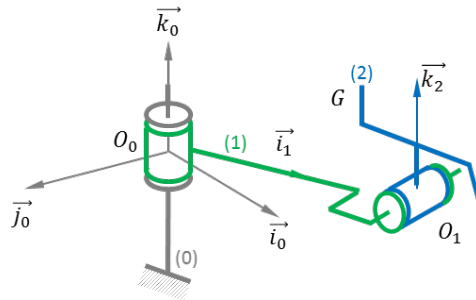


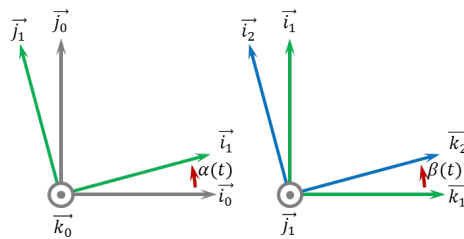
Application 1

Centrifugeuse humaine – Sujet

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a \vec{i}_1$;
- $\overrightarrow{O_1G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$.

Trajectographie

Question 1 Donner la trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 .

Cinématique

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V}(G, S_2/S_0)$.

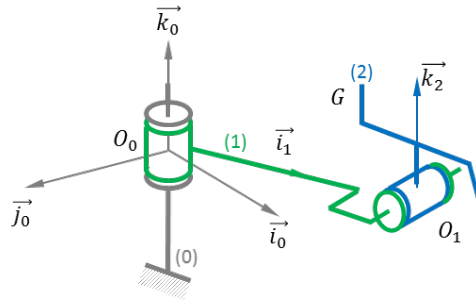
Accélération

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Gamma}(G, S_2/S_0)$.

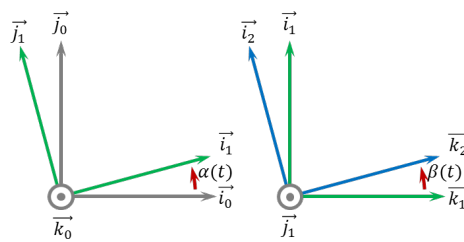
Application 1

Centrifugeuse humaine – Corrigé

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- ▶ $\overrightarrow{O_0O_1} = a \vec{i}_1$;
- ▶ $\overrightarrow{O_1G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$.

Trajectographie

Question 1 Donner la trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 .

Correction

La trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a \vec{i}_1 + b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans \mathcal{R}_0 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_0G}(t) &= a \left(\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) + b \left(\cos \beta(t) \vec{i}_1 - \sin \beta(t) \vec{k}_1 \right) + c \left(\cos \beta(t) \vec{k}_1 + \sin \beta(t) \vec{i}_1 \right) \\ &= a \left(\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) + b \left(\cos \beta(t) \left(\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) - \sin \beta(t) \vec{k}_0 \right) \\ &\quad + c \left(\cos \beta(t) \vec{k}_0 + \sin \beta(t) \left(\cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) \right) \\ &= \begin{bmatrix} a \cos \alpha(t) + b \cos \beta(t) \cos \alpha(t) + c \sin \beta(t) \cos \alpha(t) \\ a \sin \alpha(t) + b \cos \beta(t) \sin \alpha(t) + c \sin \beta(t) \sin \alpha(t) \\ -b \sin \beta(t) + c \cos \beta(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

Cinématique

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V}(G, S_2/S_0)$.

Accélération

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Gamma}(G, S_2/S_0)$.

Correction

Méthode 1 – PAS RECOMMANDE Par définition,

$$\overrightarrow{V}(O_1, S_1/S_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d(a\vec{i}_1)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = a \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[\frac{d(\cos \alpha(t)\vec{i}_0 + \sin \alpha(t)\vec{j}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d \cos \alpha(t)\vec{i}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d \sin \alpha(t)\vec{j}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d \cos \alpha(t)}{dt} \vec{i}_0 + \cos \alpha(t) \underbrace{\left[\frac{d\vec{i}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} + \frac{d \sin \alpha(t)}{dt} \vec{j}_0 + \sin \alpha(t) \underbrace{\left[\frac{d\vec{j}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} \\ &= -\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \vec{i}_0 + \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \vec{j}_0 = \dot{\alpha}(t) \vec{j}_1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V}(O_1, S_1/S_0) = \begin{bmatrix} -a\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \\ a\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\dot{\alpha}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Dans les deux cas, $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ est dérivé par rapport \mathcal{R}_0 mais il s'exprime différemment dans \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 :

- $\overrightarrow{V}(O_1, S_1/S_0) = -a\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \vec{i}_0 + a\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \vec{j}_0$: ici la base de **projection** et de **dérivation** est la base \mathcal{B}_0 ;
- $\overrightarrow{V}(O_1, S_1/S_0) = a\dot{\alpha}(t) \vec{j}_1$: ici la base de dérivation est la base \mathcal{B}_0 et la base de projection est \mathcal{B}_1 .

Méthode 2 – Utilisation de la dérivation vectorielle.

Calcul de $\overrightarrow{V}(O_1, S_1/S_0)$.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{V}(O_1, S_1/S_0) = a \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Le calcul de $\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{i}_1 = \dot{\alpha} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\alpha} \vec{j}_1$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\vec{j}_1$$

Méthode 3 – Calcul de $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)}$.

S_1 et S_0 sont en liaison pivot de centre O_0 , on a donc : $\overrightarrow{V(O_0, S_1/S_0)} = \vec{0}$.

En conséquence,

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_0, S_1/S_0)} + \overrightarrow{O_1O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \vec{0} - a\vec{i}_1 \wedge (\dot{\alpha}\vec{k}_0) = a\dot{\alpha}\vec{j}_1$$

Correction

Calcul de $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$.

On a :

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \overrightarrow{V(G, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G, S_1/S_0)}$$

Calculons $\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\vec{j}_1 - (b\vec{i}_2 + c\vec{k}_2) \wedge (\dot{\alpha}\vec{k}_0)$$

$$\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\vec{j}_1 + b\dot{\alpha}\sin(\beta + \pi/2)\vec{j}_1 + c\dot{\alpha}\sin\beta\vec{j}_1 = \dot{\alpha}(a + b\cos\beta + c\sin\beta)\vec{j}_1$$

Par ailleurs calculons $\overrightarrow{V(G, S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/S_1)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = - (b\vec{i}_2 + c\vec{k}_2) \wedge (\dot{\beta}\vec{j}_1) = -\dot{\beta}(b\vec{k}_2 - c\vec{i}_2)$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \dot{\alpha}(a + b\cos\beta + c\sin\beta)\vec{j}_1 - \dot{\beta}(b\vec{k}_2 - c\vec{i}_2)$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0G}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Mouvement RT – RSG ★★

B2-13

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$.
 $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{V(B, 1/0)}$.

D'une part, $\overrightarrow{V(B, 2/1)} = \dot{\lambda} \vec{i}_1$.

D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I , $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(I, 1/0)} + \vec{BI} \wedge \vec{\Omega(1/0)} = \vec{0} + (-\lambda(t) \vec{i}_1 - R \vec{j}_0) \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = -\dot{\theta} (\lambda(t) \vec{i}_1 \wedge \vec{k}_0 + R \vec{j}_0 \wedge \vec{k}_0) = \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$.

Au final, $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$.

Question 5 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B .

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B.$$

Question 6 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(B, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \vec{j}_1 + \ddot{\theta}(t) (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) + \dot{\theta}(t) (\dot{\lambda}(t) \vec{j}_1 - \lambda(t) \dot{\theta} \vec{i}_1)$$

Mouvement RR – RSG ★★

B2-13

Question 7 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$. En utilisant la décomposition du vecteur vitesse : $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{V(B, 1/0)}$.

- **Calcul de $\overrightarrow{V(B, 2/1)}$:** $\overrightarrow{V(B, 2/1)} = \overrightarrow{V(A, 2/1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}$. 2 et 1 étant en pivot d'axe (A, \vec{k}_0) , on a $\overrightarrow{V(B, 2/1)} = \vec{0} - L\vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi}(t)\vec{k}_0 = L\dot{\varphi}(t)\vec{j}_2$.
- **Calcul de $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$:** $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(I, 1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \vec{0} - L\vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi}(t)\vec{k}_0$. En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement : $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = (-L\vec{i}_2 - R\vec{j}_0) \wedge \dot{\theta}(t)\vec{k}_0 = \dot{\theta}(t)(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0)$.

Au final, $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = L\dot{\varphi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t)(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0)$.

Question 8 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{k}_0 \\ L\dot{\varphi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t)(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$.

Question 9 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

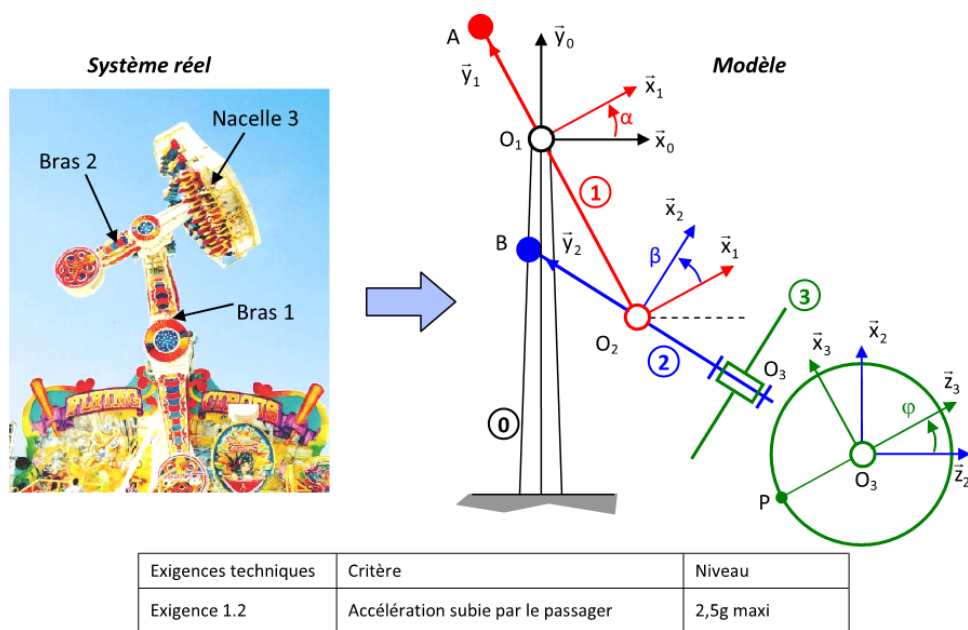
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} &= \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(B, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[L\dot{\varphi}(t)\vec{j}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} \left[\dot{\theta}(t)(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0) \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= L\ddot{\varphi}(t)\vec{j}_2 - L\dot{\varphi}(t)(\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t)(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0) - L\dot{\theta}^2(t)\vec{i}_1. \end{aligned}$$

Application 2

Magic Arms – Sujet

Florestan Mathurin.

La manège Magic Arms dont la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 pièces disposées sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaires (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par ordinateur.



Le manège, schématisé ci-dessus, comporte :

- un bras principal 1 assimilé à une barre AO_1O_2 . Il est en liaison pivot parfait d'axe (O_1, \vec{z}_1) caractérisée par le paramètre α avec le bâti 0. On pose $\overrightarrow{O_1O_2} = -l_1\vec{y}_1$;
- un bras secondaire 2 assimilé à une barre BO_2O_3 . Il est en liaison pivot parfait d'axe (O_2, \vec{z}_2) caractérisée par le paramètre β avec le bras principal 1. On pose $\overrightarrow{O_2O_3} = -l_2\vec{y}_2$;
- une nacelle 2 assimilée à un disque de centre O_3 et de rayon R . Elle est en liaison parfaite d'axe (O_3, \vec{y}_2) caractérisée par le paramètre φ avec le bras 2. On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel P tel que $\overrightarrow{O_3P} = -R\vec{z}_3$.

Question 1 Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

Question 2 Calculer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 4 Calculer les produits vectoriels suivants : $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$, $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$, $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$.

Question 5 Calculer $\overrightarrow{V}(O_2, 2/0)$, $\overrightarrow{V}(O_3, 3/0)$ et $\overrightarrow{V}(P, 3/0)$.

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

Question 6 Déterminer les valeurs des paramètres $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$ puis l'expression analytique des positions angulaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et $\varphi(t)$ dans l'intervalle de temps $[17; 27]$ secondes en sachant qu'à l'instant $t = 17$ s, on a $\alpha = 10,5$ rad, $\beta = 3,76$ rad et $\varphi = -10,676$ rad.

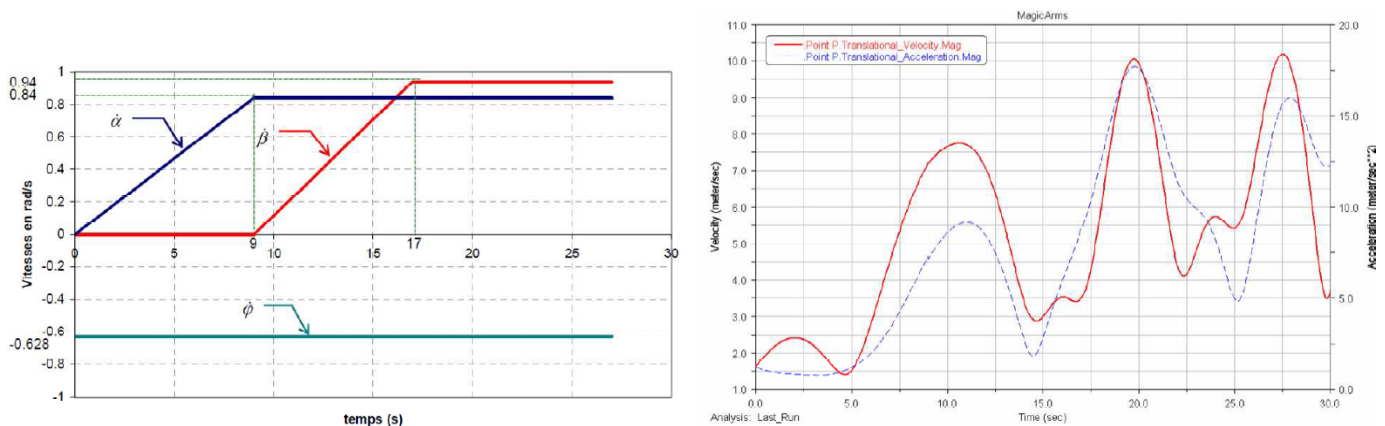
Question 7 Déterminer les valeurs numériques à l'instant $t_1 = 19,8$ s de α , β et φ .

Question 8 On pose $\overrightarrow{V}(P, 3/0) = V_{x2}\vec{x}_2 + V_{y2}\vec{y}_2 + V_{z2}\vec{z}_2$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2} , V_{y2} , V_{z2} puis les valeurs numériques de à $t_1 = 19,8$ s. (On donne : $l_1 = 3,9$ m, $l_2 = 2,87$ m, $R = 2,61$ m.)

Question 9 Calculer $\overrightarrow{\Gamma}(P \in 3/0)$.

Question 10 Calculer $\overrightarrow{\Gamma}(P \in 3/0)$ dans l'intervalle de temps $[17; 27]$ secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Le graphe ci-dessous (à droite), obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager P par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accélération du passager P par rapport au bâti 0 en fonction du temps.



Question 11 Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps $t_1 = 19,8$ s.

Question 12 Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

1. $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0$, $\overrightarrow{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\vec{z}_0$, $\overrightarrow{\Omega}(3/2) = \dot{\varphi}\vec{y}_2$.
2. $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{z}_0$, $\overrightarrow{\Omega}(3/0) = (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{y}_2$;
3. $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 = \sin \varphi \vec{y}_2$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \varphi \vec{y}_2$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2$, $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$, $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 = -\sin(\beta + \alpha)\vec{z}_0$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 = -\cos \varphi \vec{y}_2$.
4. $\overrightarrow{V}(O_2, 2/0) = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1$, $\overrightarrow{V}(O_3, 3/0) = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2$, $\overrightarrow{V}(P, 3/0) = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \dot{\varphi} \vec{y}_2$.
5. $\dot{\alpha} = 0,84$ rad/s, $\dot{\beta} = 0,94$ rad/s, $\dot{\varphi} = -0,628$ rad/s et $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$.
6. $\alpha = 12,85$ rad, $\beta = 6,39$ rad, $\varphi = 12,43$ rad.
7. $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi = 9,99$ m/s, $V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = -0,28$ m/s, $V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi = -0,22$ m/s.

9. $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{x_2} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} - R\dot{\varphi} \overrightarrow{x_3} + R\dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}.$
10. $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} + R\dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}.$
11. $\left\| \overrightarrow{V(P, 3/0)} \right\| = \boxed{10 \text{ m/s}}$
12. .

Application 2

Magic Arms – Corrigé

Florestan Mathurin.



Question 1 Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

Correction

Question 2 Calculer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\phi} \vec{y}_2.$$

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega(2/0)} &= \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{\Omega(3/0)} &= \overrightarrow{\Omega(3/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\phi} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

Question 4 Calculer les produits vectoriels suivants : $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$, $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$, $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$.

Correction

$$\begin{aligned} \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 &= \sin \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 &= -\sin \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 &= -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \vec{y}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{0} \\ \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 &= \left(\cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1 \right) \wedge \vec{x}_0 = -\cos \beta \sin \alpha \vec{z}_0 - \sin \beta \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \vec{z}_0 = (-\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \vec{z}_0 = -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 &= -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \vec{y}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2. \end{aligned}$$

Question 5 Calculer $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$, $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$ et $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} &= \overrightarrow{V(O_2, 2/1)} + \overrightarrow{V(O_2, 1/0)} = \overrightarrow{V(O_1, 1/0)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge (-l_1 \vec{y}_1) \\ \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} &= \overrightarrow{V(O_3, 3/2)} + \overrightarrow{V(O_3, 2/0)} = \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge (-l_2 \vec{y}_2) \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V(P, 3/0)} &= \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{O_3 P} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 + \left((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\phi} \vec{y}_2 \right) \wedge (-R \vec{z}_3) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3$$

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

Question 6 Déterminer les valeurs des paramètres $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$ puis l'expression analytique des positions angulaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et $\varphi(t)$ dans l'intervalle de temps $[17; 27]$ secondes en sachant qu'à l'instant $t = 17$ s, on a $\alpha = 10,5$ rad, $\beta = 3,76$ rad et $\varphi = -10,676$ rad.

Correction

Dans l'intervalle de temps compris entre 17 et 27 secondes, les vitesses angulaires sont constantes.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s} \\ \dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s} \\ \dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Ainsi, par intégration : $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$

Question 7 Déterminer les valeurs numériques à l'instant $t_1 = 19,8$ s de α , β et φ .

Correction

Pour $t = 19,8$ s,

$$\begin{cases} \alpha = 0,84 \times (19,8 - 17) + 10,5 = 12,85 \text{ rad} \\ \beta = 0,94 \times (19,8 - 17) + 3,76 = 6,39 \text{ rad} \\ \varphi = -0,628 \times (19,8 - 17) - 10,676 = 12,43 \text{ rad} \end{cases}$$

Question 8 On pose $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2} \vec{x}_2 + V_{y2} \vec{y}_2 + V_{z2} \vec{z}_2$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2} , V_{y2} , V_{z2} puis les valeurs numériques de à $t_1 = 19,8$ s. (On donne : $l_1 = 3,9$ m, $l_2 = 2,87$ m, $R = 2,61$ m.)

Correction

Il s'agit de projeter le vecteur $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. En effet, le vecteur \vec{z}_2 est identique au vecteur \vec{z}_0 .

$$\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2} \vec{x}_2 + V_{y2} \vec{y}_2 + V_{z2} \vec{z}_2$$

$$V_{x2} = \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_2$$

$$= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_2$$

$$V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$V_{y2} = \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{y}_2$$

$$= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{y}_2$$

$$V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})$$

$$V_{z2} = \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{z}_2$$

$$= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{z}_2$$

$$V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi$$

Valeurs numériques à $t = 19,8 \text{ s}$:

$$V_{x2} = 3,9 \times 0,84 \times \cos(6,39) + 2,87 \times (0,84 + 0,94) + 2,61 \times 0,628 \times \cos(12,43)$$

$$= \boxed{9,99 \text{ m/s}}$$

$$V_{y2} = -3,9 \times 0,84 \times \sin(6,39) - 2,61 \times \sin(12,43) \times (0,84 + 0,94)$$

$$= \boxed{-0,28 \text{ m/s}}$$

$$V_{z2} = -2,61 \times 0,628 \times \sin(12,43)$$

$$= \boxed{-0,22 \text{ m/s}}$$

Question 9 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} &= \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{V(P, 3/0)}]_0 \\ &= \frac{d}{dt} \left(l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3 \right)_0 \\ &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha} \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_0}_{\dot{\alpha} \vec{y}_1} + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{x}_2]_0}_{(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2} - R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\ &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{y}_2]_0}_{-(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2} - R \dot{\varphi} \vec{x}_3 - R \dot{\varphi} \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_0 \\ \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_0 &= \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_3 + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \vec{x}_3 \\ &= ((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2) \wedge \vec{x}_3 \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \varphi \vec{y}_2 - \dot{\varphi} \vec{z}_3 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\ &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3 \end{aligned}$$

Question 10 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ dans l'intervalle de temps $[17; 27]$ secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Correction

Dans le cas où les vitesses angulaires sont constantes, les accélérations angulaires $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$, et $\ddot{\varphi}$ sont nulles. L'expression de $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$ se simplifie donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$$

Question 11 Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps $t_1 = 19,8 \text{ s}$.

Correction

Le graphe montre qu'à $t = 19,8$ s, l'intensité du vecteur $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ vaut 10 m/s. Or d'après la question 8,

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{V(P, 3/0)}\right\| &= \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2 + V_{z2}^2} \\ &= \sqrt{9,99^2 + 0,28^2 + 0,22^2} \\ &= \boxed{10 \text{ m/s}}\end{aligned}$$

On constate que le calcul littéral nous donne le même résultat que l'exploitation de la courbe.

Question 12 Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

Correction

D'après la courbe de l'accélération (en pointillés), la valeur maximale de l'accélération subie par le passager vaut $17,5 \text{ m/s}^2$. Le cahier des charges exige que l'accélération maximale ne dépasse pas $2,5 g$, soit $24,5 \text{ m/s}^2$. Le cahier des charges est donc respecté.

1. $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi} \overrightarrow{y_2}$.
2. $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{z_0} + \dot{\varphi} \overrightarrow{y_2}$;
3. $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = \sin \varphi \overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{x_2} = -\sin \varphi \overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\cos \varphi \overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_1} = \vec{0}$,
 $\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_0} = -\sin(\beta + \alpha) \overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_0} = -\cos \varphi \overrightarrow{y_2}$.
4. $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)} = l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} - R \dot{\varphi} \overrightarrow{z_3}$.
5. $\dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s}$, $\dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s}$, $\dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s}$ et $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$.
6. $\alpha = \boxed{12,85 \text{ rad}}$, $\beta = \boxed{6,39 \text{ rad}}$, $\varphi = \boxed{12,43 \text{ rad}}$.
7. $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi = \boxed{9,99 \text{ m/s}}$, $V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = \boxed{-0,28 \text{ m/s}}$, $V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi = \boxed{-0,22 \text{ m/s}}$.
8. $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{x_2} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} - R \ddot{\varphi} \overrightarrow{x_3} + R \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}$.
9. $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} + R \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}$.
10. $\left\|\overrightarrow{V(P, 3/0)}\right\| = \boxed{10 \text{ m/s}}$
11. .
12. .

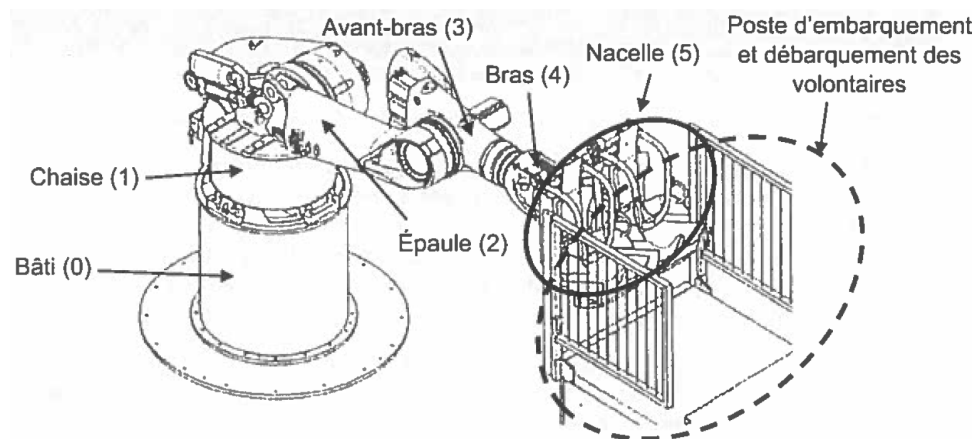
Application 3

Danse avec les robots – Sujet

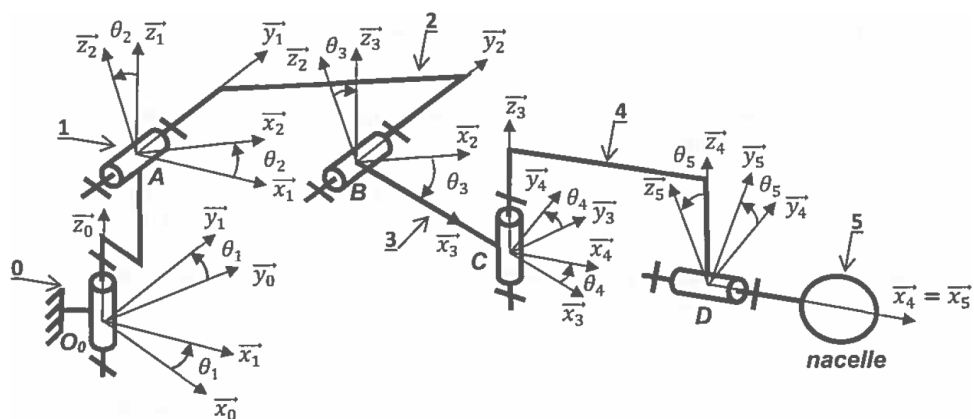
ICNA 2017.

« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remuées au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.



On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

- On note $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.
- On note $\mathcal{R}_1 = (O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère associé à la chaise 1 et $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- On note $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère associé à l'épaule 2, $\vec{O_0A} = a\vec{z}_0 + b\vec{x}_1$ et $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.

- On note $\mathcal{R}_3 = (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère associé à l'avant-bras 3, $\vec{AB} = c\vec{x}_2$ et $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- On note $\mathcal{R}_4 = (C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ le repère associé au bras 4, $\vec{BC} = d\vec{x}_3$ et $\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$ l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- On note $\mathcal{R}_5 = (D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ le repère associé à la nacelle 5, $\vec{CD} = e\vec{x}_4$ et $\theta_5 = (\vec{y}_4, \vec{y}_5) = (\vec{z}_4, \vec{z}_5)$ l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaire + harnais) est tel que $\vec{DG} = f\vec{x}_4 + h\vec{z}_5$.

On définit la position du point G dans la base $\mathcal{R}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ telle que $\vec{O_0G} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$.

Question 1 Tracer les figures planes de changement de repère.

Question 2 Exprimer la position du point G suivant \vec{x}_0 .

Objectif

Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

Question 3 Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\vec{V}(G, 5/0)$.

On limite désormais l'étude dans au cas où $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad s}^{-1}$, $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$.

Question 4 Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\vec{\Gamma}(G, 5/0)$.

Question 5 Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.

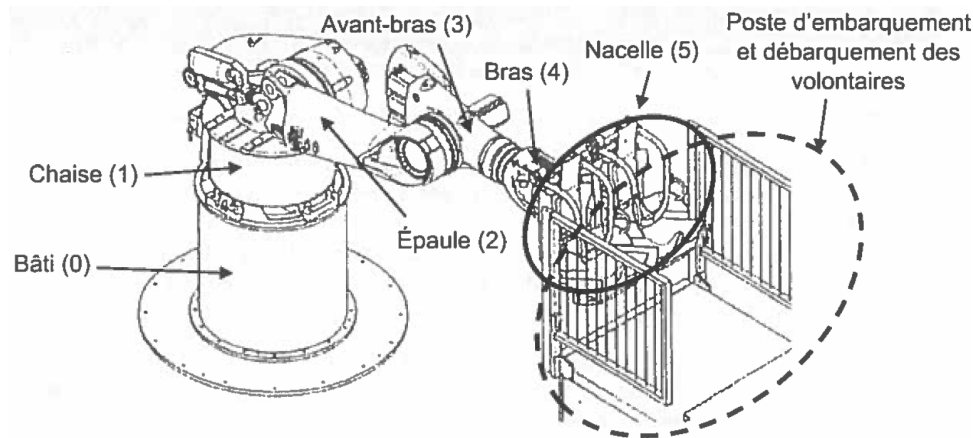
Application 3

Danse avec les robots – Corrigé

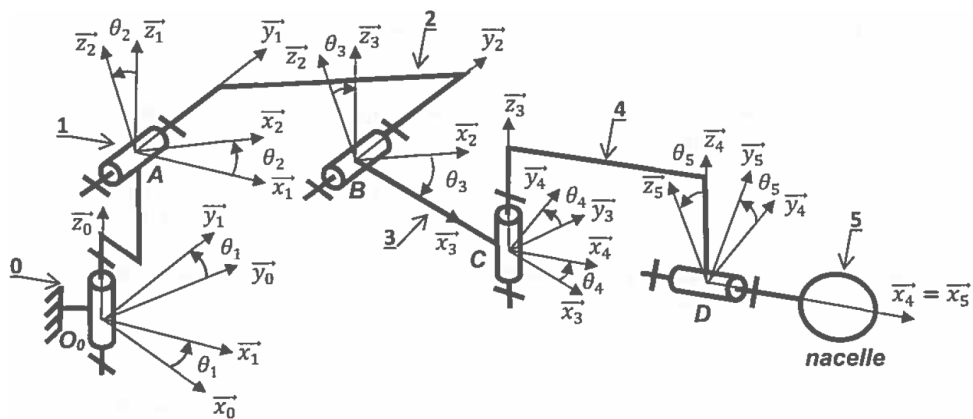
ICNA 2017.

« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remuées au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.



On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

- On note $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.
- On note $\mathcal{R}_1 = (O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère associé à la chaise 1 et $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- On note $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère associé à l'épaule 2, $\vec{O_0A} = a\vec{z}_0 + b\vec{x}_1$ et $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.

- On note $\mathcal{R}_3 = (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère associé à l'avant-bras 3, $\overrightarrow{AB} = c\vec{x}_2$ et $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- On note $\mathcal{R}_4 = (C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ le repère associé au bras 4, $\overrightarrow{BC} = d\vec{x}_3$ et $\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$ l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- On note $\mathcal{R}_5 = (D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ le repère associé à la nacelle 5, $\overrightarrow{CD} = e\vec{x}_4$ et $\theta_5 = (\vec{y}_4, \vec{y}_5) = (\vec{z}_4, \vec{z}_5)$ l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaire + harnais) est tel que $\overrightarrow{DG} = f\vec{x}_4 + h\vec{z}_5$.

On définit la position du point G dans la base $\mathcal{R}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ telle que $\overrightarrow{O_0G} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$.

Question 1 Tracer les figures planes de changement de repère.

Correction

Question 2 Exprimer la position du point G suivant \vec{x}_0 .

Correction

Objectif

Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

Question 3 Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{V}(G, 5/0)$.

Correction

On limite désormais l'étude dans au cas où $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad s}^{-1}$, $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$.

Question 4 Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{\Gamma}(G, 5/0)$.

Correction

Question 5 Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.

Correction

Application 4

Robot de peinture ★★ – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Robot de peinture

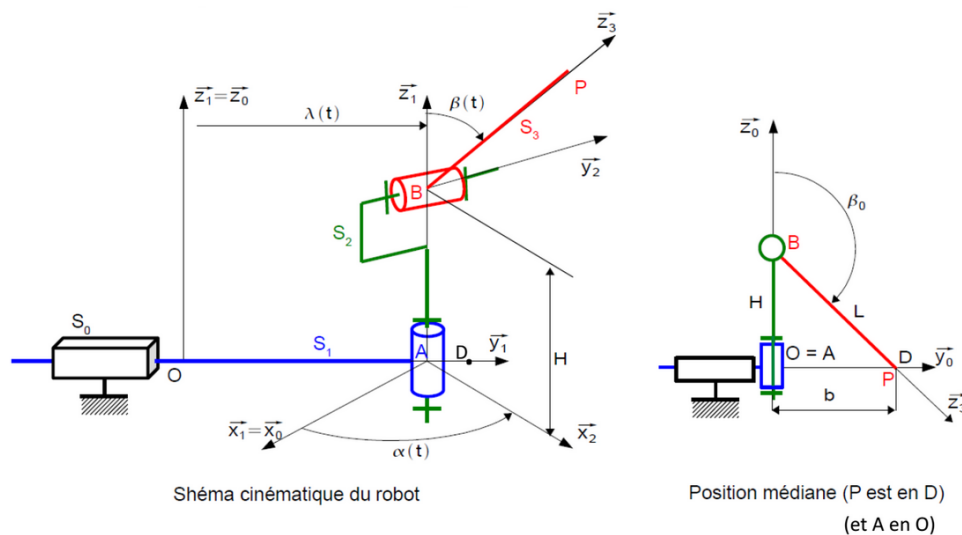
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Le chariot S_1 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1 (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en mouvement de translation de direction \vec{y}_0 par rapport au bâti S_0 de repère $\mathcal{R}_0 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le corps S_2 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2 (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{z}_0) avec le chariot S_1 .

Le bras S_3 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_3 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{y}_2) avec le corps S_2 .

Question 1 Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

Question 2 Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation : $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_0$.

Question 6 Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants : $\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_2$, $\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$.

On a $\overrightarrow{OD} = b\vec{y}_0$ avec $b = \sqrt{L^2 - H^2}$. On désire que P décrive la droite (D, \vec{x}_0) à vitesse constante V , conformément au cahier des charges.

Question 7 Représenter sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, puis sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, les positions des points O , D , A , B et P du robot lorsque celui-ci est en position extrême (A est en D).

Question 8 Traduire, à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ le fait que P se déplace à la vitesse V selon \vec{x}_0 . En déduire $\dot{\beta}$.

Question 9 Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L , V , α et β_0 .

Question 10 A l'aide de la figure précédente, exprimer β_0 en fonction de b et L .

Question 11 Exprimer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V , b et α .

Application 4

Robot de peinture ★★ – Corrigé

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Robot de peinture

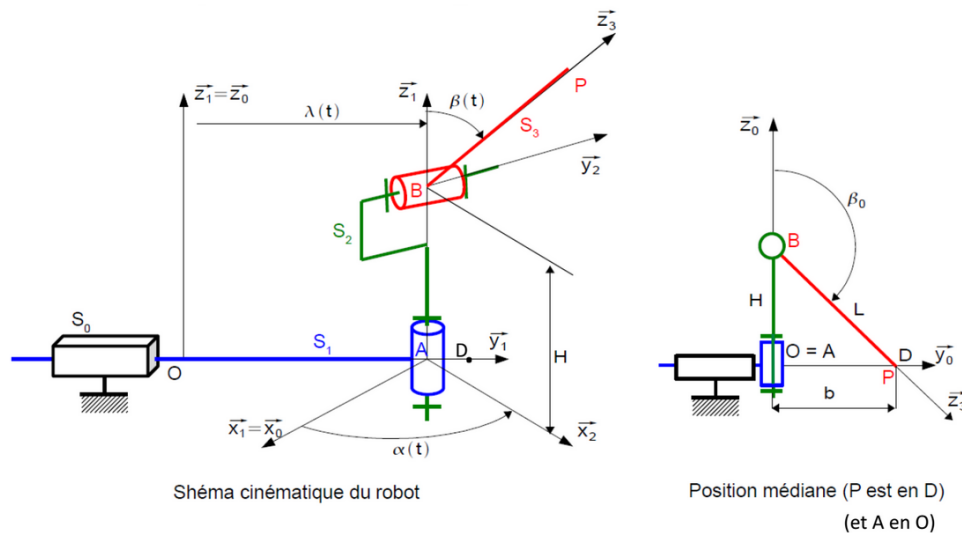
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Le chariot S_1 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1 (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en mouvement de translation de direction \vec{y}_0 par rapport au bâti S_0 de repère $\mathcal{R}_0 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le corps S_2 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2 (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{z}_0) avec le chariot S_1 .

Le bras S_3 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_3 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{y}_2) avec le corps S_2 .

Question 1 Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

Question 2 Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation : $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \overrightarrow{x_0}$.

Question 6 Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants : $\overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{z_3} \cdot \overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{z_3} \cdot \overrightarrow{y_1}$.

On a $\overrightarrow{OD} = b\overrightarrow{y_0}$ avec $b = \sqrt{L^2 - H^2}$. On désire que P décrive la droite $(D, \overrightarrow{x_0})$ à vitesse constante V , conformément au cahier des charges.

Question 7 Représenter sur une figure dans le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$, puis sur une figure dans le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$, les positions des points O , D , A , B et P du robot lorsque celui-ci est en position extrême (A est en D).

Question 8 Traduire, à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ le fait que P se déplace à la vitesse V selon $\overrightarrow{x_0}$. En déduire $\dot{\beta}$.

Question 9 Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L , V , α et β_0 .

Question 10 A l'aide de la figure précédente, exprimer β_0 en fonction de b et L .

Question 11 Exprimer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V , b et α .

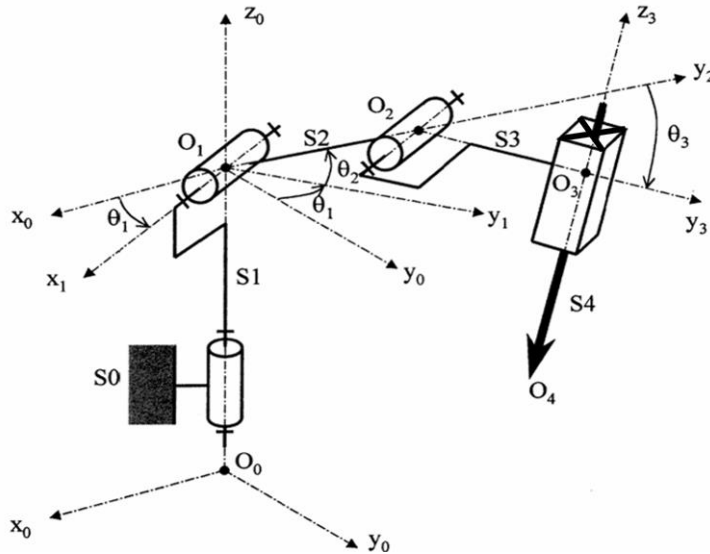
Application 5

Robot soudeur ★★ – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



Ce robot est constitué de cinq solides :

- ▶ le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que \vec{z}_0 vertical ascendant ;
- ▶ le fût 1, de repère associé $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$;
- ▶ le bras 2, de repère associé $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$;
- ▶ l'avant-bras 3, de repère associé $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$;
- ▶ la buse 4, de repère associé $\mathcal{R}_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3$.

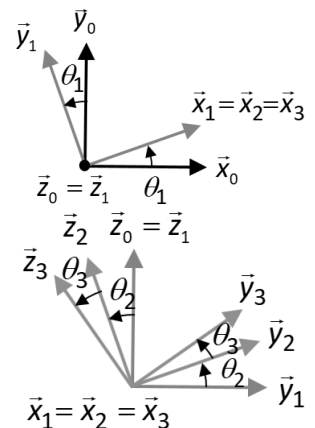
Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

Paramètres du mouvement :

- ▶ $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- ▶ $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
- ▶ $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$;
- ▶ $\vec{O_3O_4} = \lambda \vec{z}_3$.

Caractéristiques géométriques :

- ▶ $\vec{O_0O_1} = L_1 \vec{z}_0$;
- ▶ $\vec{O_1O_2} = L_2 \vec{y}_2$;
- ▶ $\vec{O_2O_3} = L_3 \vec{y}_3$.



Les figures de changement de base sont donnés ci-contre.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre O_0 et de rayon R .
- exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite (O_0, \vec{y}_0) : réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant \vec{y}_0 soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante : V .

Objectif

Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

Question 1 Préciser une condition sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 2 Préciser deux conditions sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 3 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point O_4 puis calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_4, 4/0)}$.

Question 4 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ qui traduit l'exigence Ex3.

Question 5 On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position $\theta_1 = 0$, traduire alors la condition $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ en deux relations vectorielles.

Question 6 En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.

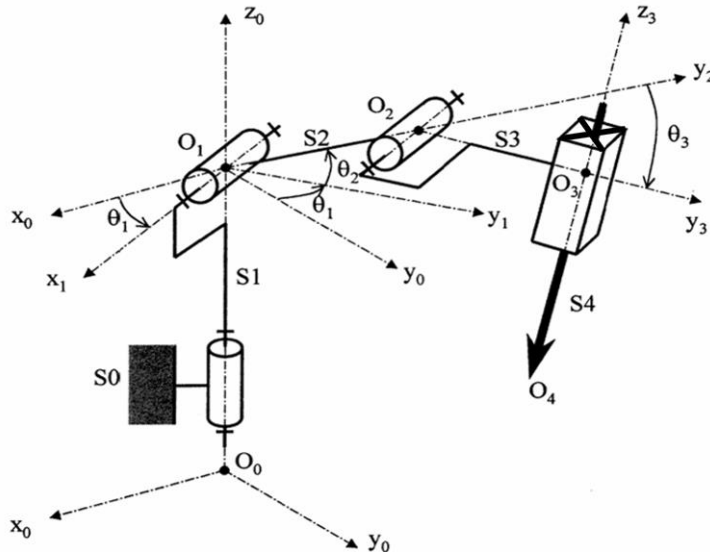
Application 5

Robot soudeur ★★ – Corrigé

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



Ce robot est constitué de cinq solides :

- ▶ le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que \vec{z}_0 vertical ascendant ;
- ▶ le fût 1, de repère associé $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$;
- ▶ le bras 2, de repère associé $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$;
- ▶ l'avant-bras 3, de repère associé $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$;
- ▶ la buse 4, de repère associé $\mathcal{R}_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3$.

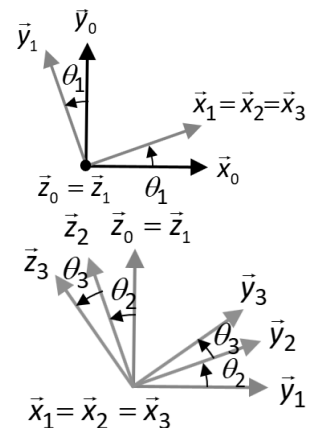
Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

Paramètres du mouvement :

- ▶ $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- ▶ $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
- ▶ $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$;
- ▶ $\vec{O_3O_4} = \lambda \vec{z}_3$.

Caractéristiques géométriques :

- ▶ $\vec{O_0O_1} = L_1 \vec{z}_0$;
- ▶ $\vec{O_1O_2} = L_2 \vec{y}_2$;
- ▶ $\vec{O_2O_3} = L_3 \vec{y}_3$.



Les figures de changement de base sont donnés ci-contre.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre O_0 et de rayon R .
- exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite (O_0, \vec{y}_0) : réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant \vec{y}_0 soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante : V .

Objectif

Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

Question 1 Préciser une condition sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 2 Préciser deux conditions sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 3 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point O_4 puis calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_4, 4/0)}$.

Question 4 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ qui traduit l'exigence Ex3.

Question 5 On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position $\theta_1 = 0$, traduire alors la condition $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ en deux relations vectorielles.

Question 6 En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.