

# 1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

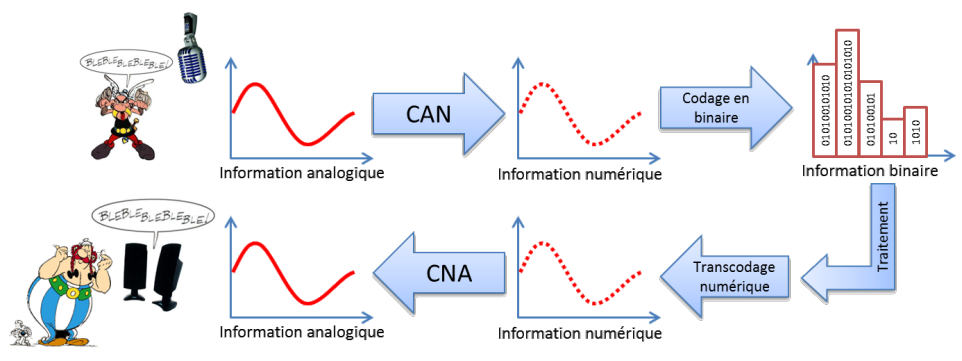
## 1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

1.1	Premières définitions . . .	1
1.2	Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	3

### 1.1.1 Définitions

#### Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

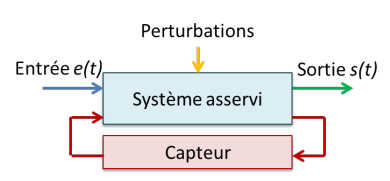


#### Définition – Systèmes automatiques ou asservis

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable ;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger



de la qualité de la tâche accomplie.

### Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

#### Définition – Précision en position – Écart statique $\varepsilon_s$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_s$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

#### 1.1.4 Performances des systèmes – Critères graphiques

#### Définition – Précision en vitesse $\varepsilon_v$

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

#### Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

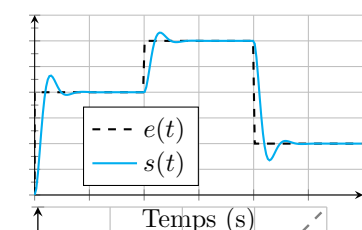


FIGURE 1.1 – Système suiveur.

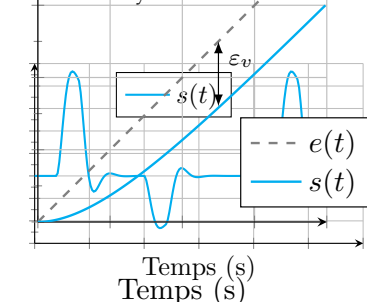


FIGURE 1.2 – Système régulateur.

FIGURE 1.3 – Erreur de traînage.

#### Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

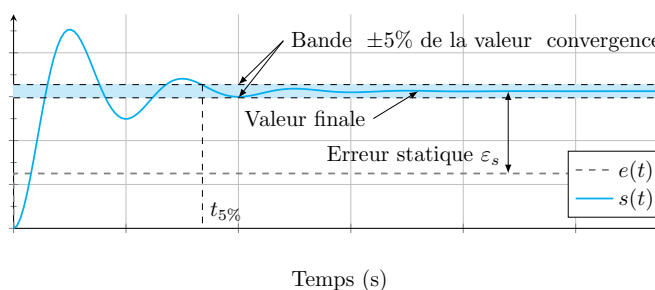


FIGURE 1.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

**Définition – Stabilité**

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 1.2 Réponse fréquentielle des SLCI

### 1.2.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

- ▶  $A$  : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ▶  $\omega$  : la pulsation en rad/s ;
- ▶  $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

On a par ailleurs :

- ▶  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s ;
- ▶  $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

**Définition –**

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

- ▶  $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert ;
- ▶  $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- ▶  $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$  ;
- ▶  $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$ .

### 1.2.2 Gain

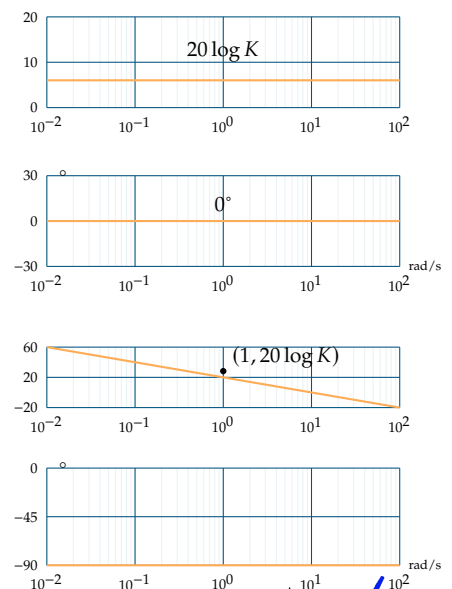
**Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur**

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- ▶ Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- ▶ Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .

### 1.2.3 Intégrateur

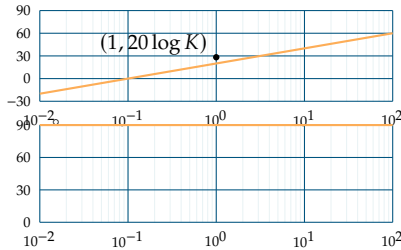
**Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur**

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20\text{dB}/\text{decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .



- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .

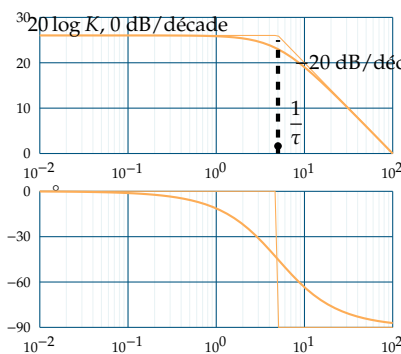
### 1.2.4 Dérivateur



#### Résultat – Diagramme de Bode d'un dérivateur

- Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .

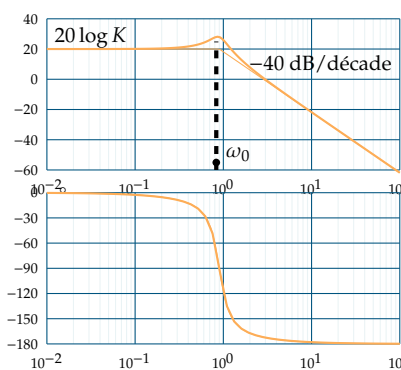
### 1.2.5 Systèmes d'ordre 1



#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$  ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$  ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .

### 1.2.6 Systèmes d'ordre 2



#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .

Cas où  $\xi < 1$ .

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$  ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40\text{dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$  ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .

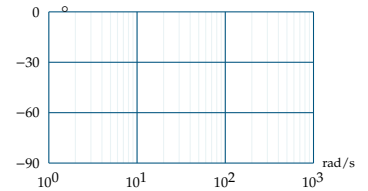
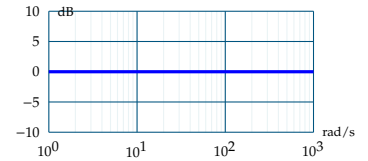
Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

**Résultat – Phénomène de résonance**

Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .  
 À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

**1.2.7 Retard****Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur**

- Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega \dots$  à tracer.

**1.2.8 Tracé du diagramme de Bode****Méthode – 1 : sommation dans le diagramme de Bode**

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. tracer chacune des fonctions de transfert;
3. sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

**Méthode – 2 : tableau de variations**

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes;
3. sommer les pentes;
4. tracer le diagramme de Bode.