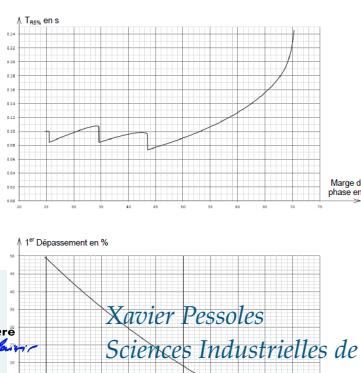
On donne sur la Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

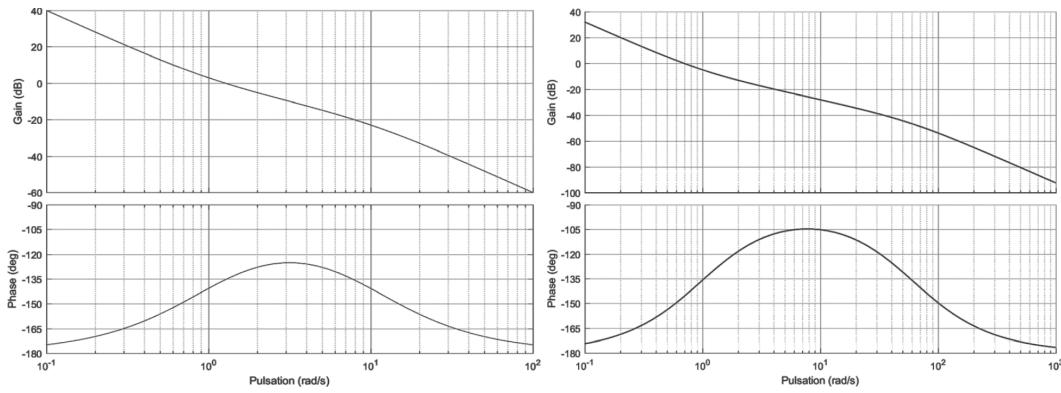
Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

Correction

On donne (Figure 2.22), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d'angle θ_{v_ref} , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec $\beta = 1/6$.

Question 12 Donner par lecture des abaques (Figure 2.22), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.



FIGURE 2.24 – Lieux de transfert de $FTBO_{v1}(p)$ et $FTBO_{v2}(p)$ **Correction**

Question 13 Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de $FTBO_{v2}(p)$, tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de K_i permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

Correction

Question 14 Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

Correction

Question 15 Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système ?

Correction

Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.	1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0 2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle - pour une consigne en échelon - pour une consigne en rampe de pente Ω_{c0} 4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple - pour une perturbation en échelon - pour une perturbation en rampe de pente C_{c0} 5- Stabilité - Marge de phase - Marge de gain 6- Amortissement - 1 ^{er} dépassement en réponse indicielle (boucle fermée)	30 rad/s (≈ 5 Hz) 0,1 s nulle $\leq 0,5\%$ de Ω_{c0} nulle $\leq 10\%$ de C_{c0} 45° 20 dB 0%	mini ± 20 ms aucune $\pm 0,2\%$ aucune $\pm 5\%$ mini mini 15% maxi

Éléments de correction

1. .
2. $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v} \text{ et } H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}, \alpha > 1.$
3. $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$ et $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$.
4. .
5. $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$.
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g v}$
10. $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g v}{\alpha \tau_v}$.
11. .
12. $M_\phi = 58^\circ$.
13. $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$.
14. .
15. .

FIGURE 2.25 Exigences



TD 4

Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Sujet

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension u par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

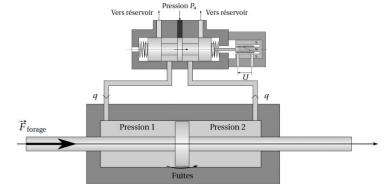
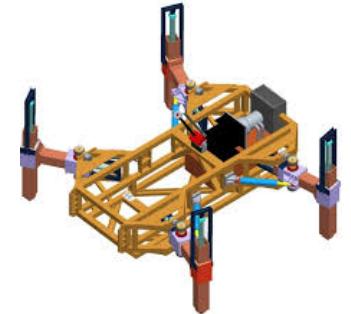
Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement : $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$;
- ▶ stabilité : marge de phase de 45° , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶ $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, surface utile des pistons;
- ▶ $b = 10^9 \text{ Pa}$: module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶ $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$: pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶ $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$: constante de débit de la servovalve;
- ▶ $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$: facteur de fuite dans le vérin;
- ▶ $q(t)$: débit entrant et sortant du vérin;
- ▶ V_1 et V_2 : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse : $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$);
- ▶ $p(t) = p_1 - p_2$: différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶ $z(t)$: déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶ $M = 700 \text{ kg}$: masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶ $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$: raideur équivalente de la structure du robot;



- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$: coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$: effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$: position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur k .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe \vec{z} du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

Question 1 Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ► l'inertie du robot; ► à la raideur du robot; ► au frottement visqueux; ► à la pression dans la chambre; | <ul style="list-style-type: none"> ► à la compressibilité de l'huile; ► au déplacement de la tige de vérin; ► aux fuites entre les chambres. |
|--|---|

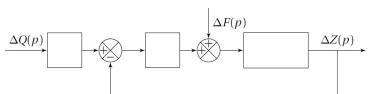
Question 2 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , F_0 et Z_0 , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

Question 3 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $F_{\text{forage}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$ et $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 4 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , Q_0 et Z_0 , traduire l'équation de bilan des débits.

Question 5 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 6 À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.



Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit $q(t)$ au vérin à partir d'une tension de commande $u(t)$ appliquée en entrée : la tension $u(t)$ est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante p_a et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension $u(t)$, mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire : $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$.

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

Question 7 Déterminer la relation liant Q_0 , U_0 et P_0 au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ et $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$.

Question 8 Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servovalve et vérin, admettant en entrée la tension $\Delta U(p)$ et la force $\Delta F(p)$, et en sortie la position $\Delta Z(p)$.

Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

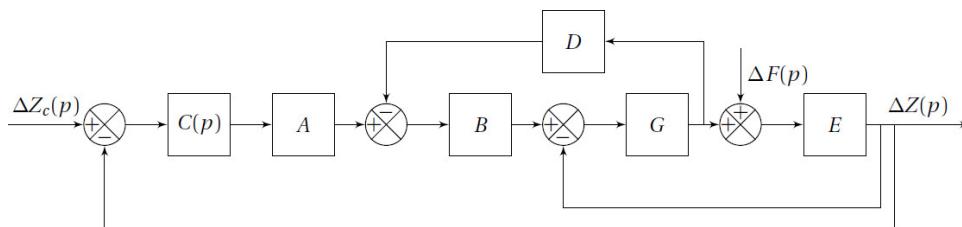
- ▶ la servovalve, qui fournit le débit $q(t)$ au vérin à partir d'un signal de commande $u(t)$;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert k_c , qui fournit une tension $\text{Im}(z(t))$ image de la position réelle $z(t)$;
- ▶ un correcteur $C(p)$ qui élabore la commande $u(t)$ de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre $\text{Im}(z_c(t))$, image de la consigne de position, et $\text{Im}(z(t))$. $\text{Im}(z_c(t))$ est obtenue grâce à un adaptateur K_a situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

Question 9 Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

Question 10 Préciser l'expression de l'adaptateur K_a pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où A , B , C , D , E , et G sont utilisés pour simplifier les calculs.

Question 11 À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.



Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert $0,975$ en boucle fermée, $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$ et $p_3 = -30,4$ (en rad/s).

Question 12 Le système est-il stable ? Est-il précis ?

Question 13 À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

Question 14 À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte, $\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -18 \pm 81,6j$ et $p_3 = -0,75$ (rad/s)

Question 15 Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Éléments de correction

1. ...
2. $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$ et $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p)$.
3. ...
4. $\Delta q = K\Delta U\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig.}$
5. ...
6. ...
7. $K_a = k_c$.
8. $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$ et $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$.
9. ...
10. ...
11. ...
12. $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$ et $\xi = 0,21$, $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$.
13. ...
14. ...

Question 16 Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

On choisit de prendre ω_0 égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et $\xi_2 = 0,7$.

Question 17 Proposer une valeur pour le paramètre ξ_1 . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).



TD 4

Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Corrigé

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension u par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

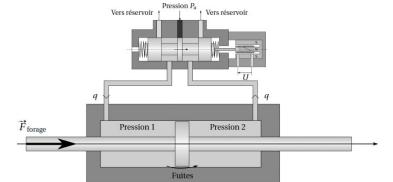
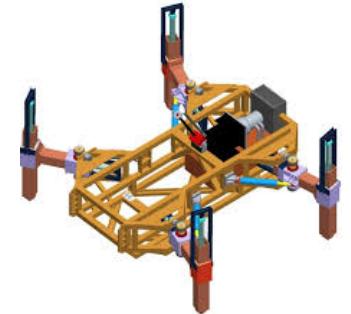
Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement : $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$;
- ▶ stabilité : marge de phase de 45° , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶ $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, surface utile des pistons;
- ▶ $b = 10^9 \text{ Pa}$: module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶ $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$: pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶ $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$: constante de débit de la servovalve;
- ▶ $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$: facteur de fuite dans le vérin;
- ▶ $q(t)$: débit entrant et sortant du vérin;
- ▶ V_1 et V_2 : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse : $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$);
- ▶ $p(t) = p_1 - p_2$: différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶ $z(t)$: déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶ $M = 700 \text{ kg}$: masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶ $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$: raideur équivalente de la structure du robot;



- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$: coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$: effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$: position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur k .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe \overrightarrow{z} du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

Question 1 Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ► l'inertie du robot ; ► à la raideur du robot ; ► au frottement visqueux ; ► à la pression dans la chambre ; | <ul style="list-style-type: none"> ► à la compressibilité de l'huile ; ► au déplacement de la tige de vérin ; ► aux fuites entre les chambres. |
|--|---|

Correction

Termes correspondant :

- l'inertie du robot : $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$;
- à la raideur du robot : $-k(z(t) - Z_0)$;
- au frottement visqueux : $-\mu \frac{dz(t)}{dt}$;
- à la pression dans la chambre : $Sp(t)$;
- à la compressibilité de l'huile : $\frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$;
- au déplacement de la tige de vérin : $S \frac{dz(t)}{dt}$;
- aux fuites entre les chambres : $\varphi p(t)$.

Question 2 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , F_0 et Z_0 , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

Correction

On a : $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t)$. Au point de fonctionnement, on a donc $0 = SP_0 - F_0$ et donc $SP_0 = F_0$.

Question 3 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $F_{\text{forage}}(t) = F_0 + \Delta F(t)$ et $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Correction

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc : $M \frac{d^2 \Delta z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{d \Delta z(t)}{dt} - k \Delta z(t) + S(P_0 + \Delta p(t)) - F_0 - \Delta F(t)$. De plus, à l'équilibre, $SP_0 = F_0$. Dans le domaine de Laplace, on a alors $\Delta Z(p) (Mp^2 + \mu p + k) = S\Delta P(p) - \Delta F(p)$.

Question 4 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , Q_0 et Z_0 , traduire l'équation de bilan des débits.

Correction

On a $q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$. Au point de fonctionnement, on a donc $Q_0 = \varphi P_0$.

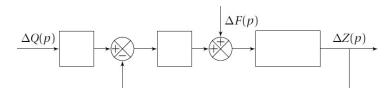
Question 5 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Correction

$$\begin{aligned} \text{Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc} \\ Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d(Z_0 + \Delta z(t))}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d(P_0 + \Delta p(t))}{dt} \\ \Leftrightarrow Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d\Delta z(t)}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d\Delta p(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \Delta q(t) &= S \frac{d\Delta z(t)}{dt} + \varphi \Delta p(t) + \frac{V}{2b} \frac{d\Delta p(t)}{dt} \text{ (en utilisant la question précédente).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans le domaine de Laplace, on a donc } \Delta Q(p) &= Sp\Delta Z(p) + \varphi \Delta P(p) + \frac{V}{2b} p \Delta P(p) \text{ soit} \\ \Delta Q(p) &= Sp\Delta Z(p) + \Delta P(p) \left(\varphi + \frac{V}{2b} p \right) \end{aligned}$$

Question 6 À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.

Correction**Modélisation du comportement de la servovalve**

La servovalve permet de fournir le débit $q(t)$ au vérin à partir d'une tension de commande $u(t)$ appliquée en entrée : la tension $u(t)$ est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante p_a et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension $u(t)$, mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire : $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$.

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

Question 7 Déterminer la relation liant Q_0 , U_0 et P_0 au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ et $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$.

Correction

Au point de fonctionnement, $Q_0 = KU_0\sqrt{p_a - P_0}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} Q_0 + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{(p_a - P_0) \left(1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)} \\ \text{et } \sqrt{1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}} &\simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right) \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} - \frac{K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} - \underbrace{\frac{KU_0\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}} - \\ &\quad \underbrace{\frac{K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}} \\ \Leftrightarrow \Delta q(t) &= K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2} \frac{\Delta p(t)}{\sqrt{p_a - P_0}} \end{aligned}$$

Question 8 Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servo-valve et vérin, admettant en entrée la tension $\Delta U(p)$ et la force $\Delta F(p)$, et en sortie la position $\Delta Z(p)$.

Correction

Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

- ▶ la servovalve, qui fournit le débit $q(t)$ au vérin à partir d'un signal de commande $u(t)$;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert k_c , qui fournit une tension $\text{Im}(z(t))$ image de la position réelle $z(t)$;
- ▶ un correcteur $C(p)$ qui élabore la commande $u(t)$ de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre $\text{Im}(z_c(t))$, image de la consigne de position, et $\text{Im}(z(t))$. $\text{Im}(z_c(t))$ est obtenue grâce à un adaptateur K_a situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

Question 9 Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

Correction

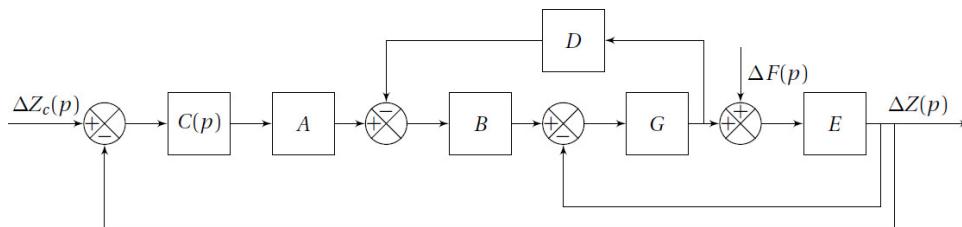
Question 10 Préciser l'expression de l'adaptateur K_a pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Correction

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où A , B , C , D , E , et G sont utilisés pour simplifier les calculs.

Question 11 À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.

Correction



Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée, $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$ et $p_3 = -30,4$ (en rad/s).

Question 12 Le système est-il stable ? Est-il précis ?

Correction

Question 13 À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

Correction

Question 14 À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassemens.

Correction

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte, $\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -18 \pm 81,6j$ et $p_3 = -0,75$ (rad/s)

Question 15 Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

Correction

Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Question 16 Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

Correction

Éléments de correction

1. ...
2. $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$ et
 $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p).$
3. ...
4. $\Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig..}$
5. ...
6. ...
7. $K_a = k_c.$
8. $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$
et $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$
9. ...
10. ...
11. ...
12. $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$ et $\xi = 0,21$, $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$.
13. ...
14. ...

On choisit de prendre ω_0 égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et $\xi_2 = 0,7$.

Question 17 Proposer une valeur pour le paramètre ξ_1 . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

Correction

TD 5

Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

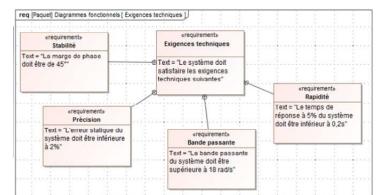
Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

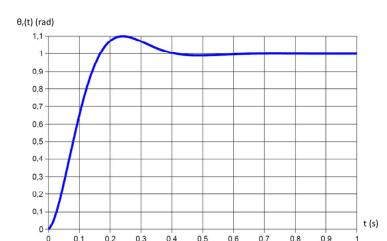
Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$.



Avec :

- ▶ $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶ $e(t)$: force contre-électromotrice (en V);
- ▶ $i(t)$: intensité (en A);
- ▶ $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶ $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶ J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²) ;
- ▶ R : résistance électrique du moteur;
- ▶ k_e : constante de force contre-électromotrice;
- ▶ k_m : constante de couple.



Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

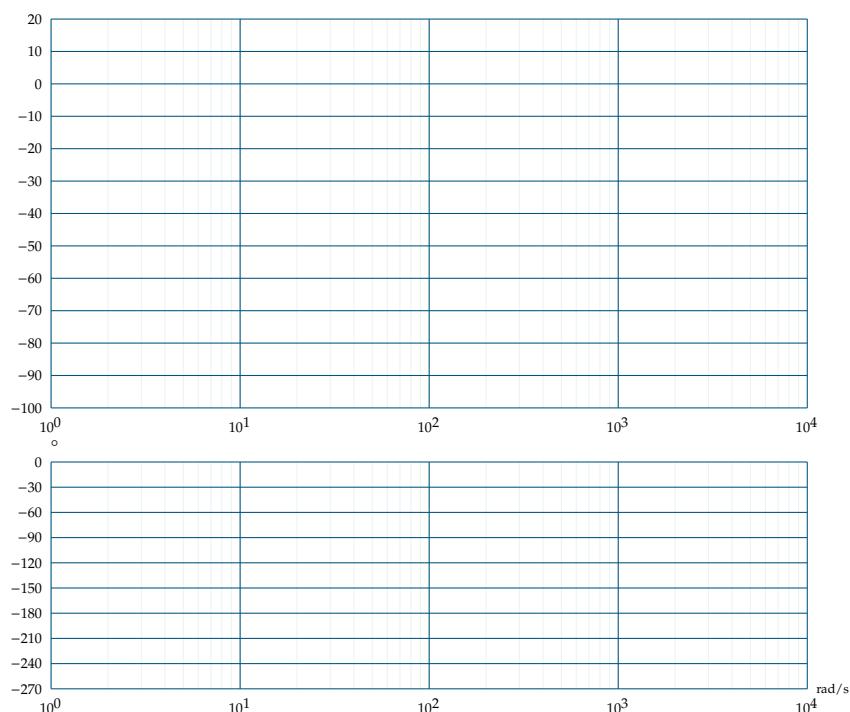
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$.

Pour $\omega < 20 \text{ rad/s}$, on a $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 5

Radar d'avion – Corrigé

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

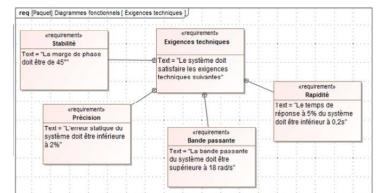
Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

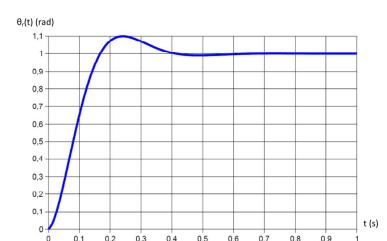
Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$.



Avec :

- ▶ $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶ $e(t)$: force contre-électromotrice (en V);
- ▶ $i(t)$: intensité (en A);
- ▶ $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶ $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶ J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²) ;
- ▶ R : résistance électrique du moteur;
- ▶ k_e : constante de force contre-électromotrice;
- ▶ k_m : constante de couple.



Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

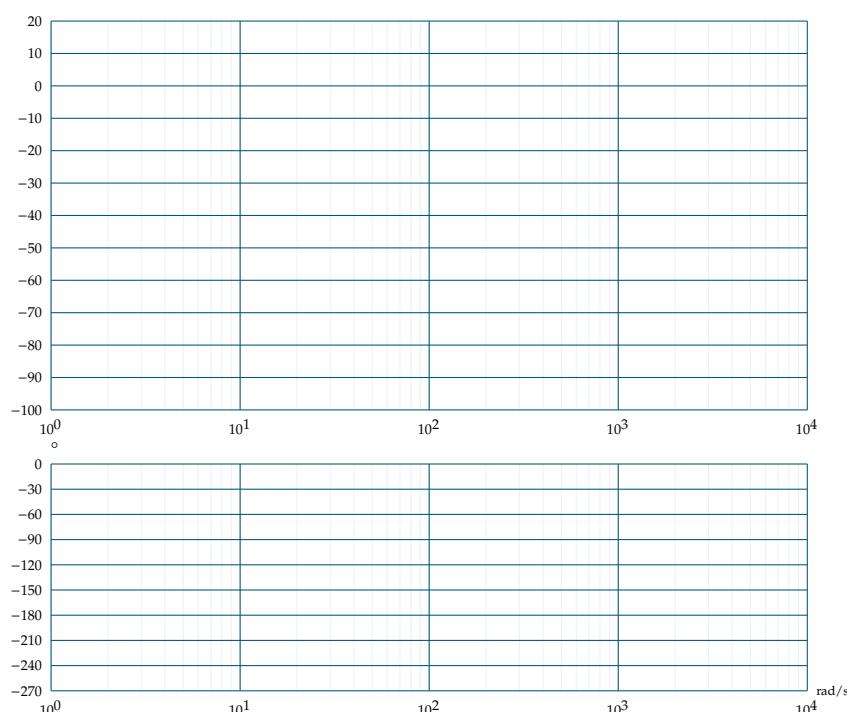
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$.

Pour $\omega < 20 \text{ rad/s}$, on a $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 6

Base TC200 Tecdron – Sujet

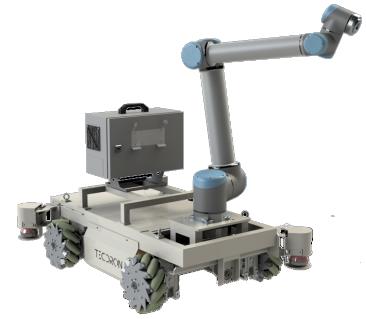
Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



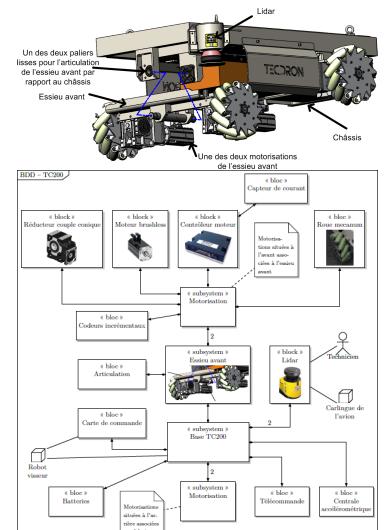
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

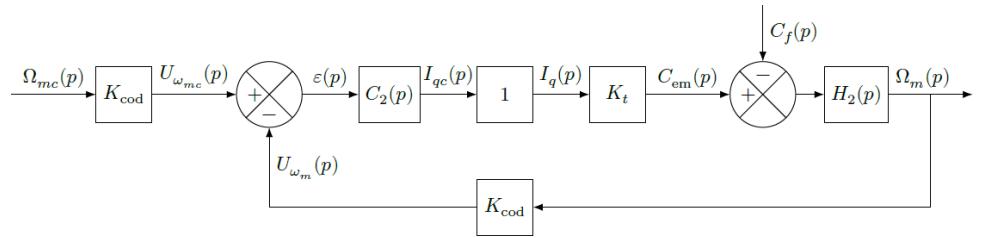
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.



Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0}	$\mu_{v\infty} < 1\%$
Rapidité	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une pente de 1800 rad s^{-1}
Stabilité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$
	Dépassement maximal	$\leq 10\%$
	Marge de phase	$\geq 60^\circ$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	K_{cod}	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	K_t	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Corrètore de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}}} \quad J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$	

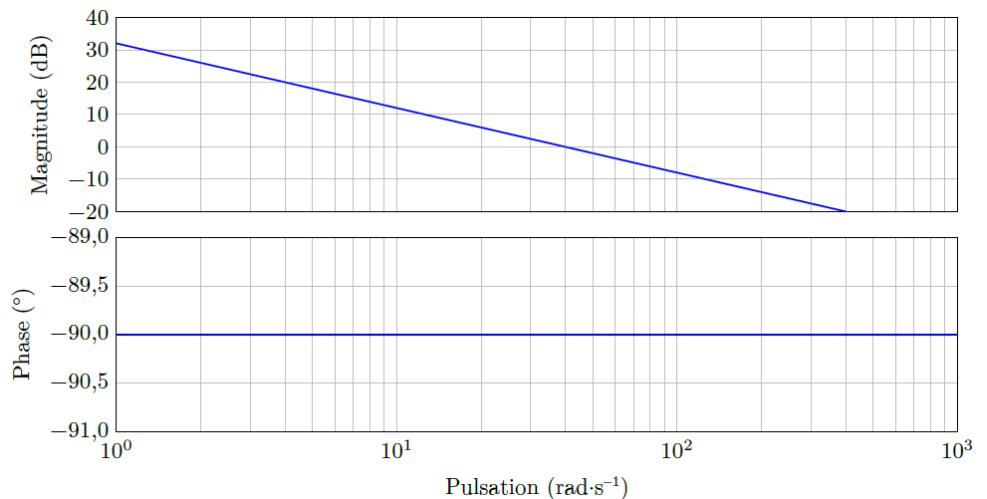
Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

TD 6

Base TC200 Tecdron – Corrigé

Centrale Supélec TSI 2021.

C2-03

Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



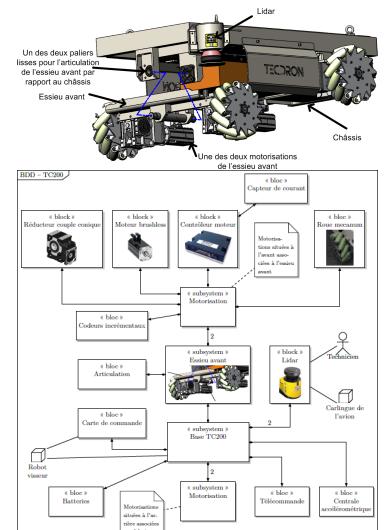
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

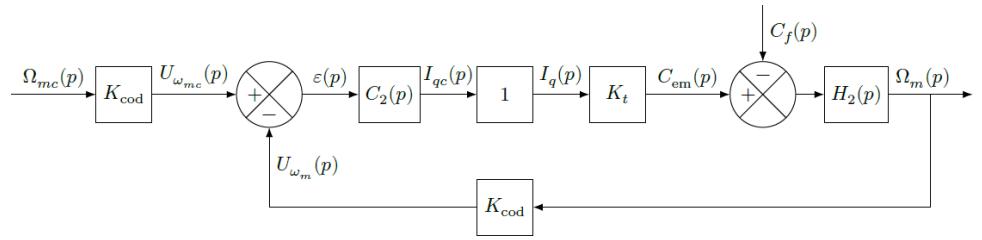
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.



Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0}	$\mu_{v\infty} < 1\%$
	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une pente de 1800 rad s^{-1}
Rapidité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$
Stabilité	Dépassemant maximal	$\leq 10\%$
	Marge de phase	$\geq 60^\circ$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	K_{cod}	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	K_t	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Corrèleur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}} p}$	$J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Correction

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Correction

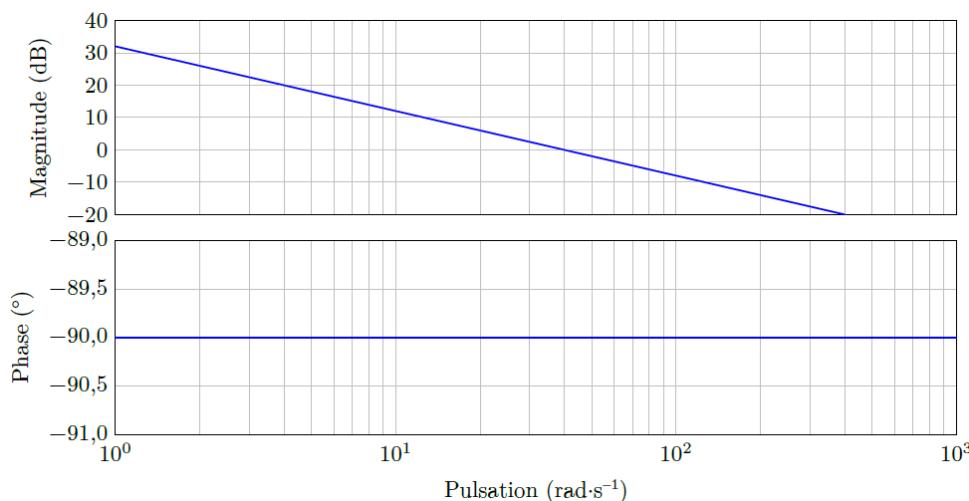
Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Correction

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

Correction

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Correction

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

Correction