

# 1 Modélisation des systèmes multiphysiques

B2-02

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ?

Pour comprendre le fonctionnement des systèmes qui nous entourent, il est souvent nécessaire de maîtriser un voire plusieurs domaines de la physique. En effet, le winch utilisé dans le laboratoire a un fonctionnement essentiellement mécanique. En revanche, le simulateur de drone  $D^2C$  est composé d'une partie mécanique (rotation du banc et des hélices) une partie électrotechnique (moteurs) une partie électronique (commande des moteurs) une partie informatique (gestion de la commande et des informations).

Pour modéliser un système, plusieurs outils peuvent être nécessaires. Lorsqu'un outil est associé à un champ de la physique, on peut parler de modèle « mono physique » :

- ▶ pour modéliser la géométrie d'un système ou le comportement d'un mécanisme, on peut faire appel à SolidWorks par exemple;
- ▶ pour modéliser la partie électrique d'un système il est possible d'utiliser un logiciel comme PSpice;
- ▶ pour programmer une interface graphique d'un logiciel, il est possible d'utiliser Python...

En revanche, lorsqu'on veut que tous ces domaines communiquent, il faut une plate forme commune permettant l'échange entre les modèles. On parle alors de modélisation multiphysique. Il est possible d'utiliser des logiciels comme Scilab (Xcos – Modelica) ou Matlab (Simulink – Simscape).

### 1.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ?

Dans l'industrie, les modèles sont indispensables. Ils permettent d'avoir un modèle numérique, image du produit que l'on cherche à réaliser ou que l'on a déjà. L'image doit être aussi fidèle à la réalité que possible. On a vu que ce modèle peut-être « monophysique » ou « multiphysique ».

L'objectif du modèle est de se substituer au produit réel. Les simulations réalisées sur le modèle ont pour objectif de remplacer des expérimentations sur le produits, considérées comme coûteuse en temps et en argent.

Il est possible de recenser les avantages et inconvénients liés à la simulation des modèles [Crevits2015].

1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Systèmes multiphysiques	2
1.3 Modélisation monophysique . . . . .	4
1.4 Non-linéarités . . . . .	5
1.5 Numérique . . . . .	7

- ✓ Pouvoir prévoir le comportement du système réel alors qu'il n'existe pas encore lors de la phase de conception ;
  - ✓ permettre la prévision de phénomènes (en météorologie par exemple) ;
  - ✓ éviter ou limiter le recours aux expérimentations réelles qui peuvent être très coûteuses ou très dangereuses, voire proscribes (essais nucléaires militaires) ou impossibles dans l'état actuel des connaissances et des moyens (projet ITER) ;
  - ✓ quand l'échelle de temps des phénomènes dans le système réel ne permet pas une expérience « en une durée raisonnable » pour effectuer des observations ou des mesures. (premiers instants de l'univers ( $t < 10^{-6}$ s) ou l'évolution des galaxies ( $t > 10^6$  années)) ;
  - ✓ « observer » ou représenter des variables inaccessibles à l'expérience ou la mesure ;
  - ✓ les manipulations sont faciles sur un modèle. Elles peuvent être répétées, voire itérées automatiquement pour apprécier de très nombreuses situations ;
  - ✓ le droit à l'erreur, sans risque ;
  - ✓ la possibilité de supprimer des phénomènes perturbateurs ou des effets secondaires.
- 
- ✗ Avoir une confiance aveugle dans les simulations et ses résultats : des erreurs liées aux modèles ou aux calculs peuvent ne pas être perçues immédiatement ;
  - ✗ « oublier » les conditions de la simulation et les hypothèses formulées pour établir le modèle et surtout dans le cas des systèmes complexes ;
  - ✗ « inverser » la réalité et « forcer » le réel à intégrer les contraintes du modèle ;
  - ✗ oublier le niveau de précision des résultats provenant du modèle.

## 1.2 Modélisation des systèmes multiphysiques

### 1.2.1 Modélisation causale et acausale

Lorsque le fonctionnement d'un système est régit par une équation différentielle, dont l'ordre de dérivation de la sortie est supérieur à l'ordre de dérivation de l'entrée, la sortie est une conséquence de l'entrée. En passant l'équation dans le domaine de Laplace puis en la traduisant sous forme de schéma bloc, on obtient alors un bloc **orienté** traduisant ainsi la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie.

On parle ici de modélisation **causale**.

Les liens entre les blocs représentent une grandeur physique (courant, tension, position, vitesse *etc.*).

En modélisation acausale, les entrées et sorties ne sont pas spécifiées. Les liens entre entrées et sorties sont définies de manière implicite. Lorsqu'on visualise la traduction graphique d'un modèle acausal, les liens ne sont pas orientés (les blocs sont « réversibles »). Les blocs sont traversés par des flux d'énergie d'un même domaine physique.

Dans Matlab – Simulink, on parle de grandeurs potentielles (across) et de grandeur traversante (through) :

- ▶ une variable potentielle est mesurée par un instrument en parallèle avec la chaîne d'énergie ;
- ▶ une variable traversante est mesurée par un instrument en série avec la chaîne d'énergie.

Dans Scilab – Coselica, (langage Modelica), on parle de variables potentielles et flux.

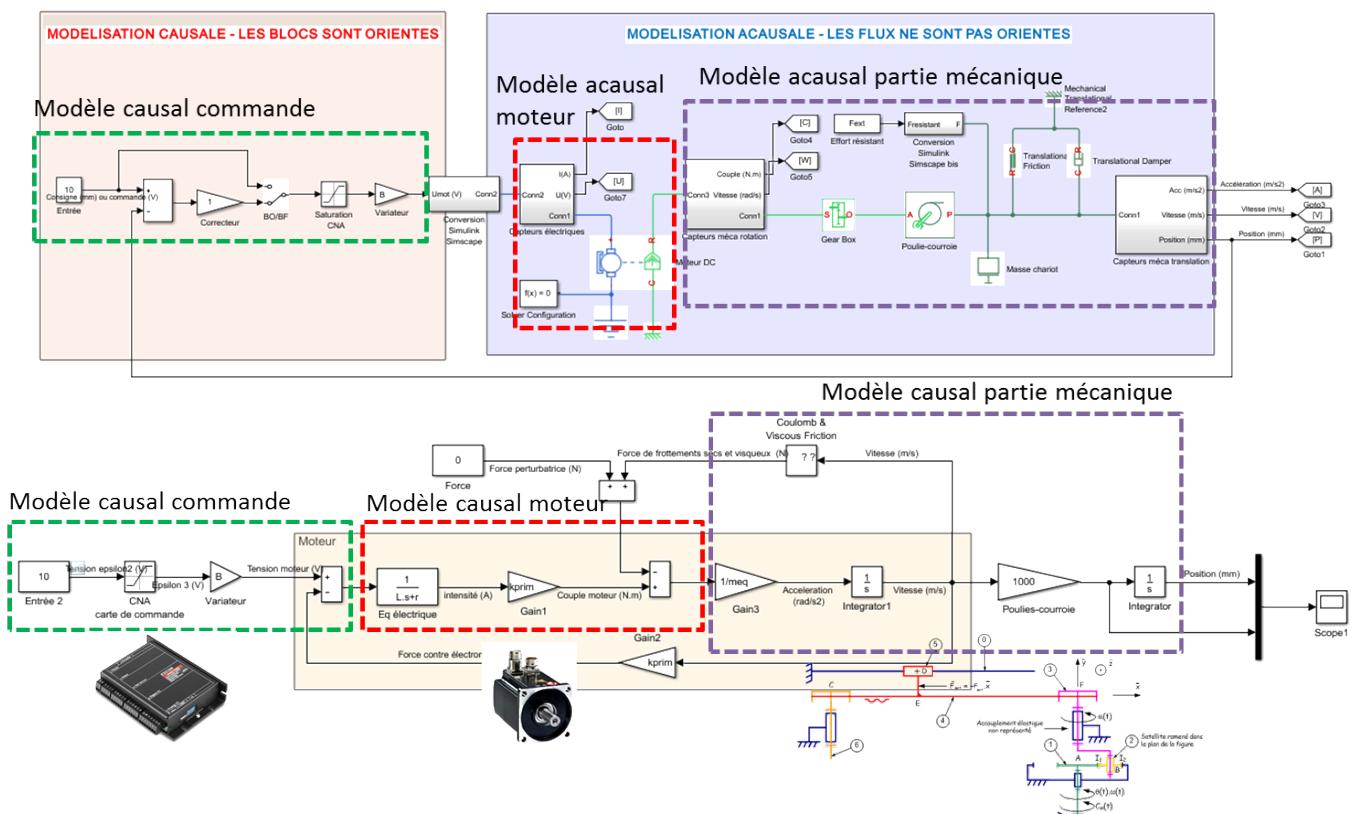
- ▶ variables potentielles : les variables qui sont reliées au même port sont égales ;
- ▶ variables flux : les variables qui aboutissent au même port ont pour somme 0.

**TABLE 1.1** – Modélisation acausale dans Matlab – Simulink – Simscape : variables « across » et « through ».

Domaine physique	Variables « across »	Variables « through »
Électrique	Tension (V)	Courant (A)
Hydraulique	Pression (Pa)	Débit ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
Mécanique de translation	Vitesse linéaire ( $\text{m s}^{-1}$ )	Force (N)
Mécanique de rotation	Vitesse angulaire( $\text{rad s}^{-1}$ )	Moment (Nm)
Thermique	Température (K)	Flux thermique et flux d'entropie

### 1.2.2 Les différents modèles et outils

La figure ci-dessous présente un modèle causal et un modèle acausal du système de laboratoire « Control'X » en utilisant le logiciel Matlab-Simulink.



Visuellement on constate que sur le modèle causal, les composants du système apparaissent. Ainsi, sans connaître les lois de comportements des composants, il est possible de réaliser le modèle multiphysique d'un système.

En modélisation acausal, on utilise une représentation par schéma-blocs. Il est ici indispensable de connaître les modèles de connaissance ou de comportement des composants pour réaliser le modèle.

### 1.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients

Que ce soient des modèles causaux ou acausal, Matlab a recours à des solveurs pour simuler le comportement des systèmes. En effet, des équations différentielles, linéaires ou non, sont « cachées » derrière les blocs.

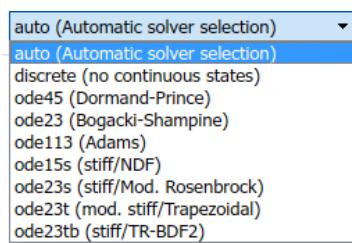


FIGURE 1.1 – Solveurs Matlab

Par défaut, nous laisserons un choix automatique du solveur. Cependant, certains modèles imposeront (via un message d'erreur) le changement de ce solveur. Par ailleurs le pas de simulation devra être changé dans certain cas, dans le but d'améliorer la précision des résultats.

Attention, il est à noter qu'il peut être difficile de réaliser de diagramme de Bode en utilisant un modèle acausal. Ceci peut être un handicap en phase de conception d'un système car il devient plus délicat de déterminer les résonances du système.

## 1.3 Modélisation des systèmes physiques

On utilisera ici Matlab – Simulink. Certains modèles sont aussi transposables avec Scilab – Xcos.

### 1.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques

#### Introduction

Deux modes de modélisation des systèmes mécanique est disponible : une modélisation 1D (mouvement de translation suivant une seule direction, mouvement de rotation autour d'un axe fixe) ou une modélisation 3D. La modélisation 1D est possible directement dans Matlab. Pour la modélisation 3D, il est plus aisé d'utiliser SolidWorks.

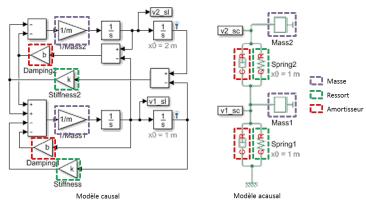


FIGURE 1.2 – Modélisation causale et acausele d'un système avec deux systèmes « masse – ressort – amortisseur » en série.

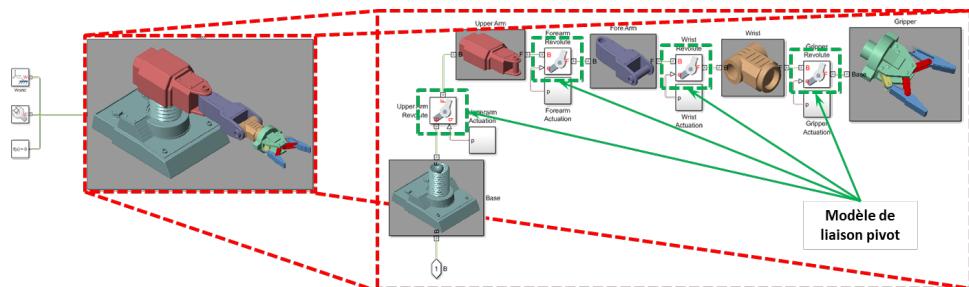
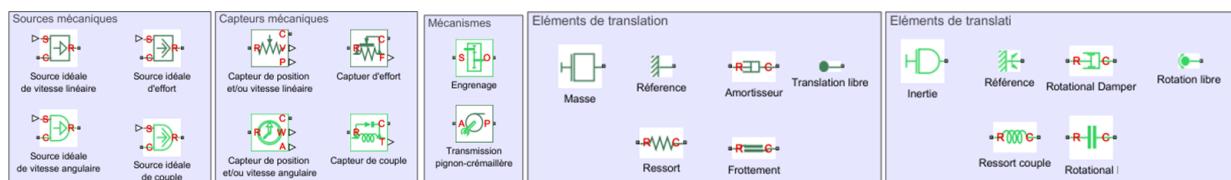


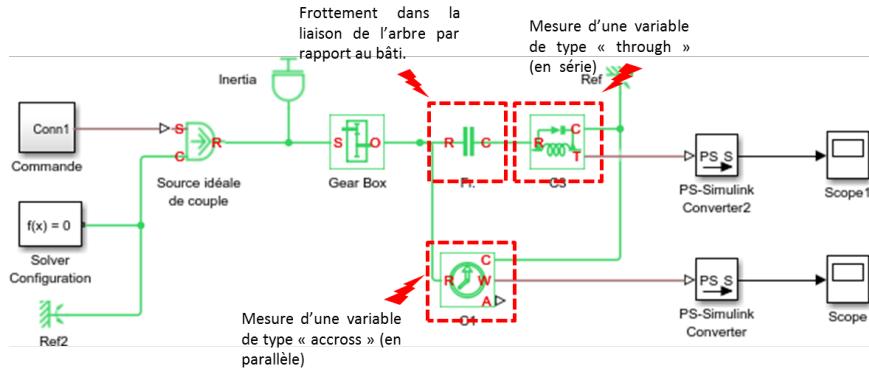
FIGURE 1.3 – Modélisation acausele 3D d'un bras robotisé.

#### Blocs communément utilisés en modélisation multiphysique.

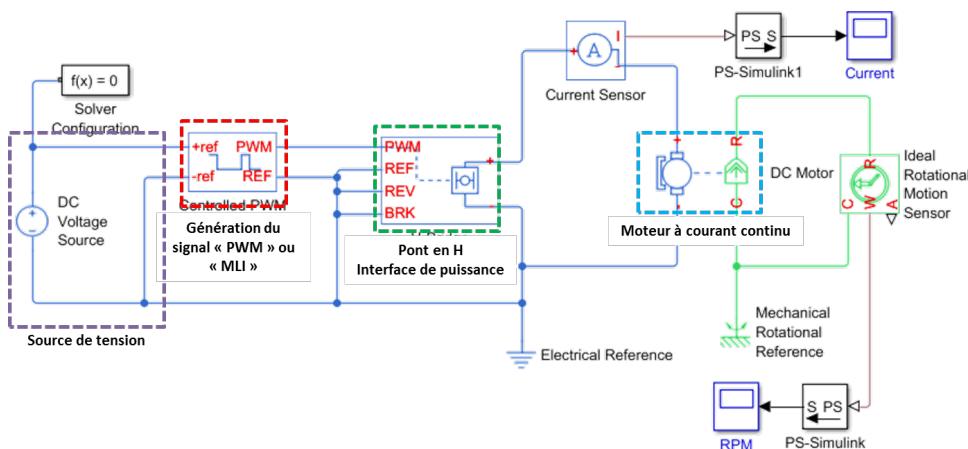
Les éléments communément utilisés sont donnés dans la figure suivante.



La figure suivante illustre une transmission mécanique modélisée en utilisant Simulink. On notera le positionnement des capteurs pour mesurer des variables accross ou through, ainsi que le positionnement du bloc permettant de modéliser les frottements.



### 1.3.2 Modélisation des systèmes électriques



**FIGURE 1.4 –** Modélisation acausale de la commande d'un moteur à courant continu.

### 1.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques

En cas de besoin, des exemples complémentaires sont disponibles en utilisant Matlab – Simulink.

## 1.4 Modélisation des non-linéarités

Même si on cherche à modéliser les blocs d'un système par des équations linéaires (à coefficients constants), il est très fréquent de rencontrer des systèmes (notamment mécaniques) qui n'obéissent pas des lois linéaires (par exemple, le comportement du Maxpid est non linéaire : suivant la plage de fonctionnement – entre 0 et 5° ou entre 85 et 90° – un tour de moteur ne correspond pas au même mouvement angulaire du bras).

Deux solutions s'offrent alors à nous : linéariser le fonctionnement ou modéliser la non linéarité. Les modèles causaux sont par essence linéaire. Cependant, il est possible d'intégrer des non-linéarités modélisables relativement simplement (seuil, saturation, hystérésis). Il est en revanche plus délicat de modéliser les non linéarités géométriques des mécanismes. En revanche dans les modèles acausaux, la passerelle entre SolidWorks et Matlab, permet par exemple de modéliser des systèmes mécaniques non linéaires.

Attention : l'analyse fréquentielle d'un système non linéaire n'a pas (peu ?) de sens, même s'il est possible d'effectuer un diagramme de Bode, notamment avec Matlab...

### 1.4.1 Linéarisation

Lorsqu'un système est non linéaire, il peut être possible de le linéariser. Cela signifie que **localement** (sur un certain intervalle) on approche le comportement du système par une droite. On conséquence, on conserve la validité de notre modélisation de type SLCI. Cependant, il faut faire attention à la zone de validité du modèle : si le comportement du système est fortement linéaire la linéarisation ne sera valable que dans une certaine zone.

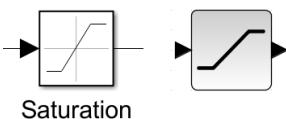


#### title

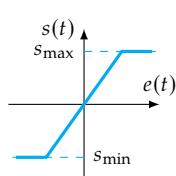
Le comportement mécanique du Maxpid n'est pas linéaire. Si on désire modéliser ce comportement sur un système causal, il est impératif d'utiliser une loi linéaire. Dans le premier cas, on modélise le comportement en utilisant une régression linéaire. Ce modèle génère des erreurs, mais il est « utilisable » sur toute la plage de fonctionnement.

Il est aussi possible, dans un second cas, de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Ainsi, le modèle sera plus fidèle à la réalité autour de ce point de fonctionnement. Par contre, les écarts s'accroissent en s'éloignant du point de fonctionnement.

### 1.4.2 Saturation



Paramètres :  $s_{\max}$  et  $s_{\min}$

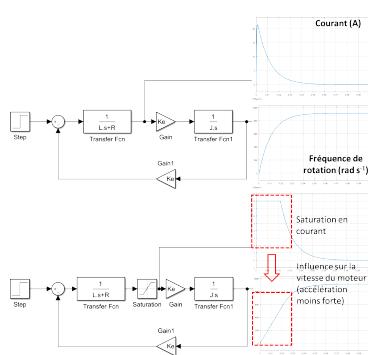


Même si vous l'avez peut-être peu remarqué, les saturations sont omniprésentes sur les systèmes réels. Les principales sources de saturation sont des saturations en tension ou des saturations en courant.

En régime saturé, au delà d'une certaine valeur d'entrée, le signal de sortie du bloc reste identique et égal à la valeur de saturation.

Tout d'abord, dans les systèmes asservis et corrigés, le correcteur permet souvent une amplification de la consigne. Par exemple, un correcteur proportionnel de valeur 5 dans la boucle ouverte permet de multiplier par 5 la tension de commande. Celle-ci peut alors être supérieure à la tension que la source peut fournir.

De même, suivant la charge agissant sur un système (charge électrique ou mécanique), le courant nécessaire à un déplacement peut devenir très important, notamment en phase transitoire. Un pic de courant peut avoir pour effet de détériorer des composants.



#### title

Prenons par exemple le cas du moteur à continu du Maxpid dont la modélisation est (ou devrait être) bien connue. Sollicitons le moteur par un échelon de tension et observons les signaux que nous ne regardons peut être pas toujours, par exemple le courant. Au démarrage du moteur, si on néglige la bobine et qu'on néglige l'existence d'une tension dans la boucle de retour, le courant initial est de l'ordre de  $\frac{U}{R} \approx \frac{48}{2} = 24 \text{ A}$ . Pour certains systèmes ce courant peut détériorer des composants. Afin de limiter le courant, des saturateurs permettant d'éviter de dépasser certaines intensités.

La conséquence peut ici être un ralentissement du système. En effet, le courant «

plaformant », l'accélération n'est pas aussi forte qu'on l'attendrait. En conséquence, le système est moins rapide.

### 1.4.3 Seuil

Les seuils (ou bandes mortes – dead band) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie reste nulle quand l'entrée varie dans un certain intervalle.

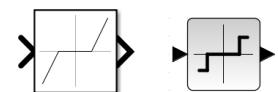
Dans le cas d'une modélisation causale, on peut utiliser le seuil pour modéliser le frottement sec. En effet, dans le cas d'un système piloté par un moteur à courant continu, une petite tension ne suffit pas à actionner le système. Il faut vaincre les frottements secs. Le seuil permet de modéliser ce comportement.

### 1.4.4 Hystérésis

Les hystérésis (Relay) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie est différente quand l'entrée croît ou lorsqu'elle décroît.

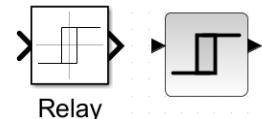
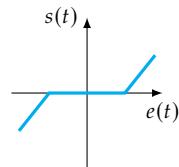
## 1.5 Modélisation des systèmes numériques

On verra dans un chapitre ultérieur que les systèmes que nous manipulons sont souvent numériques. En effet, que ce soit sur le Maxpid, le Control'X, le D2C, la cheville NAO etc. les grandeurs analogiques mesurées sont converties en grandeurs numériques grâce à un CAN (convertisseur analogique numérique). La fréquence d'échantillonnage ou la quantification du signal peuvent avoir un impact non négligeable sur les performances du système.



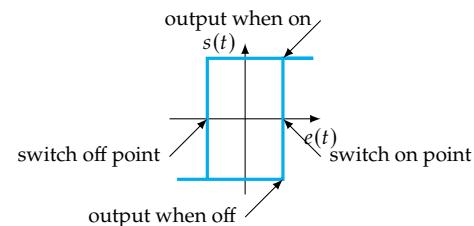
Dead Zone

Paramètres : valeur mini et valeur maxi

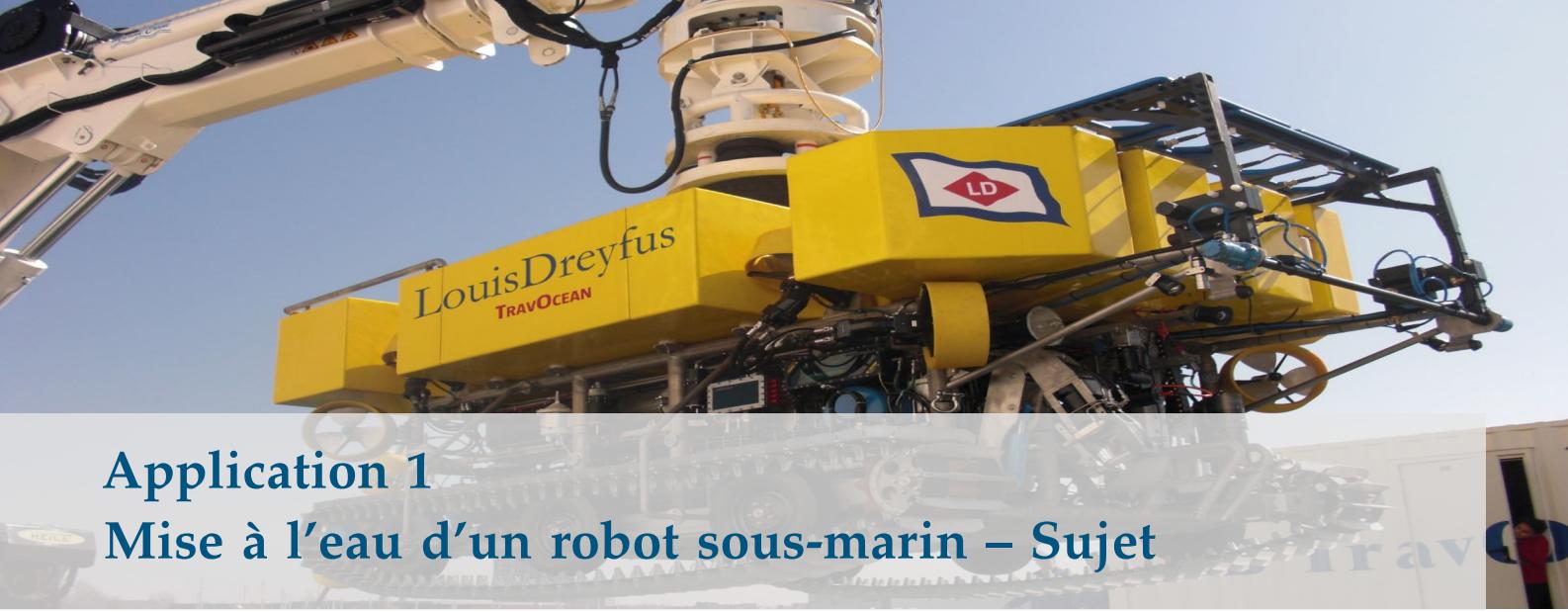


Relay

Paramètres : switch on point, switch off point, output when on, output when off







## Application 1 Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet

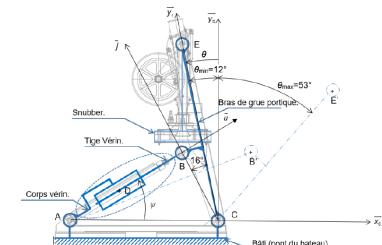
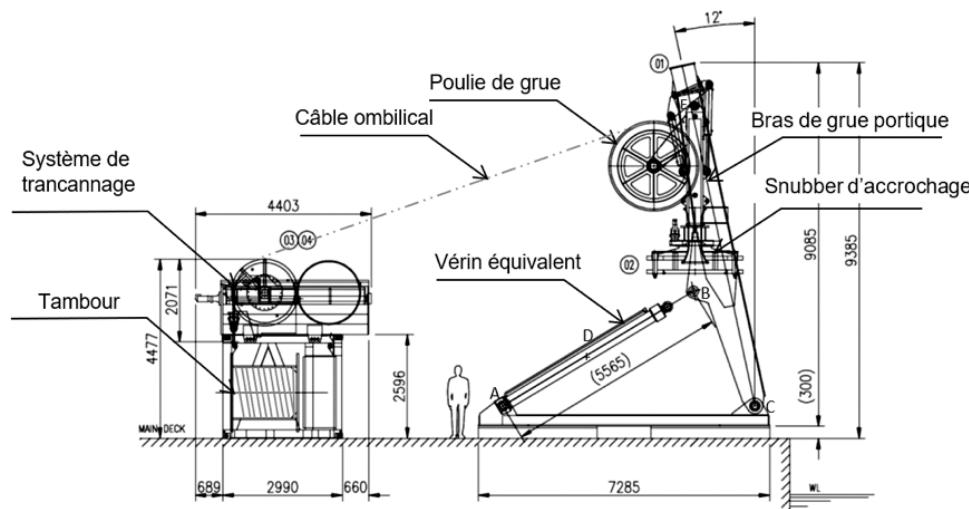
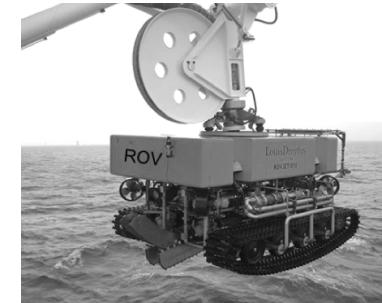
Concours Centrale – MP 2019

B2-02

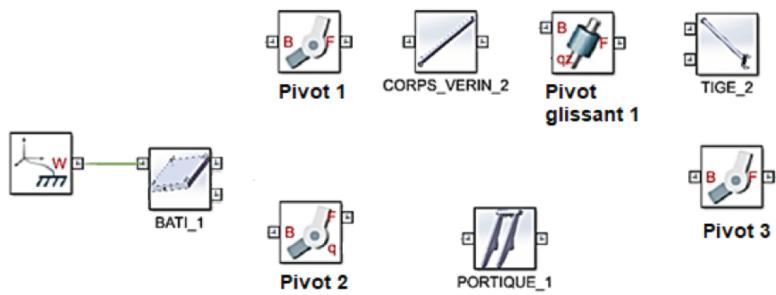
Pour réaliser l'ensouillage sous-marin de câbles, ceux-ci sont déposés sur le fond marin par un navire câblier. Le robot sous-marin ROV (Remotely Operated Vehicle) est déposé sur le fond marin par un bateau support et ensouille le câble provenant du navire câblier après l'avoir détecté et s'être aligné dans l'axe de celui-ci.

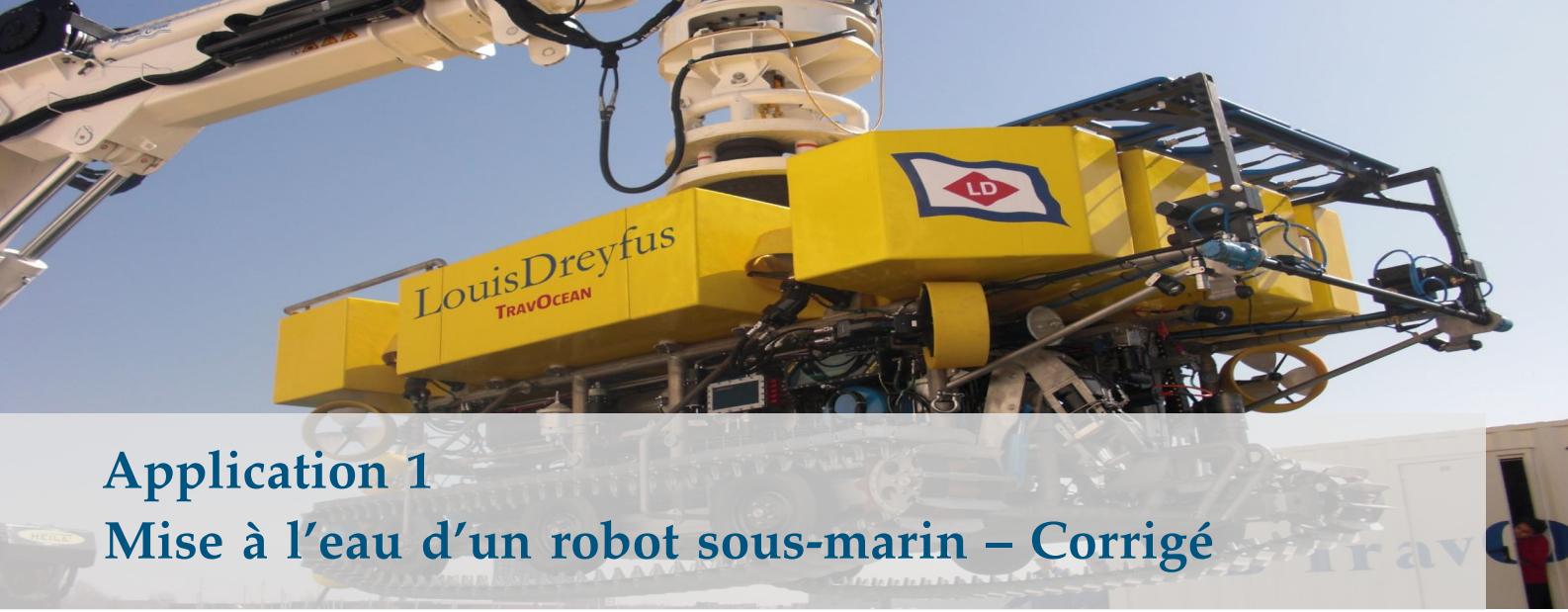
Pour transférer le ROV du pont du bateau support jusqu'à l'aplomb de la surface d'immersion une grue portique est utilisée. La grue portique est actionnée par un ensemble de deux vérins hydrauliques modélisés en un seul vérin équivalent pour cette étude.

Lors de la descente du ROV dans la mer, il est suspendu à un câble ombilical. Un bon équilibrage hydrostatique est nécessaire pour assurer l'horizontalité du ROV pendant la descente.



**Question 1** À partir des figures précédentes, relier les composants du modèle de simulation multiphysique de la grue portique. Quel(s) ensemble(s) n'ont pas été modélisés?

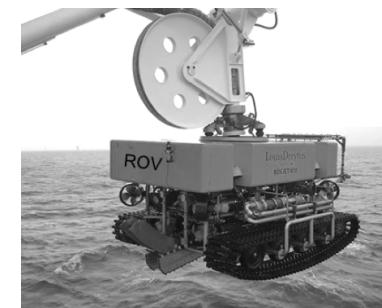




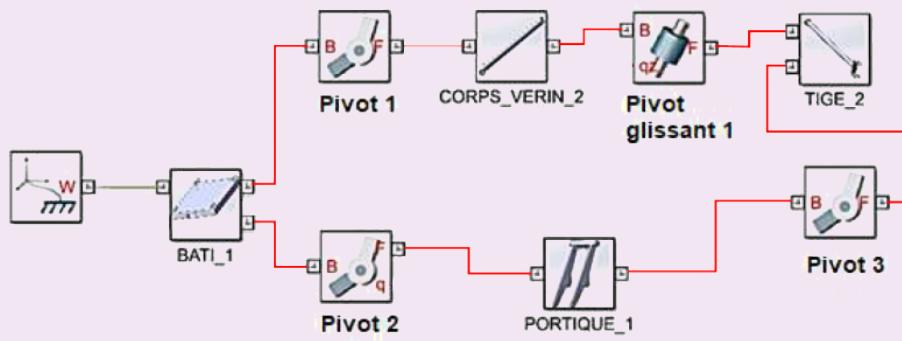
## Application 1 Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Corrigé

Concours Centrale – MP 2019

B2-02



### Correction







## Application 2 La Seine Musicale – Sujet

La Seine Musicale est un équipement à vocation musicale à fort rayonnement culturel, dont l'objet est de créer ou d'aménager des espaces pour des concerts, des expositions, des installations permanentes ou provisoires.

L'un des défis architecturaux de ce projet consiste à mettre en mouvement la voile, équipée de 470 panneaux photovoltaïques, autour de l'auditorium, tout en garantissant une acoustique exceptionnelle.

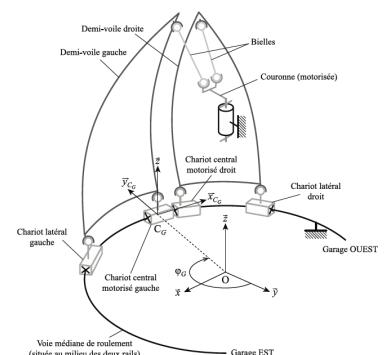
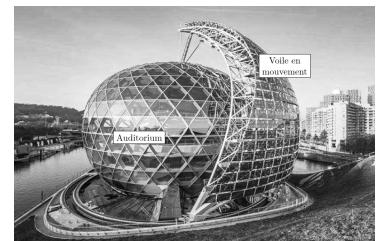
Les deux demi-voiles sont mises en mouvement de manière indépendante par des chariots motorisés, ainsi qu'une couronne motorisée déplaçant chacun des sommets des demi-voiles par l'intermédiaire de bielles.

Chaque chariot (central et latéral) se déplace grâce à quatre galets, appelés galets de roulement, qui roulent sur les deux rails circulaires concentriques de la voie médiane de roulement et grâce à quatre autres galets de guidage qui roulent sur les côtés des deux rails. Chacun des deux chariots centraux est motorisé à l'aide de deux motoréducteurs qui entraînent chacun en rotation deux des quatre galets de roulement. Afin d'optimiser son rendement énergétique, cette voile se déplace chaque jour toutes les 15 minutes pour suivre le soleil du garage Est au garage Ouest.

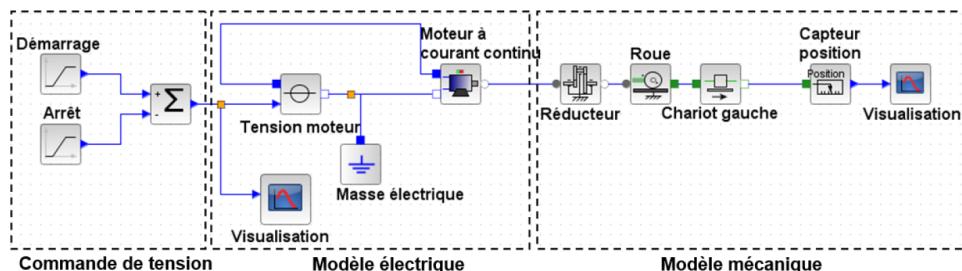
Afin d'effectuer un premier dimensionnement en phase d'avant-projet des solutions techniques choisies, un modèle multiphysique simple de la chaîne de traction d'un chariot motorisé est réalisé (Figure 1.6). On se place dans le cas le plus défavorable avec un seul motoréducteur fonctionnel qui entraîne deux galets de roulement (roue).

Concours Centrale – MP 2020

**B2-02**



**FIGURE 1.5 – Schéma d'architecture de la voile solaire**



**FIGURE 1.6 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voile**

Le modèle multiphysique est constitué de trois parties :

- ▶ commande en tension qui résulte de la superposition de deux rampes pour générer la loi de vitesse trapézoïdale;
- ▶ modèle électrique constitué d'un moteur à courant continu alimenté;

- modèle mécanique constitué d'un réducteur, d'une roue de chariot, d'une masse mobile de la demi-voile et d'un capteur de position.

Lors de son déplacement, il peut arriver que la voile soit soumise à l'effet du vent. Il est donc important de le prendre en compte dans le modèle pour évaluer son impact sur le déplacement. Par ailleurs, afin d'assurer une durée de vie du moteur conforme à son mode de fonctionnement, il est important de pouvoir estimer la consommation électrique du moteur en fonctionnement.

Le modèle Figure 1.6 a donc été enrichi de nouveaux blocs, à savoir : un capteur de courant, un capteur de tension et l'effort extérieur lié au vent (échelon).

**Question 1** Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

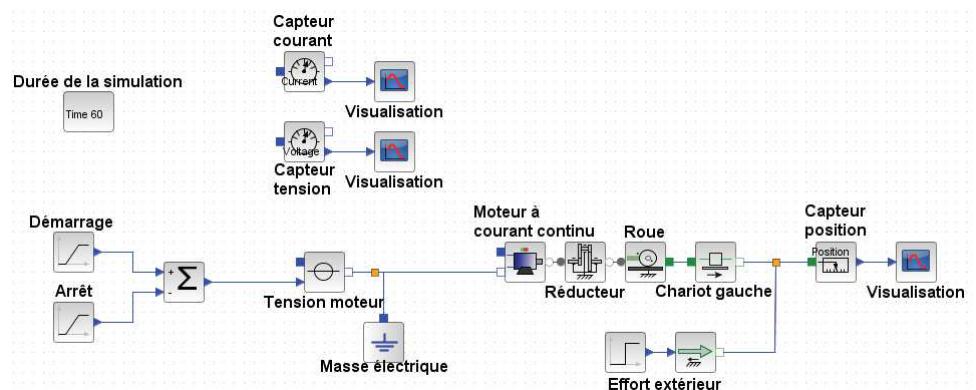


FIGURE 1.7 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voie



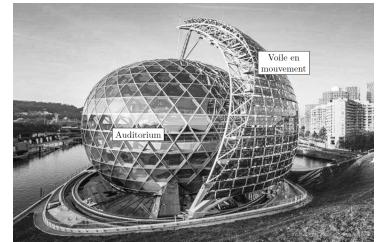
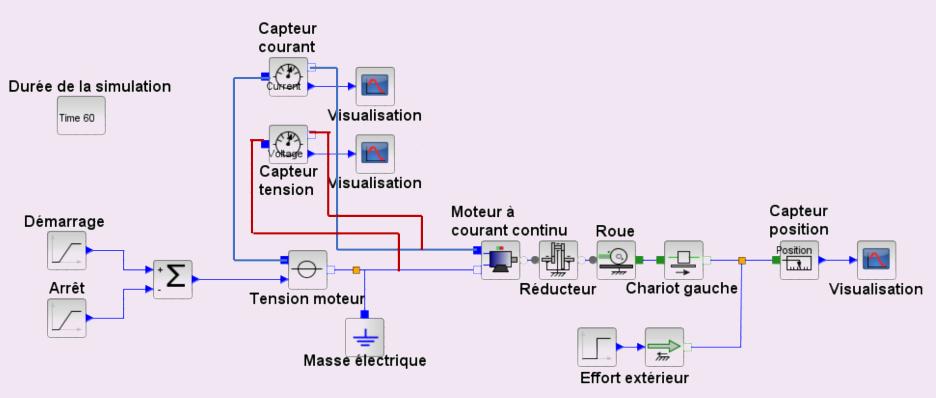
## Application 2 La Seine Musicale – Corrigé

Concours Centrale – MP 2020

B2-02

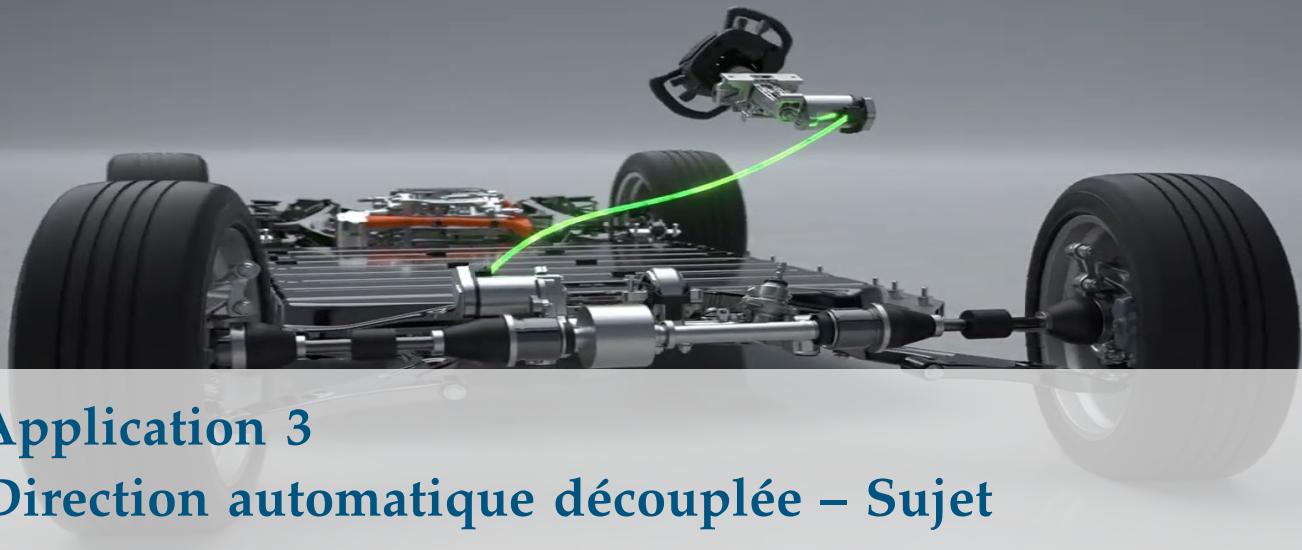
**Question 1** Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

### Correction



Ville en mouvement





## Application 3 Direction automatique découplée – Sujet

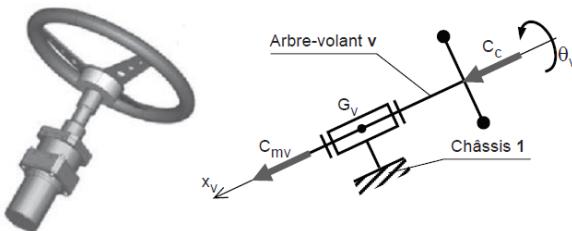
Banque PT – SI A 2017

B2-02



Depuis maintenant de nombreuses années, les commandes de vol d'avions sont passées d'une technologie purement mécanique à la technologie par fil (Fly by Wire). Le secteur automobile suit cette tendance qui présente de nombreux avantages. C'est le système de direction par fil (Steer by Wire), encore nommé direction découpée, qui fait l'objet de l'étude proposée.

La Figure 1.8 donne une vue de cette unité sous la forme d'une maquette numérique à laquelle est associé le schéma cinématique qui servira de base à l'étude mécanique.



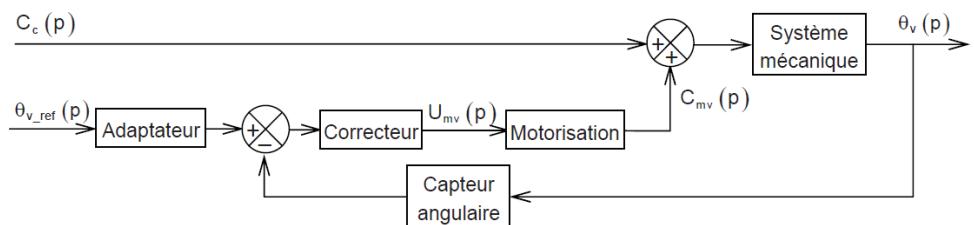
**FIGURE 1.8** – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

L'unité de pilotage est constituée d'une chaîne d'énergie chargée de solliciter le volant par un couple  $C_{mv}\vec{x}_v$  qui résiste à l'action du conducteur  $C_c\vec{x}_v$  quand celui-ci cherche à tourner le volant.

En effet, la simple dynamique du système mécanique de l'unité de pilotage ne donnerait pas au conducteur la sensation de manier la direction d'une automobile. La composante  $C_{mv}$  est donc élaborée pour que la dynamique du volant en termes d'inertie et de raideur soit équivalente à celle d'une direction conventionnelle optimisée selon le type de conduite visée.

La composante  $C_{mv}$  est élaborée à partir de la consigne d'angle du volant  $C_{v\_ref}$ , transmise par le générateur de consigne intégré au contrôleur de modèles, et de la composante  $C_c$  du couple conducteur.

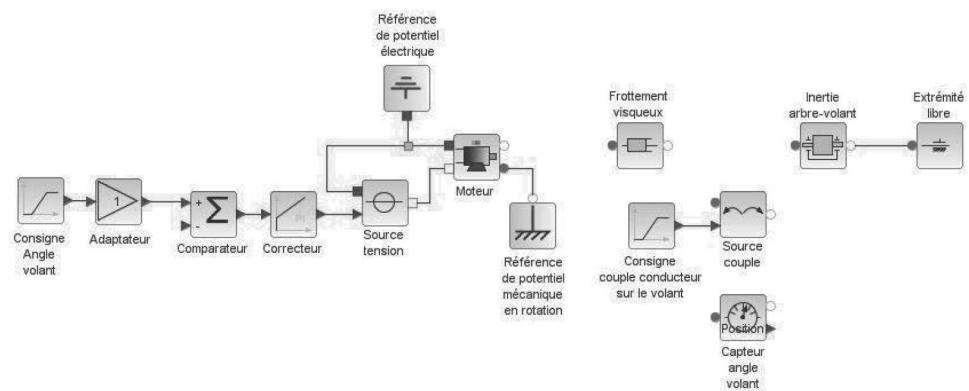
Le modèle de la structure sous la forme d'un schéma bloc décrivant le comportement asservi de cette unité est donné Figure 1.9. On précise que la variable d'entrée est  $\theta_{v\_ref}(p)$ , que la variable de sortie est  $\theta_v(p)$  et que la variable  $C_c(p)$  est considérée comme une perturbation. Un signal de commande  $U_{mv}(p)$  pilote la motorisation.



**FIGURE 1.9 –** Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

Un modèle acausal de cette structure dont certains composants ne sont pas reliés aux autres, est donné sur le cahier réponses.

**Question 1** Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 1.9.





## Application 3

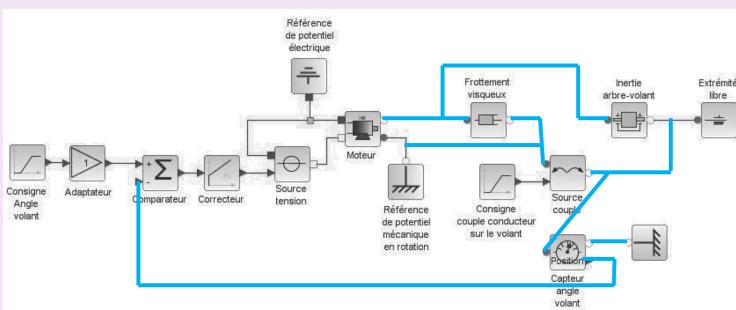
### Direction automatique découplée – Corrigé

Banque PT – SI A 2017

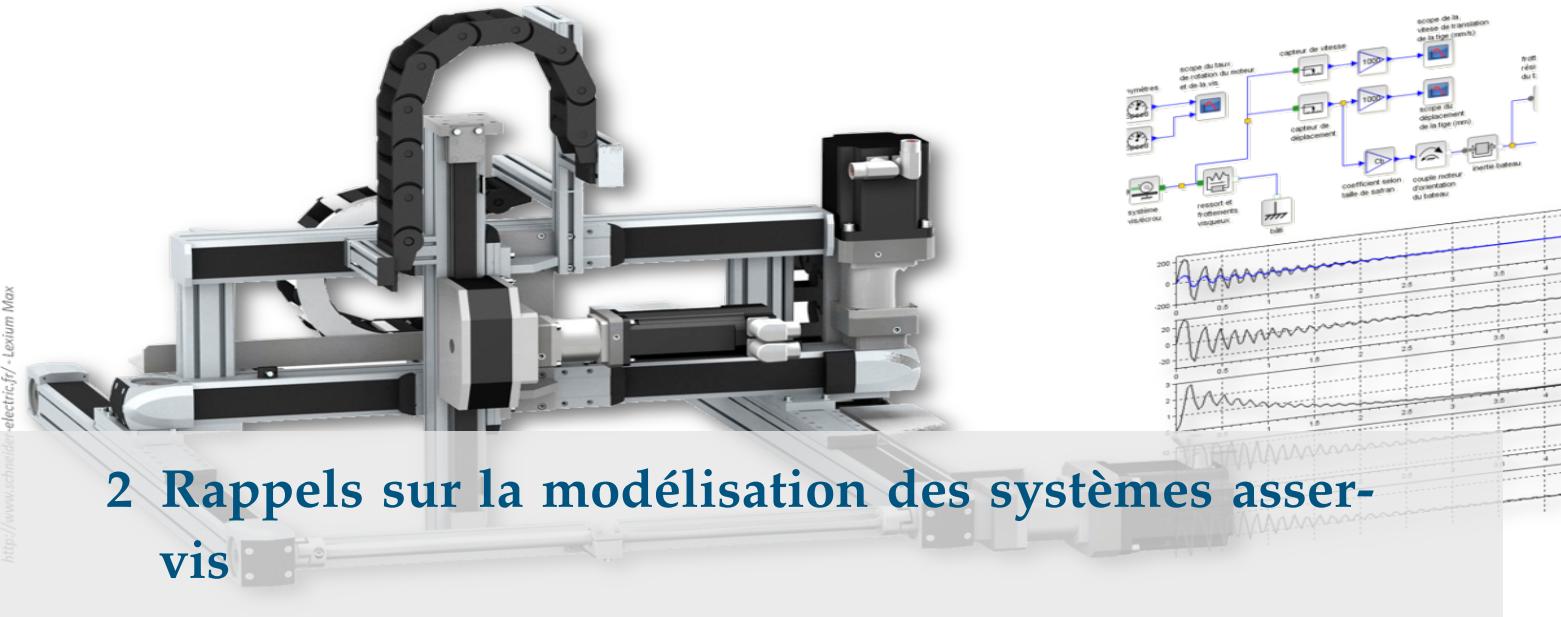
**Question 1** Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 1.9.

B2-02

Correction







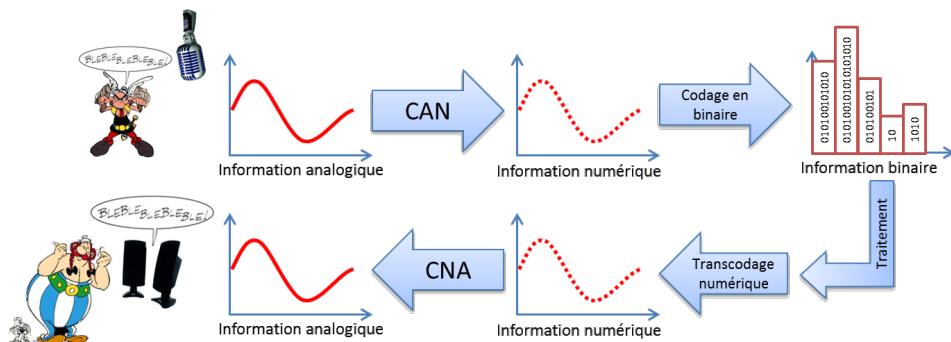
## 2 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

### 2.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

#### 2.1.1 Définitions

##### Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).



##### Définition – Systèmes automatiques ou asservis

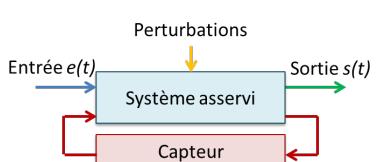
Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger

2.1 Premières définitions . . . . .	21
2.2 Transformée de Laplace . . . . .	23
2.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs . . . . .	24
2.4 Systèmes d'ordre 1 & 2 . . . . .	26
2.5 Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	28

- B2-04
- B2-05
- B2-06
- B2-07
- C1-01
- C2-01
- C2-02
- C2-03



de la qualité de la tâche accomplie.

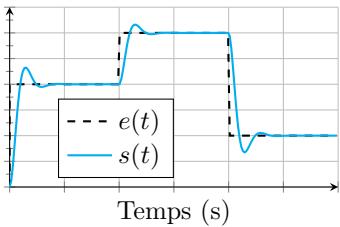


FIGURE 2.1 – Système suiveur.

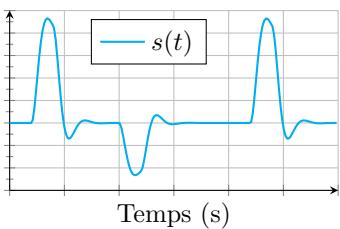


FIGURE 2.2 – Système régulateur.

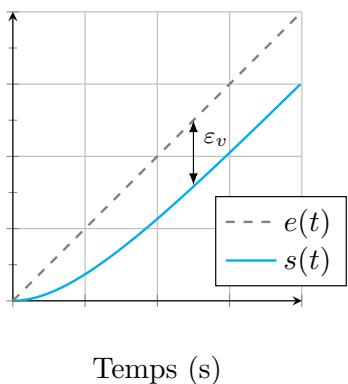


FIGURE 2.3 – Erreur de trainage.

### Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

### 2.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

#### Définition – Précision en position – Écart statique $\varepsilon_s$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_s$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

#### Définition – Précision en vitesse $\varepsilon_v$

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

#### Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

#### Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

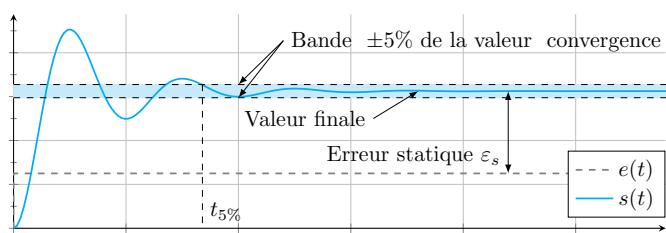


FIGURE 2.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

### Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 2.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

### 2.2.1 Définitions

#### Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

#### Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p)$  ...

#### Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### 2.2.2 Théorèmes

#### Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

#### Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Théorème – Retard**

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

**Théorème – Amortissement**

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

## 2.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

### 2.3.1 Définitions

**Définition – Fonction de transfert – Transmittance**

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

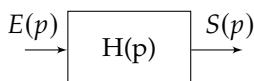
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

**Définition – Classe – ordre – pôles – zéros**

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

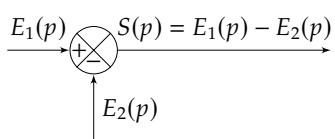
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- ▶ Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Le **degré de  $D(p)$**  est appelé **ordre  $n$  du système** ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).
- ▶ L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- ▶ S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  $\alpha$  est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

**Définition – Modélisation d'un bloc**

Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition – Modélisation d'un comparateur**

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

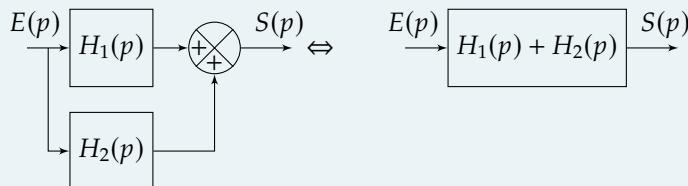
### 2.3.2 Algèbre de blocs

#### Résultat – Blocs en série

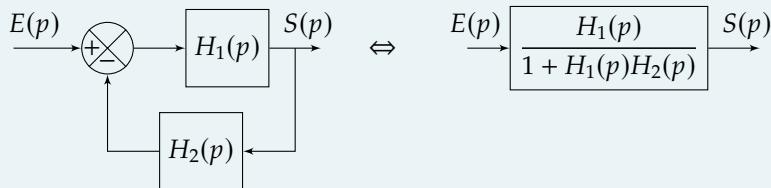


*Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.*

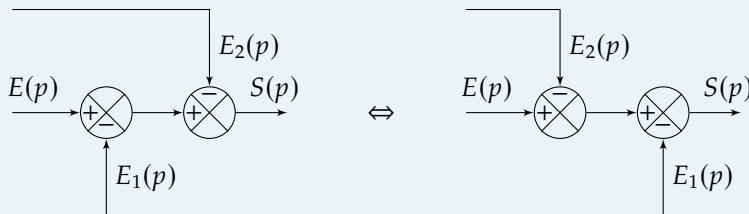
#### Résultat – Blocs en parallèle



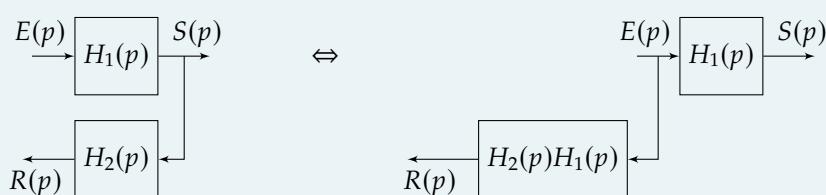
#### Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



#### Résultat – Comparateurs en série



#### Résultat – Point de prélèvement

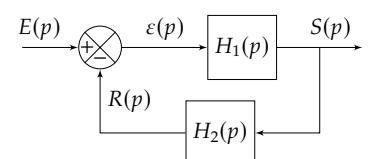


### 2.3.3 Fonctions usuelles

#### Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

*Formule de Black*

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



**Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO**

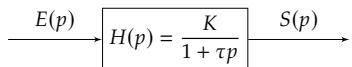
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

**Définition – Théorème de superposition**

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1E_1 + H_2E_2$ .

## 2.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

### 2.4.1 Systèmes d'ordre 1

**Définition – Système d'ordre 1**

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

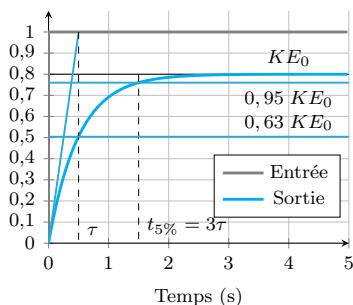
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶  $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- ▶  $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

**Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre**

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- ▶ la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;

**Résultat –****– Réponse à une rampe d'un système du premier ordre**

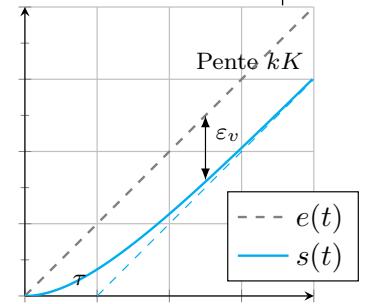
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente  $k$  :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = Kk \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$ .

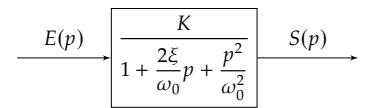
Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- ▶ intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ .



Temps (s)

## 2.4.2 Systèmes d'ordre 2

**Définition – Systèmes d'ordre 2**

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

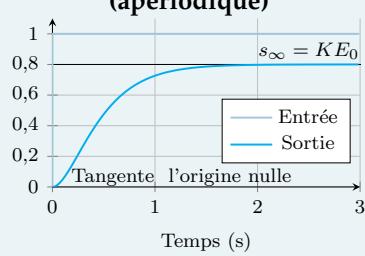
On note :

- ▶  $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- ▶  $\xi$  (lire  $xi$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- ▶  $\omega_0$  pulsation propre du système ( $\text{rad/s}$  ou  $\text{s}^{-1}$ ).

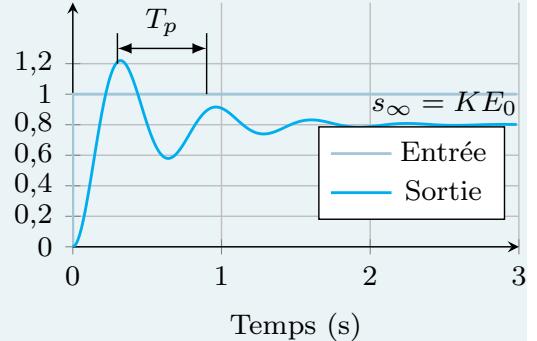
Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

**Résultat -**

$\xi \geq 1$  : système non oscillant et amorti (apériodique)



$\xi < 1$  : système oscillant et amorti (pseudo périodique)



- ▶ La fonction de transfert a deux pôles réels.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.

- ▶ La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.
- ▶ La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$ .
- ▶ La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = \frac{-\pi\xi}{KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}}$ .

**Résultat -**

- ▶ Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $KE_0$  ( $2KE_0$  crête à crête).
- ▶ Pour  $\xi \approx 0,69$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- ▶ Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

## 2.5 Réponse fréquentielle des SLCI

### 2.5.1 Définitions

- ▶  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
  - ▶  $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.
  - ▶  $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
  - ▶  $\omega$  : la pulsation en rad/s;
  - ▶  $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.
- On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

### Définition – Gain & Phase

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

### Résultat –

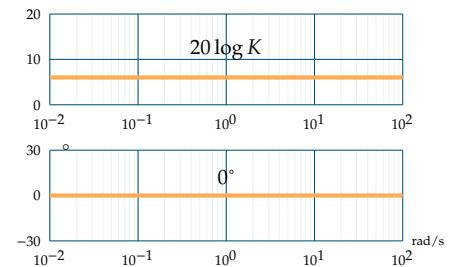
On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$ ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$ .

## 2.5.2 Gain

### Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

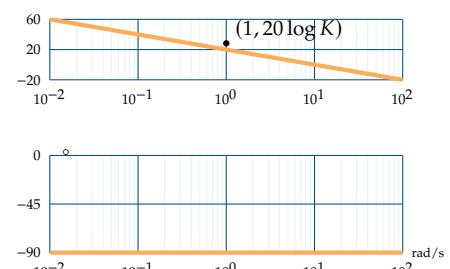
- Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .



## 2.5.3 Intégrateur

### Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

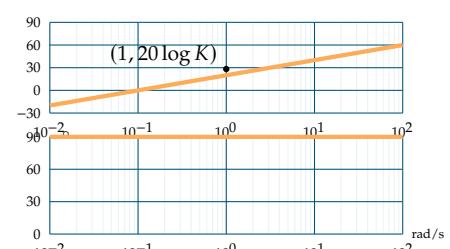
- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20 \text{ dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



## 2.5.4 Déivateur

### Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

- Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20 \text{ dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .

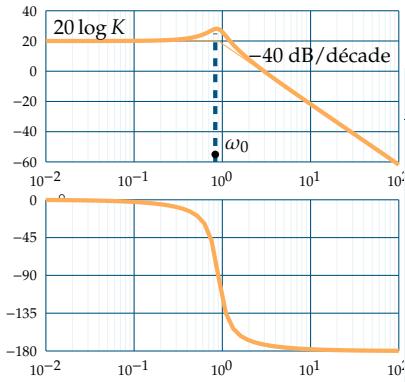


### 2.5.5 Systèmes d'ordre 1

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20 \text{dB/decade}$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .

### 2.5.6 Systèmes d'ordre 2



#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .
- ▶ Cas où  $\xi < 1$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40 \text{dB/decade}$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .

Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premiers ordres.

#### Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ . À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

### 2.5.7 Retard

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$ .

### 2.5.8 Tracé du diagramme de Bode

#### Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

#### Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.





## TD 1

# Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Banque PT – SIA – 2005.

## Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon  $\vec{Z}_1$ .

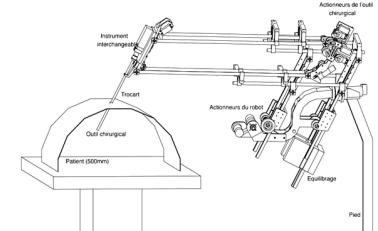
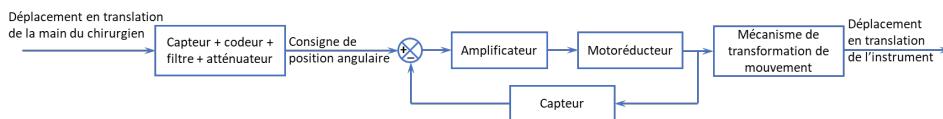


TABLE 2.1 – Liste partielle des exigences.

Req.	Exigence	Niveaux
1	Vitesse de translation nominale	$> 0,1 \text{ m s}^{-1}$
2	Temps $t_1$ pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
3	Précision – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
4	Précision – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ m s}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
5	Stabilité – Dépassemment	Aucun
6	Stabilité – Marge de phase	$45^\circ$
7	Rapidité – Bande passante à $-3 \text{ dB}$ pour la partie mécanique	4 Hz

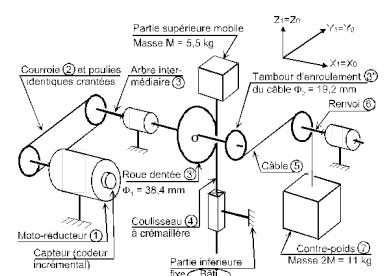
La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon  $\vec{Z}_1$ ) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.



La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure ci-contre présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006 ; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3) ;



- ▶ une roue dentée (3') de diamètre primitif  $\Phi_1 = 38,4 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;
- ▶ cette crémaillère est en liaison glissière d'axe  $\vec{z}_1$  par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse  $M = 5,5 \text{ kg}$ , les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse  $2M = 11 \text{ kg}$  tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3'') de diamètre  $\Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 19,2 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3).

Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :

- ▶ puissance nominale en sortie du réducteur :  $P_{\text{nom}} = 8,6 \text{ W}$ ;
- ▶ couple nominal en sortie du réducteur :  $C_{\text{nom}} = 1,4 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple de maintien en sortie du réducteur :  $C_{\text{maint}} = 1,5 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple maxi en sortie du réducteur :  $C_{\text{max}} = 2,7 \text{ Nm}$ ;
- ▶ vitesse nominale en sortie du réducteur :  $N_{\text{nom}} = 60 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ vitesse maxi en sortie du réducteur :  $N_{\text{max}} = 100 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur :  $J_1 = 3,70 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ capteur de position : codeur 360 incrémentés par tour monté sur le rotor du moteur;
- ▶ rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

Avec :

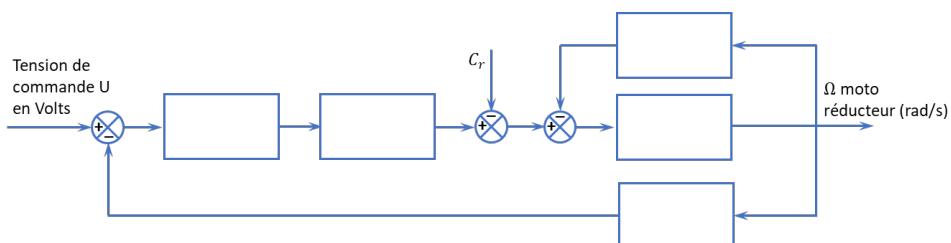
- ▶  $u(t)$  tension appliquée aux bornes de l'induit
- ▶  $i(t)$  intensité du courant traversant l'induit
- ▶  $e(t)$  force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $\omega_{\text{réd}}(t)$  vitesse de rotation à la sortie du réducteur;
- ▶  $C_{\text{réd}}(t)$  couple moteur ramené à la sortie du réducteur;
- ▶  $R = 10 \Omega$  : résistance de l'induit;
- ▶  $L = 2,2 \text{ mH}$  inductance de l'induit;
- ▶  $k_c = 2,1 \text{ N m A}^{-1}$  constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $k_e = 2,1 \text{ Vs rad}^{-1}$  constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $C_r = 0,2 \text{ N m}$  couple résistant induit par les frottements secs, ramené à la sortie du réducteur
- ▶  $f_v = 0,04 \text{ N m s rad}^{-1}$  coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur
- ▶  $J_{\text{équ}} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.

## Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

Le constructeur donne les caractéristiques électro-mécaniques exprimées à la sortie du réducteur. On rappelle les équations temporelles :  $u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_{\text{réd}}(t)$ ,  $C_{\text{réd}}(t) = k_c i(t)$ ,  $C_r - C_{\text{réd}}(t) - f_v \omega_{\text{réd}}(t) = J_{\text{équ}} \frac{d\omega_{\text{réd}}(t)}{dt}$ .

Les transformées de Laplace des fonctions  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\omega_{\text{réd}}(t)$ ,  $C_{\text{réd}}(t)$  sont respectivement  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $E(p)$ ,  $\Omega_{\text{réd}}(p)$  et  $C_{\text{réd}}(p)$ . On considère toutes les conditions initiales nulles.

**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

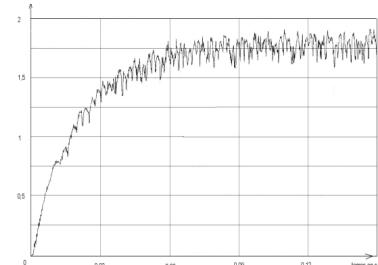
Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de  $M(p)$  suivante :  $M_1(p) = \frac{0,436}{1 + 14,5 \cdot 10^{-3}p + 3,1 \cdot 10^{-6}p^2}$ .

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension  $u(t) = 24$  V. Avec une génératrice tachymétrique dont le gain est de  $0,166$  V s rad $^{-1}$ , on a tracé la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ .

Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.



#### Remarque

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

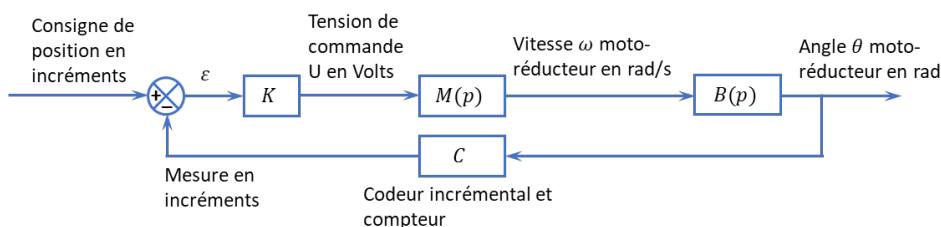
Dans la suite du problème, on néglige l'inductance  $L$  du moteur.

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

#### Respect du critère de marge de phase

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incrémentés est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



Le convertisseur-amplificateur  $K$  de gain  $k$  variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental  $C$  placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incrémentés par tour. Il est associé à un compteur – décompteur qui élabore la mesure de position en incrémentés. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.

**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

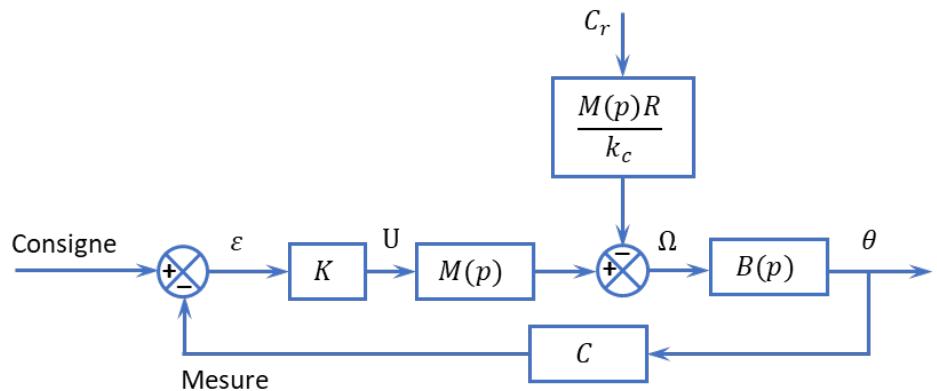
**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.

### Remarque

Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à  $-180 + 45 = -135^\circ$ .

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{conso}}$  en incrément lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

Étant donné que la perturbation  $C_r$  intervient entre deux blocs de  $M(p)$ , on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.

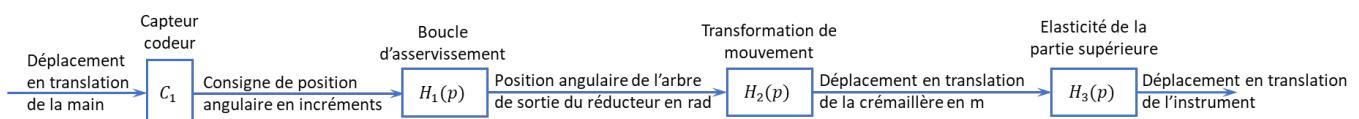


**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{perfo}}$  en incréments entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

## Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

### Modélisation par schéma-blocs



### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est :

$H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$ . On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrène avec la crémaillère a un diamètre  $\Phi_1 = 38,4$  mm.

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incrément par mètre du bloc  $C_1$ .

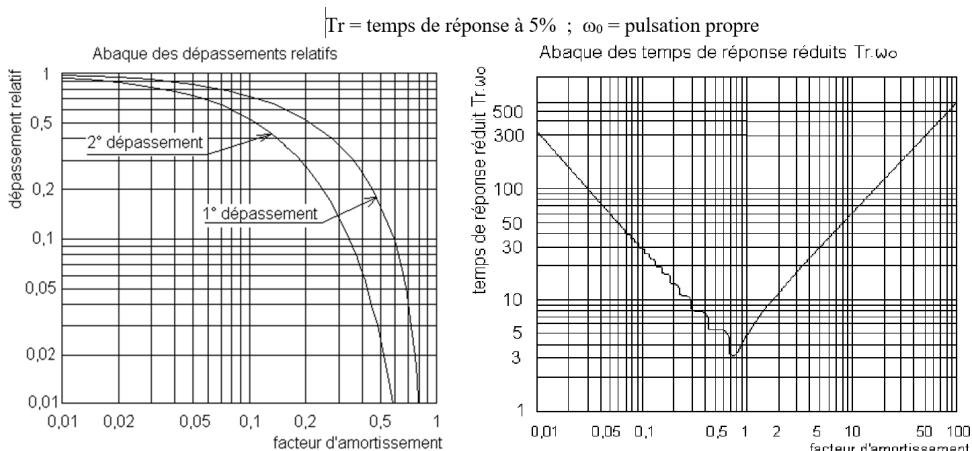
Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides :  $S_0$  représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés ; et  $S_1$  représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur  $k_0$  et un amortisseur de coefficient  $f_0$ , montés en parallèle comme le montre le schéma.

Pour identifier la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$  de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement  $d_{\text{crém}}(t) = 20 \times 10^{-3} \text{ m}$  à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement  $d_{\text{instrum}}(t)$  de l'instrument.



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassements relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3$  dB est-il satisfait ?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de  $H_3(p)$ , de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit  $m_1$  la masse du solide  $S_1$ . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté  $\vec{z}$ . L'origine  $O$  du mouvement de  $S_1$  correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit  $a_0$  l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota :  $a_0$  est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :

$$m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0.$$

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0$ ,  $f_0$ ,  $m_1$ .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6$  kg.

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3$  dB de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3\text{dB}} > \omega_{03}$ ).

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur  $c_1$  du bloc  $C_1$ . La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}. \quad \text{Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de } 100 \text{ mm s}^{-1}. \quad \text{On a tracé sur la figure 2.5 les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.}$$

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

On donne figure 2.6, la courbe d'amplitude (gain) de  $H(p)$  pour  $p = j\omega$  dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal traité par le capteur-codeur  $C_1$  de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps :  $T_1 = 0,04$  s ;  $T_2 = 0,1$  s ;  $T_3 = 0,5$  s.

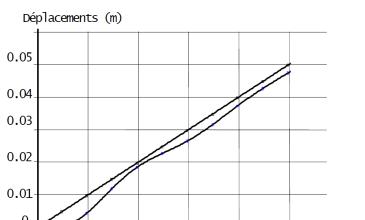


FIGURE 2.5 – Courbes de déplacement de la main

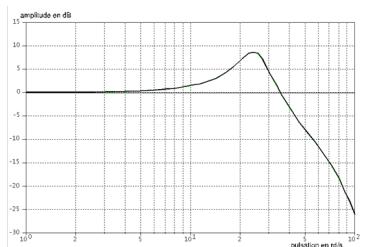


FIGURE 2.6 – Courbe de gain

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténusés de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

#### Éléments de correction

$$1. U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p); \\ E(p) = k_e \Omega_{\text{rédu}}(p); C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p); C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p).$$

$$2. M(p) = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} \cdot \frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1$$

3. .

4. .

$$5. M_2(p) = \frac{k_c}{\frac{R J_{\text{équ}}}{k_e k_c + R f_v} p + 1}$$

$$6. G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}, \text{ on a } \tau = 0,02 \text{ s.}$$

$$7. B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad,} \\ H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{k G_S}{1 + T p}.$$

8. .

9. L'écart statique est nul.

$$10. \varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}$$

$$11. H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$$

12. .

13. .

14. .

$$15. H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

16. .

$$17. \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

$$18. \Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

19. ► Écart dynamique maximal : 5 mm.

► Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.

► Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

20. .

$$21. T_2 = 0,1 \text{ s.}$$





## TD 1

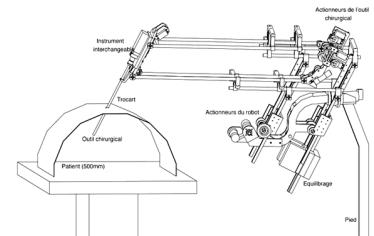
# Robot pour la chirurgie endoscopique – Corrigé

Banque PT – SIA – 2005.

## Présentation

### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

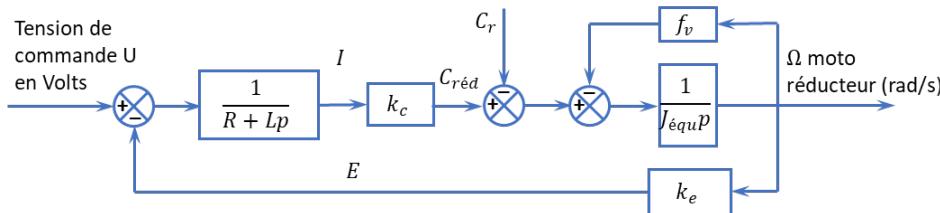
**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



#### Correction

On a :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p);$
- $E(p) = k_e \Omega_{rééd}(p);$
- $C_{rééd}(p) = k_c I(p);$
- $C_{rééd}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{rééd}(p) = J_{équ} p \Omega_{rééd}(p).$



**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{rééd}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

#### Correction

En raisonnant à partir des équations, on a :  $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{rééd}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{(J_{équ} p + f_v) \Omega_{rééd}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p)$   
 $\Rightarrow U(p) = \left( \frac{(J_{équ} p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{rééd}(p)$

Au final,  $M(p) = \frac{k_c}{(J_{équ} p + f_v) (R + Lp) + k_e k_c}$ .

En mettant l'expression sous forme canonique, on a :  $M(p) = \frac{k_c}{J_{\text{équ}}Lp^2 + (RJ_{\text{équ}} + Lf_v)p + k_e k_c + Rf_v}$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{J_{\text{équ}}L}{k_e k_c + Rf_v}p^2 + \frac{RJ_{\text{équ}} + Lf_v}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}.$$

En réalisant l'application numérique, on a :  $M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6}p^2 + 14,6 \times 10^{-3}p + 1}$ .

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

#### Correction

En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant  $L$ , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et  $M(p)$  se modélise par une fonction d'ordre 1.

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.

#### Correction

En utilisant la formulation de  $M_1(p)$  donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a :  $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$ . Au final,  $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -4607$  et  $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -70$ . Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme  $3,1 \times 10^{-6}(p + 4607)(p + 70)$ .  
Le pôle  $p_2$  est donc dominant par rapport à  $p_1$ .

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

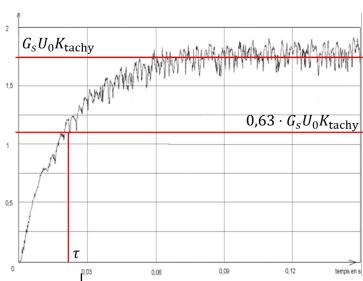
#### Correction

En utilisant l'expression établie initialement en négligeant l'inductance, on a  $M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{RJ_{\text{équ}}}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}$ . En réalisant l'application numérique,  $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015p}$  ( $G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$  et  $T = 0,015 \text{ s}$ ).

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

#### Correction

La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que  $24 \cdot G_S \cdot K_{\text{tachy}} = 1,75 \text{ V}$



Xavier Pessoles  
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

soit  $G_S = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ . En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a  $\tau = 0,02 \text{ s}$ . On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse «  $L$  négligeable ».

## Respect du critère de marge de phase

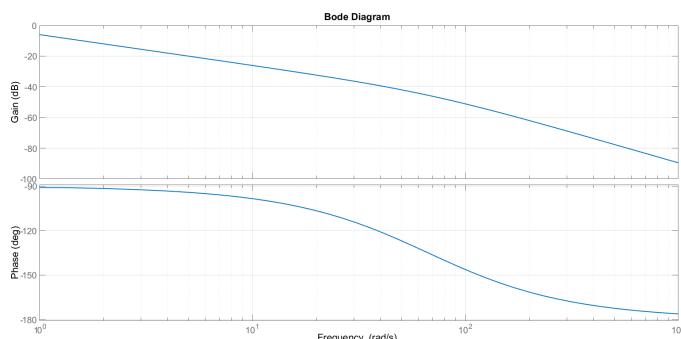
**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

### Correction

$B$  assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc  $B(p) = \frac{1}{50p}$ . Par ailleurs  $C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad}$ .

$$\text{On a donc } H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$$

**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.



### Correction

Au vu du tracé, la phase est supérieure à  $-135^\circ$  lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$  en incrémentaux lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

### Correction

#### Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

#### Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart

On a  $\epsilon(p) = \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$ .  $\text{Cons}(p) = \frac{1}{p}$ . On a alors  $\varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \epsilon(p)$   
 $= \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0$ .

**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

#### Correction

$$\begin{aligned}
 & \text{On a } \varepsilon(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left( \varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \\
 \Leftrightarrow & \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) = \text{Cons}(p) + B(p)CC_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \\
 & \text{Cons}(p) \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 & + C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 & + C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{\frac{G_S}{1 + Tp} R \frac{1}{50p} C}{k_c \left( 1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1 + Tp} \right)} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1 + Tp) 50p + CKG_S)} \\
 & = C_r \frac{G_S RC}{k_c CKG_S} = C_r \frac{R}{k_c K}.
 \end{aligned}$$

On a donc  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = C_r \frac{R}{k_c K}$  soient  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95$  incr.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

#### Correction

Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur  $k = 1$ .

## Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

### Modélisation par schéma-blocs

#### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

#### Correction

En notant  $x$  le déplacement en translation, on a  $x = \frac{38,4}{2}\Theta$ . On a donc  $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$ .

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incréments par mètre du bloc  $C_1$ .

#### Correction

Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que  $P = 1$ .

On a  $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$ .

On a donc  $c_1 = 148\,810 \text{ incr m}^{-1}$ .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

#### Correction

On souhaite maintenant que  $P_1 = \frac{1}{10}$  et  $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

#### Correction

Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de  $K = 1$ .

Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve  $\xi = 0,2$ .

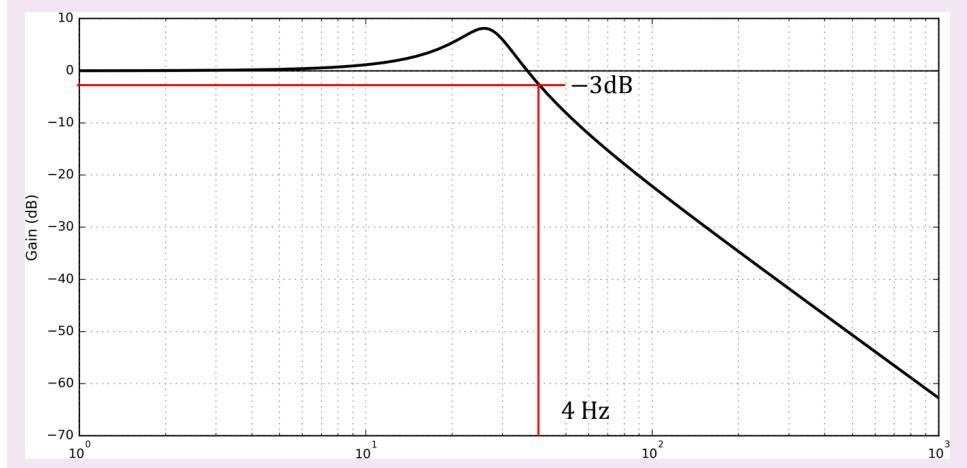
Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a  $\omega_0 Tr = 15$ . On a donc  $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait?

#### Correction

On trace le diagramme de Bode. La bande passante à -3 dB est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.



**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0, f_0, m_1$ .

#### Correction

$$\text{On a } m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0.$$

$$\text{On a donc } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6 \text{ kg}$ .

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3 \text{ dB}$  de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$ ).

#### Correction

$$\text{On a } \omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03} \text{ or } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2; \text{ donc nécessairement, } \omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}}$$

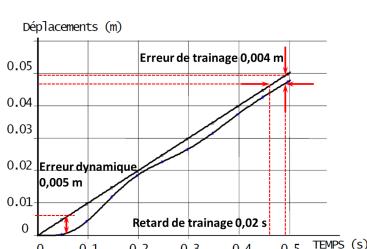
$$\Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1 \Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

#### Correction

- ▶ Écart dynamique maximal : 5 mm.
- ▶ Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.
- ▶ Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.



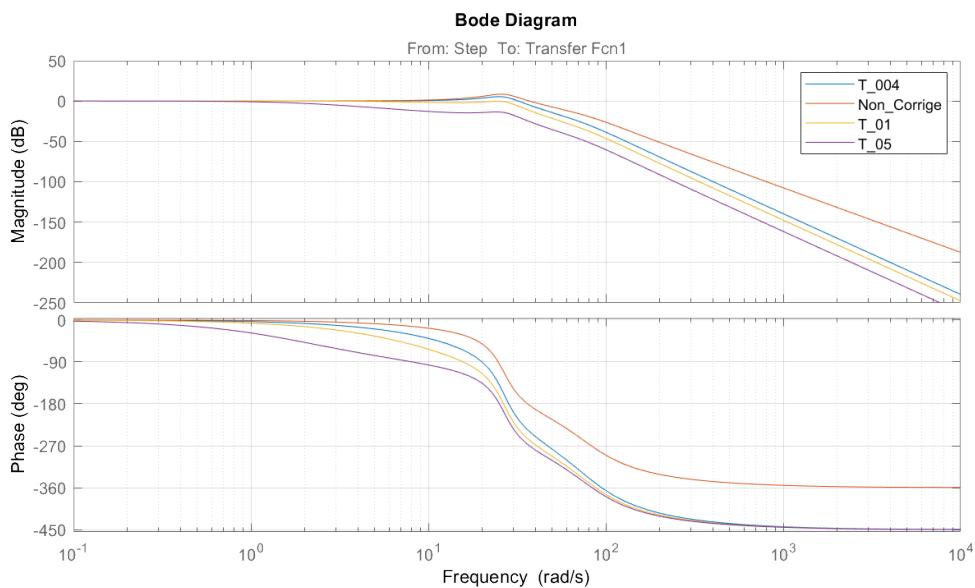
**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Correction

Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de  $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$ . À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport  $S/E$  est donc de  $10^{8/20} = 2,5$  ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténueres/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

### Amélioration des performances dynamiques

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténueres de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?



### Correction

Le filtre  $T_2 = 0,1 \text{ s}$  permet d'atténuer le gain à une pulsation de  $25 \text{ rad s}^{-1}$  sans trop atténuer le gain à des pulsations inférieures à  $6,3 \text{ rad s}^{-1}$ .