

TD 1

Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Banque PT – SIA – 2005.

Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon \vec{z}_1 .

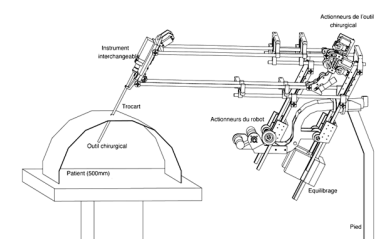
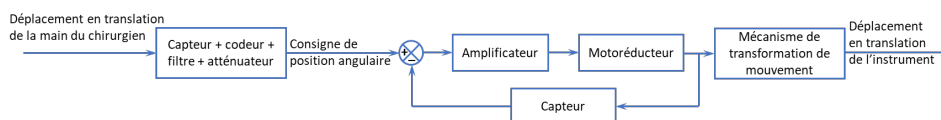


TABLE 1 – Liste partielle des exigences.

Req.	Exigence	Niveaux
1	Vitesse de translation nominale	$> 0,1 \text{ m s}^{-1}$
2	Temps t_1 pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
3	Précision – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
4	Précision – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ m s}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
5	Stabilité – Dépassement	Aucun
6	Stabilité – Marge de phase	45°
7	Rapidité – Bande passante à -3 dB pour la partie mécanique	4 Hz

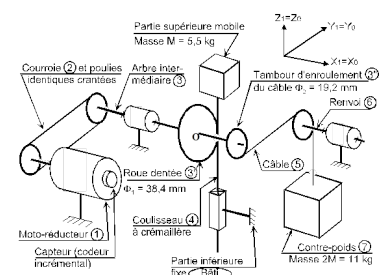
La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon \vec{z}_1) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.



La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure ci-contre présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006 ; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3) ;



- une roue dentée (3') de diamètre primitif $\Phi_1 = 38,4 \text{ mm}$ solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;
- cette crémaillère est en liaison glissière d'axe \vec{z}_1 par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse $M = 5,5 \text{ kg}$, les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse $2M = 11 \text{ kg}$ tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3'') de diamètre $\Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 19,2 \text{ mm}$ solidaire de l'arbre intermédiaire (3).

Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :

- puissance nominale en sortie du réducteur : $P_{\text{nom}} = 8,6 \text{ W}$;
- couple nominal en sortie du réducteur : $C_{\text{nom}} = 1,4 \text{ Nm}$;
- couple de maintien en sortie du réducteur : $C_{\text{maint}} = 1,5 \text{ Nm}$;
- couple maxi en sortie du réducteur : $C_{\text{max}} = 2,7 \text{ Nm}$;
- vitesse nominale en sortie du réducteur : $N_{\text{nom}} = 60 \text{ tr min}^{-1}$;
- vitesse maxi en sortie du réducteur : $N_{\text{max}} = 100 \text{ tr min}^{-1}$;
- moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur : $J_1 = 3,70 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$;
- capteur de position : codeur 360 incréments par tour monté sur le rotor du moteur;
- rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

Avec :

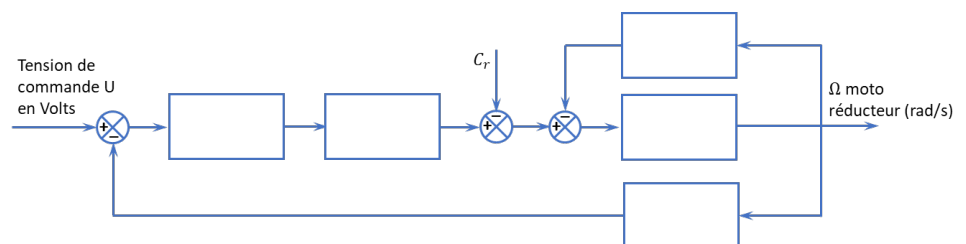
- $u(t)$ tension appliquée aux bornes de l'induit
- $i(t)$ intensité du courant traversant l'induit
- $e(t)$ force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;
- $\omega_{\text{red}}(t)$ vitesse de rotation à la sortie du réducteur;
- $C_{\text{red}}(t)$ couple moteur ramené à la sortie du réducteur;
- $R = 10 \Omega$: résistance de l'induit;
- $L = 2,2 \text{ mH}$ inductance de l'induit;
- $k_c = 2,1 \text{ Nm A}^{-1}$ constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
- $k_e = 2,1 \text{ V s rad}^{-1}$ constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
- $C_r = 0,2 \text{ Nm}$ couple résistant induit par les frottements secs, ramené à la sortie du réducteur
- $f_v = 0,04 \text{ Nm s rad}^{-1}$ coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur
- $J_{\text{equ}} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.

Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

Le constructeur donne les caractéristiques électro-mécaniques exprimées à la sortie du réducteur. On rappelle les équations temporelles : $u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$, $e(t) = k_e \omega_{\text{red}}(t)$, $C_{\text{red}}(t) = k_c i(t)$, $C_{\text{red}}(t) - C_r - f_v \omega_{\text{red}}(t) = J_{\text{equ}} \frac{d\omega_{\text{red}}(t)}{dt}$.

Les transformées de Laplace des fonctions $u(t)$, $i(t)$, $e(t)$, $\omega_{\text{red}}(t)$, $C_{\text{red}}(t)$ sont respectivement $U(p)$, $I(p)$, $E(p)$, $\Omega_{\text{red}}(p)$ et $C_{\text{red}}(p)$. On considère toutes les conditions initiales nulles.

Question 1 Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



Question 2 Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur $M(p) = \frac{\Omega_{\text{red}}(p)}{U(p)}$ lorsque $C_r(p) = 0$.

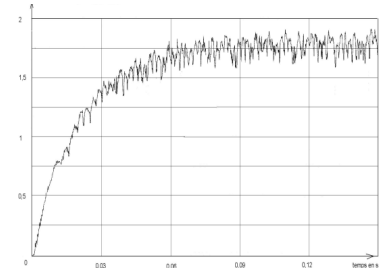
Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de $M(p)$ suivante : $M_1(p) = \frac{0,436}{1 + 14,5 \cdot 10^{-3}p + 3,1 \cdot 10^{-6}p^2}$.

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension $u(t) = 24 \text{ V}$. Avec une génératrice tachymétrique dont le gain est de $0,166 \text{ V s rad}^{-1}$, on a tracé la courbe de tension image de $\omega_{\text{réd}}(t)$.

Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

Question 3 Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance L .

Question 4 Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de $M_1(p)$ lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de L) étant rejeté.



Remarque

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

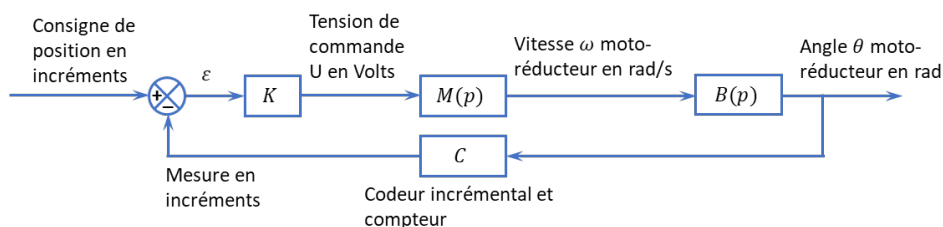
Dans la suite du problème, on néglige l'inductance L du moteur.

Question 5 Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$. Donner les valeurs numériques de G_s et de T à partir de l'expression de $M_1(p)$ et des réponses apportées précédemment.

Question 6 Déterminer les valeurs de G_s et T , à partir de la courbe de tension image de $\omega_{\text{réd}}(t)$ (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

Respect du critère de marge de phase

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incréments est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



Le convertisseur-amplificateur K de gain k variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental C placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incréments par tour. Il est associé à un compteur – décompteur qui élabore la mesure de position en incréments. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.

Question 7 Donner la fonction de transfert du bloc $B(p)$ et la valeur du coefficient du bloc C en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de k , la fonction de transfert en boucle ouverte $H_O(p)$.

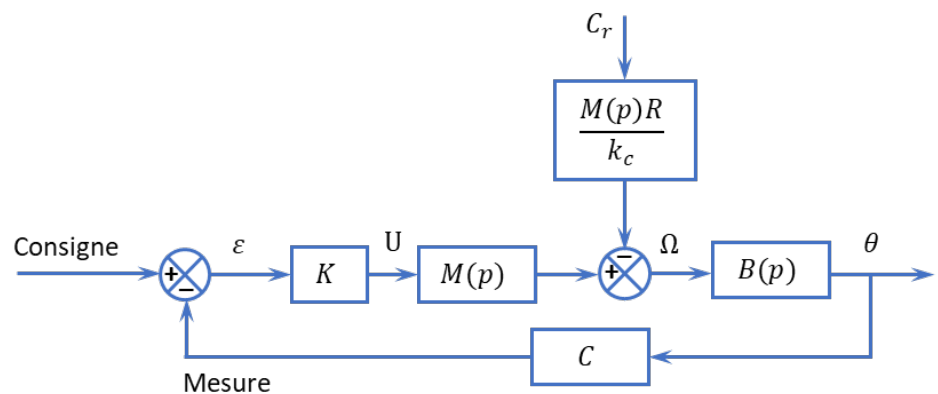
Question 8 Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour $k = 1$. Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de k ? Justifier.

Remarque

Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermée si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à $-180 + 45 = -135^\circ$.

Question 9 Calculer l'écart statique $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$ en incréments lorsque la consigne est un échelon de position : $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$.

Étant donné que la perturbation C_r intervient entre deux blocs de $M(p)$, on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.

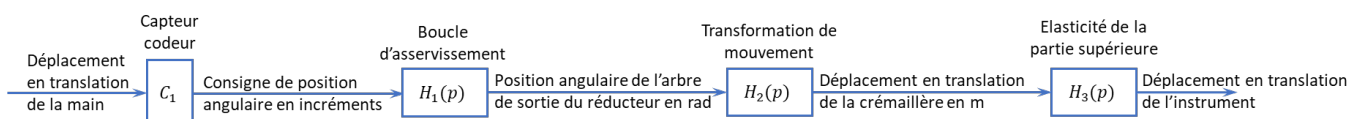


Question 10 Calculer, pour la valeur k_{45} de k établie précédemment, l'écart statique $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$ en incréments entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant $C_r u(t)$ induit par les frottements secs.

Question 11 La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incréments pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc K qui annulerait cet écart.

Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

Modélisation par schéma-blocs



Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est :

$$H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$$
 On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrène avec la crémaillère a un diamètre $\Phi_1 = 38,4 \text{ mm}$.

Question 12 Exprimer le coefficient du bloc H_2 et préciser l'unité.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

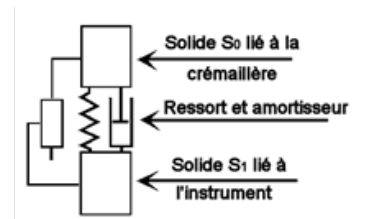
Question 13 Quelle relation doit vérifier le produit P des gains des blocs C_1 , H_1 , H_2 ? Justifier. Exprimer le coefficient c_1 en incréments par mètre du bloc C_1 .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

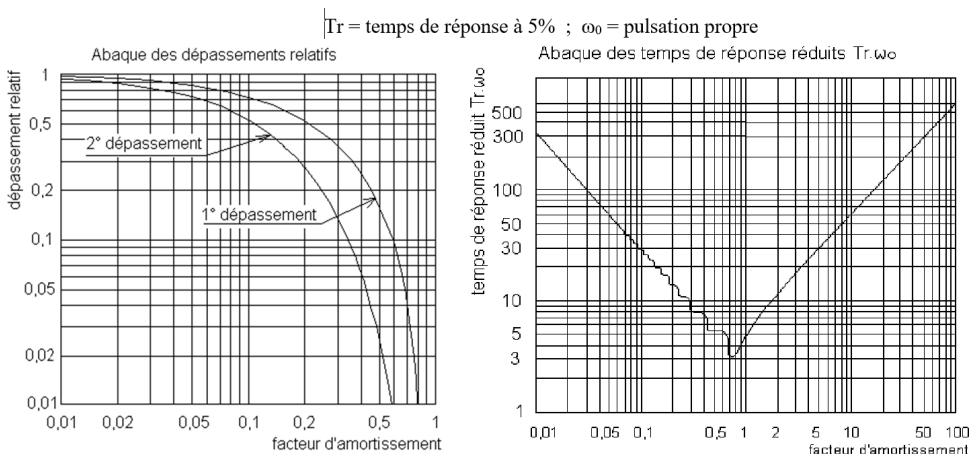
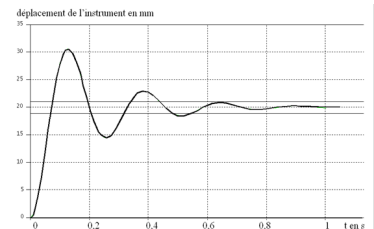
Question 14 Exprimer le nouveau coefficient c_2 du bloc C_1 ainsi que le nouveau produit P_1 .

Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides : S_0 représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés ; et S_1 représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur k_0 et un amortisseur de coefficient f_0 , montés en parallèle comme le montre le schéma.



Pour identifier la fonction de transfert $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$ de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement $d_{\text{crem}}(t) = 20 \times 10^{-3} \text{ m}$ à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement $d_{\text{instrum}}(t)$ de l'instrument.



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassements relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.

Question 15 Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert $H_3(p)$; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

Question 16 Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait ?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de $H_3(p)$, de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit m_1 la masse du solide S_1 . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté \vec{z} . L'origine O du mouvement de S_1 correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit a_0 l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota : a_0 est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :

$$m_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0.$$

Question 17 Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique : $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$, exprimer le coefficient d'amortissement ξ_3 et la pulsation propre ω_{03} du mouvement en fonction de k_0 , f_0 , m_1 .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface : $m_1 = 1,6$ kg.

Question 18 Pour la valeur de ω_{03} calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur k_0 (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à -3 dB de 4 Hz. (On notera que $\omega_{-3\text{dB}} > \omega_{03}$).

Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur c_1 du bloc C_1 . La fonction de transfert du système est :

$H(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}$. Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de 100 mm s^{-1} . On a tracé sur la figure 1 les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.

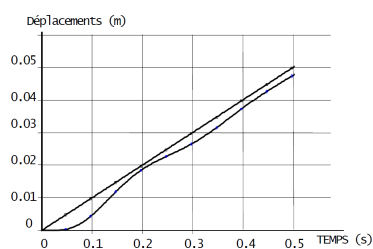


FIGURE 1 – Courbes de déplacement de la main

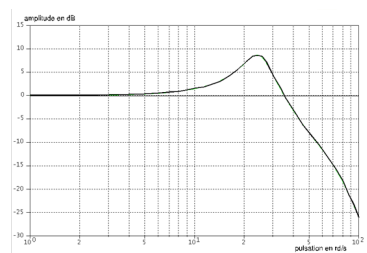


FIGURE 2 – Courbe de gain

Question 19 Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal; de l'écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

On donne figure 2, la courbe d'amplitude (gain) de $H(p)$ pour $p = j\omega$ dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

Question 20 Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal traité par le capteur-codeur C_1 de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps : $T_1 = 0,04$ s ; $T_2 = 0,1$ s ; $T_3 = 0,5$ s.

Question 21 Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténués de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

Éléments de correction

1. $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p);$
 $E(p) = k_e \Omega_{\text{réd}}(p); C_{\text{réd}}(p) =$
 $k_c I(p); C_{\text{réd}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{réd}}(p) =$
 $J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{réd}}(p).$
2. $M(p) = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} \cdot \frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1$
3. .
4. .
5. $M_2(p) = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} \cdot \frac{R J_{\text{équ}}}{k_e k_c + R f_v} p + 1$
6. $G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$, on a $\tau = 0,02 \text{ s}.$
7. $B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad},$
 $H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{k G_S}{1 + T p}.$
8. .
9. L'écart statique est nul.
10. $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr}.$
11. $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$
12. .
13. .
14. .
15. $H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$
16. .
17. $\omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1}$ et $\xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$
18. $\Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$
19. ► Écart dynamique maximal : 5 mm.
 ► Écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi : 4 mm.
 ► Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.
20. .
21. $T_2 = 0,1 \text{ s}.$

TD 1

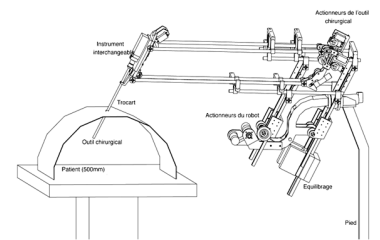
Robot pour la chirurgie endoscopique – Corrigé

Banque PT – SIA – 2005.

Présentation

Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

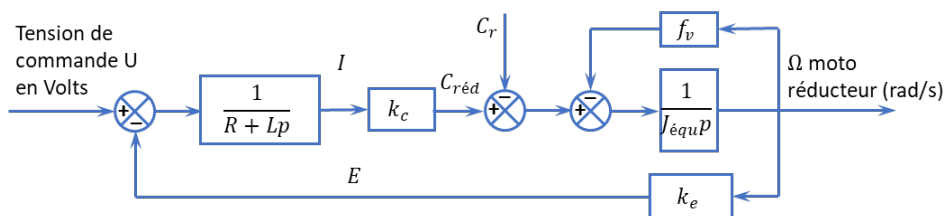
Question 1 Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



Correction

On a :

- ▶ $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$;
- ▶ $E(p) = k_e \Omega_{\text{réd}}(p)$;
- ▶ $C_{\text{réd}}(p) = k_c I(p)$;
- ▶ $C_{\text{réd}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{réd}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{réd}}(p)$.



Question 2 Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur $M(p) = \frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{U(p)}$ lorsque $C_r(p) = 0$.

Correction

En raisonnant à partir des équations, on a : $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{\text{réd}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{\text{réd}}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{réd}}(p) \Rightarrow U(p) =$

$$\frac{(J_{\text{équ}} p + f_v) \Omega_{\text{réd}}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{réd}}(p) \\ \Rightarrow U(p) = \left(\frac{(J_{\text{équ}} p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{\text{réd}}(p)$$

$$\text{Au final, } M(p) = \frac{k_c}{(J_{\text{équ}} p + f_v) (R + Lp) + k_e k_c}.$$

En mettant l'expression sous forme canonique, on a : $M(p) = \frac{k_c}{J_{\text{équ}} L p^2 + (R J_{\text{équ}} + L f_v) p + k_e k_c + R f_v}$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + R f_v}}{\frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1}$$

En réalisant l'application numérique, on a : $M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6} p^2 + 14,6 \times 10^{-3} p + 1}$.

Question 3 Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance L .

Correction

En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant L , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et $M(p)$ se modélise par une fonction d'ordre 1.

Question 4 Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de $M_1(p)$ lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de L) étant rejeté.

Correction

En utilisant la formulation de $M_1(p)$ donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a : $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$. Au final, $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -4607$ et $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -70$. Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme $3,1 \times 10^{-6} (p + 4607)(p + 70)$. Le pôle p_2 est donc dominant par rapport à p_1 .

Question 5 Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + T p}$. Donner les valeurs numériques de G_s et de T à partir de l'expression de $M_1(p)$ et des réponses apportées précédemment.

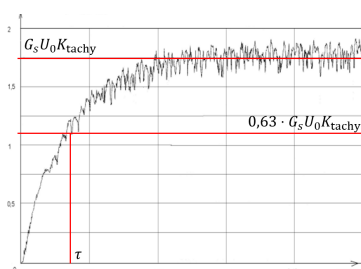
Correction

En utilisant l'expression établie initialement en en négligeant l'inductance, on a $M_2(p) = \frac{k_c}{\frac{R J_{\text{équ}}}{k_e k_c + R f_v} p + 1}$. En réalisant l'application numérique, $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015 p}$ ($G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ et $T = 0,015 \text{ s}$).

Question 6 Déterminer les valeurs de G_s et T , à partir de la courbe de tension image de $\omega_{\text{réd}}(t)$ (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

Correction

La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que $24 \cdot G_s \cdot K_{\text{tachy}} = 1,75 \text{ V}$



soit $G_S = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$. En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a $\tau = 0,02 \text{ s}$. On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse « L négligeable ».

Respect du critère de marge de phase

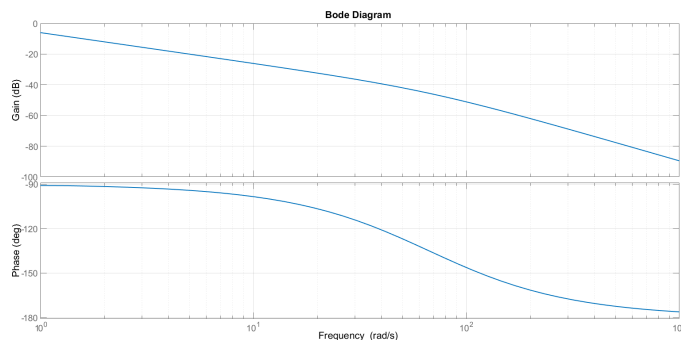
Question 7 Donner la fonction de transfert du bloc $B(p)$ et la valeur du coefficient du bloc C en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de k , la fonction de transfert en boucle ouverte $H_O(p)$.

Correction

B assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc $B(p) = \frac{1}{50p}$. Par ailleurs $C = \frac{360}{2\pi}$ incr/rad.

On a donc $H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}$.

Question 8 Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour $k = 1$. Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de k ? Justifier.



Correction

Au vu du tracé, la phase est supérieure à -135° lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

Question 9 Calculer l'écart statique $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$ en incréments lorsque la consigne est un échelon de position : $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$.

Correction

Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart

On a $\varepsilon(p) = \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$. $\text{Cons}(p) = \frac{1}{p}$. On a alors $\varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p\varepsilon(p)$
 $= \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0$.

Question 10 Calculer, pour la valeur k_{45} de k établie précédemment, l'écart statique $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$ en incréments entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant $C_r u(t)$ induit par les frottements secs.

Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \varepsilon(p) &= \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left(\varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) &= \text{Cons}(p) + B(p)CC_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \\
 &= \frac{\text{Cons}(p)}{1 + B(p)CKM(p)} + C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} + C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{\frac{G_S}{1 + Tp} R \frac{1}{50p} C}{k_c \left(1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1 + Tp} \right)} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1 + Tp) 50p + CKG_S)} \\
 &= C_r \frac{G_S RC}{k_c CKG_S} = C_r \frac{R}{k_c K} \\
 \text{On a donc } \varepsilon_{\text{pert}\infty} &= C_r \frac{R}{k_c K} \text{ soient } \varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}
 \end{aligned}$$

Question 11 La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incréments pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc K qui annulerait cet écart.

Correction

Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur $k = 1$.

Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

Modélisation par schéma-blocs

Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Question 12 Exprimer le coefficient du bloc H_2 et préciser l'unité.

Correction

En notant x le déplacement en translation, on a $x = \frac{38,4}{2} \Theta$. On a donc $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

Question 13 Quelle relation doit vérifier le produit P des gains des blocs C_1, H_1, H_2 ? Justifier. Exprimer le coefficient c_1 en incréments par mètre du bloc C_1 .

Correction

Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que $P = 1$.

On a $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$.

On a donc $c_1 = 148\,810 \text{ incr m}^{-1}$.

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

Question 14 Exprimer le nouveau coefficient c_2 du bloc C_1 ainsi que le nouveau produit P_1 .

Correction

On souhaite maintenant que $P_1 = \frac{1}{10}$ et $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$.

Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

Question 15 Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert $H_3(p)$; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

Correction

Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de $K = 1$.

Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve $\xi = 0,2$.

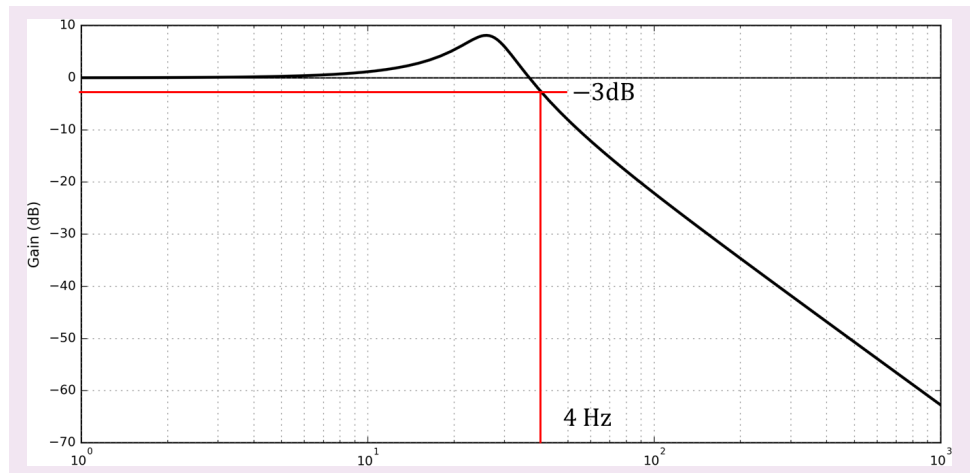
Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a $\omega_0 Tr = 15$. On a donc $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

Question 16 Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait?

Correction

On trace le diagramme de Bode. La bande passante à -3 dB est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.



Question 17 Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique : $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$, exprimer le coefficient d'amortissement ξ_3 et la pulsation propre ω_{03} du mouvement en fonction de k_0 , f_0 , m_1 .

Correction

$$\text{On a } m_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0.$$

$$\text{On a donc } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface : $m_1 = 1,6 \text{ kg}$.

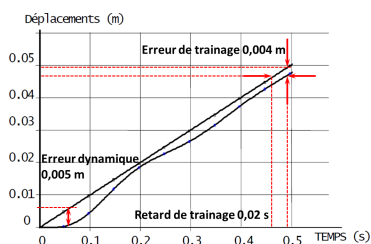
Question 18 Pour la valeur de ω_{03} calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur k_0 (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à -3 dB de 4 Hz . (On notera que $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$).

Correction

$$\text{On a } \omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03} \text{ or } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2; \text{ donc nécessairement, } \omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} \\ \Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1 \Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

Question 19 Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal; de l'écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?



Correction

- Écart dynamique maximal : 5 mm.
- Écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi : 4 mm.
- Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

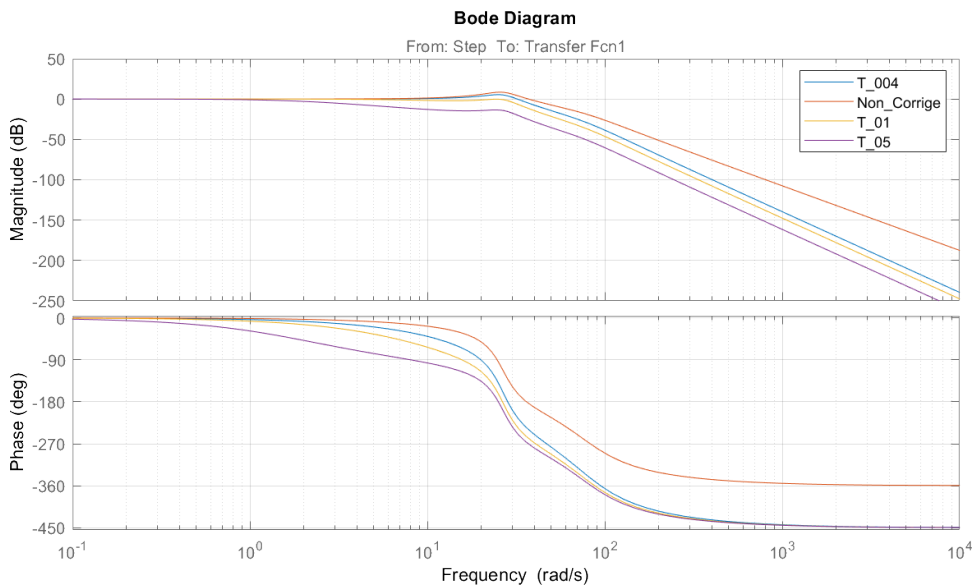
Question 20 Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

Correction

Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$. À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport S/E est donc de $10^{8/20} = 2,5$ ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténuées/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

Amélioration des performances dynamiques

Question 21 Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténués de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?



Correction

Le filtre $T_2 = 0,1 \text{ s}$ permet d'atténuer le gain à une pulsation de 25 rad s^{-1} sans trop atténuer le gain à des pulsation inférieures à $6,3 \text{ rad s}^{-1}$.