

Table des matières

Table des matières	i
Colle 1 : Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Sujet	1
Colle 1 : Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Corrigé	3
Colle 2 : Cisaille à découpe au vol – Sujet	7
Colle 2 : Cisaille à découpe au vol – Corrigé	11

Colle 1

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC²E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure 1 décrit les exigences auxquelles est soumis l'asservissement du MC²E.

Validation des performances de l'asservissement d'effort

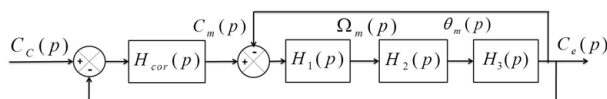
Modèle de connaissance de l'asservissement

Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta} \theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Dans un premier temps, on prendra $H_{cor}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Mines Ponts 2016.

B2-04

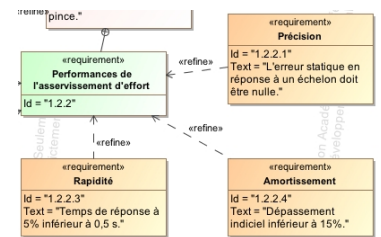
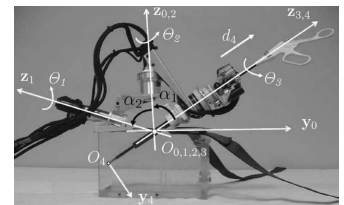


FIGURE 1 – Performances de l'asservissement.

On note :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

FIGURE 2 – Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E ;
- $C_c(p)$, couple de consigne ;
- $C_m(p)$, couple moteur ;
- $H_{cor}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

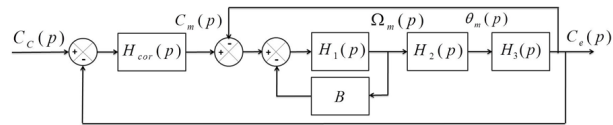


FIGURE 3 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

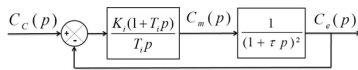


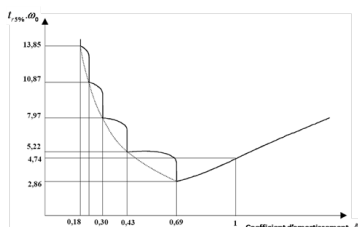
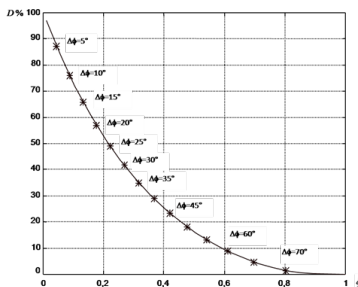
FIGURE 4 – Régulation avec correcteur PI.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 6.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.



Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Question 7 À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne $K_i = 1$.

Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0,01$ s et $\tau = 0,5$ s.

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p)^2}$.

Colle 1

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Corrigé

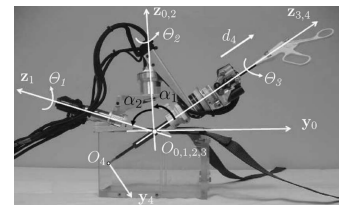
Mines Ponts 2016.

B2-04

Présentation générale

Validation des performances de l'asservissement d'effort

Modèle de connaissance de l'asservissement



Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Correction

$$H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p} \text{ et } H_3(p) = K_{C\theta}.$$

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Correction

$$\text{Calculons } F(p) = \frac{C_e(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{K_{C\theta} \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}}{1 + K_{C\theta} \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } H_{BF}(p) &= \frac{F(p)H_{cor}(p)}{1 + F(p)H_{cor}(p)} \text{ soit } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta} + K_{C\theta}} \\ &= \frac{1/2}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Correction

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude $C_0/2$. Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

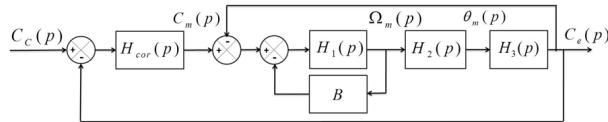


FIGURE 5 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Correction

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } F_1(p) &= \frac{1}{Jp} = \frac{1}{Jp + B}. \text{ Par suite } FTBO(p) = \frac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + F_1(p)H_2(p)H_3(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}}{1 + \frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p(Jp + B) + K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}. \\ \text{Par ailleurs, } H_{BO}(p) &= \frac{1}{(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + 2\tau p + \tau^2 p^2}. \\ \text{On a donc } \frac{B}{K_{C\theta}} &= 2\tau \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \tau. \text{ D'autre part, } \tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \\ \text{Au final, } B &= 2\sqrt{JK_{C\theta}} \text{ et } \tau = \frac{B}{2K_{C\theta}} = \frac{2\sqrt{JK_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \end{aligned}$$

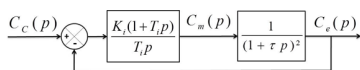


FIGURE 6 – Régulation avec correcteur PI.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 6.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction

- Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

$$\text{On a } \varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p^2)}} = C_0 \frac{1}{p + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i(1 + \tau p^2)}}.$$

$$\text{Par suite, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0.$$

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Correction

Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.

En choisissant $T_i = \tau$ (compensation du pôle double du système), on a alors FTBO(p) =

$$\frac{K_i(1 + \tau p)}{\tau p(1 + \tau p)^2} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}.$$

$$\text{On a alors FTBF}(p) = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p) + K_i}.$$

Question 7 À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne $K_i = 1$.

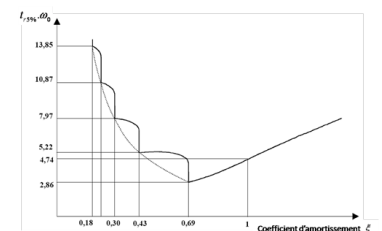
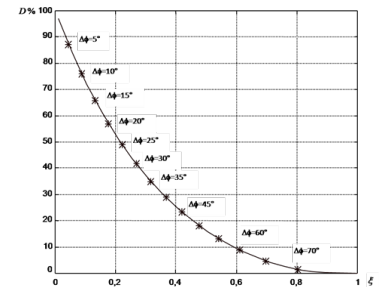
Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Correction

Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0,01$ s et $\tau = 0,5$ s.

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p)^2}$.



Question 2.

D'après l'équation de mouvement, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$. On a donc $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$.
 On a $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$; donc $H_2(p) = \frac{1}{p}$.
 Enfin, $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$ et donc $H_3(p) = K_{C\theta}$.

Question 3.

On a dans un premier temps $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp^2}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp^2}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.
 Dans un second temps, $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}} - H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$.
 Avec $H_{cor}(p) = 1$: $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$.

Question 4.

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a : $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$. Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude C_0 est une sinusoïde (d'amplitude C_0 et de moyenne $\frac{C_0}{2}$).
 Un mouvement sinusoïdal est surement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical.

Question 5.

On a $H_{BO}(p) = \frac{H_{cor}(p) \cdot \frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} \cdot H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$.
 Par ailleurs, $(1+\tau p)^2 = 1 + \tau^2 p^2 + 2\tau p$.
 En identifiant, $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$ et $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$. On a donc $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$.

Question 6.

On a : $\varepsilon(p) = \frac{C_e(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}}$. En conséquences, $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}} = \lim_{p \rightarrow 0} C_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}} = 0 \text{ Nm}$.
 L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée.

Question 7.

On a $\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2} = \frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2 + K_i(1+T_i p)}$. Avec $T_i = \tau$, on a $\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i}$. La FTBF est bien d'ordre 2.

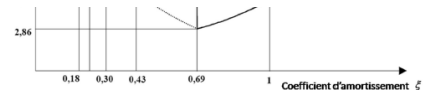


Pour avoir $D\% \leq 15\%$ il faut $\xi \geq 0,5$

Cependant, on trouve sur ce diagramme qu'il faut avoir $\xi \geq 0,8$ pour avoir une marge de phase de 70° .

Si on souhaite obtenir le temps de réponse à 5% le plus rapide, comme $\xi \geq 0,8 > 0,7$, il faut prendre ξ le plus faible possible. Cela impose $\xi = 0,8$ et comme $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$ on a

alors $K_i = \frac{1}{4\xi^2} = 0,4$.



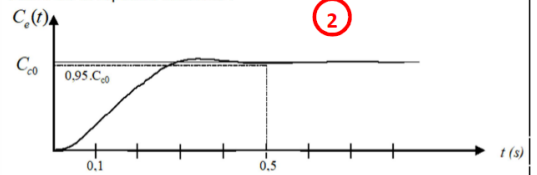
Pour $\xi = 0,8$, la lecture de l'abaque donne donc

$t_{R5\%} \cdot \omega_0 \geq 3,5$ et avec $t_{R5\%} \leq 0,5s$ on a $\omega_0 \geq 7 \text{ rad/s}$

Question 9.

Critère	Valeur
Dépassement	2%
Tr5%	<0,5 s
Erreur statique en réponse à un échelon	0

Allure de la réponse indicielle :



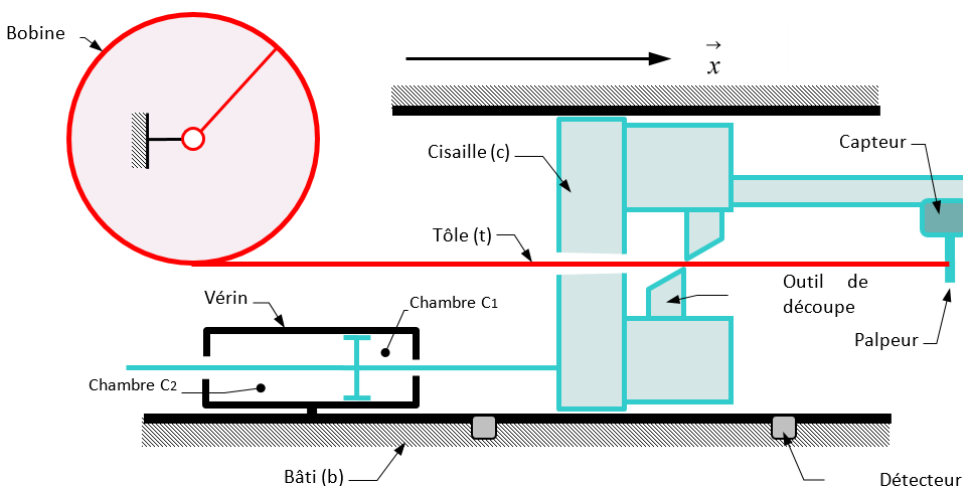
Colle 2

Cisaille à découpe au vol – Sujet

Mise en situation

Objectif

- Identifier les paramètres du vérin.
- Quantifier l'erreur de trainage et déterminer son impact sur le système.
- Proposer des solutions pour la compenser.



La machine, représentée par le schéma ci-dessus, permet de débiter en continu une bobine de tôle en tronçons de même longueur *. La rotation continue à fréquence variable de la bobine impose à la tôle (**t**) une vitesse linéaire $v(t)$ par rapport au bâti (**b**) constante. Les outils de découpe sont portés par la cisaille (**c**) qui est mise en mouvement par un vérin hydraulique.

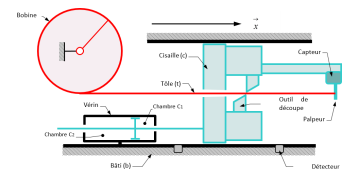
En avançant, la tôle déplace le palpeur du capteur porté par la cisaille. Celui-ci délivre alors une tension $u(t)$ proportionnelle à l'écart de position entre la tôle et la cisaille. Un amplificateur transforme ce signal en courant d'intensité $i(t)$ pour commander un distributeur hydraulique qui fournit au vérin un débit d'huile $q(t)$. Au bout d'un certain temps, se déplaçant à la même vitesse, la cisaille et la tôle arrivent face à un détecteur qui déclenche la coupe. La tôle tombe, la cisaille recule jusqu'à son point de départ et attend que la tôle revienne en contact avec le palpeur pour recommencer un cycle. La position de la cisaille est ainsi « asservie » à la position de la tôle.

*. <https://goo.gl/azqSkT>

D'après P. Dubois, C. Gamelon..

B2-04

B2-06



On notera par des majuscules les transformées de Laplace des fonctions du temps notées en minuscules.

Rappels : $\mathcal{L}[a] = \frac{a}{p}$, $\mathcal{L}[at] = \frac{a}{p^2}$ et

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}.$$

On note :

- $e(t)$ le déplacement de la tôle (**t**) par rapport au bâti (**b**);
- $\varepsilon(t)$ le déplacement de la tôle par rapport à la cisaille (**c**);
- $x(t)$ le déplacement de la cisaille par rapport au bâti.

$X(p)$ est la transformée de Laplace du déplacement $x(t)$ et $Q(p)$ celle du débit $q(t)$.

On note :

- m la masse totale mise en mouvement par le vérin;
- f le coefficient de frottement visqueux associé au déplacement de l'ensemble mobile. Les frottements créent un effort qui s'oppose au déplacement et qui est proportionnel à la vitesse : $F_f(t) = -f \frac{dx}{dt}$;
- $\Delta p(t)$ la différence de pression entre les deux chambres C_1 et C_2 du vérin;
- S la surface du piston en contact avec l'huile.

Schéma-bloc du système

On considère comme instant initial le moment où la tôle touche le palpeur. À cet instant e et x sont nuls. L'équation reliant les déplacements est donnée par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - x(t).$$

Le capteur, l'amplificateur et le distributeur délivrent des signaux de sortie proportionnels à leurs signaux d'entrée. On notera K_c , K_a et K_d leurs gains respectifs. Soit $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ la fonction de transfert associée à l'ensemble vérin plus charge déplacée.

Question 1 Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

Équation de comportement dynamique

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble mobile en projection sur \vec{x} , on a : $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\Delta p(t) - f \frac{dx(t)}{dt}$.

Fonction de transfert du vérin

Pour le type de vérin utilisé, le débit d'alimentation a pour expression : $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\Delta p(t)}{dt}$. V est le volume moyen d'une chambre et B le module d'élasticité de l'huile, (ces deux paramètres sont des constantes).

Question 2 Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace.

En déduire l'expression de la fonction de transfert : $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$, que l'on mettra sous la forme : $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$.

Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

$$\text{On pose } H_v(p) = \frac{K_v}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

Une simulation numérique a permis de tracer le diagramme de Bode donné page suivante. On se propose de retrouver les valeurs de K_v , ω_0 et ξ à partir du diagramme.

Question 3 Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction des notations K_v , ω_0 et ξ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de $H_v(j\omega)$). Quelle est sa valeur pour $\omega = \omega_0$?

Question 4 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

Question 5 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers l' ∞ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

Question 6 Dédurre des résultats précédents et du diagramme de Bode de $H_v(p)$ donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres K_v , ω_0 et ξ (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

Question 7 Donner l'expression littérale de la phase $\varphi(\omega)$ en fonction des notations ω_0 et ξ . Déterminer ses limites lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre ω_0 puis pour 100 et 200 rad s⁻¹. Tracer la courbe de phase.

Détermination des gains K_c , K_a et K_d

Pour que le système soit stable en boucle fermée on décide de régler le correcteur pour avoir une marge de gain de 6 dB.

Question 8 Quelle valeur K doit-on donner au produit des gains $K_c K_a K_d$ (préciser les unités). On note K_0 le produit $K K_v$ (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de K_0 ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue?

Méthode –

Cette question est un peu prématurée par rapport à notre avancée. Cependant, vous pouvez tenter d'appliquer la méthode suivante :

1. Déterminer le gain (en dB) pour lequel la phase vaut -180°.
2. Chercher K tel que $20 \log |FTBO| = -6$.
3. Calculer K_0 .

Erreur de traînage

On note : $H(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 9 Donner l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H(p)$. La tôle se déplace à vitesse constante v , quelle est la transformée $E(p)$ de $e(t)$? Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de v et des paramètres canoniques.

Question 10 On appelle erreur de traînage ε_t la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de ε_t . Faire l'application numérique avec $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ et $K_0 = 7$ (unité SI).

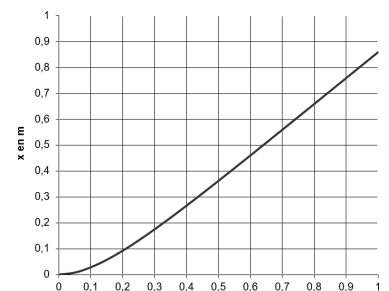
Identification temporelle

On donne ci-contre, le tracé de la courbe $x(t)$ obtenu à l'aide d'un logiciel de simulation. Cette réponse est voisine de celle d'un premier ordre soumis à la même entrée. Soit

$F(p) = \frac{K_f}{1 + Tp}$ la fonction de transfert du système du premier ordre associé.

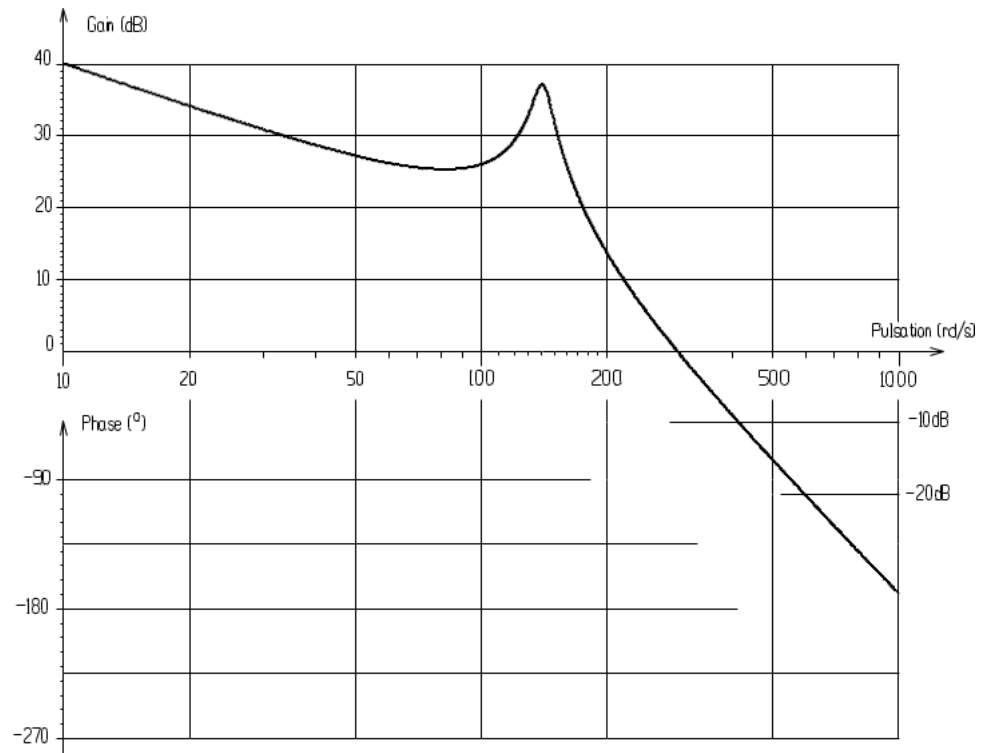
Question 11 Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante : $v = 1 \text{ m s}^{-1}$).

Question 12 Déterminer les valeurs numériques de K_f et T à l'aide de relevés sur la courbe.



Question 13 Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

Question 14 Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?



Colle 2

Cisaille à découpe au vol – Corrigé

D'après P. Dubois, C. Gamelon..

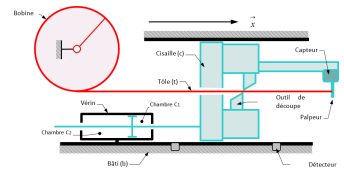
Mise en situation

Schéma-bloc du système

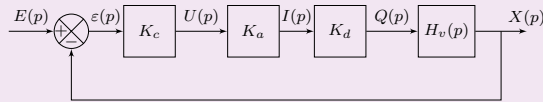
Question 1 Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

B2-04

B2-06



Correction



Équation de comportement dynamique

Fonction de transfert du vérin

Question 2 Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace.

En déduire l'expression de la fonction de transfert : $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$, que l'on mettra

sous la forme : $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$.

Correction

$$\text{D'une part, } mp^2 X(p) = S \Delta P(p) - fp X(p) \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) = \Delta P(p).$$

$$\text{D'autre part : } Q(p) = Sp X(p) + \frac{V}{2B} p \Delta P(p) \Leftrightarrow 2B \frac{Q(p) - Sp X(p)}{Vp} = \Delta P(p).$$

$$\text{On a donc : } \frac{p(mp + f)}{S} X(p) = 2B \frac{Q(p) - Sp X(p)}{Vp} \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) + \frac{2BSp X(p)}{Vp} = \frac{2BQ(p)}{Vp}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p(mp + f)}{S} + \frac{2BSp}{Vp} \right) \frac{Vp}{2B} = \frac{Q(p)}{X(p)} \Leftrightarrow \left(\frac{p(mp + f)}{S} \frac{Vp}{2B} + Sp \right) = \frac{Q(p)}{X(p)}.$$

$$\text{On a donc, } H_v(p) = \frac{1}{p \left(\frac{(mp + f)}{S} \frac{Vp}{2B} + S \right)} = \frac{1}{p \left(\frac{Vm}{2BS} p^2 + \frac{fV}{2BS} p + S \right)} =$$

$$\frac{1/Q}{p \left(\frac{Vm}{2BS^2} p^2 + \frac{fV}{2BS^2} p + 1 \right)}$$

Au final, $k = \frac{1}{S}$, $a = \frac{Vm}{2BS^2}$ et $b = \frac{fV}{2BS^2}$.

Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

Question 3 Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction des notations K_v , ω_0 et ξ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de $H_v(j\omega)$). Quelle est sa valeur pour $\omega = \omega_0$?

Correction

$$H_v(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$$

$$\text{En conséquence, } G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right| = 20 \log K_v - 20 \log |j\omega| -$$

$$20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|$$

$$= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \right|$$

$$\text{Au final, } G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi.$$

Question 4 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \right|.$$

Lorsque ω tend vers 0, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$. La pente est donc de -20 dB/decade. Elle coupe l'horizontale à 0 dB en $\omega = K_v$.

Question 5 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers l'infini. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \right|.$$

Lorsque ω tend vers l'infini, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$, G_{dB} tend vers $= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 + 20 \log \omega_0^2 = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega$.

La pente est donc de -60 dB/decade.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand

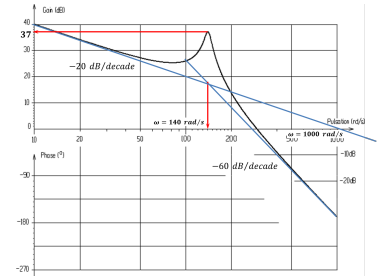
$20 \log K_v - 20 \log \omega = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega \Leftrightarrow \log \omega = \log \omega_0$. Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en $\omega = \omega_0$.

Question 6 Dédurre des résultats précédents et du diagramme de Bode de $H_v(p)$ donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres K_v , ω_0 et ξ (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

Correction

Par lecture du graphe, on obtient $\omega_0 = 140 \text{ rad/s}$ et $K_v = 1000 \text{ s m}^{-2}$.

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 20 \log 1000 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 60 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow \frac{37 - 60 + 20 \log 140}{-20} = \log 2\xi \Leftrightarrow \xi \simeq 0,05.$$



Question 7 Donner l'expression littérale de la phase $\varphi(\omega)$ en fonction des notations ω_0 et ξ . Déterminer ses limites lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre ω_0 puis pour 100 et 200 rad s^{-1} . Tracer la courbe de phase.

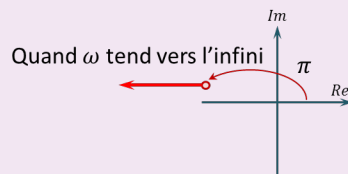
Correction

$$\varphi(\omega) = \arg K_v - \arg(j\omega) - \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$$

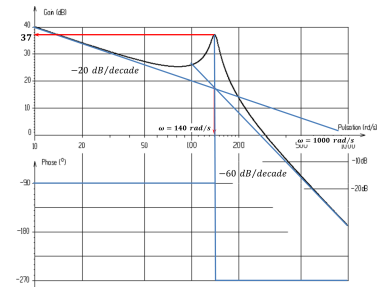
Lorsque ω tend vers 0, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

Lorsque ω tend vers l'infini, $-\arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$ tend vers π donc $-\arg(\dots)$ tend vers $-\pi$.

Explication graphique de prof de SII...



Au final, lorsque ω tend vers l'infini, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{3\pi}{2}$.



Détermination des gains K_c , K_a et K_d

Question 8 Quelle valeur K doit-on donner au produit des gains $K_c K_a K_d$ (préciser les unités). On note K_0 le produit $K K_v$ (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de K_0 ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue?

Correction

Étant donné l'exigence demandée, le gain de la FTBO doit être de -6 dB lorsque la phase vaut -180°. On a déjà vu que pour cette phase, le gain décibel de H_v vaut 37 dB. Le gain dB vaut $20 \log K + 20 \log |H_v|$. On cherche donc K tel que $20 \log K + 20 \log |H_v| = -6$. Au final, $K = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Par suite, $K_0 = 7 \text{ s}^{-1}$.

Erreur de traînage

Question 9 Donner l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H(p)$. La tôle se déplace à vitesse constante v , quelle est la transformée $E(p)$ de $e(t)$? Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de v et des paramètres canoniques.

Correction

On peut redémontrer le résultat suivant : $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$.
 Exprimons $\varepsilon(p)$: $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - H(p)\varepsilon(p)$; donc $\varepsilon(p)(1 + H(p)) = E(p) \iff$
 $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$.
 Le consigne étant une vitesse, on a donc $E(p) = \frac{v}{p^2}$. On a donc : $\varepsilon(p) =$
 $\frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}}$.

Question 10 On appelle erreur de traînage ε_t la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de ε_t . Faire l'application numérique avec $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ et $K_0 = 7$ (unité SI).

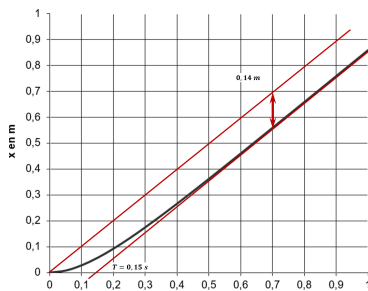
Correction

L'entrée en vitesse précédente correspondant à une entrée en rampe, on a donc $\varepsilon_t =$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{v}{p + \frac{K_v K_c K_a K_d}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}} =$
 $\frac{v}{\frac{K_v K_c K_a K_d}{1}} = \frac{1}{7} \approx 0,14 \text{ m}$. Pour compenser cette erreur, il suffit de régler la butée de la tôle à découper.

Identification temporelle

Question 11 Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante : $v = 1 \text{ m s}^{-1}$).

Question 12 Déterminer les valeurs numériques de K_f et T à l'aide de relevés sur la courbe.



Correction

Première solution : cf cours pour un système du premier ordre soumis à une rampe.
 Seconde solution : se raccrocher à ce que l'on sait (peut-être) pour un premier ordre soumis à un échelon... en effet, la rampe peut être assimilée à un premier ordre intégré. Ainsi, pour un système du premier ordre soumis à un échelon d'amplitude v , la valeur finale est vK_f . Ainsi, en intégrant, la pente en régime permanent sera de vK_f .
 La pente étant de 1 on a $K_f = 1$.
 Reste à savoir que l'asymptote coupe l'axe des abscisses en T . Après lecture, $T = 0,15 \text{ s}$.

Question 13 Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

Correction

Même erreur que précédemment.

Question 14 Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?

Correction

Il est possible de décaler la butée de 14 cm et ainsi supprimer l'écart de trainage.