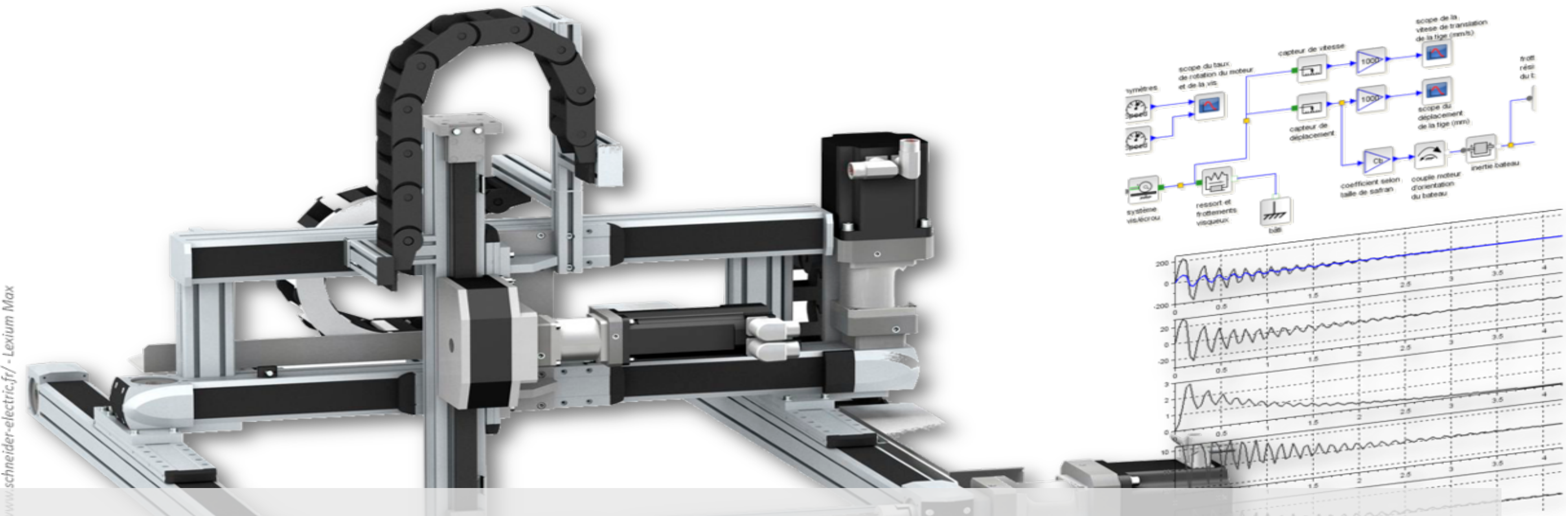


1 Modélisation des systèmes mutliphysiques

1.1 Introduction

1.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ?

Pour comprendre le fonctionnement des systèmes qui nous entourent, il est souvent nécessaire de maîtriser un voire plusieurs domaines de la physique. En effet, le winch utilisé dans le laboratoire a un fonctionnement essentiellement mécanique. En revanche, le simulateur de drone D^2C est composé d'une partie mécanique (rotation du banc et des hélices) une partie électrotechnique (moteurs) une partie électronique (commande des moteurs) une partie informatique (gestion de la commande et des informations).

Pour modéliser un système, plusieurs outils peuvent être nécessaires. Lorsqu'un outil est associé à un champ de la physique, on peut parler de modèle « mono physique » :

- pour modéliser la géométrie d'un système ou le comportement d'un mécanisme, on peut faire appel à SolidWorks par exemple ;
- pour modéliser la partie électrique d'un système il est possible d'utiliser un logiciel comme PSpice ;
- pour programmer une interface graphique d'un logiciel, il est possible d'utiliser Python...

En revanche, lorsqu'on veut que tous ces domaines communiquent, il faut une plate forme commune permettant l'échange entre les modèles. On parle alors de modélisation multiphysique. Il est possible d'utiliser des logiciels comme Scilab (Xcos – Modelica) ou Matlab (Simulink – Simscape).

1.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ?

Dans l'industrie, les modèles sont indispensables. Ils permettent d'avoir un modèle numérique, image du produit que l'on cherche à réaliser ou que l'on a déjà. L'image doit être aussi fidèle à la réalité que possible. On a vu que ce modèle peut-être « monophysique » ou « multiphysique ».

L'objectif du modèle est de se substituer au produit réel. Les simulations réalisées sur le modèle ont pour objectif de remplacer des expérimentations sur le produits, considérées comme coûteuse en temps et en argent.

Il est possible de recenser les avantages et inconvénients liés à la simulation des modèles [**Crevits2015**].

Crevits2015

- ✓ Pouvoir prévoir le comportement du système réel alors qu'il n'existe pas encore lors de la phase de conception ;
- ✓ permettre la prévision de phénomènes (en météorologie par exemple) ;
- ✓ éviter ou limiter le recours aux expérimentations réelles qui peuvent être très coûteuses ou très dangereuses, voire proscrites (essais nucléaires militaires) ou impossibles dans l'état actuel des connaissances et des moyens (projet ITER) ;
- ✓ quand l'échelle de temps des phénomènes dans le système réel ne permet pas une expérience « en une durée raisonnable » pour effectuer des observations ou des mesures. (premiers instants de l'univers ($t < 10^{-6}$s) ou l'évolution des galaxies ($t > 10^6$ années) ;
- ✓ « observer » ou représenter des variables inaccessibles à l'expérience ou la mesure ;
- ✓ les manipulations sont faciles sur un modèle. Elles peuvent être répétées, voire itérées automatiquement pour apprécier de très nombreuses situations ;
- ✓ le droit à l'erreur, sans risque ;
- ✓ la possibilité de supprimer des phénomènes perturbateurs ou des effets secondaires.

- ✘ Avoir une confiance aveugle dans les simulations et ses résultats : des erreurs liées aux modèles ou aux calculs peuvent ne pas être perçues immédiatement ;
- ✘ « oublier » les conditions de la simulation et les hypothèses formulées pour établir le modèle et surtout dans le cas des systèmes complexes ;
- ✘ « inverser » la réalité et « forcer » le réel à intégrer les contraintes du modèle ;
- ✘ oublier le niveau de précision des résultats provenant du modèle.

1.2 Modélisation des systèmes multiphysiques

1.2.1 Modélisation causale et acausale

Lorsque le fonctionnement d'un système est régit par une équation différentielle, dont l'ordre de dérivation de la sortie est supérieur à l'ordre de dérivation de l'entrée, la sortie est une conséquence de l'entrée. En passant l'équation dans le domaine de Laplace puis en la traduisant sous forme de schéma bloc, on obtient alors un bloc **orienté** traduisant ainsi la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie.

On parle ici de modélisation **causale**.

Les liens entre les blocs représentent une grandeur physique (courant, tension, position, vitesse *etc.*).

En modélisation acausale, les entrées et sorties ne sont pas spécifiées. Les liens entre entrées et sorties sont définies de manière implicite. Lorsqu'on visualise la traduction graphique d'un modèle acausal, les liens ne sont pas orientés (les blocs sont « réversibles »). Les blocs sont traversés par des flux d'énergie d'un même domaine physique.

Dans Matlab – Simulink, on parle de grandeurs potentielles (across) et de grandeur traversante (through) :

- une variable potentielle est mesurée par un instrument en parallèle avec la chaîne d'énergie ;
- une variable traversante est mesurée par un instrument en série avec la chaîne d'énergie.

Dans Scilab – Coselica, (langage Modelica), on parle de variables potentielles et flux.

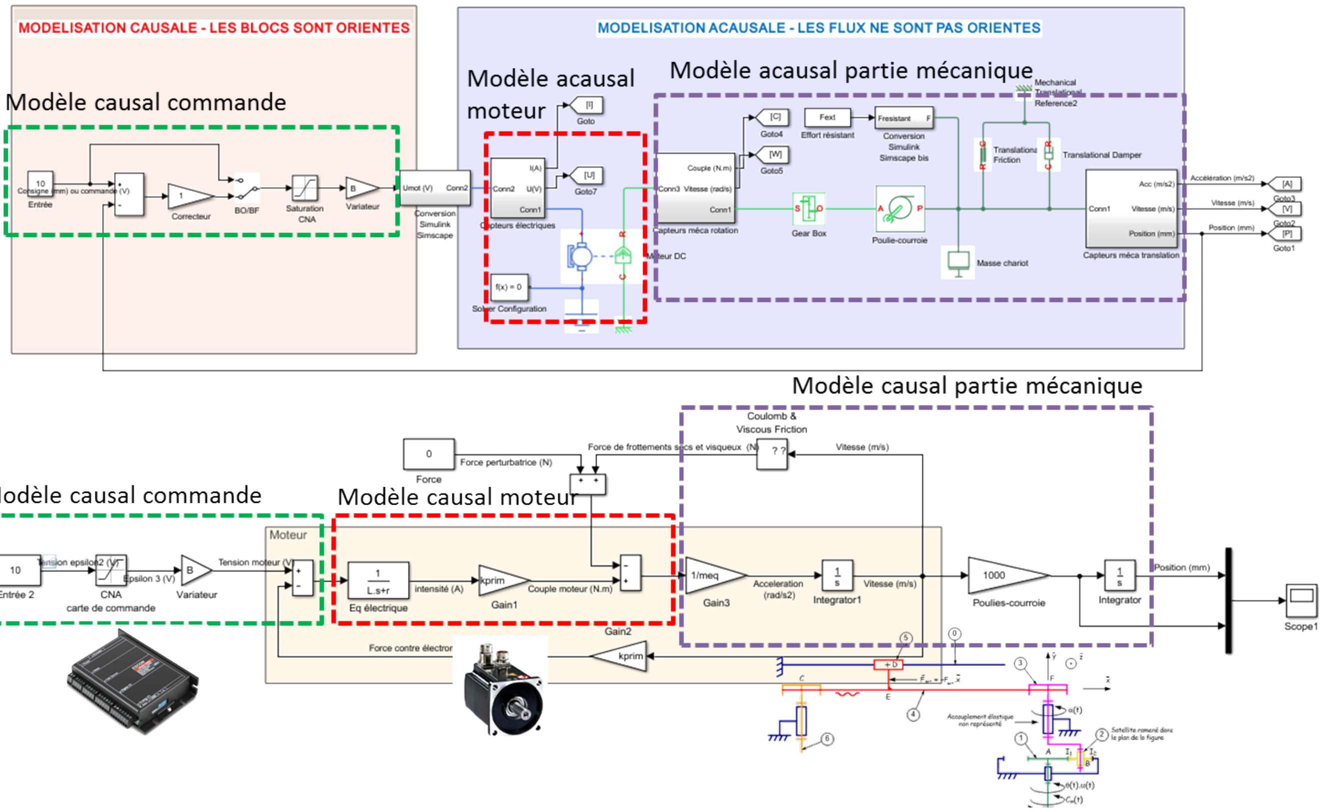
- variables potentielles : les variables qui sont reliées au même port sont égales ;
- variables flux : les variables qui aboutissent au même port ont pour somme 0.

Table 1.1 – Modélisation acausale dans Matlab – Simulink – Simscape : variables « across » et « through ».

Domaine physique	Variables « across »	Variables « through »
Électrique	Tension (V)	Courant (A)
Hydraulique	Pression (Pa)	Débit ($m^3\,s^{-1}$)
Mécanique de translation	Vitesse linéaire ($m\,s^{-1}$)	Force (N)
Mécanique de rotation	Vitesse angulaire($rad\,s^{-1}$)	Moment (Nm)
Thermique	Température (K)	Flux thermique et flux d'entropie

1.2.2 Les différents modèles et outils

La figure ci-dessous présente un modèle causal et un modèle acausal du système de laboratoire « Control'X » en utilisant le logiciel Matlab-Simulink.



Visuellement on constate que sur le modèle causal, les composants du système apparaissent. Ainsi, sans connaître les lois de comportements des composants, il est possible de réaliser le modèle multiphysique d'un système.

En modélisation acausale, on utilise une représentation par schéma-blocs. Il est ici indispensable de connaître les modèles de connaissance ou de comportement des composants pour réaliser le modèle.

1.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients

Que ce soient des modèles causaux ou acausaux, Matlab a recours à des solveurs pour simuler le comportement des systèmes. En effet, des équations différentielles, linéaires ou non, sont « cachées » derrière les blocs.

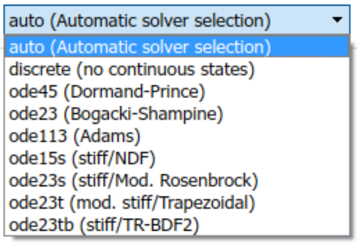


Figure 1.1 – Solveurs Matlab

Par défaut, nous laisserons un choix automatique du solveur. Cependant, certains modèles imposeront (via un message d'erreur) le changement de ce solveur. Par ailleurs le pas de simulation devra être changé dans certain cas, dans le but d'améliorer la précision des résultats.

Attention, il est à noter qu'il peut être difficile de réaliser de diagramme de Bode en utilisant un modèle acausal. Ceci peut être un handicap en phase de conception d'un système car il devient plus délicat de déterminer les résonances du système.

1.3 Modélisation des systèmes physiques

On utilisera ici Matlab – Simulink. Certains modèles sont aussi transposables avec Scilab – Xcos.

1.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques

Introduction

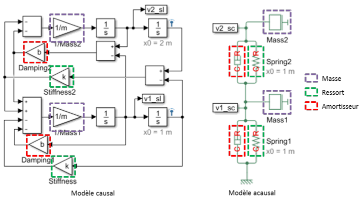


Figure 1.2 – Modélisation causale et acausale d'un système avec deux systèmes « masse – ressort – amortisseur » en série.

Deux modes de modélisation des systèmes mécanique est disponible : une modélisation 1D (mouvement de translation suivant une seule direction, mouvement de rotation autour d'un axe fixe) ou une modélisation 3D. La modélisation 1D est possible directement dans Matlab. Pour la modélisation 3D, il est plus aisé d'utiliser SolidWorks.

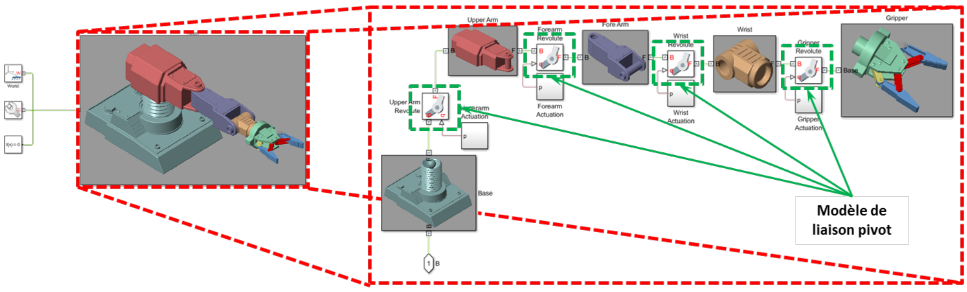
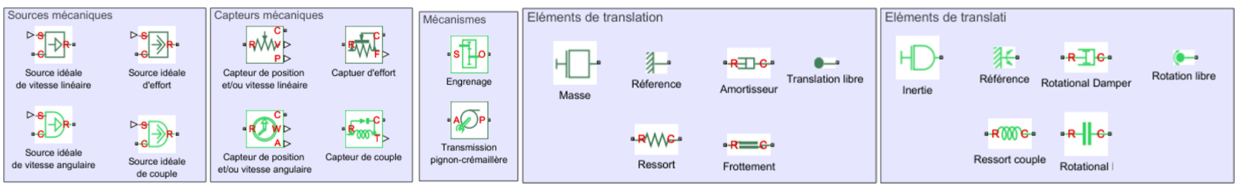


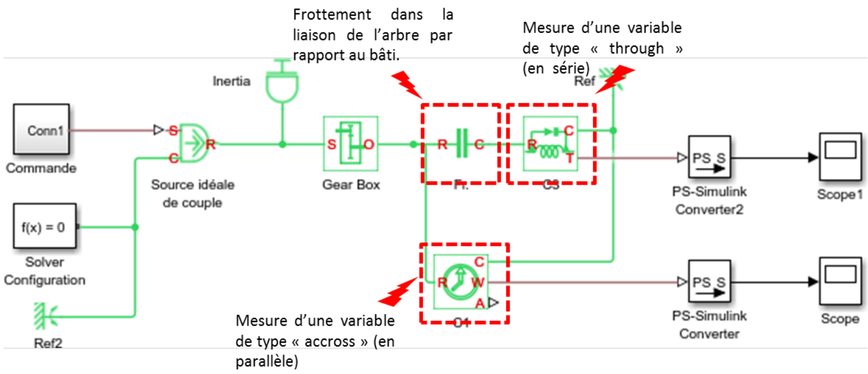
Figure 1.3 – Modélisation acausale 3D d'un bras robotisé.

Blocs communément utilisés en modélisation multiphysique.

Les éléments communément utilisés sont donnés dans la figure suivante.



La figure suivante illustre une transmission mécanique modélisée en utilisant Simulink. On notera le positionnement des capteurs pour mesurer des variables accross ou through, ainsi que le positionnement du bloc permettant de modéliser les frottements.



1.3.2 Modélisation des systèmes électriques

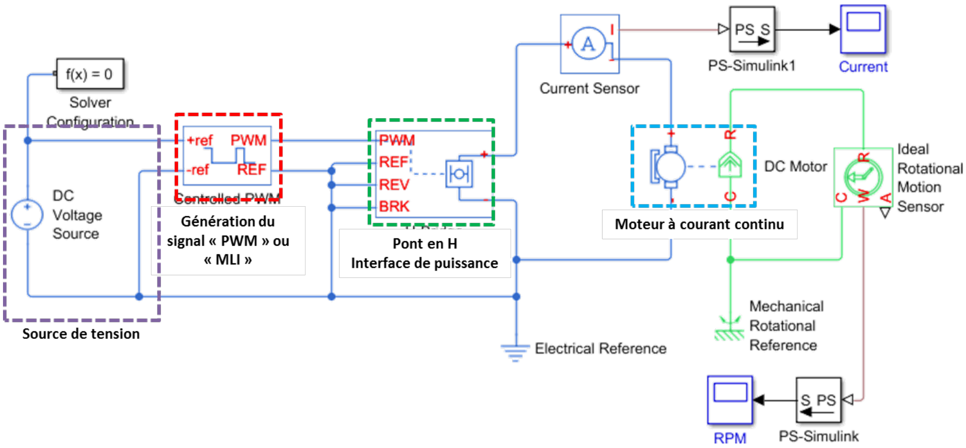


Figure 1.4 – Modélisation acausale de la commande d'un moteur à courant continu.

1.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques

En cas de besoin, des exemples complémentaires sont disponibles en utilisant Maltab – Simulink.

1.4 Modélisation des non-linéarités

Même si on cherche à modéliser les blocs d'un système par des équations linéaires (à coefficients constants), il est très fréquent de rencontrer des systèmes (notamment mécaniques) qui n'obéissent pas des lois linéaires (par exemple, le comportement du Maxpid est non linéaire : suivant la plage de fonctionnement – entre 0 et 5°ou entre 85 et 90°– un tour de moteur ne correspond pas au même mouvement angulaire du bras).

Deux solutions s'offrent alors à nous : linéariser le fonctionnement ou modéliser la non linéarité. Les modèles causaux sont par essence linéaire. Cependant, il est possible d'intégrer des non-linéarités modélisables relativement simplement (seuil, saturation, hystérésis). Il est en revanche plus délicat de modéliser les non linéarités géométriques des mécanismes. En revanche dans les modèles acausaux, la passerelle entre SolidWorks et Matlab, permet par exemple de modéliser des systèmes mécaniques non linéaires.

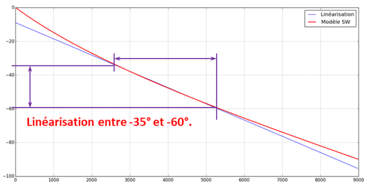
Attention : l'analyse fréquentielle d'un système non linéaire n'a pas (peu ?) de sens, même s'il est possible d'effectuer un diagramme de Bode, notamment avec Matlab...

1.4.1 Linéarisation

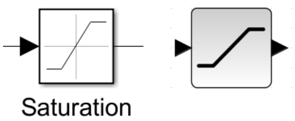
Lorsqu'un système est non linéaire, il peut être possible de le linéariser. Cela signifie que **localement** (sur un certain intervalle) on approxime le comportement du système par une droite. On conséquence, on conserve la validité de notre modélisation de type SLCI. Cependant, il faut faire attention à la zone de validité du modèle : si le comportement du système est fortement linéaire la linéarisation ne sera valable que dans une certaine zone.

Exemple – Loi entrée sortie du Maxpid

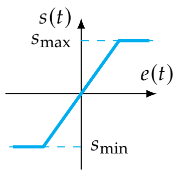
Le comportement mécanique du Maxpid n'est pas linéaire. Si on désire modéliser ce comportement sur un système causal, il est impératif d'utiliser une loi linéaire. Dans le premier cas, on modélise le comportement en utilisant une régression linéaire. Ce modèle génère des erreurs, mais il est « utilisable » sur toute la plage de fonctionnement.
Il est aussi possible, dans un second cas, de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Ainsi, le modèle sera plus fidèle à la réalité autour de ce point de fonctionnement. Par contre, les écarts s'accroissent en s'éloignant du point de fonctionnement.



1.4.2 Saturation



Paramètres : s_{max} et s_{min}

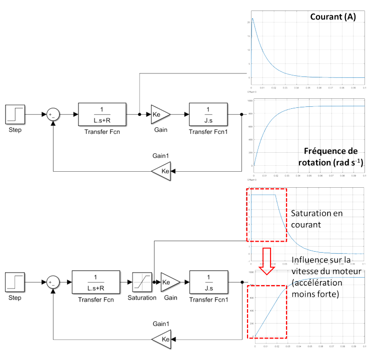


Même si vous l'avez peut-être peu remarqué, les saturations sont omniprésentes sur les systèmes réels. Les principales sources de saturation sont des saturations en tension ou des saturations en courant.

En régime saturé, au delà d'une certaine valeur d'entrée, le signal de sortie du bloc reste identique et égal à la valeur de saturation.

Tout d'abord, dans les systèmes asservis et corrigés, le correcteur permet souvent une amplification de la consigne. Par exemple, un correcteur proportionnel de valeur 5 dans la boucle ouverte permet de multiplier par 5 la tension de commande. Celle-ci peut alors être supérieure à la tension que la source peut fournie.

De même, suivant la charge agissant sur un système (charge électrique ou mécanique), le courant nécessaire à un déplacement peut devenir très important, notamment en phase transitoire. Un pic de courant peut avoir pour effet de détériorer des composants.

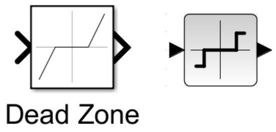


Exemple

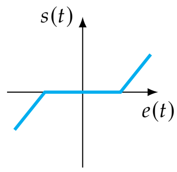
Prenons par exemple le cas du moteur à continu du Maxpid dont la modélisation est (ou devrait être) bien connue. Sollicitons le moteur par un échelon de tension et observons les signaux que nous ne regardons peut être pas toujours, par exemple le courant. Au démarrage du moteur, si on néglige la bobine et qu'on néglige l'existence d'une tension dans la boucle de retour, le courant initial est de l'ordre de $\dfrac{U}{R} \simeq \dfrac{48}{2} = 24$ A. Pour certain système ce courant peut détériorer des composants.
Afin de limiter le courant, des saturateurs permettant d'éviter de dépasser certaines intensités.
La conséquence peut ici être un ralentissement du système. En effet, le courant «

plafonnant », l'accélération n'est pas aussi forte qu'on l'attendrait. En conséquence, le système est moins rapide.

1.4.3 Seuil



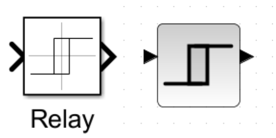
Paramètres : valeur mini et valeur maxi



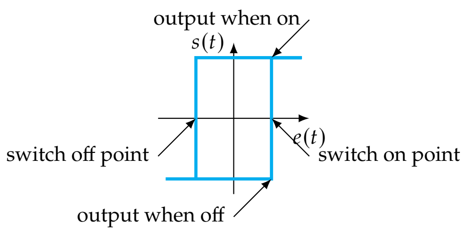
Les seuils (ou bandes mortes – dead band) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie reste nulle quand l'entrée varie dans un certain intervalle.

Dans le cas d'une modélisation causale, on peut utiliser le seuil pour modéliser le frottement sec. En effet, dans le cas d'un système piloté par un moteur à courant continu, une petite tension ne suffit pas à actionner le système. Il faut vaincre les frottements secs. Le seuil permet de modéliser ce comportement.

1.4.4 Hystérésis



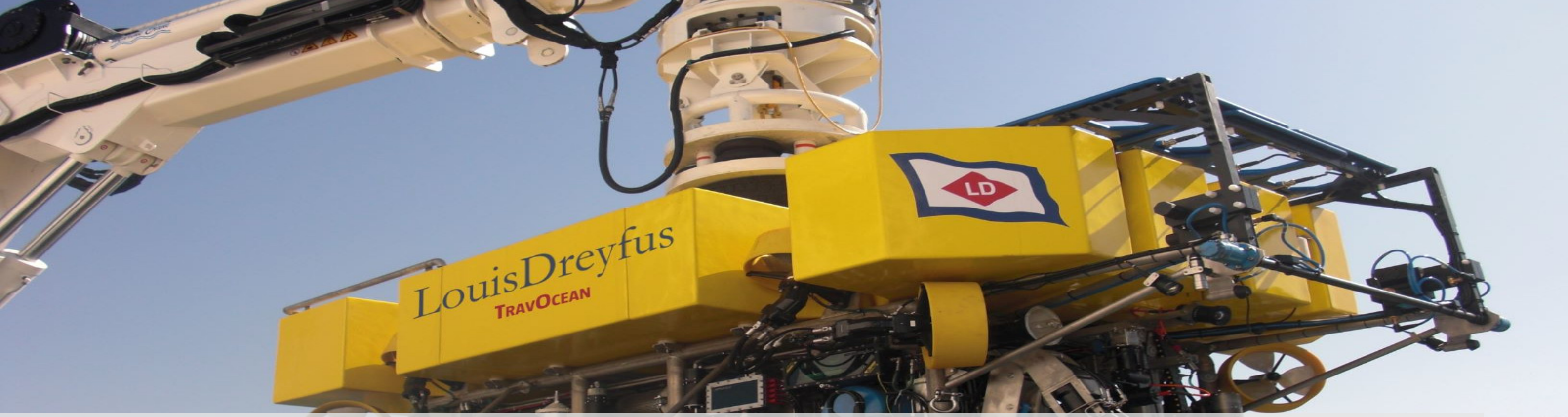
Paramètres : switch on point, switch off point, output when on, output when off



Les hystérésis (Relay) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie est différente quand l'entrée croît ou lorsqu'elle décroît.

1.5 Modélisation des systèmes numériques

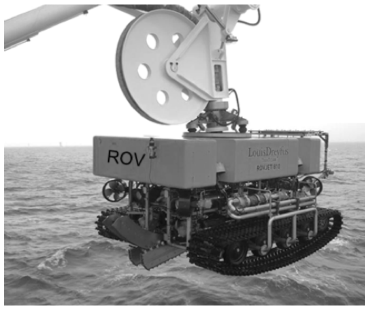
On verra dans un chapitre ultérieur que les systèmes que nous manipulons sont souvent numériques. En effet, que ce soit sur le Maxpid, le Control'X, le D2C, la cheville NAO *etc.* les grandeurs analogiques mesurées sont converties en grandeurs numériques grâce à un CAN (convertisseur analogique numérique). La fréquence d'échantillonnage ou la quantification du signal peuvent avoir un impact non négligeable sur les performances du système.



Application 1
Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet

Concours Centrale – MP 2019

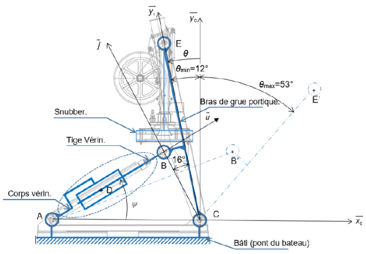
B2-02

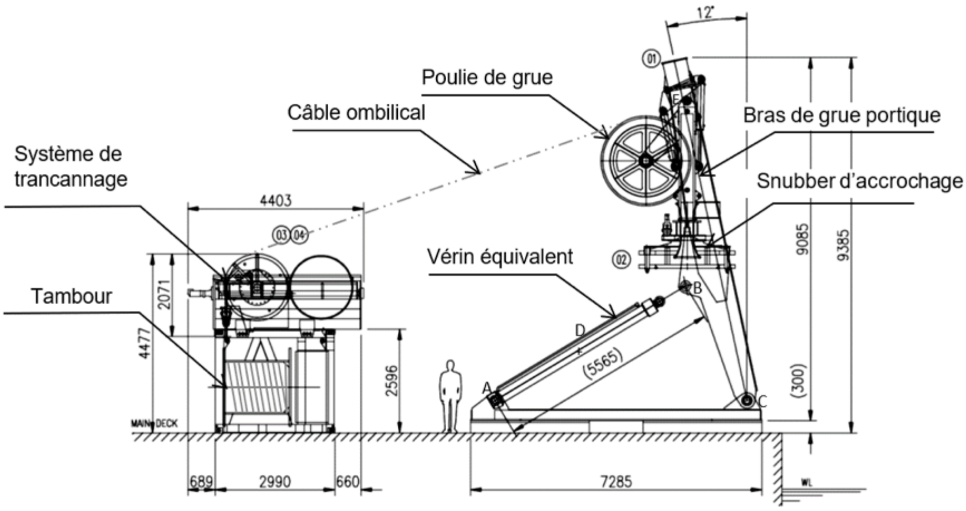


Pour réaliser l'ensouillage sous-marin de câbles, ceux-ci sont déposés sur le fond marin par un navire câblier. Le robot sous-marin ROV (Remotely Operated Vehicle) est déposé sur le fond marin par un bateau support et ensouille le câble provenant du navire câblier après l'avoir détecté et s'être aligné dans l'axe de celui-ci.

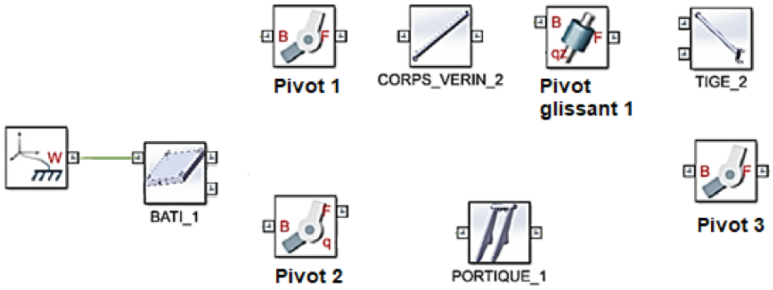
Pour transférer le ROV du pont du bateau support jusqu'à l'aplomb de la surface d'immersion une grue portique est utilisée. La grue portique est actionnée par un ensemble de deux vérins hydrauliques modélisés en un seul vérin équivalent pour cette étude.

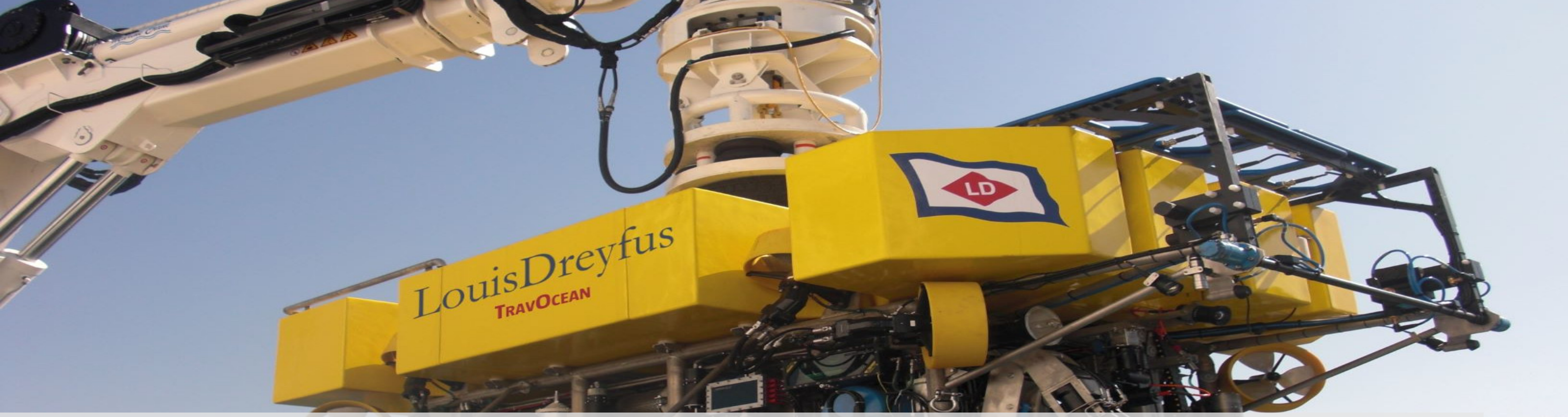
Lors de la descente du ROV dans la mer, il est suspendu à un câble ombilical. Un bon équilibrage hydrostatique est nécessaire pour assurer l'horizontalité du ROV pendant la descente.





Question 1 À partir des figures précédentes, relier les composants du modèle de simulation multiphysique de la grue portique. Quel(s) ensemble(s) n'ont pas été modélisés ?

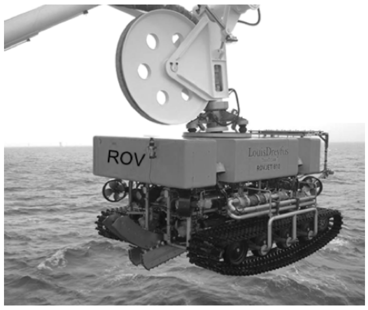

W
BATI_1
B
F
Pivot 1
CORPS_VERIN_2
B
qz
F
Pivot
glissant 1
TIGE_2
B
F
q
Pivot 2
PORTIQUE_1
B
F
Pivot 3



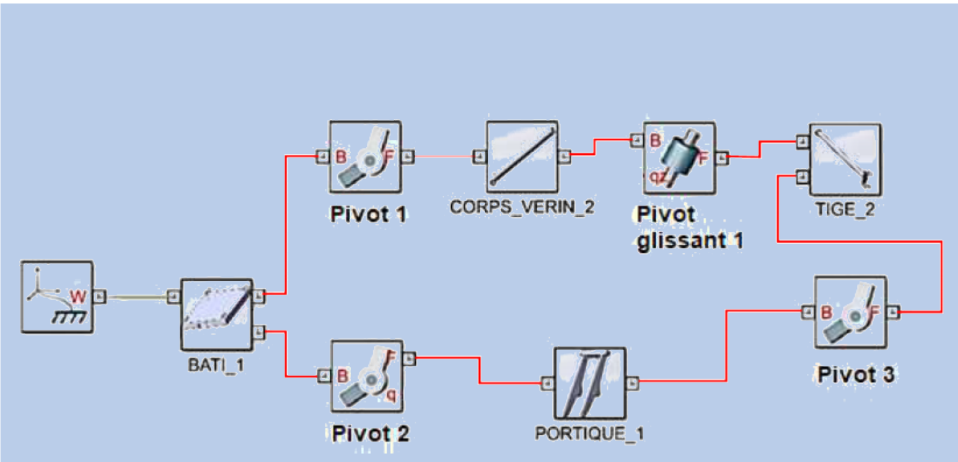
Application 1
Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Corrigé

Concours Centrale – MP 2019

B2-02



Question 1 À partir des figures précédentes, relier les composants du modèle de simulation multiphysique de la grue portique. Quel(s) ensemble(s) n'ont pas été modélisés ?

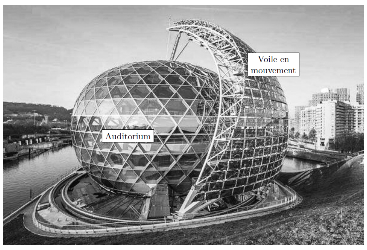


Application 2
La Seine Musicale – Sujet

Concours Centrale – MP 2020

B2-02

La Seine Musicale est un équipement à vocation musicale à fort rayonnement culturel, dont l'objet est de créer ou d'aménager des espaces pour des concerts, des expositions, des installations permanentes ou provisoires.



L'un des défis architecturaux de ce projet consiste à mettre en mouvement la voile, équipée de 470 panneaux photovoltaïques, autour de l'auditorium, tout en garantissant une acoustique exceptionnelle.

Les deux demi-voiles sont mises en mouvement de manière indépendante par des chariots motorisés, ainsi qu'une couronne motorisée déplaçant chacun des sommets des demi-voiles par l'intermédiaire de bielles.

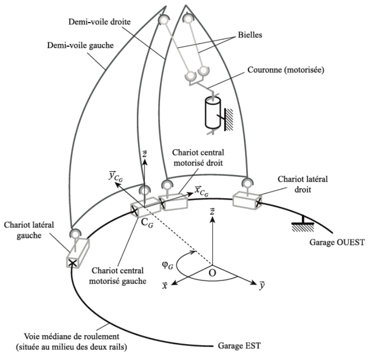


Figure 1.5 – Schéma d'architecture de la voile solaire

Chaque chariot (central et latéral) se déplace grâce à quatre galets, appelés galets de roulement, qui roulent sur les deux rails circulaires concentriques de la voie médiane de roulement et grâce à quatre autres galets de guidage qui roulent sur les côtés des deux rails. Chacun des deux chariots centraux est motorisé à l'aide de deux motoréducteurs qui entraînent chacun en rotation deux des quatre galets de roulement. Afin d'optimiser son rendement énergétique, cette voile se déplace chaque jour toutes les 15 minutes pour suivre le soleil du garage Est au garage Ouest.

Afin d'effectuer un premier dimensionnement en phase d'avant-projet des solutions techniques choisies, un modèle multiphysique simple de la chaîne de traction d'un chariot motorisé est réalisé (Figure 1.6). **On se place dans le cas le plus défavorable avec un seul motoréducteur fonctionnel qui entraîne deux galets de roulement (roue).**

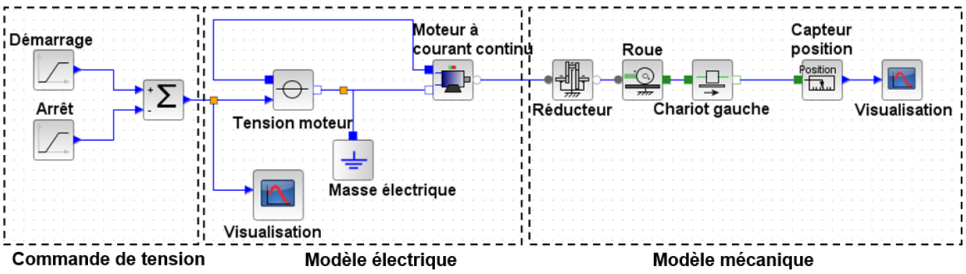


Figure 1.6 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voile

Le modèle multiphysique est constitué de trois parties :

- commande en tension qui résulte de la superposition de deux rampes pour générer la loi de vitesse trapézoïdale ;
- modèle électrique constitué d'un moteur à courant continu alimenté ;

- modèle mécanique constitué d'un réducteur, d'une roue de chariot, d'une masse mobile de la demi-voile et d'un capteur de position.

Lors de son déplacement, il peut arriver que la voile soit soumise à l'effet du vent. Il est donc important de le prendre en compte dans le modèle pour évaluer son impact sur le déplacement. Par ailleurs, afin d'assurer une durée de vie du moteur conforme à son mode de fonctionnement, il est important de pouvoir estimer la consommation électrique du moteur en fonctionnement.

Le modèle Figure 1.6 a donc été enrichi de nouveaux blocs, à savoir : un capteur de courant, un capteur de tension et l'effort extérieur lié au vent (échelon).

Question 1 *Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.*

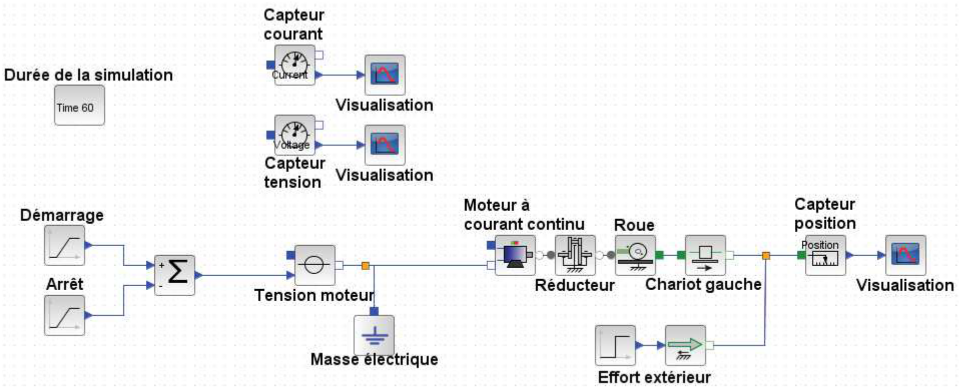
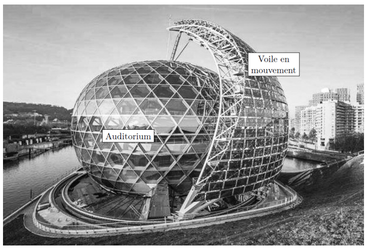


Figure 1.7 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voile

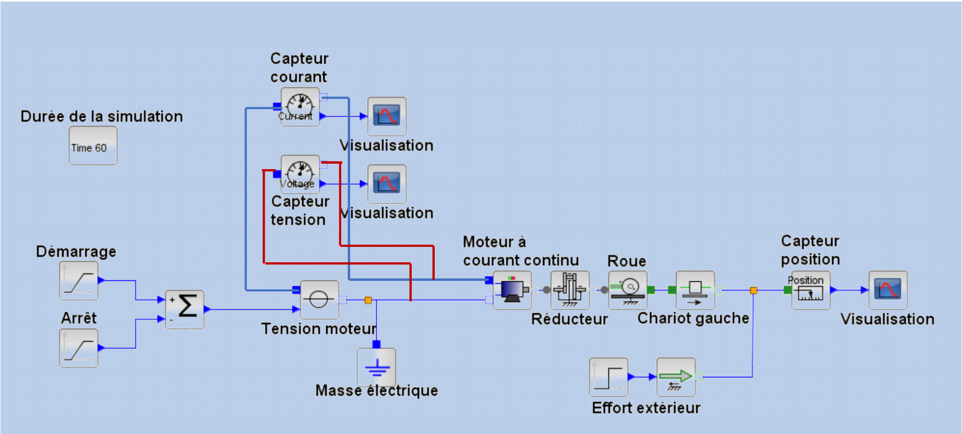
Application 2
La Seine Musicale – Corrigé

Concours Centrale – MP 2020

B2-02



Question 1 *Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.*



Application 3
Direction automatique découplée – Sujet

Banque PT – SI A 2017

B2-02

Depuis maintenant de nombreuses années, les commandes de vol d'avions sont passées d'une technologie purement mécanique à la technologie par fil (Fly by Wire). Le secteur automobile suit cette tendance qui présente de nombreux avantages. C'est le système de direction par fil (Steer by Wire), encore nommé direction découplée, qui fait l'objet de l'étude proposée.

La Figure 1.8 donne une vue de cette unité sous la forme d'une maquette numérique à laquelle est associé le schéma cinématique qui servira de base à l'étude mécanique.

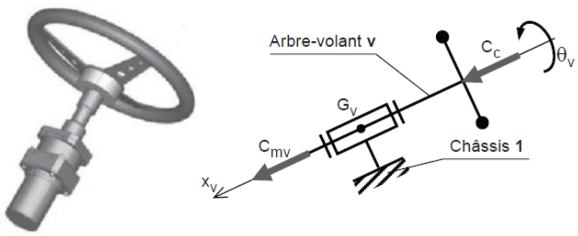


Figure 1.8 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

L'unité de pilotage est constituée d'une chaîne d'énergie chargée de solliciter le volant par un couple $C_{\text{mv}}\overrightarrow{x_v}$ qui résiste à l'action du conducteur $C_c\overrightarrow{x_v}$ quand celui-ci cherche à tourner le volant.

En effet, la simple dynamique du système mécanique de l'unité de pilotage ne donnerait pas au conducteur la sensation de manier la direction d'une automobile. La composante C_{mv} est donc élaborée pour que la dynamique du volant en termes d'inertie et de raideur soit équivalente à celle d'une direction conventionnelle optimisée selon le type de conduite visée.

La composante C_{mv} est élaborée à partir de la consigne d'angle du volant $C_{\text{v\_ref}}$, transmise par le générateur de consigne intégré au contrôleur de modèles, et de la composante C_c du couple conducteur.

Le modèle de la structure sous la forme d'un schéma bloc décrivant le comportement asservi de cette unité est donné Figure 1.9. On précise que la variable d'entrée est $\theta_{\text{v\_ref}}(p)$, que la variable de sortie est $\theta_v(p)$ et que la variable $C_c(p)$ est considérée comme une perturbation. Un signal de commande $U_{\text{mv}}(p)$ pilote la motorisation.

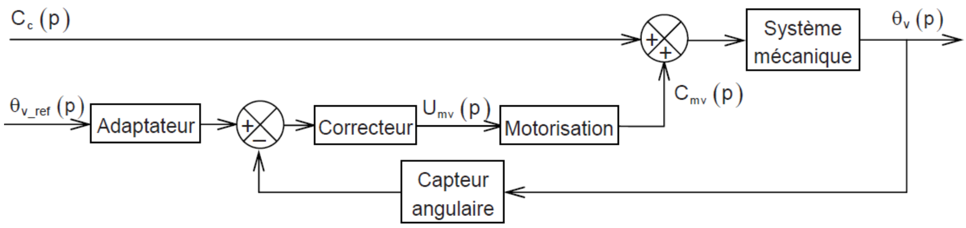
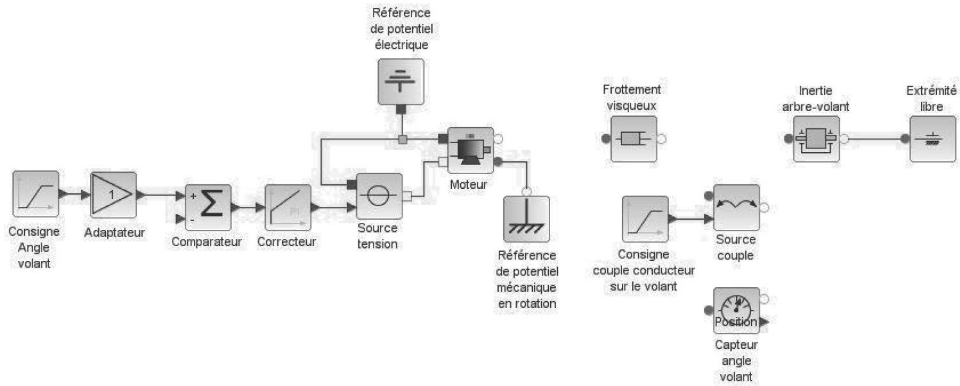
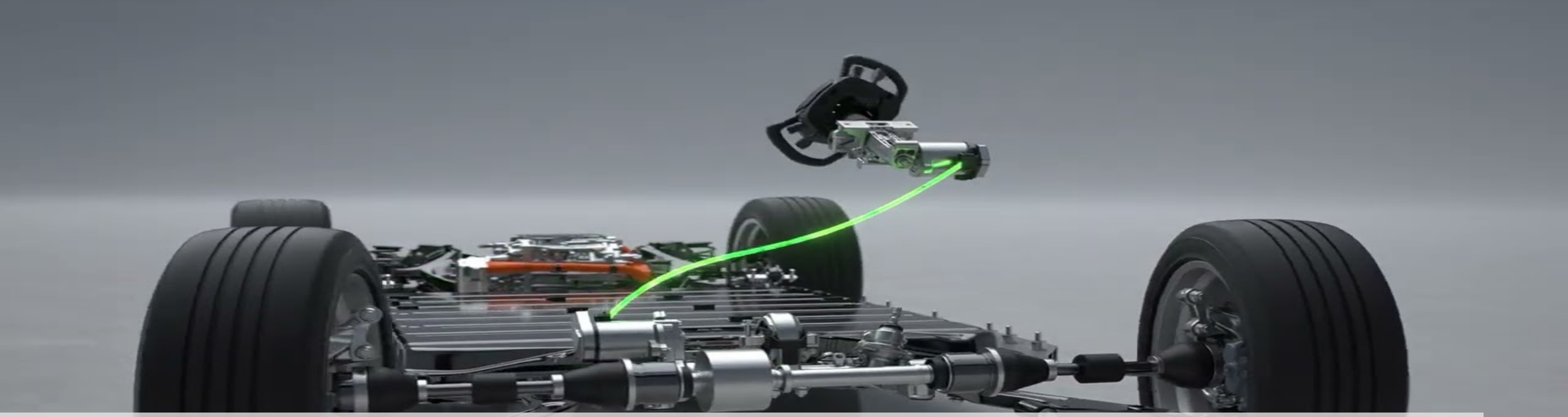


Figure 1.9 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

Un modèle acausal de cette structure dont certains composants ne sont pas reliés aux autres, est donné sur le cahier réponses.

Question 1 Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 1.9.



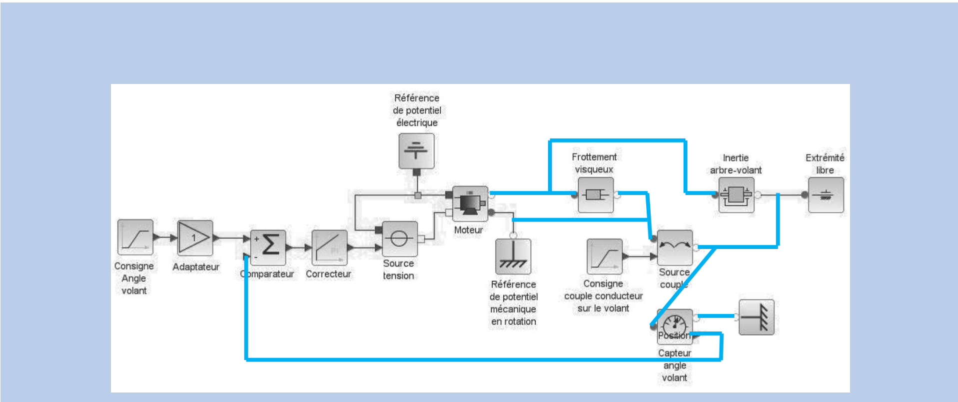


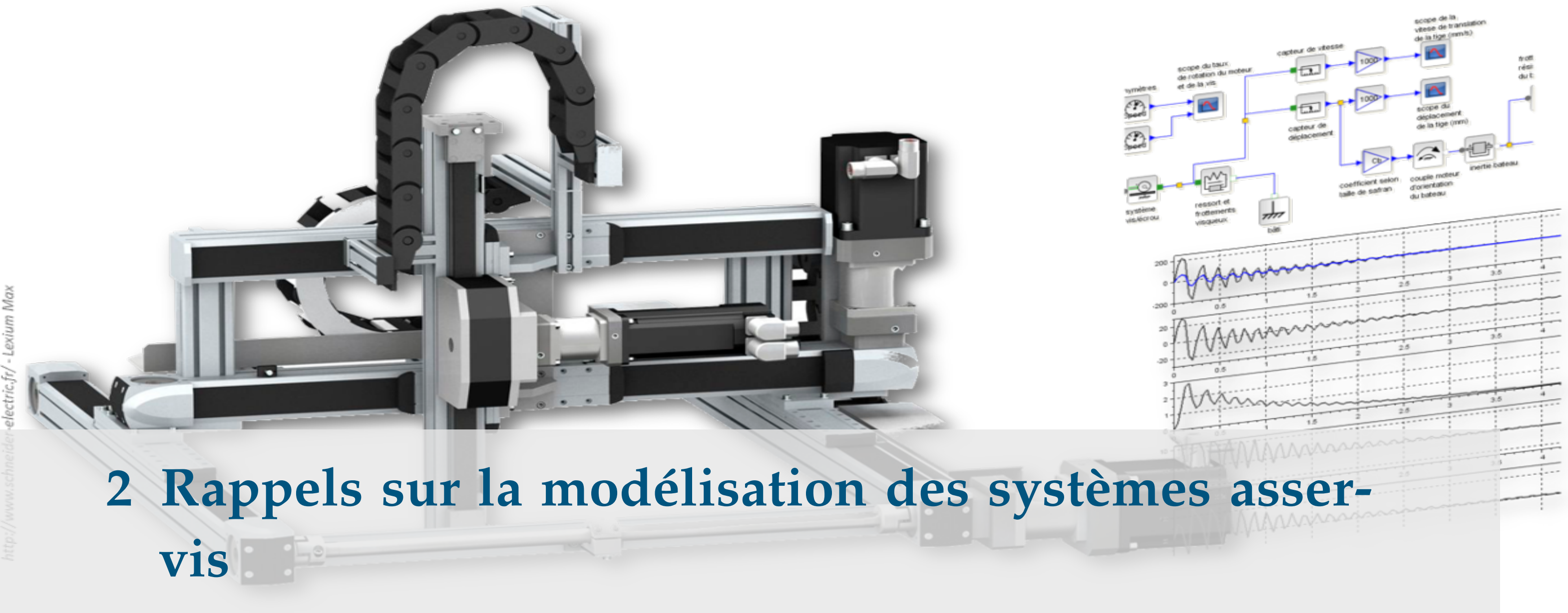
Application 3
Direction automatique découplée – Corrigé

Banque PT – SI A 2017

B2-02

Question 1 Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 1.9.





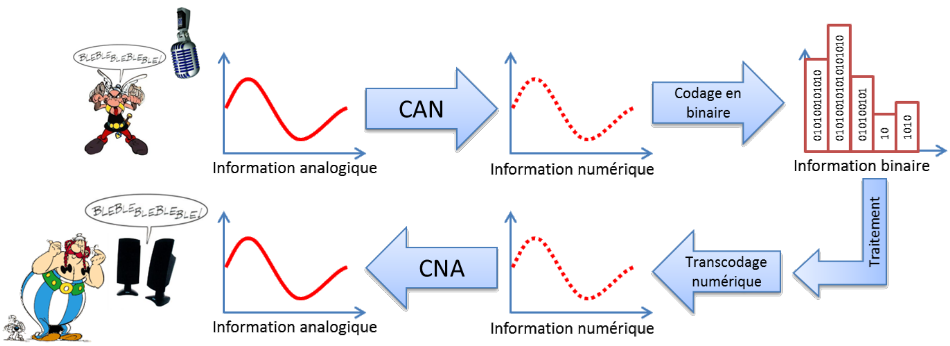
2 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

2.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

2.1.1 Définitions

Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

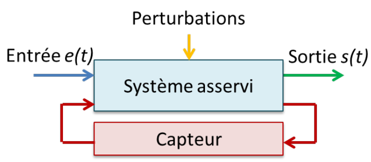


Définition – Systèmes automatiques ou asservis

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable ;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger



de la qualité de la tâche accomplie.

Définition – Précision en position – Écart statique ε_S

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique ε_S comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.

Définition – Précision en vitesse ε_V

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

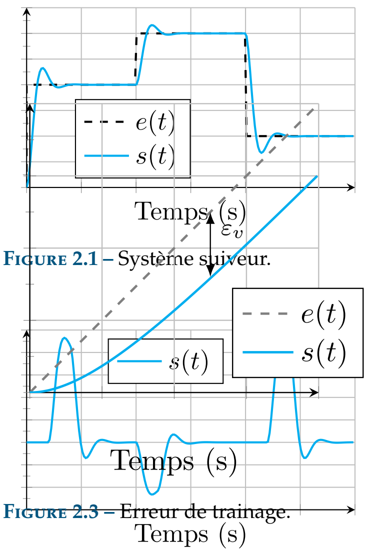


FIGURE 2.1 – Système suiveur.

FIGURE 2.3 – Erreur de traînage.

FIGURE 2.2 – Système régulateur.

Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

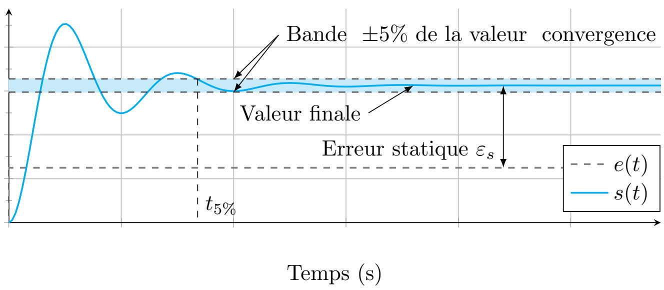


FIGURE 2.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

2.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

2.2.1 Définitions

Définition – Conditions de Heavisde – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(0^+)}{\mathrm{d}t^2} = 0...$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

On note $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]$ la transformée inverse.
De manière générale on note $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(p)$, $\mathcal{L}\left[e(t)\right] = E(p)$, $\mathcal{L}\left[s(t)\right] = S(p)$, $\mathcal{L}\left[\omega(t)\right] = \Omega(p)$, $\mathcal{L}\left[\theta(t)\right] = \Theta(p)$ ...

Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{\mathbf{d}f(t)}{\mathbf{d}t}\right] = pF(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{\mathbf{d}^2 f(t)}{\mathbf{d}t^2}\right] = p^2F(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{\mathbf{d}^n f(t)}{\mathbf{d}t^n}\right] = p^n F(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

2.2.2 Théorèmes

Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\in\mathbb{R}, p\to\infty} pF(p)$$

Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\in\mathbb{R}, p\to 0} pF(p)$$

Théorème – Retard

$$\mathcal{L}\left[f\left(t-t_0\right)\right]=e^{-t_0 p}F(p)$$

Théorème – Amortissement

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f\left(t\right)\right]=F(p+a)$$

2.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

2.3.1 Définitions

Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s, régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

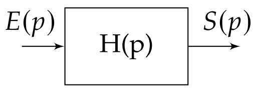
$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}=\frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition – Classe – ordre – pôles – zéros

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p. En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=K\frac{\left(p-z_1\right)\left(p-z_2\right)\ldots\left(p-z_m\right)}{p^{\alpha}\left(p-p_1\right)\left(p-p_2\right)\ldots\left(p-p_n\right)}$$

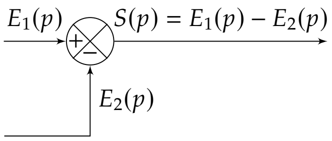
- Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).**
- L'équation $D(p)=0$ est appelée équation caractéristique.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^{α} apparaît au dénominateur. α **est la classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.



Définition – Modélisation d'un bloc

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p)=E(p)\cdot H(p).$$



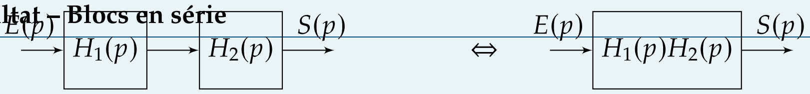
Définition – Modélisation d'un comparateur

Soit l'équation $S(p)=E_1(p)-E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

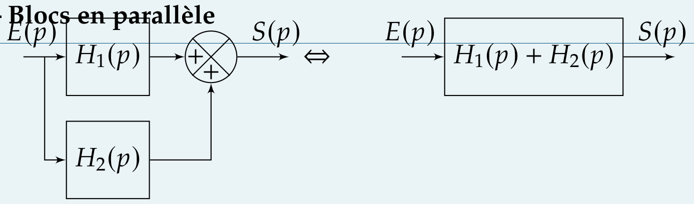
2.3.2 Algèbre de blocs

Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsque on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

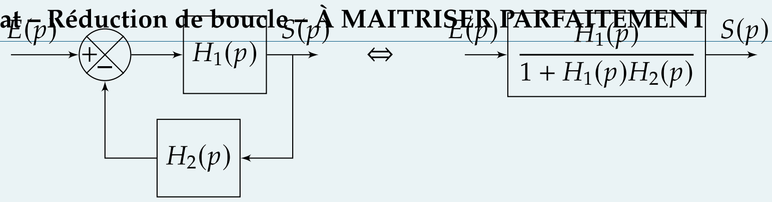
Résultat – Blocs en série



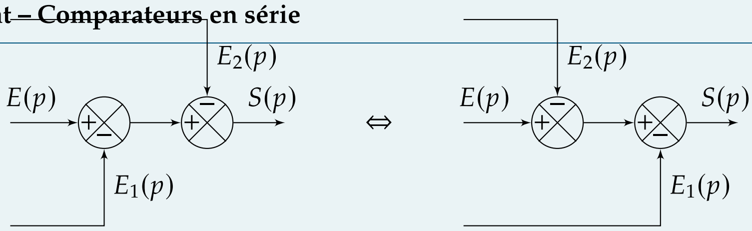
Résultat – Blocs en parallèle



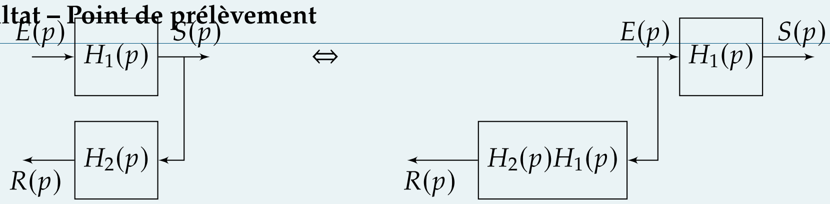
Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



Résultat – Comparateurs en série



Résultat – Point de prélèvement

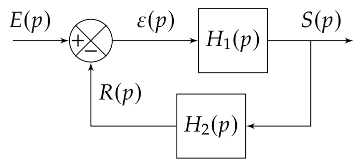


2.3.3 Fonctions usuelles

Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

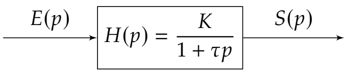
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S. On note $H_1 = \dfrac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \dfrac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1E_1 + H_2E_2$.

2.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

2.4.1 Systèmes d'ordre 1



Définition – Système d'ordre 1

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

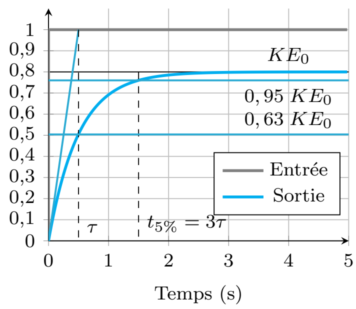
$$\tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

On note :

- τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$) ;
- K le gain statique du système ($K > 0$).



Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0. Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = KE_0u(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.
Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote KE_0 ;
- la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale $s_\infty = KE_0$;
- pente à l'origine **non nulle** ;

Résultat –

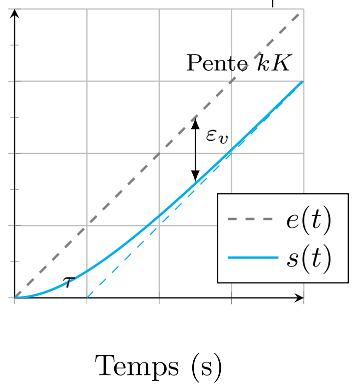
– Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

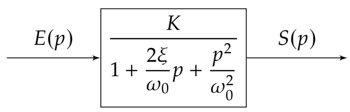
$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = Kk\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$.
Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote Kk ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$.



2.4.2 Systèmes d'ordre 2



Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

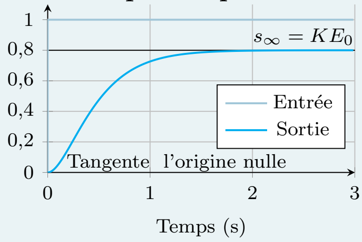
On note :

- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E) ;
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

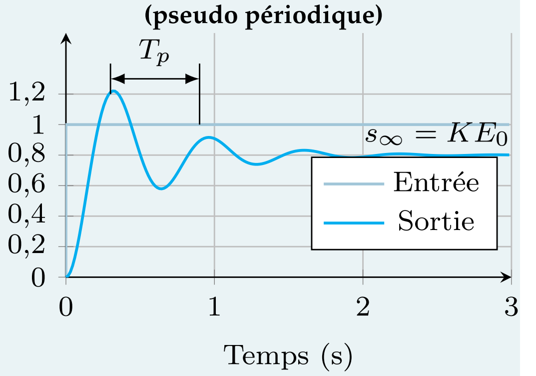
Résultat –

$\xi \geq 1$ **: système non oscillant et amorti (apériodique)**



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$\xi < 1$ **: système oscillant et amorti (pseudo périodique)**



- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.
- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = KE_0 e^{\dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.

Résultat –

- Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude KE_0 ($2KE_0$ crête à crête).
- Pour $\xi \simeq 0,69$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \simeq 3$.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

2.5 Réponse fréquentielle des SLCI

2.5.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad.

On a par ailleurs :

- $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \dfrac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

Définition –

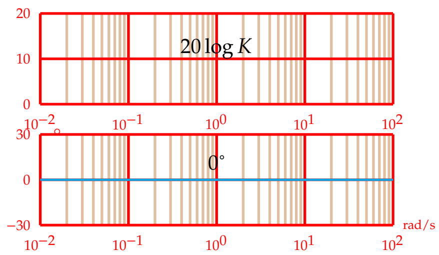
Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :

- $H_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$.

On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :

- $H_{dB}(\omega) = G1_{dB}(\omega) + G2_{dB}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G1_{dB}(\omega)) + \text{Arg}(G2_{dB}(\omega))$.

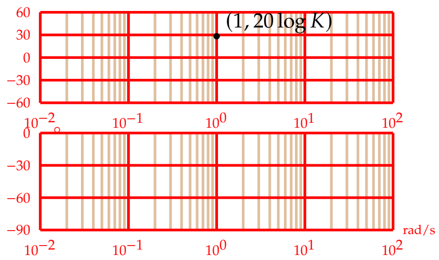
2.5.2 Gain



Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20\log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée $0°$.

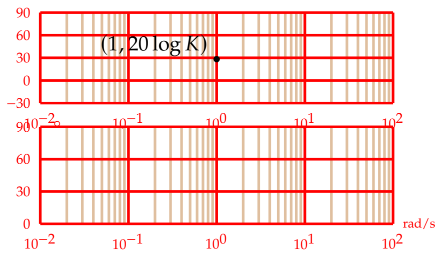
2.5.3 Intégrateur



Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{p}$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente −20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $-90\,°$.

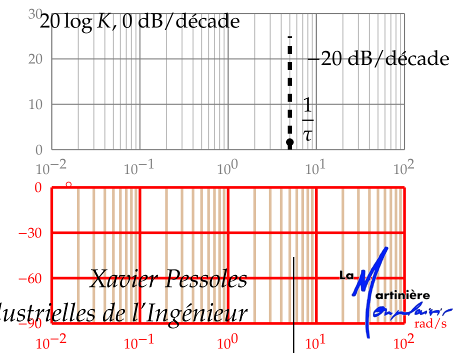
2.5.4 Dérivateur



Résultat – Diagramme de Bode d'un dérivateur

- Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $+90\,°$.

2.5.5 Systèmes d'ordre 1



Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

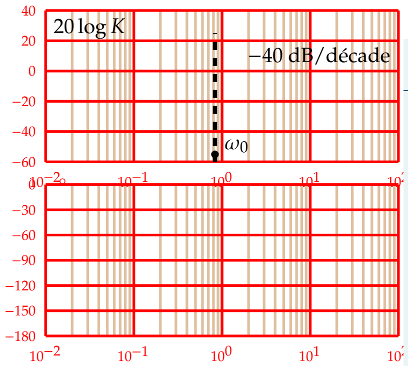
- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.
- Diagramme de gain asymptotique :

- pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
- pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite de pente −20dB/decade.

▶ Diagramme de phase asymptotique :

- pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée 0 ° ;
- pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée −90 °.

2.5.6 Systèmes d'ordre 2



Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

▶ Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Cas où $\xi < 1$.

▶ Diagramme de gain asymptotique :

- pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
- pour $\omega > \omega_0$: droite de pente −40dB/decade.

▶ Diagramme de phase asymptotique :

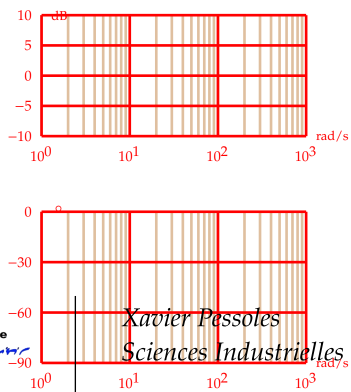
- pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0 ° ;
- pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée −180°.

Dans le **cas où** $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.
À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20 \log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

2.5.7 Retard



Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

▶ Fonction de transfert : $H(p) = e^{-Tp}$.
▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
▶ Diagramme de phase asymptotique : $\arg(H(p)) = -\tau\omega$ ... *à tracer*.

2.5.8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode – Méthode 1 : sommation dans le diagramme de Bode

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus) ;
2. tracer chacune des fonctions de transfert ;
3. sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

Méthode – Méthode 2 : tableau de variations

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus) ;
2. réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes ;
3. sommer les pentes ;
4. tracer le diagramme de Bode.