

Mouvement RT ★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

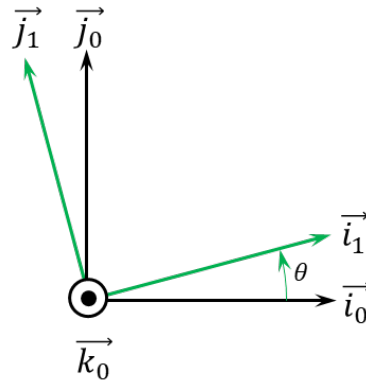
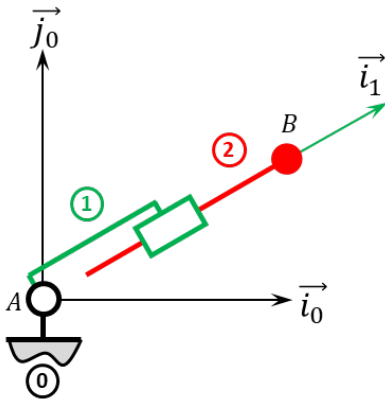
Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 et $\overrightarrow{AG_1} = L_1\overrightarrow{i_1}$, on note m_1 la masse de 1 et

$$I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} ;$$

- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2 et $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} .$$



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en A.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Question 3 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 3.

Mouvement RT ★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 4 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en A.

$$\text{On a } \{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \end{array} \right\}_A .$$

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_d(1/0)} &= m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} = m_1 \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AG_1}]_{R_0} = m_1 \frac{d^2}{dt^2} [L_1 \overrightarrow{i_1}]_{R_0} = m_1 L_1 \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \overrightarrow{j_1}]_{R_0} \\ &= m_1 L_1 (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1}) . \end{aligned}$$

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1 + 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Question 6 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

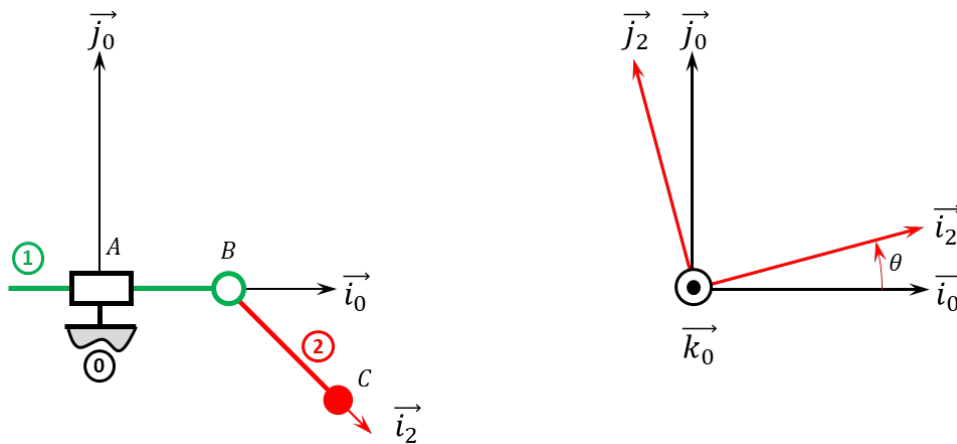
Mouvement TR ★

C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = R\vec{i}_2$ avec $R = 30$ mm. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 7 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Question 8 Déterminer $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0$

Question 9 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 9.

Mouvement TR ★

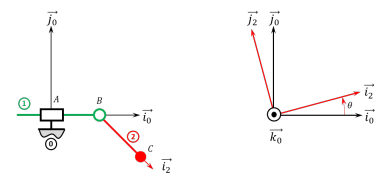
C2-08

C2-09

Question 10 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Expression de la résultante dynamique $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = m_2 \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0}$
 $\frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\vec{i}_0 + R \frac{d^2}{dt^2} [\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\vec{i}_0 + R \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \vec{j}_2]_{\mathcal{R}_0}$
 $= \ddot{\lambda}(t)\vec{i}_0 + R (\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2)$.

Méthode 1 : Calcul en $G_2 = C$ puis déplacement du torseur dynamique



- Calcul du moment cinétique en G_2 : $G_2 = C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = I_C(2) \dot{\theta} \vec{k}_0 = C_1 \dot{\theta} \vec{k}_1$.
- Calcul du moment dynamique en G_2 : $G_2 = C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1$.
- Calcul du moment dynamique en B : $\overrightarrow{\delta(B, 2/0)} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_d(2/0)} = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R \vec{i}_2 m_2 \wedge \left(\ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \left(\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2 \right) \right) = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R m_2 \left(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \vec{k}_0 + R \ddot{\theta} \vec{k}_2 \right)$.

Au final, on a donc $\{\mathcal{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \left(\ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \left(\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2 \right) \right) \\ C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R m_2 \left(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \vec{k}_0 + R \ddot{\theta} \vec{k}_2 \right) \end{array} \right\}_B$.

Question 11 Déterminer $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0$

On a $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} = \overrightarrow{R_d(1/0)} + \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_1 \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + m_2 \left(\ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \left(\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2 \right) \right)$.

On projette alors sur \vec{i}_0 , $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0 = m_1 \ddot{\lambda}(t) + m_2 \left(\ddot{\lambda}(t) - R \left(\ddot{\theta} \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \right)$.

Question 12 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

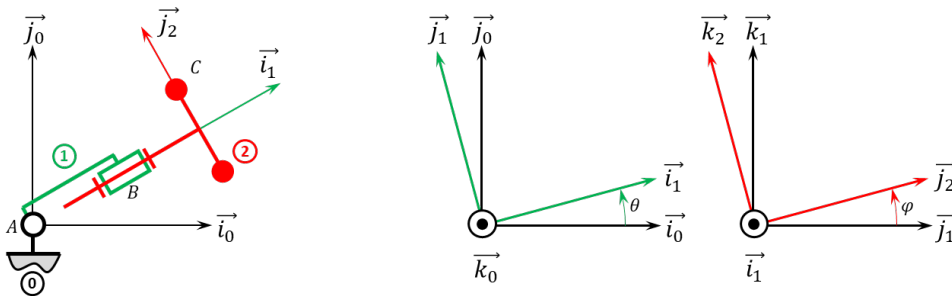
Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\vec{i}_2 + r\vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$ et $r = 10 \text{ mm}$. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- G_2 désigne le centre d'inertie de **2** tel que $\overrightarrow{BG_2} = \ell\vec{i}_2$, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 13 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Question 14 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Question 15 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 15.

Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09

Question 16 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Par définition, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B, 1/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$

$$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \Gamma(G_1, 1/0) = m_1 \Gamma(B, 1/0)$$

Calcul de $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$: $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\vec{j}_1$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$: $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(B, 1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R\dot{\theta}\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1$.

Au final, $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 (R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)}$ B est le centre d'inertie du solide 1; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(B, 1/0)} \right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(B, 1/0)} = I_B(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \dot{\theta} \vec{k}_0 = C_1 \dot{\theta} \vec{k}_0$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0$.

Au final, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} m_1 (R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1) \\ C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0 \end{matrix} \right\}_B$.

Question 17 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Tout d'abord, $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} = \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} + \overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \vec{k}_0$ – Méthode 1

$$\overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \vec{k}_0 = \left(\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)} \right) \cdot \vec{k}_0 = \left(C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0 + R \vec{i}_1 \wedge m_1 (R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1) \right) \cdot \vec{k}_0 = C_1 \ddot{\theta} + m_1 R^2 \ddot{\theta}.$$

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0$ – Méthode 1

$$A \text{ est un point fixe. On a donc } \overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \vec{k}_0 = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 \right]_{\mathcal{R}_0} - \underbrace{\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \frac{d}{dt} [\vec{k}_0]}_{\vec{0}}.$$

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = \left(I_A(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} \right) \cdot \vec{k}_0$

$$I_A(2) = I_{G_2}(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \text{ et } \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta} \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{i}_2 = \dot{\theta} (\cos \varphi \vec{k}_2 + \sin \varphi \vec{j}_2) + \dot{\varphi} \vec{i}_2.$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 + m_2 R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \sin \varphi (B_2 + m_2 R^2) \\ \dot{\theta} \cos \varphi (C_2 + m_2 R^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

De plus $\vec{k}_1 = \cos \varphi \vec{k}_2 + \sin \varphi \vec{j}_2$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = \dot{\theta} \sin^2 \varphi (B_2 + m_2 R^2) + \dot{\theta} \cos^2 \varphi (C_2 + m_2 R^2)$.

Enfin, $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = (B_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi) + (C_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \cos^2 \varphi - 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi)$.

Conclusion

$$\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0 = C_1 \ddot{\theta} + m_1 R^2 \ddot{\theta} + (B_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi) + (C_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \cos^2 \varphi - 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi)$$

Question 18 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

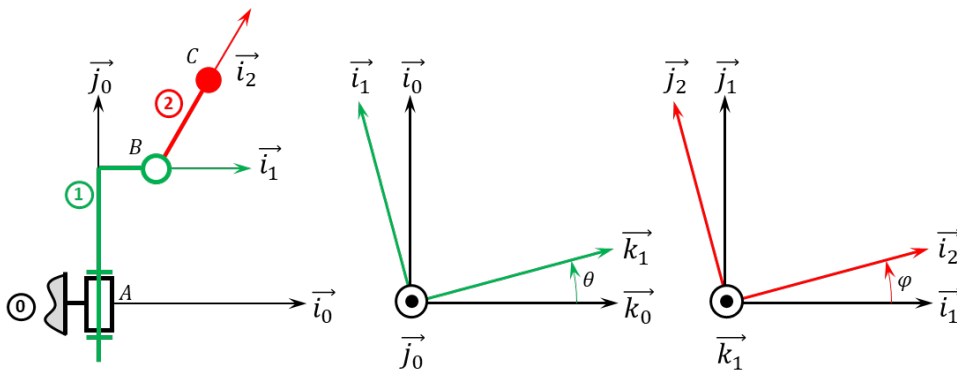
Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H\vec{j}_1 + R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = L\vec{i}_2$. On a $H = 20 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 tel que $\overrightarrow{AG_1} = H\vec{j}_1$, on note m_1 la masse de 1 et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2 et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 19 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Question 20 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1 + 2/0)} \cdot \vec{j}_0$

Question 21 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 21.

Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 22 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Par définition, $\{\mathcal{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B, 2/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(2/0)}$: $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$

Calcul de $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$:

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [H\vec{j}_1 + R\vec{i}_1 + L\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \frac{d}{dt} \left[\vec{j}_0 \right]_{\mathcal{R}_0} &= \vec{0} ; \\
 \blacktriangleright \frac{d}{dt} \left[\vec{i}_1 \right]_{\mathcal{R}_0} &= \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{i}_1 = -\dot{\theta} \vec{k}_1 ; \\
 \blacktriangleright \frac{d}{dt} \left[\vec{i}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} &= \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{i}_2 = (\dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}_2) \wedge \vec{i}_2 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{i}_2 + \dot{\varphi} \vec{k}_2 \wedge \vec{i}_2 = -\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2 .
 \end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = -R\dot{\theta} \vec{k}_1 + L(-\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2)$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} &= \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left[L\dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R\vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) \right]_{\mathcal{R}_0} .
 \end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \frac{d}{dt} \left[\vec{j}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} &= \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{j}_2 = (\dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}_1) \wedge \vec{j}_2 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2 + \dot{\varphi} \vec{k}_1 \wedge \vec{j}_2 = \dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\varphi} \vec{i}_2 . \\
 \blacktriangleright \frac{d}{dt} \left[\vec{k}_1 \right]_{\mathcal{R}_0} &= \dot{\theta} \vec{i}_1 .
 \end{aligned}$$

Avec les hypothèses, on a $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = L\dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\varphi} \vec{i}_2) - \dot{\theta} (R\dot{\theta} \vec{i}_1 + L \cos \varphi \dot{\theta} \vec{i}_1 - L\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{k}_1)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)}$

C est le centre d'inertie du solide 2 ; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = I_C(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)}$.

Or $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}_2 = \dot{\theta} (\cos \varphi \vec{j}_2 + \sin \varphi \vec{i}_2) + \dot{\varphi} \vec{k}_2$.

$$\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} A_2 \sin \varphi \\ \dot{\theta} B_2 \cos \varphi \\ C_2 \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} .$$

Question 23 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{j}_0$

Question 24 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.