Application 1
Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

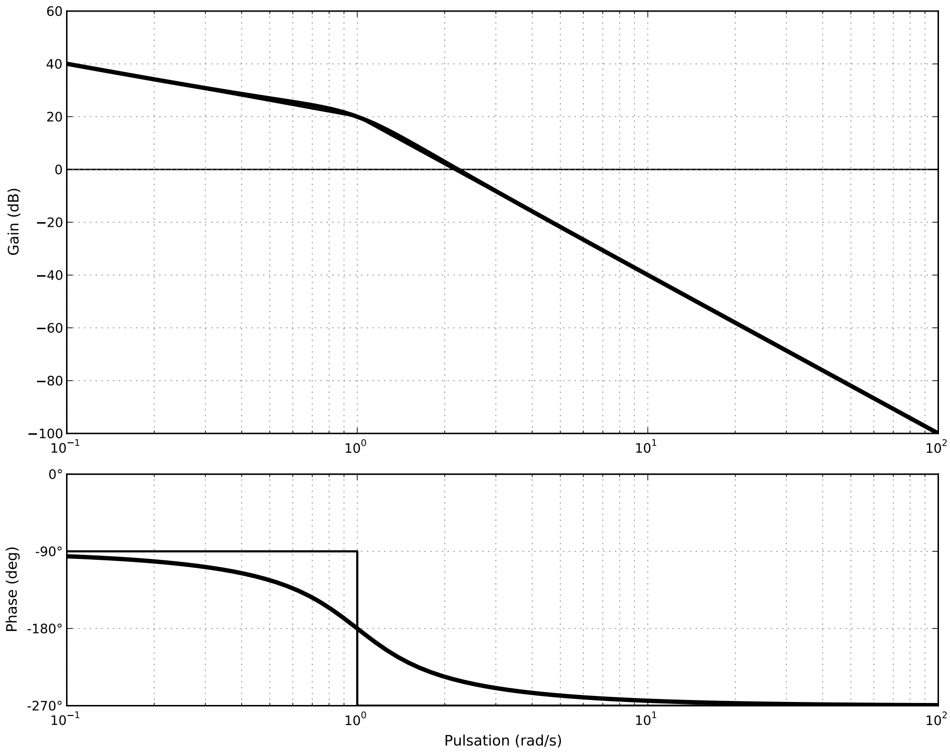
D'après ressources P. Dupas.

C1-02

C2-04

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{10}{p\,(1+p+p^2)}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de 45 ° et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45°. Vérifier la marge de gain.

Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

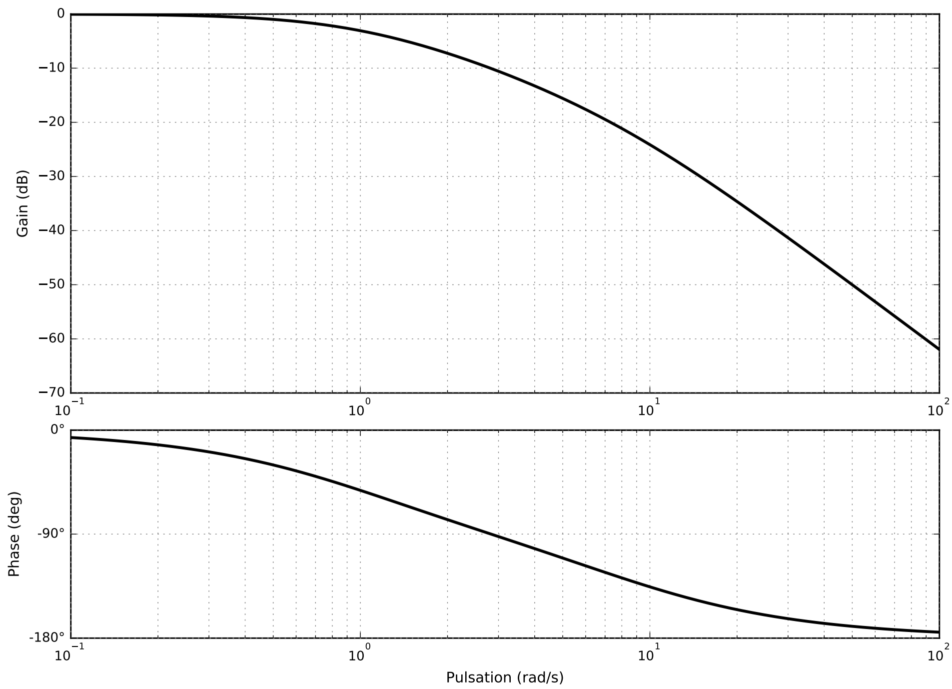
Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{1}{(p+1)\left(\dfrac{p}{8}+1\right)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de 45°en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme $C(p) = K_p \dfrac{1+\tau p}{\tau p}$.

Question 5 Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



Question 6 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45°.

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Application 2
Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

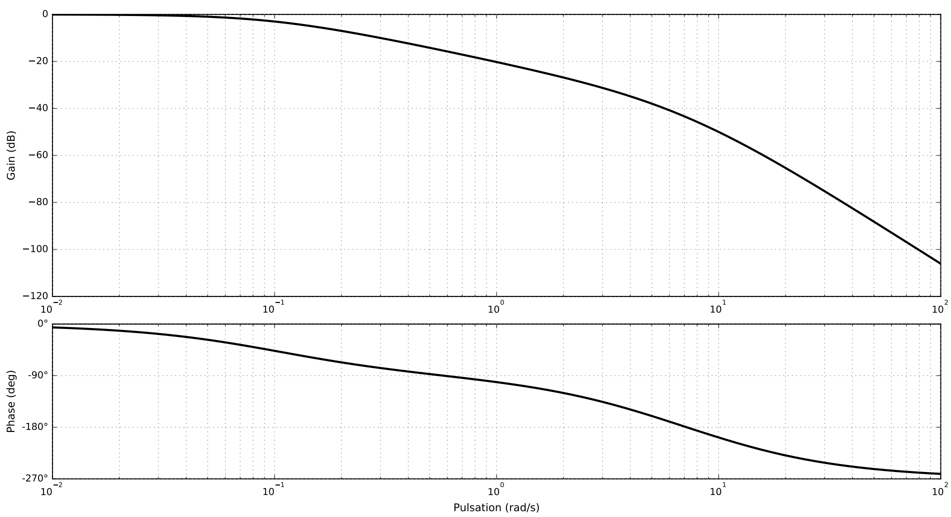
C1-02

C2-04

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

Question 1 Déterminer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

Question 2 Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



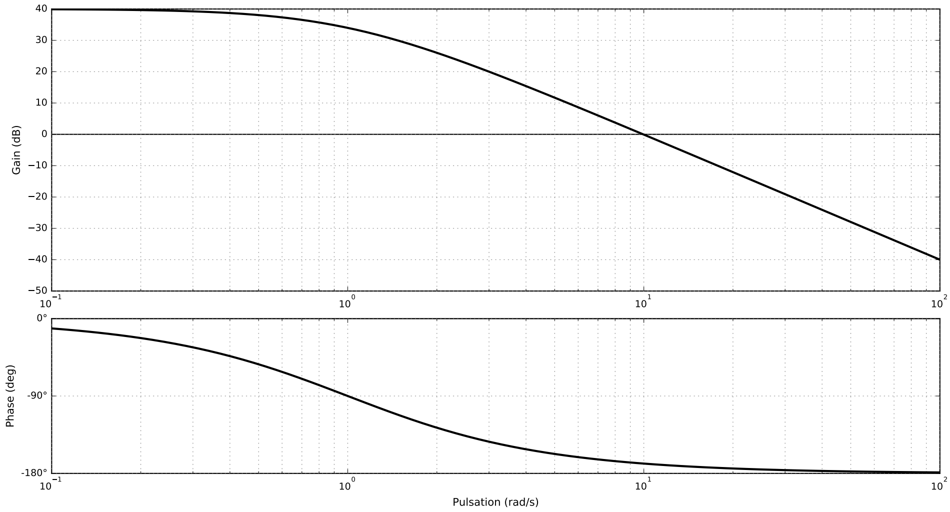
Question 3 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45°. Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Question 4 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

Correcteur à avance de phase

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{100}{(p+1)^2}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corrige ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme $C(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$.

Question 5 Justifier le tracer du diagramme de Bode de $G(p)$.



Question 6 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45°.

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Application 3
Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

C1-02

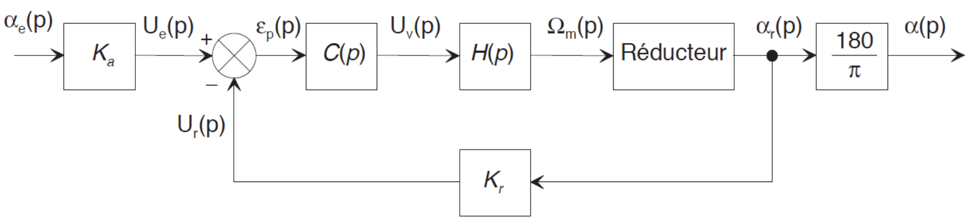
C2-04

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p} = \dfrac{30}{1+5\cdot 10^{-3}p}$;
- $K_r = 4\,\mathrm{V\,rad^{-1}}$: gain du capteur de position ;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degrés ;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c ;
- $N = 200$: rapport de transmission.

Objectif

- On souhaite une marge de phase de 45°.
- On souhaite un écart de traînage inférieur à 1°pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$.



Question 1 Déterminer la fonctionde transfert $R(p) = \dfrac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$ du réducteur.

Question 2 Déterminer le gain K_a de l'adaptateur.

Question 3 Déterminer, en fonction notamment de K'_m et t'_m, la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté K_{BO}.

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 4 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Question 5 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Question 6 Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$.

Question 7 Déterminer l'expression de $\alpha_e(t)$ correspondant à une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$. En déduire $\alpha_e(p)$.

Question 8 La valeur de K_{BO} définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

Colle 1
Asservissement en température d'un four – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

C1-02

C2-04

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension v(t). Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + 2000\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0,02v(t)$.

Question 1 Calculer la fonction de transfert $G(p)$ du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

On décide de réguler la température $\theta(t)$ dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension $u(t)$. Le capteur est régi par l'équation différentielle : $u(t) + 2\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = 5 \cdot 10^{-3}\theta(t)$. On introduit également un gain K dans la chaîne directe.

Question 2 Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rappeler les conditions de stabilité d'un système.

On donne t_m le temps de montée du système en BF : $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ avec ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 3 On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$. Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour $K = 11,3$.

Question 4 Pour conserver une marge de phase égale à 60° on introduit une correcteur à avance de phase sous la forme $C(p) = K_a\dfrac{1+aTp}{1+Tp}$. Déterminer les constantes du correcteur.

Colle 2
Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire : $G(p) = \dfrac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

C1-02

C2-04

- marge de phase : $\Delta\varphi \geq 45°$;
- dépassement $D\% < 10\%$;
- écart statique $\varepsilon_S < 0,08$;
- temps de montée $t_m < 8\,\text{s}$.

Question 1 Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0,08$?

On note t_m le temps de montée du système en BF et $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8\,\text{s}$?

Question 3 Quel choix faire pour la valeur de K ?

Question 4 Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.

Expérimentalement, on constate que $z_{\text{BF}} \simeq \dfrac{\Delta\varphi^o}{100}$ et on rappelle que $D\% = e^{\frac{-\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}}$.

Question 5 Que vaut alors le dépassement D% ?

Question 6 À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

Avec la valeur de $K = 16,1$, on introduit, en amont de $G(p)$, dans la chaîne directe, un correcteur $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

Question 7 Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de 60°.

Colle 3
Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert est : $G(p) = \dfrac{K}{(p+1)^3}$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite une marge de phase supérieure à 45°.

C1-02

C2-04

Question 1 Définir la condition de stabilité théorique du système ?

On note t_m le temps de montée du système en BF avec $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{co}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 Calculer la valeur K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

Question 3 Calculer pour cette valeur de K la marge de phase.

Question 4 En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ qu'il faut introduire dans la chaîne directe.

Colle 4
Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

Correction proportionnelle

C1-02

C2-04

Soit $F(p)$ la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de BODE de $F(p)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.

Question 1 Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.

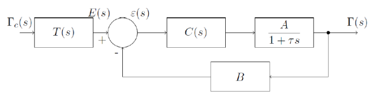
On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note K_p le gain de ce correcteur.

Question 2 Déterminer la valeur de K_p permettant d'obtenir une marge de gain $M_G = 12\,\text{dB}$.

Question 3 Déterminer la nouvelle marge de phase du système.

Question 4 En le justifiant, déterminer l'erreur de position du système corrigé pour une consigne indicielle.

Correction intégrale – Asservissement en accélération



On désire contrôler l'accélération $\gamma(t)$ d'un plateau. Pour cela, un capteur d'accélération, fixé sur le plateau et de sensibilité B, est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert : $H(s) = \dfrac{A}{1+\tau s}$. On modélise le correcteur par la fonction de transfert $C(s)$.

On a $A = 100\,\text{g}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\text{V}^{-1}$, $\tau = 0{,}2\,\text{s}$ et $B = 10^{-2}\,\text{g}^{-1}\text{Vm}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Question 5 Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur $T(s)$ qui traduira l'accélération de consigne $\Gamma_c(s)$ en tension $E(s)$.

On applique à l'entrée du système une consigne d'accélération $\gamma_c = 20g$.

Système asservi sans correction : $C(s) = 1$.

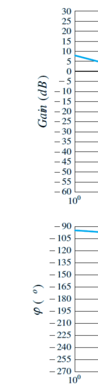
Question 6 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

Question 7 Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

Question 8 Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent.

Question 9 Donner l'allure de la réponse de ce système en précisant les points caractéristiques.

Système asservi avec correction intégrale : $C(s)=\dfrac{1}{s}$.



Question 10 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

Question 11 Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

Question 12 Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent. Pouvait-on prévoir ce résultat.

Question 13 Conclure en comparant le comportement du système avec et sans correction.

TD 1
Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

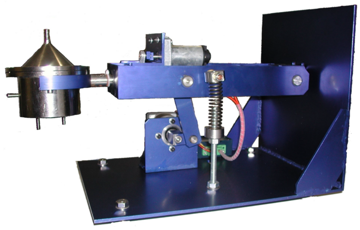
C1-02

C2-04

Objectif

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

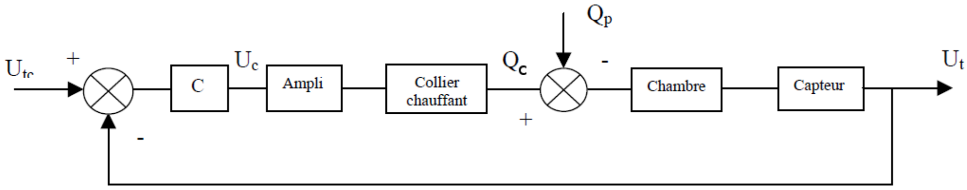
- temps de montée en température : 3 min maxi ;
- précision de la température : ±0,5 ° pour un échelon de 20 °.



Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne ;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que FTBO(p) $= \dfrac{U_t(p)}{U_c(p)} = \dfrac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$.

Analyse des performances

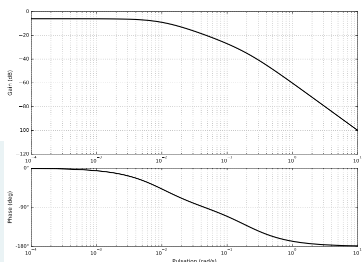
On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

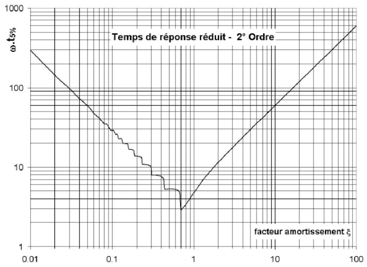
Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.



Mise en œuvre de corrections P et PI



On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.

Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \dfrac{K}{T_i p}(1 + T_i p)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

TD 2
Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

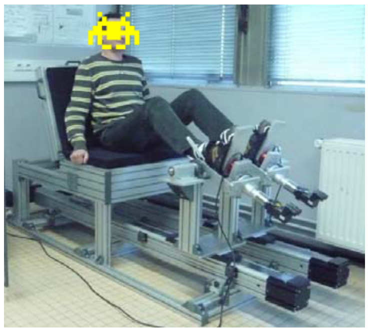
CCP PSI 2013.

Mise en situation

C1-02

C2-04

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

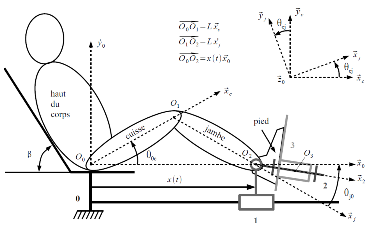


Objectif

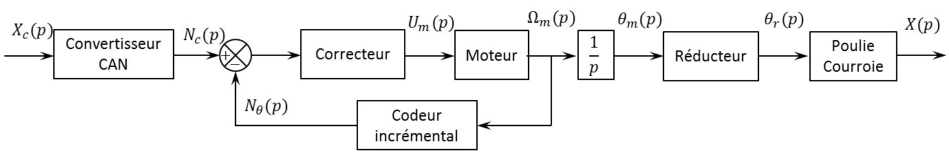
L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

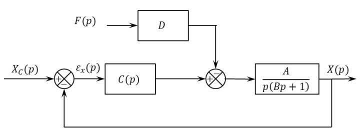
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0{,}2$ s
Pulsation au gain unité	50 rad s^{-1}



La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Correction proportionnelle



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D, avec $A = 6700$ m/V, $B = 0{,}01$ s et $D = 6$ V/N.

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 1 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.

Question 2 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 3 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i\left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$

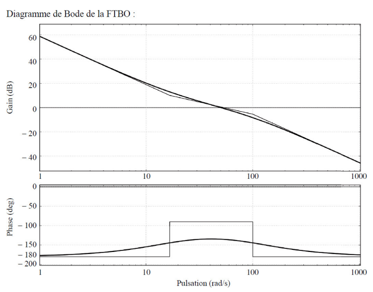
Question 4 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.

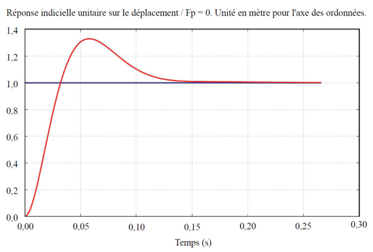
Question 5 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 6 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\text{FTBO}(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 7 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 8 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.





On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 9 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

TD 3
Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Sujet

CCP – PSI 2015.

Présentation

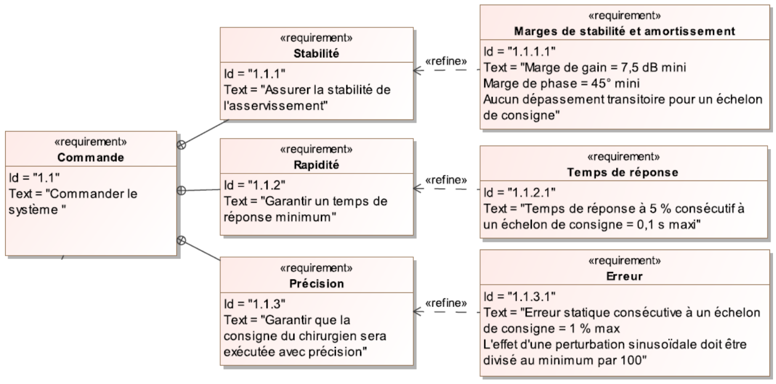
Réalisation de la commande de l'esclave

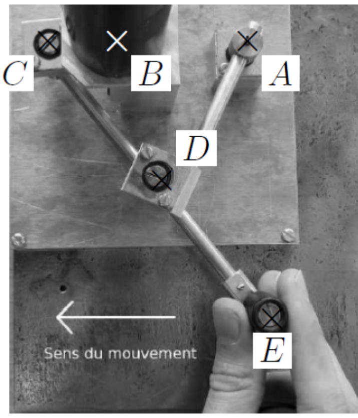
C1-02

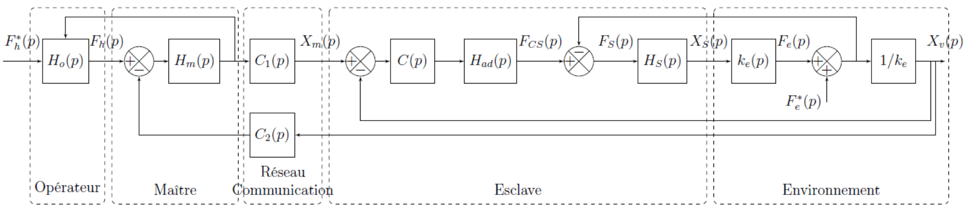
C2-04

Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).





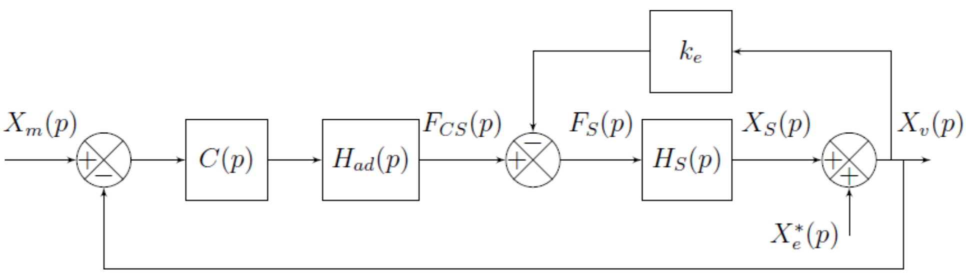


Modélisation et étude des performances du système sans correction

Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

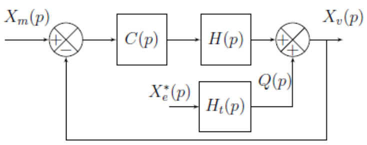
La modélisation permettant de relier la consigne $x_m(t)$ issue du dispositif maître au déplacement $x_v(t)$ de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{\text{ad}}(p) = k_a = 1\,\text{Nm}^{-1}$ permet d'adapter la consigne position en consigne force ;

- $H_S(p) = \dfrac{X_S(p)}{F_S(p)} = \dfrac{k_S}{p\,(m_S p + b_S)}$ avec $k_S = 1\,\mathrm{m\,N^{-1}}$, $m_S = 0{,}152\,\mathrm{kg}$ et $b_S = 1{,}426\,\mathrm{Nsm^{-1}}$;
- $k_e = 200\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Question 1 Simplifier le schéma-blocs précédant pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e, k_a et $H_S(p)$.

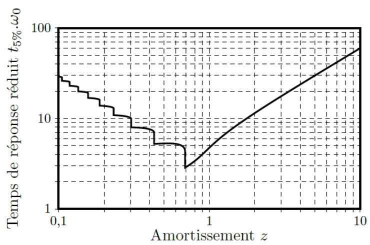


Pour la suite du problème, on prendra : $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

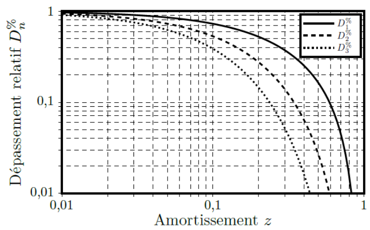
Vérification des exigences sans correction : $C(p) = 1$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_e^*(p) = 0$) : $F_{\mathrm{BF1}}(p) = \dfrac{X_v(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z). Faire l'application numérique.

Question 3 En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$

> **Objectif**
>
> Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

Question 4 Les résultats d'une simulation pour un gain $K_i = 100$ sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

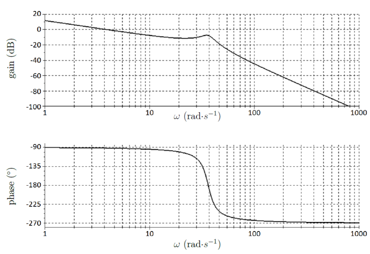
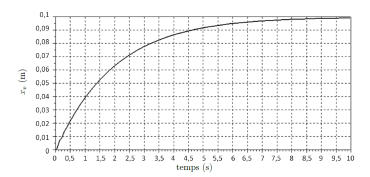


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K_i = 100$



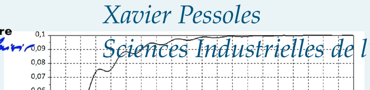
Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et $K_i = 100$

Question 5 Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

Question 6 Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain K_i. Déterminer la valeur $K_{i\mathrm{max}}$ du coefficient K_i qui permet de respecter les marges de stabilité.

Question 7 En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».

Question 8 Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction $F_{\mathrm{BF2}}(j\omega) = \dfrac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$ pour $K_i = K_{i\mathrm{max}}$. Quelle sera l'atténuation minimale $|F_{\mathrm{BF2}}(j\omega)|_{\mathrm{min}}$ de la perturbation x_e^* (en %) sur l'intervalle $[1{,}25\,\mathrm{rad\,s^{-1}} ; 12{,}5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}]$. Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

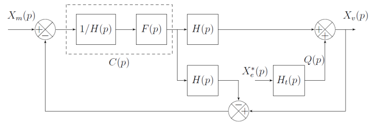


Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

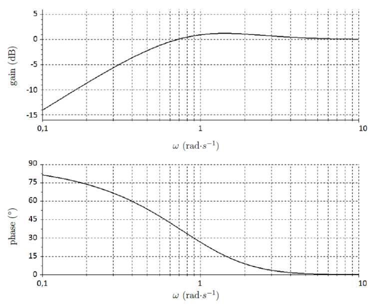


Avec $F(p)$ la fonction de transfert d'un filtre de la forme $F(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

La grandeur de sortie $X_v(p)$ peut s'exprimer par l'équation : $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$ avec $A(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et $B(p) = \dfrac{Tp\,(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Question 9 Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

Question 10 Le diagramme de Bode de $B(j\omega)$ pour $T = 1$ s est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle $[1{,}25\,\mathrm{rad\,s^{-1}} ; 12{,}5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}]$. Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



TD 4
Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

C1-02

C2-04

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	**Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45°$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1\,rd/s$

Modélisation du moteur à courant continu

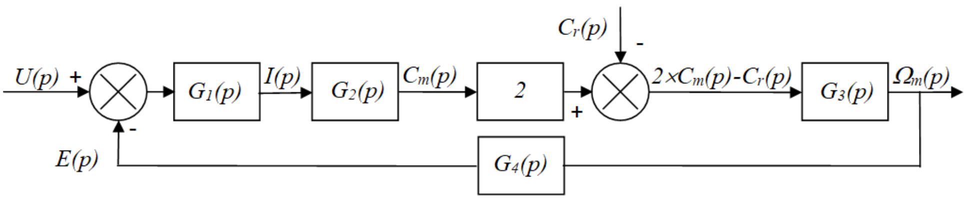
Hypothèses et données :

- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0{,}59\,\text{mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0{,}0386\,\Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6\,\text{N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800\,\text{kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5{,}67\,\text{Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_T = 5{,}77\,\text{Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} + f\omega_m(t)$;
- loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

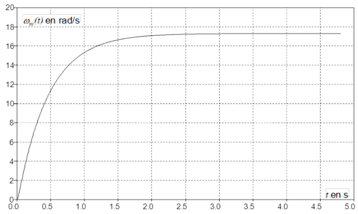


Figure 1.1 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

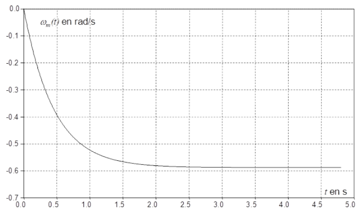
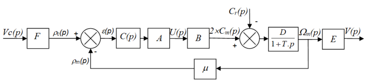


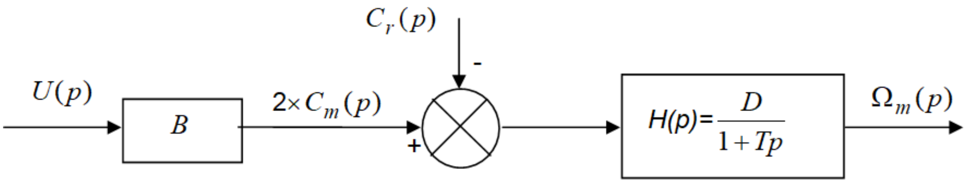
Figure 1.2 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.



1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

Question 3 Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



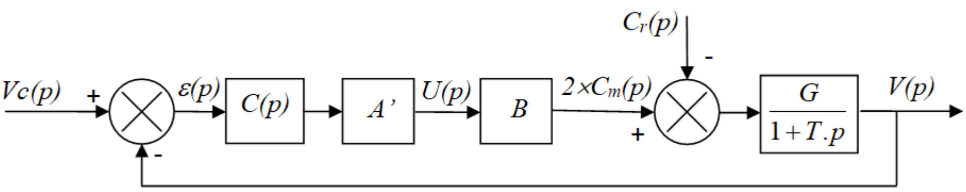
Question 4 Donnez la valeur numérique des trois constantes B, D et T.

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F.
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0{,}716$ V s/rad transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0{,}1$ m (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminez l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G. Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0{,}47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$C(p) = C_0 = 1$.

Question 6 Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculez en fonction de C_0, A', B, G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculez en fonction de C_0, A', B, G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{Nm}$ qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460\,\text{Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \dfrac{C_i}{p}$.

Question 12 Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO(p). Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracez le diagramme asymptotique de Bode de FTBO(p). Tracez également l'allure des courbes.

Question 14 Quelles valeurs numériques de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Ces valeurs numériques de C_i permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.

Question 16 On suppose Cr(p)=0. Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculez numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{N m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Question 18 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifiez.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculez l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p)\dfrac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\left(1+Tp\right)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de $-135°$?

Question 22 Tracez en fonction de a, τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec a>1. Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum $\varphi_{\max}$ ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculez numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

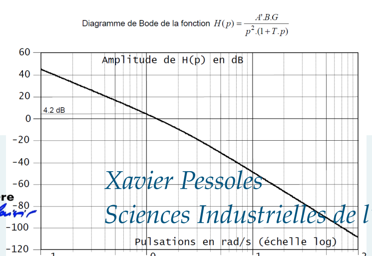
Question 24 Donnez l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que $\varphi_{\max}$ soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculez numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifiez.



Éléments de correction

1. $G_1(p) = \dfrac{1}{R+Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \dfrac{1}{f+Jp}$, $G_1(p) = k_E$.
2. $F_1(p) = \dfrac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \dfrac{G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.
3. $F_1(p) = \dfrac{0,1725}{1+0,47p}$ et $F_2(p) = \dfrac{5,8\cdot 10^{-4}}{1+0,47p}$.
4. $B = 297{,}4\,\mathrm{N\,m\,V^{-1}}$, $D = 5,8.10^{-4}\,\mathrm{rad.s^{-1}Nm}$ et $T = 0{,}47\,\mathrm{s}$.
5. $F = \dfrac{\mu}{E} = 7{,}16\,\mathrm{V\,s\,m^{-1}}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \dfrac{V_0}{1+C_0A'BG} = 4{,}286\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
8. $\varepsilon''_S = -0{,}156\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ – à vérifier.
9. $\varepsilon''_S = 0{,}160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
10. $\varepsilon'_S = 4{,}13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\varepsilon'_S = 4{,}46\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
11. C_0 infini
12. $\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{1,8}{p\,(1+0,47p)}$
13.
14. $\omega_{0\,\mathrm{dB}} \leq 2{,}13\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $C_i \leq 1,67$.
15.
16. FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
17. Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
18. CDCF OK.
19. $\varepsilon_v = \dfrac{1}{C_iA'BG}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
22.
23. $a = 32,16$
24. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25. $\tau = 0{,}176\,\mathrm{s}$
26. $K = 0,109$
27.
28.