

Table des matières

Table des matières	i
1 Génie électrique en tension alternative	1
1.1 Signaux périodiques	1
1.1.1 Caractéristique des signaux périodiques	1
1.1.2 Valeur moyenne	1
1.1.3 Valeur efficace	1
1.1.4 Décomposition d'un signal périodique	2
1.1.5 Signal alternatif et sinusoïdal	2
1.1.6 Puissance électrique	3
1.2 Alimentation monophasée	4
1.2.1 Evaluation de la puissance	4
1.3 Quelques calculs	4
1.3.1 Intégrale $\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt$	4
1.3.2 Notation complexe	5

1.1 Signaux périodiques

1.1.1 Caractéristique des signaux périodiques

Définition – Signal périodique

Un signal $s(t)$ est dit périodique de période T si $\forall t, s(t) = s(t + T)$.

Définition – Caractéristiques

On peut définir :

- la fréquence du signal, en Hertz Hz, $f = \frac{1}{T}$;
- la pulsation, pour un régime sinusoïdal, en rad s^{-1} : $\omega = 2\pi f$;
- la valeur maximale (ou de crête).

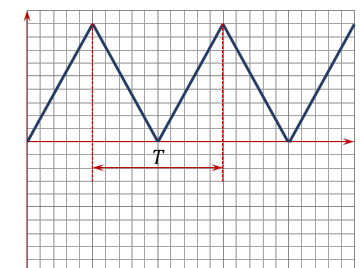


FIGURE 1.1 – Signal périodique

1.1.2 Valeur moyenne

Définition – Valeur moyenne

Valeur de la grandeur continue qui créerait la même aire qu'un signal périodique sur une période T . On a alors :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt.$$

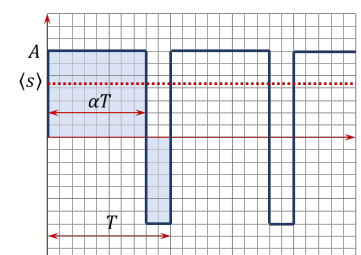


FIGURE 1.2 – Valeur moyenne

Propriété –

Si $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ alors $\langle s \rangle = \langle s_1 \rangle + \langle s_2 \rangle$.

La valeur moyenne est celle mesurée par un multimètre en position **DC** ou **=**.

Le courant moyen d'un courant périodique serait équivalent au courant continu qui transporterait la même quantité d'électricité que celle transportée durant une période.

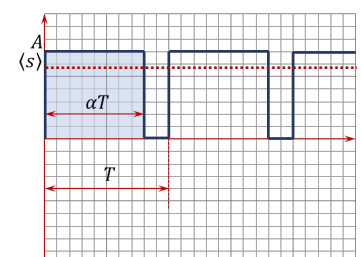


FIGURE 1.3 – Valeur moyenne

1.1.3 Valeur efficace

Définition – Valeur efficace

La valeur efficace S ou S_{eff} du signal $s(t)$ est donnée par

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}.$$

En anglais on parle de Root Mean Square (RMS).

La valeur moyenne est celle mesurée par un multimètre en position \sim ou **AC+DC** ou **RMS**.

Le courant efficace d'un courant périodique serait équivalent au courant continu qui produirait le même dégagement de chaleur que lui dans une résistance durant une période.

Pour la figure 1.2 la valeur moyenne du signal est de 4,2. $S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} =$

$$\sqrt{\frac{1}{10} \left(\int_0^8 7^2(t) dt + \int_8^{10} 7^2(t) dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{10} \left(\int_0^8 7^2(t) dt + \int_8^{10} 7^2(t) dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{10} (49 \times 8 + 49 \times 2)} =$$

Pour la figure 1.3 la valeur moyenne du signal est de 5,6. Dans ce cas, la valeur efficace est de $S_{\text{eff}} = 6,26$.

1.1.4 Décomposition d'un signal périodique

Propriété –

Un signal périodique $s(t)$ est décomposable en une somme d'un signal alternatif $s_a(t)$ et d'un signal constant :

$$s(t) = \langle s \rangle + s_a(t).$$

On appelle $\langle s \rangle$ composante continue et $s_a(t)$ composante alternative ou d'ondulation. Par ailleurs, on a alors $\langle s_a \rangle = 0$.

FIGURE 1.4 – Décomposition d'un signal périodique



Sur les oscilloscopes :

- ▶ en couplage DC le signal complet $s(t)$ est affiché ;
- ▶ en couplage AC seule la composante alternative $s_a(t)$ est affichée.

On a $S_{\text{eff}}^2 = \langle s \rangle^2 + S_{a\text{eff}}^2$.

1.1.5 Signal alternatif et sinusoïdal

Définition –

On note $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ avec :

- ▶ A amplitude du signal ;
- ▶ ω pulsation en rad s^{-1} tel que $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$;
- ▶ φ phase à l'instant t .

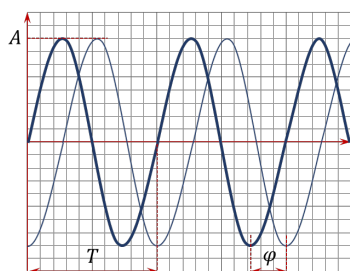


FIGURE 1.5 – Signal alternatif sinusoïdal

Résultat –

Pour un signal sinusoïdal, on a (voir paragraphe 1.3.1) $S_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

1.1.6 Puissance électrique**Définition – Puissance instantanée**

Soit un dipôle parcouru par un courant $i(t)$ et soumis à une tension $u(t)$. La puissance instantanée s'exprime par

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Résultat –

Si $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ et $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi')$ alors on montre que

$$p(t) = \frac{UI}{2} (\cos(2\omega t + \varphi + \varphi') + \cos(\varphi - \varphi'))$$

Définition – Puissance active

Soit un dipôle parcouru par un courant $i(t)$ et soumis à une tension $u(t)$. La puissance active P en W s'exprime par :

$$P = \langle p(t) \rangle = \langle u(t)i(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt.$$

Puissance reçue par une résistance

La source de tension e est de la forme $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$. En écrivant la loi des mailles dans le circuit de la figure 1.6 on a $u_R(t) = e(t)$. Par ailleurs, $u_R(t) = Ri(t)$; donc $i(t) = \frac{E}{R} \cos(\omega t + \varphi)$. $u_R(t)$ et $i(t)$ sont donc en phase.

La puissance instantanée reçue par le dipôle est $p(t) = \frac{E^2}{R} \cos^2(\omega t + \varphi)$.

La puissance active est $P = \frac{E^2}{2R} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{R}$. Par ailleurs, $I = \frac{E}{R} \Rightarrow I_{\text{eff}}\sqrt{2} = \frac{E_{\text{eff}}\sqrt{2}}{R}$ et $I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{R}$; donc $P = RI_{\text{eff}}^2$.

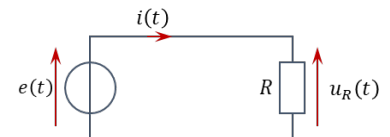


FIGURE 1.6 – Circuit R

Puissance reçue par un condensateur

La source de tension e est de la forme $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$. En écrivant la loi des mailles dans le circuit de la figure 1.7 on a $u_C(t) = e(t)$. Par ailleurs, $i(t) = C \frac{d}{dt} [u_C(t)]$.

On a donc, $i(t) = -CE\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

Or, $-\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$. On a donc $i(t) = CE\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$. La tension aux bornes du condensateur est donc « en retard » sur le courant.

La puissance instantanée s'exprime donc par $p(t) = i(t)u_C(t) = -CE\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi)$.

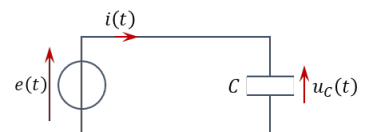


FIGURE 1.7 – Circuit RC

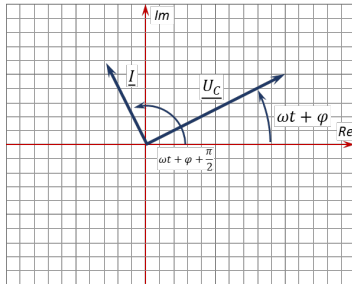


FIGURE 1.8 – Signal alternatif sinusoïdal

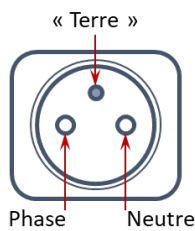


FIGURE 1.9 – Prise électrique

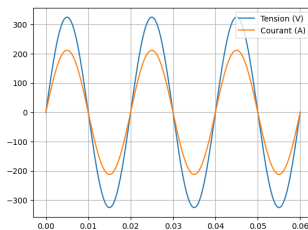
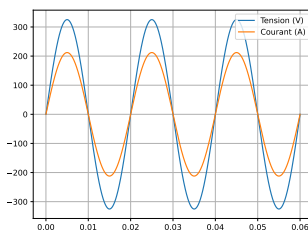


FIGURE 1.10 – Tension et courant sinusoïdaux

La puissance active se calcule donc ainsi :

$$P = -\frac{CE\omega^2}{T} \underbrace{\int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt}_0 = 0.$$

Représentation dans le plan complexe

1.2 Alimentation monphasée

Aux bornes d'une prise électrique domestique, l'alimentation est sinusoïdale monophasée. Entre la phase et le neutre on mesure une tension simple $v(t)$ dont la valeur efficace est de 230 V.

Ainsi l'amplitude du signal est de 325 V.

La tension et le courant distribués sont sinusoïdaux. On note $i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(\omega t)$ et $v(t) = V_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$.

1.2.1 Evaluation de la puissance

Puissance instantanée

Puissance active

1.3 Quelques calculs

1.3.1 Intégrale $\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos(2(\omega t + \varphi))) dt \\ &= \frac{A^2}{2T} \left([t]_0^T - \left[\frac{1}{2\omega} \sin(2(\omega t + \varphi)) \right]_0^T \right) \\ &= \frac{A^2}{2T} \left(T - \frac{1}{2\omega} [\sin(2(\omega T + \varphi)) - \sin(2(\omega \times 0 + \varphi))] \right) \\ &= \frac{A^2}{2T} \left(T - \frac{1}{2\omega} [\sin(2(\omega T + \varphi)) - \sin(2\varphi)] \right) \\ &= \frac{A^2}{2T} \left(T - \frac{1}{2\omega} (\sin(2\omega T) \cos(2\varphi) + \cos(2\omega T) \sin(2\varphi) - \sin(2\varphi)) \right). \end{aligned}$$

On a $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$I = \frac{A^2}{2T} \left(T - \frac{1}{2\frac{2\pi}{T}} \left(\sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right) \cos(2\varphi) + \cos\left(2\frac{2\pi}{T}T\right) \sin(2\varphi) - \sin(2\varphi) \right) \right)$$

$$= \frac{A^2}{2T} \left(T - \frac{T}{4\pi} (\sin(2\varphi) - \sin(2\varphi)) \right) = \frac{A^2}{2}$$

1.3.2 Notation complexe

Définition –

Soit un signal mathématique $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. On lui associe une grandeur complexe : $\underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)}$.

Résultat – Retour au signal réel

- ▶ $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$
- ▶ $\varphi \dots$

Rappel :

- ▶ forme algébrique : $\underline{z} = a + jb$;
- ▶ forme trigonométrique $\underline{z} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$;
- ▶ forme exponentielle $\underline{z} = Z e^{j\varphi}$.