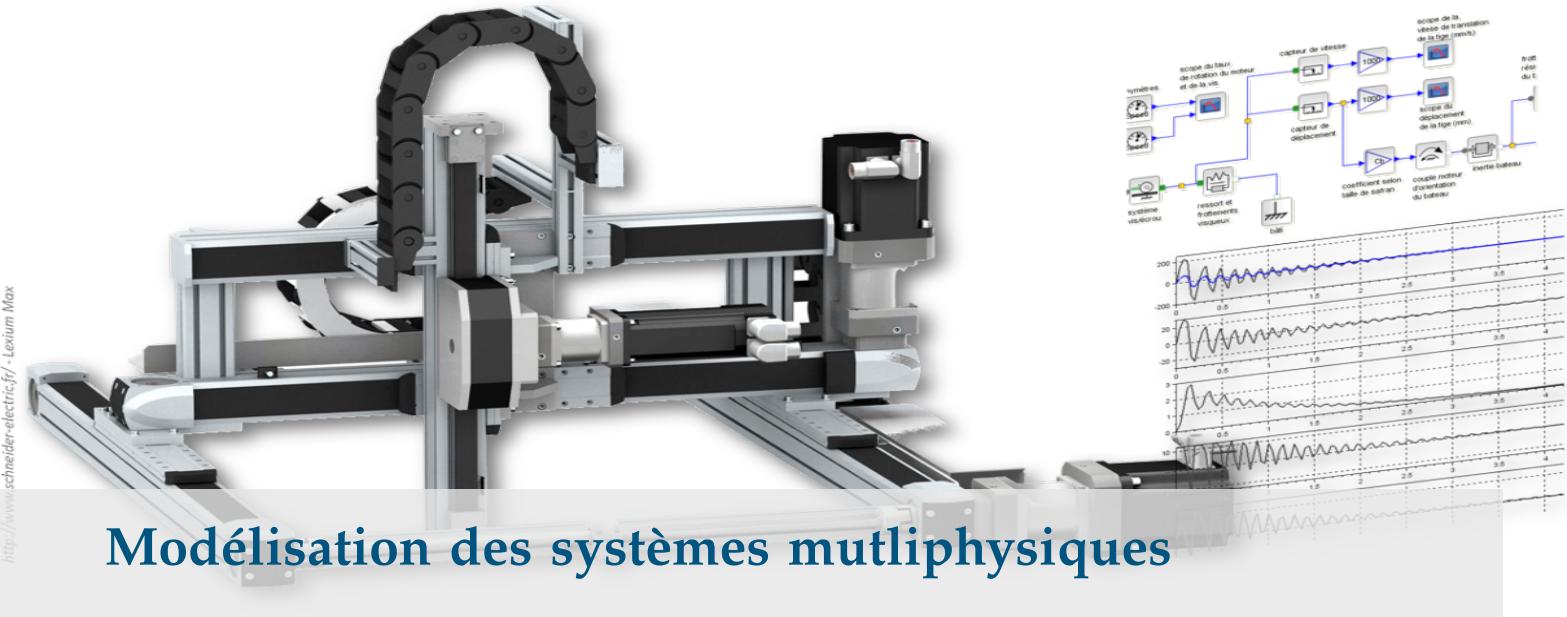


# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation des systèmes mutiphysiques</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ? . . . . .	3
1.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ? . . . . .	3
1.2 Modélisation des systèmes multiphysiques . . . . .	4
1.2.1 Modélisation causale et acausale . . . . .	4
1.2.2 Les différents modèles et outils . . . . .	5
1.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients . . . . .	5
1.3 Modélisation des systèmes physiques . . . . .	6
1.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques . . . . .	6
1.3.2 Modélisation des systèmes électriques . . . . .	7
1.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques . . . . .	7
1.4 Modélisation des non-linéarités . . . . .	7
1.4.1 Linéarisation . . . . .	8
1.4.2 Saturation . . . . .	8
1.4.3 Seuil . . . . .	9
1.4.4 Hystérésis . . . . .	9
1.5 Modélisation des systèmes numériques . . . . .	9
Application 1 : Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet . . . . .	11
Application 2 : La Seine Musicale – Sujet . . . . .	13
Application 3 : Direction automatique découplée – Sujet . . . . .	15
<b>2 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis</b>	<b>17</b>
2.1 Définitions préliminaires et détermination des performances . . . . .	17
2.1.1 Définitions . . . . .	17
2.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques . . . . .	18
2.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace . . . . .	19
2.2.1 Définitions . . . . .	19
2.2.2 Théorèmes . . . . .	19
2.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs . . . . .	20
2.3.1 Définitions . . . . .	20
2.3.2 Algèbre de blocs . . . . .	21
2.3.3 Fonctions usuelles . . . . .	21
2.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre . . . . .	22
2.4.1 Systèmes d'ordre 1 . . . . .	22
2.4.2 Systèmes d'ordre 2 . . . . .	23
2.5 Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	24
2.5.1 Définitions . . . . .	24
2.5.2 Gain . . . . .	24
2.5.3 Intégrateur . . . . .	25
2.5.4 Dérivateur . . . . .	25
2.5.5 Systèmes d'ordre 1 . . . . .	25
2.5.6 Systèmes d'ordre 2 . . . . .	25
2.5.7 Retard . . . . .	26
2.5.8 Tracé du diagramme de Bode . . . . .	26
Application 1 : Réponses fréquentielles – Sujet . . . . .	27
TD 1 : Banc d'essai BTP – Sujet . . . . .	31

TD 2 : Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet . . . . .	35
TD 3 : Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet . . . . .	39
TD 4 : Bateau support de ROV – Sujet . . . . .	43
TD 5 : Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet . . . . .	47
TD 6 : Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet . . . . .	55
TD 7 : Asservissement par traitement d'image d'une plateforme Hexapode – Sujet . . . . .	59
<b>3 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis</b>	<b>63</b>
3.1 Notion de stabilité . . . . .	63
3.1.1 Représentation graphique [1] . . . . .	63
3.1.2 Premières définitions . . . . .	63
3.1.3 Étude des pôles de la fonction de transfert . . . . .	64
3.1.4 Position des pôles dans le plan complexe . . . . .	64
3.1.5 Pôles dominants [1] . . . . .	65
3.1.6 Caractéristiques dans le lieu de pôles . . . . .	65
3.2 Marges de stabilité . . . . .	66
3.2.1 Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez... . . . . .	66
3.2.2 Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh . . . . .	66
3.2.3 Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers . . . . .	66
3.2.4 Vers le système réel... . . . . .	67
Application 0 : Stabilité des systèmes – Sujet . . . . .	69
Application 1 : Stabilité des systèmes – Sujet . . . . .	73
Application 0 : Drone quadri-rotor – Sujet . . . . .	75
TD 1 : Stabilisateur actif d'image – Sujet . . . . .	79
<b>4 Résolution des problèmes de dynamique plans à une mobilité</b>	<b>83</b>
4.1 Introduction . . . . .	83
4.2 Première approche du PFD . . . . .	84
4.2.1 Principe Fondamental de la Dynamique . . . . .	84
4.2.2 Équations de mouvement . . . . .	85
4.2.3 Théorèmes généraux . . . . .	85
4.2.4 PFD : applications simplifiées . . . . .	86
4.2.5 Méthodologie . . . . .	86
4.3 Théorème de l'énergie cinétique dans des particuliers (mais fréquents) . . . . .	87
4.3.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide . . . . .	87
4.3.2 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons . . . . .	87
4.3.3 Énergie cinétique . . . . .	88
4.3.4 Énergie cinétique équivalente . . . . .	88
4.3.5 Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	88
4.3.6 Méthodologie . . . . .	89
4.4 Loi de mouvement en trapèze . . . . .	89
Application 1 : Pompe à plateau – Sujet . . . . .	91
Application 2 : Réducteur – Sujet . . . . .	93
Application 3 : Axe numérique – Sujet . . . . .	95
TD 1 : Véhicule TIM – Sujet . . . . .	97



# Modélisation des systèmes multiphysiques

B2-02

## 1 Introduction

### 1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ?

Pour comprendre le fonctionnement des systèmes qui nous entourent, il est souvent nécessaire de maîtriser un voire plusieurs domaines de la physique. En effet, le winch utilisé dans le laboratoire a un fonctionnement essentiellement mécanique. En revanche, le simulateur de drone  $D^2C$  est composé d'une partie mécanique (rotation du banc et des hélices) une partie électrotechnique (moteurs) une partie électronique (commande des moteurs) une partie informatique (gestion de la commande et des informations).

Pour modéliser un système, plusieurs outils peuvent être nécessaires. Lorsqu'un outil est associé à un champ de la physique, on peut parler de modèle « mono physique » :

- ▶ pour modéliser la géométrie d'un système ou le comportement d'un mécanisme, on peut faire appel à SolidWorks par exemple;
- ▶ pour modéliser la partie électrique d'un système il est possible d'utiliser un logiciel comme PSpice;
- ▶ pour programmer une interface graphique d'un logiciel, il est possible d'utiliser Python...

En revanche, lorsqu'on veut que tous ces domaines communiquent, il faut une plate forme commune permettant l'échange entre les modèles. On parle alors de modélisation multiphysique. Il est possible d'utiliser des logiciels comme Scilab (Xcos – Modelica) ou Matlab (Simulink – Simscape).

### 1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ?

Dans l'industrie, les modèles sont indispensables. Ils permettent d'avoir un modèle numérique, image du produit que l'on cherche à réaliser ou que l'on a déjà. L'image doit être aussi fidèle à la réalité que possible. On a vu que ce modèle peut-être « monophysique » ou « multiphysique ».

L'objectif du modèle est de se substituer au produit réel. Les simulations réalisées sur le modèle ont pour objectif de remplacer des expérimentations sur le produits, considérées comme coûteuse en temps et en argent.

Il est possible de recenser les avantages et inconvénients liés à la simulation des modèles [Crevits2015].

1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Systèmes multiphysiques	4
1.3	Modélisation monophysique . . . . .	6
1.4	Non-linéarités . . . . .	7
1.5	Numérique . . . . .	9

- ✓ Pouvoir prévoir le comportement du système réel alors qu'il n'existe pas encore lors de la phase de conception ;
  - ✓ permettre la prévision de phénomènes (en météorologie par exemple) ;
  - ✓ éviter ou limiter le recours aux expérimentations réelles qui peuvent être très coûteuses ou très dangereuses, voire proscribes (essais nucléaires militaires) ou impossibles dans l'état actuel des connaissances et des moyens (projet ITER) ;
  - ✓ quand l'échelle de temps des phénomènes dans le système réel ne permet pas une expérience « en une durée raisonnable » pour effectuer des observations ou des mesures. (premiers instants de l'univers ( $t < 10^{-6}$ s) ou l'évolution des galaxies ( $t > 10^6$  années)) ;
  - ✓ « observer » ou représenter des variables inaccessibles à l'expérience ou la mesure ;
  - ✓ les manipulations sont faciles sur un modèle. Elles peuvent être répétées, voire itérées automatiquement pour apprécier de très nombreuses situations ;
  - ✓ le droit à l'erreur, sans risque ;
  - ✓ la possibilité de supprimer des phénomènes perturbateurs ou des effets secondaires.
- 
- ✗ Avoir une confiance aveugle dans les simulations et ses résultats : des erreurs liées aux modèles ou aux calculs peuvent ne pas être perçues immédiatement ;
  - ✗ « oublier » les conditions de la simulation et les hypothèses formulées pour établir le modèle et surtout dans le cas des systèmes complexes ;
  - ✗ « inverser » la réalité et « forcer » le réel à intégrer les contraintes du modèle ;
  - ✗ oublier le niveau de précision des résultats provenant du modèle.

## 2 Modélisation des systèmes multiphysiques

### 2.1 Modélisation causale et acausale

Lorsque le fonctionnement d'un système est régit par une équation différentielle, dont l'ordre de dérivation de la sortie est supérieur à l'ordre de dérivation de l'entrée, la sortie est une conséquence de l'entrée. En passant l'équation dans le domaine de Laplace puis en la traduisant sous forme de schéma bloc, on obtient alors un bloc **orienté** traduisant ainsi la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie.

On parle ici de modélisation **causale**.

Les liens entre les blocs représentent une grandeur physique (courant, tension, position, vitesse *etc.*).

En modélisation acausale, les entrées et sorties ne sont pas spécifiées. Les liens entre entrées et sorties sont définies de manière implicite. Lorsqu'on visualise la traduction graphique d'un modèle acausal, les liens ne sont pas orientés (les blocs sont « réversibles »). Les blocs sont traversés par des flux d'énergie d'un même domaine physique.

Dans Matlab – Simulink, on parle de grandeurs potentielles (across) et de grandeur traversante (through) :

- ▶ une variable potentielle est mesurée par un instrument en parallèle avec la chaîne d'énergie ;
- ▶ une variable traversante est mesurée par un instrument en série avec la chaîne d'énergie.

Dans Scilab – Coselica, (langage Modelica), on parle de variables potentielles et flux.

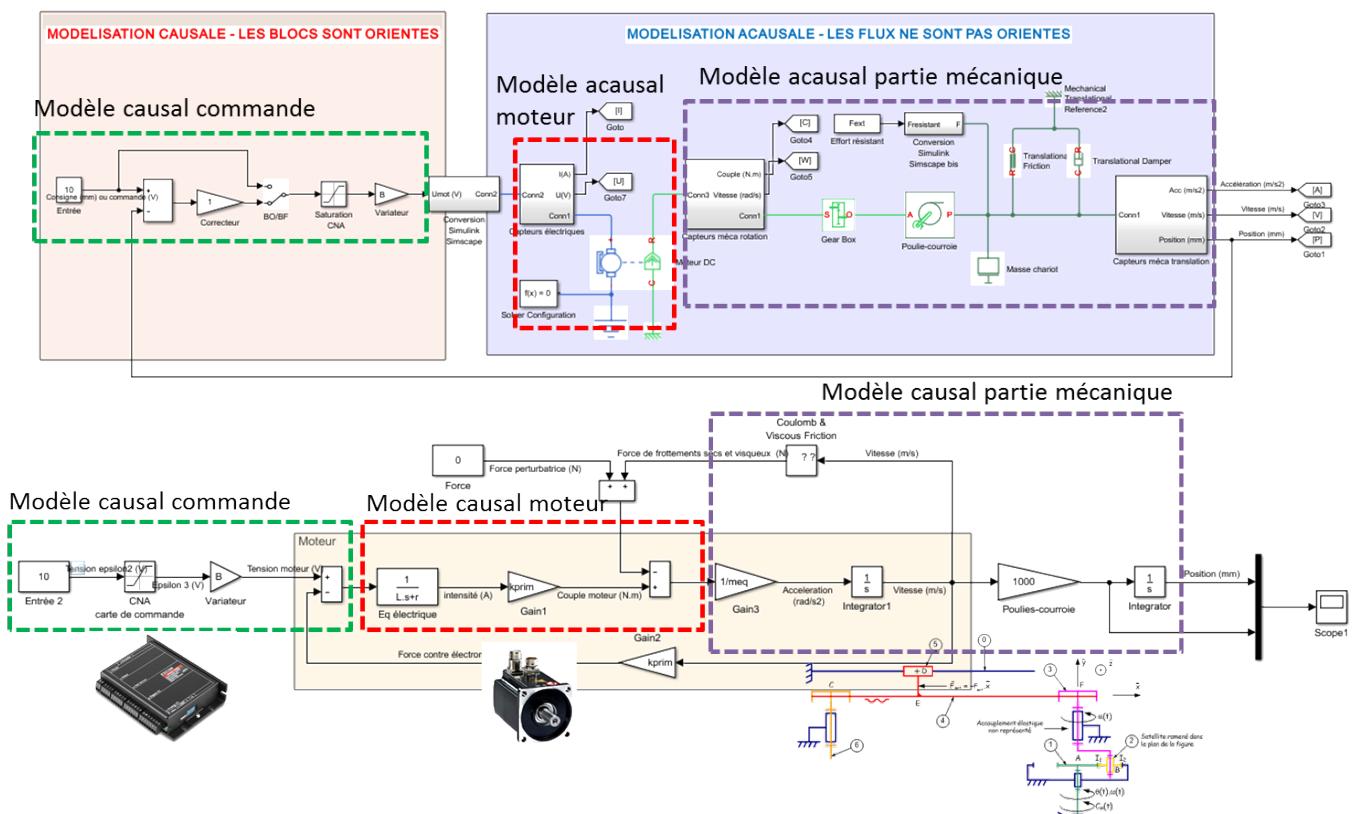
- ▶ variables potentielles : les variables qui sont reliées au même port sont égales ;
- ▶ variables flux : les variables qui aboutissent au même port ont pour somme 0.

**TABLE 1** – Modélisation acausale dans Matlab – Simulink – Simscape : variables « across » et « through ».

Domaine physique	Variables « across »	Variables « through »
Électrique	Tension (V)	Courant (A)
Hydraulique	Pression (Pa)	Débit ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
Mécanique de translation	Vitesse linéaire ( $\text{m s}^{-1}$ )	Force (N)
Mécanique de rotation	Vitesse angulaire( $\text{rad s}^{-1}$ )	Moment (Nm)
Thermique	Température (K)	Flux thermique et flux d'entropie

## 2.2 Les différents modèles et outils

La figure ci-dessous présente un modèle causal et un modèle acausal du système de laboratoire « Control'X » en utilisant le logiciel Matlab-Simulink.



Visuellement on constate que sur le modèle causal, les composants du système apparaissent. Ainsi, sans connaître les lois de comportements des composants, il est possible de réaliser le modèle multiphysique d'un système.

En modélisation acause, on utilise une représentation par schéma-blocs. Il est ici indispensable de connaître les modèles de connaissance ou de comportement des composants pour réaliser le modèle.

## 2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients

Que ce soient des modèles causaux ou acausaux, Matlab a recours à des solveurs pour simuler le comportement des systèmes. En effet, des équations différentielles, linéaires ou non, sont « cachées » derrière les blocs.

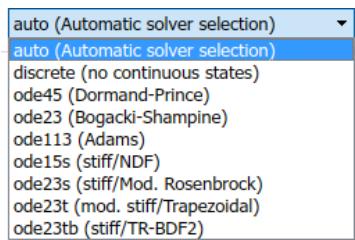


FIGURE 1 – Solveurs Matlab

Par défaut, nous laisserons un choix automatique du solveur. Cependant, certains modèles imposeront (via un message d'erreur) le changement de ce solveur. Par ailleurs le pas de simulation devra être changé dans certain cas, dans le but d'améliorer la précision des résultats.

Attention, il est à noter qu'il peut être difficile de réaliser de diagramme de Bode en utilisant un modèle acausal. Ceci peut être un handicap en phase de conception d'un système car il devient plus délicat de déterminer les résonances du système.

### 3 Modélisation des systèmes physiques

On utilisera ici Matlab – Simulink. Certains modèles sont aussi transposables avec Scilab – Xcos.

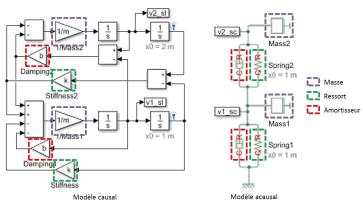


FIGURE 2 – Modélisation causale et acausale d'un système avec deux systèmes « masse – ressort – amortisseur » en série.

#### 3.1 Modélisation des systèmes mécaniques

##### Introduction

Deux modes de modélisation des systèmes mécanique est disponible : une modélisation 1D (mouvement de translation suivant une seule direction, mouvement de rotation autour d'un axe fixe) ou une modélisation 3D. La modélisation 1D est possible directement dans Matlab. Pour la modélisation 3D, il est plus aisné d'utiliser SolidWorks.

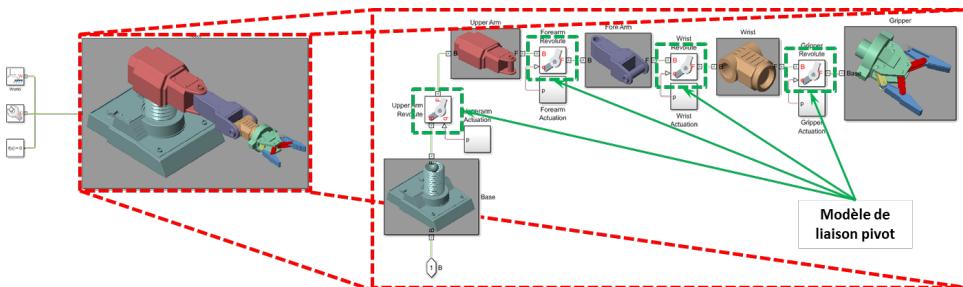
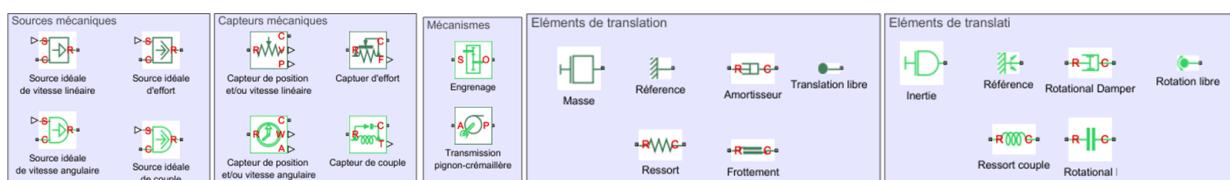


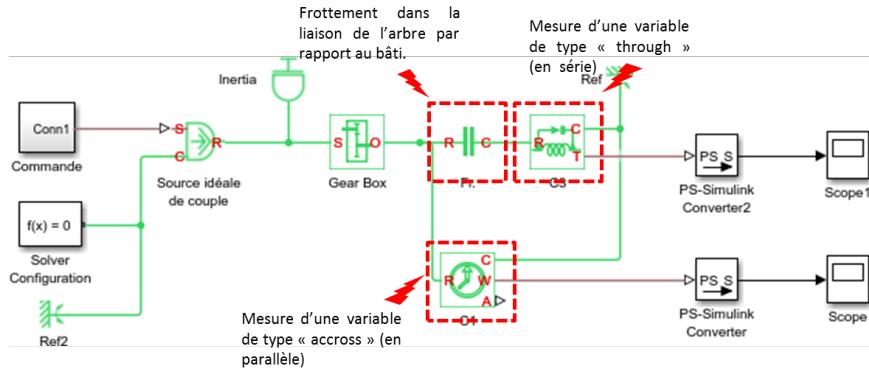
FIGURE 3 – Modélisation acausale 3D d'un bras robotisé.

##### Blocs communément utilisés en modélisation multiphylique.

Les éléments communément utilisés sont donnés dans la figure suivante.



La figure suivante illustre une transmission mécanique modélisée en utilisant Simulink. On notera le positionnement des capteurs pour mesurer des variables accross ou through, ainsi que le positionnement du bloc permettant de modéliser les frottements.



### 3.2 Modélisation des systèmes électriques

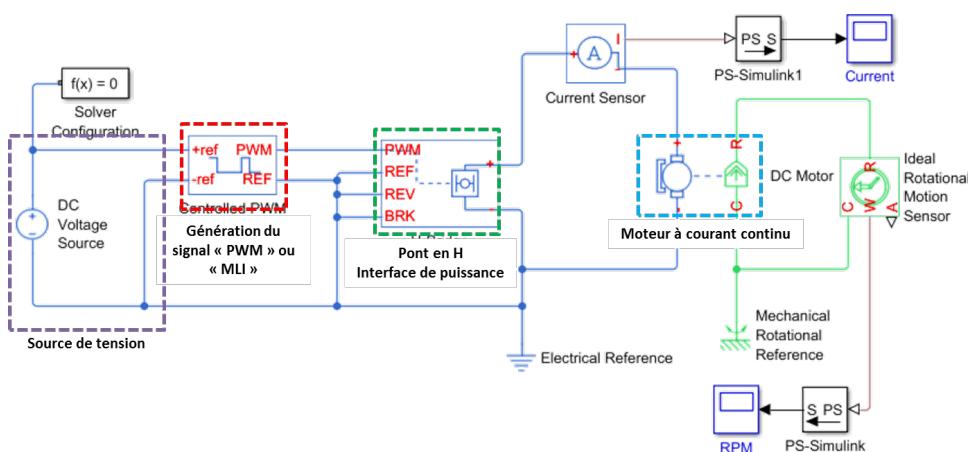


FIGURE 4 – Modélisation acausal de la commande d'un moteur à courant continu.

### 3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques

En cas de besoin, des exemples complémentaires sont disponibles en utilisant Matlab – Simulink.

## 4 Modélisation des non-linéarités

Même si on cherche à modéliser les blocs d'un système par des équations linéaires (à coefficients constants), il est très fréquent de rencontrer des systèmes (notamment mécaniques) qui n'obéissent pas des lois linéaires (par exemple, le comportement du Maxpid est non linéaire : suivant la plage de fonctionnement – entre 0 et 5° ou entre 85 et 90° – un tour de moteur ne correspond pas au même mouvement angulaire du bras).

Deux solutions s'offrent alors à nous : linéariser le fonctionnement ou modéliser la non linéarité. Les modèles causaux sont par essence linéaire. Cependant, il est possible d'intégrer des non-linéarités modélisables relativement simplement (seuil, saturation, hystérésis). Il est en revanche plus délicat de modéliser les non linéarités géométriques des mécanismes. En revanche dans les modèles acausal, la passerelle

entre SolidWorks et Matlab, permet par exemple de modéliser des systèmes mécaniques non linéaires.

Attention : l'analyse fréquentielle d'un système non linéaire n'a pas (peu ?) de sens, même s'il est possible d'effectuer un diagramme de Bode, notamment avec Matlab...

## 4.1 Linéarisation

Lorsqu'un système est non linéaire, il peut être possible de le linéariser. Cela signifie que **localement** (sur un certain intervalle) on approche le comportement du système par une droite. On conséquence, on conserve la validité de notre modélisation de type SLCI. Cependant, il faut faire attention à la zone de validité du modèle : si le comportement du système est fortement linéaire la linéarisation ne sera valable que dans une certaine zone.

### Exemple – Loi entrée sortie du Maxpid

Le comportement mécanique du Maxpid n'est pas linéaire. Si on désire modéliser ce comportement sur un système causal, il est impératif d'utiliser une loi linéaire. Dans le premier cas, on modélise le comportement en utilisant une régression linéaire. Ce modèle génère des erreurs, mais il est « utilisable » sur toute la plage de fonctionnement.

Il est aussi possible, dans un second cas, de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Ainsi, le modèle sera plus fidèle à la réalité autour de ce point de fonctionnement. Par contre, les écarts s'accroissent en s'éloignant du point de fonctionnement.



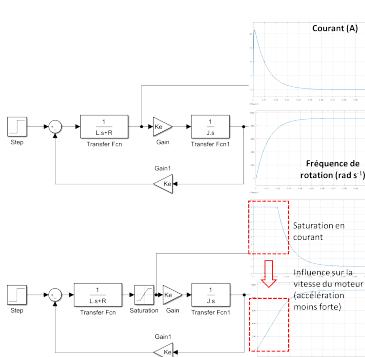
## 4.2 Saturation

Même si vous l'avez peut-être peu remarqué, les saturations sont omniprésentes sur les systèmes réels. Les principales sources de saturation sont des saturations en tension ou des saturations en courant.

En régime saturé, au delà d'une certaine valeur d'entrée, le signal de sortie du bloc reste identique et égal à la valeur de saturation.

Tout d'abord, dans les systèmes asservis et corrigés, le correcteur permet souvent une amplification de la consigne. Par exemple, un correcteur proportionnel de valeur 5 dans la boucle ouverte permet de multiplier par 5 la tension de commande. Celle-ci peut alors être supérieure à la tension que la source peut fournir.

De même, suivant la charge agissant sur un système (charge électrique ou mécanique), le courant nécessaire à un déplacement peut devenir très important, notamment en phase transitoire. Un pic de courant peut avoir pour effet de détériorer des composants.



### Exemple –

Prenons par exemple le cas du moteur à continu du Maxpid dont la modélisation est (ou devrait être) bien connue. Sollicitons le moteur par un échelon de tension et observons les signaux que nous ne regardons peut être pas toujours, par exemple le courant. Au démarrage du moteur, si on néglige la bobine et qu'on néglige l'existence d'une tension dans la boucle de retour, le courant initial est de l'ordre de  $\frac{U}{R} \simeq \frac{48}{2} = 24 \text{ A}$ . Pour certains systèmes ce courant peut détériorer des composants.

Afin de limiter le courant, des saturateurs permettant d'éviter de dépasser certaines intensités.

La conséquence peut ici être un ralentissement du système. En effet, le courant « plafonnant », l'accélération n'est pas aussi forte qu'on l'attendrait. En conséquence, le système est moins rapide.

### 4.3 Seuil

Les seuils (ou bandes mortes – dead band) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie reste nulle quand l'entrée varie dans un certain intervalle.

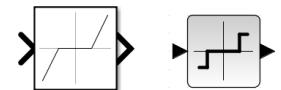
Dans le cas d'une modélisation causale, on peut utiliser le seuil pour modéliser le frottement sec. En effet, dans le cas d'un système piloté par un moteur à courant continu, une petite tension ne suffit pas à actionner le système. Il faut vaincre les frottements secs. Le seuil permet de modéliser ce comportement.

### 4.4 Hystérésis

Les hystérésis (Relay) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie est différente quand l'entrée croît ou lorsqu'elle décroît.

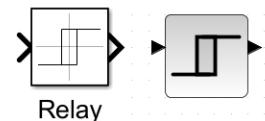
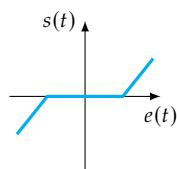
## 5 Modélisation des systèmes numériques

On verra dans un chapitre ultérieur que les systèmes que nous manipulons sont souvent numériques. En effet, que ce soit sur le Maxpid, le Control'X, le D2C, la cheville NAO etc. les grandeurs analogiques mesurées sont converties en grandeurs numériques grâce à un CAN (convertisseur analogique numérique). La fréquence d'échantillonnage ou la quantification du signal peuvent avoir un impact non négligeable sur les performances du système.

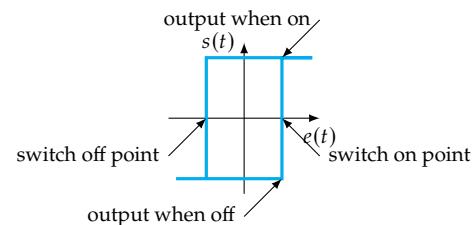


Dead Zone

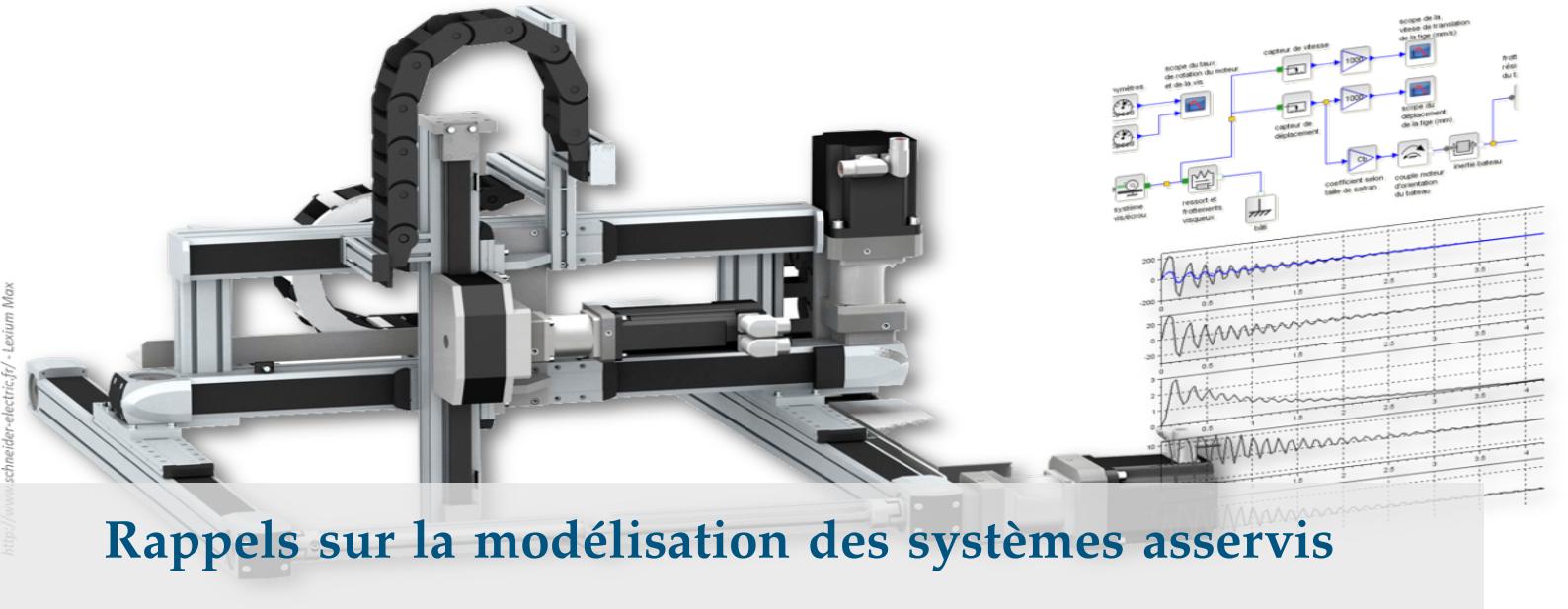
Paramètres : valeur mini et valeur maxi



Paramètres : switch on point, switch off point, output when on, output when off







# Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

## 1 Définitions préliminaires et détermination des performances

### 1.1 Définitions

#### Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

2.1	Premières définitions . . . . .
2.2	Transformée de Laplace . . . . .
2.3	Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs . . . . .
2.4	Systèmes d'ordre 1 & 2 . . . . .
2.5	Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .

B2-04

B2-05

B2-06

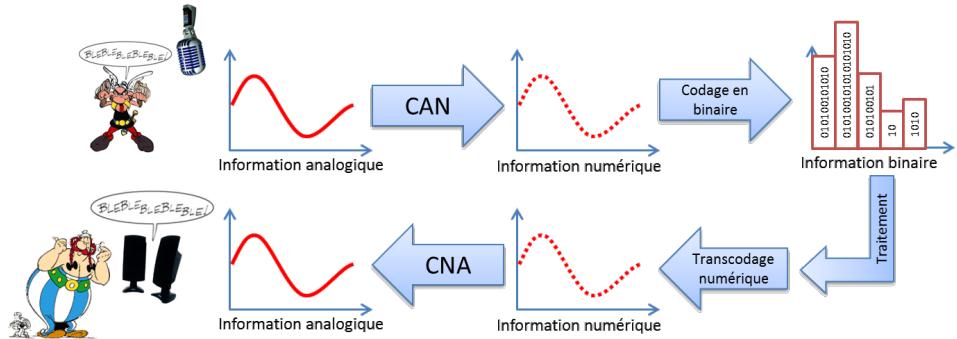
B2-07

C1-01

C2-01

C2-02

C2-03

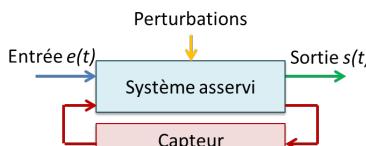


#### Définition – Systèmes automatiques ou asservis

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger



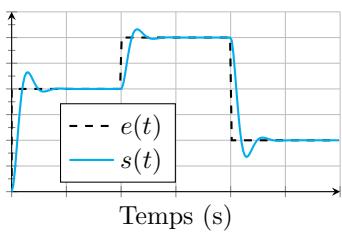


FIGURE 1 – Système suiveur.

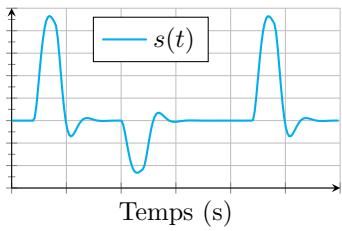


FIGURE 2 – Système régulateur.

de la qualité de la tâche accomplie.

### Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

## 1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

### Définition – Précision en position – Écart statique $\varepsilon_S$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_S$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

### Définition – Précision en vitesse $\varepsilon_V$

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

### Définition – Rapidité

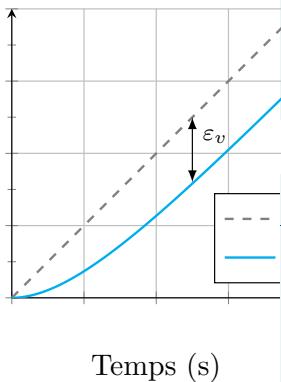


FIGURE 3 – Erreur de traînage.

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

### Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

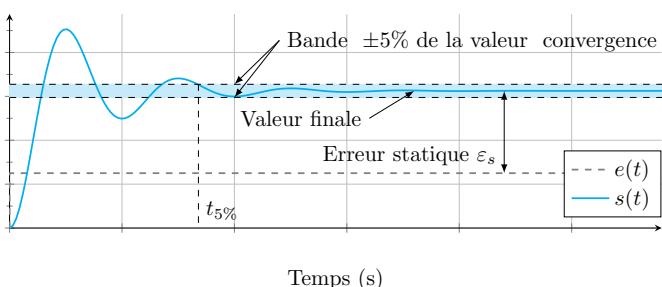


FIGURE 4 – Performances sur une réponse à un échelon.

**Définition – Stabilité**

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

### 2.1 Définitions

**Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles**

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

**Définition – Transformée de Laplace**

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p)$  ...

**Résultat – Dérivation**

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^nF(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### 2.2 Théorèmes

**Théorème – Valeur initiale**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

**Théorème – Valeur finale**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Théorème – Retard**

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

**Théorème – Amortissement**

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

### 3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

#### 3.1 Définitions

**Définition – Fonction de transfert – Transmittance**

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

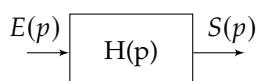
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

**Définition – Classe – ordre – pôles – zéros**

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

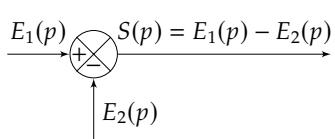
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- ▶ Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ **Le degré de  $D(p)$  est appelé ordre  $n$  du système ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).**
- ▶ L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- ▶ S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  **$\alpha$  est la classe (ou type) de la fonction de transfert.** Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

**Définition – Modélisation d'un bloc**

Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition – Modélisation d'un comparateur**

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

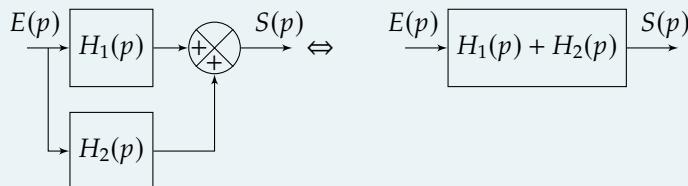
## 3.2 Algèbre de blocs

### Résultat – Blocs en série

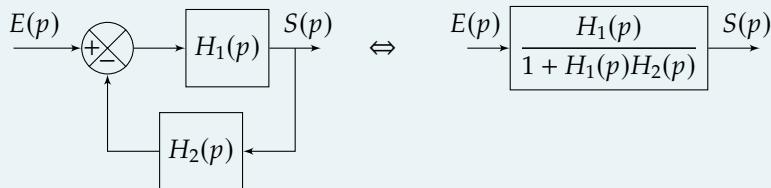


*Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.*

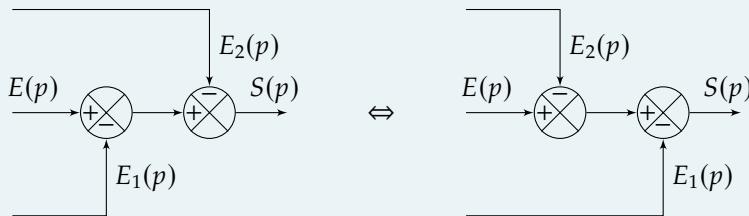
### Résultat – Blocs en parallèle



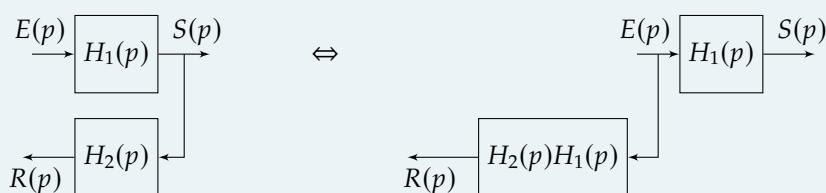
### Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



### Résultat – Comparateurs en série



### Résultat – Point de prélèvement

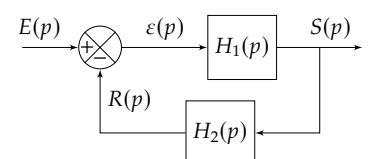


## 3.3 Fonctions usuelles

### Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

*Formule de Black*

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



### Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

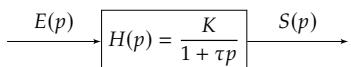
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

### Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1E_1 + H_2E_2$ .

## 4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

### 4.1 Systèmes d'ordre 1



#### Définition – Système d'ordre 1

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

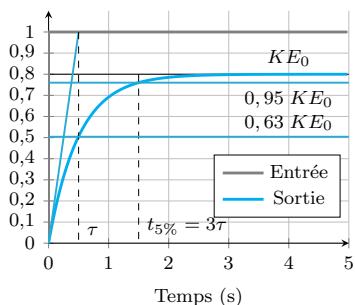
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶  $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- ▶  $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).



#### Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- ▶ la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;

- $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_\infty$ .

### Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

On note :

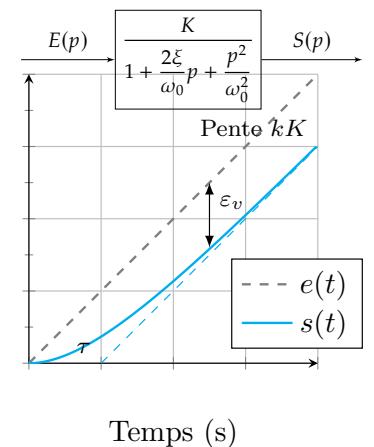
- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- $\xi$  (lire  $\chi i$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- $\omega_0$  pulsation propre du système (rad/s ou  $s^{-1}$ ).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

Analytiquement, on montre que  $s(t) = Kk \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

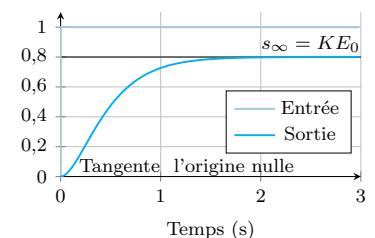
- pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ .



Temps (s)

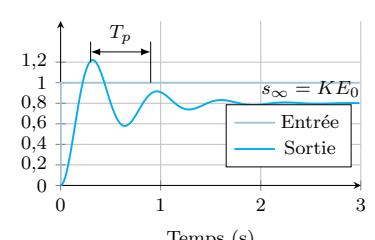
### Résultat – $\xi \geq 1$ : système non oscillant et amorti (apériodique)

- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.



### Résultat – $\xi < 1$ : système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ .



$$\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

- La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ .

### Résultat –

- Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $KE_0$  ( $2KE_0$  crête à crête).
- Pour  $\xi \approx 0,69$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

## 5 Réponse fréquentielle des SLCI

### 5.1 Définitions

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
- $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

- $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
- $\omega$  : la pulsation en rad/s;
- $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

### Définition – Gain & Phase

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

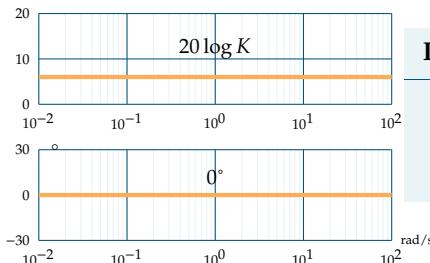
- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

### Résultat –

On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$ ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$ .

### 5.2 Gain



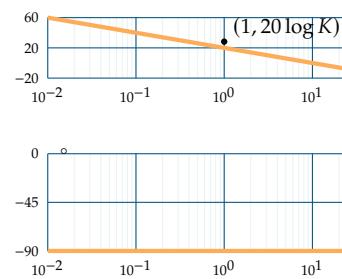
### Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

- Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .

### 5.3 Intégrateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

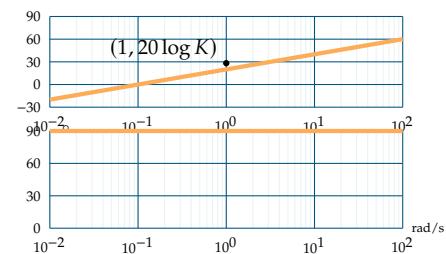
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20\text{dB}/\text{décade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 5.4 Dérivateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

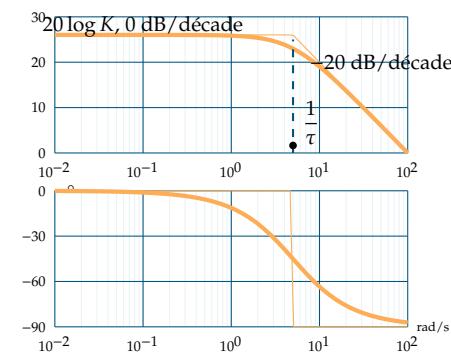
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20\text{dB}/\text{décade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .



### 5.5 Systèmes d'ordre 1

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

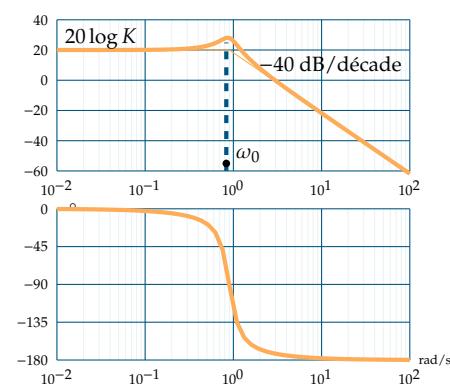
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20\text{dB}/\text{décade}$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 5.6 Systèmes d'ordre 2

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .
- ▶ Cas où  $\xi < 1$ .
  - ▶ Diagramme de gain asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
    - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40\text{dB}/\text{décade}$ .
  - ▶ Diagramme de phase asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;



- pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .

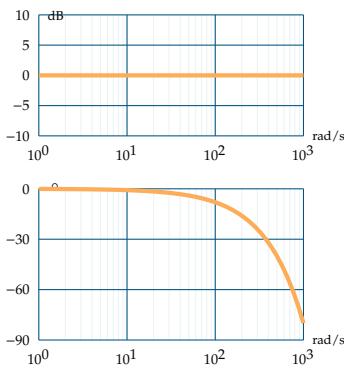
Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

### Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

## 5.7 Retard



### Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$ .

## 5.8 Tracé du diagramme de Bode

### Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

### Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

# Application 1

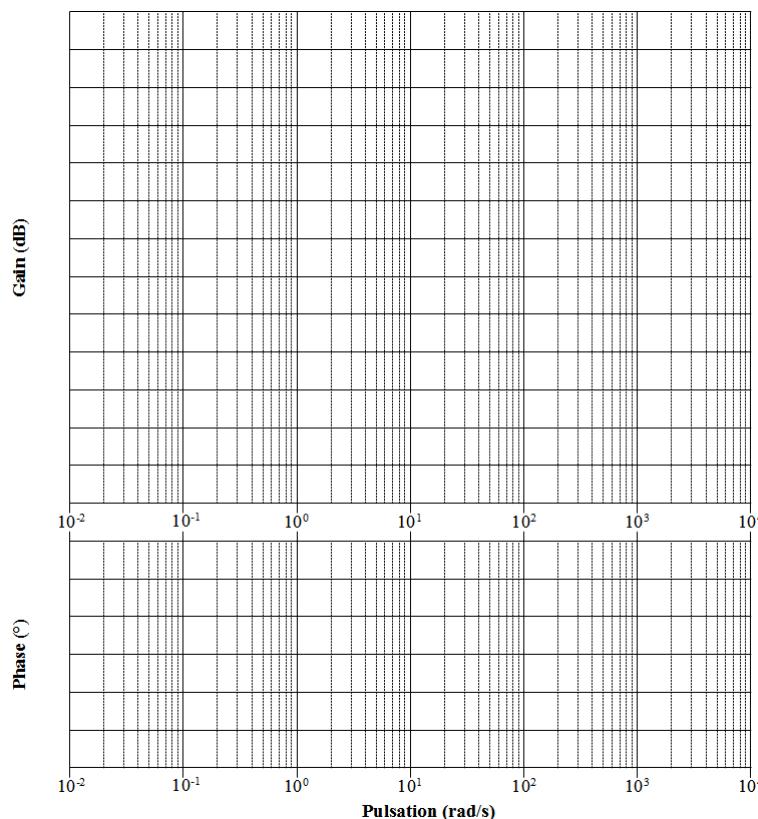
## Réponses fréquentielles – Sujet

D'après Sébastien Grange.

### Diagramme de Bode

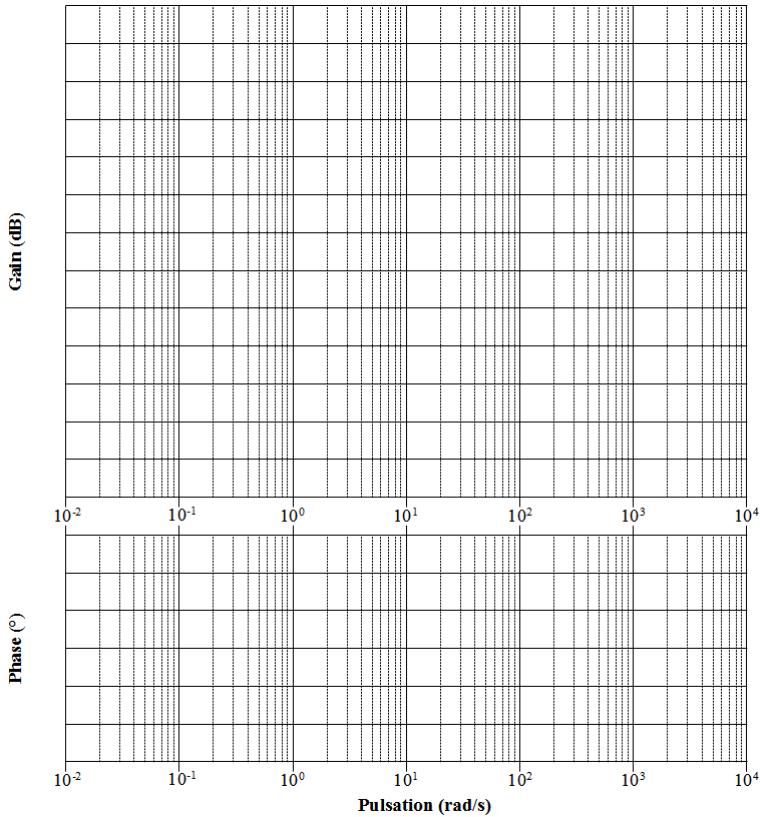
**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

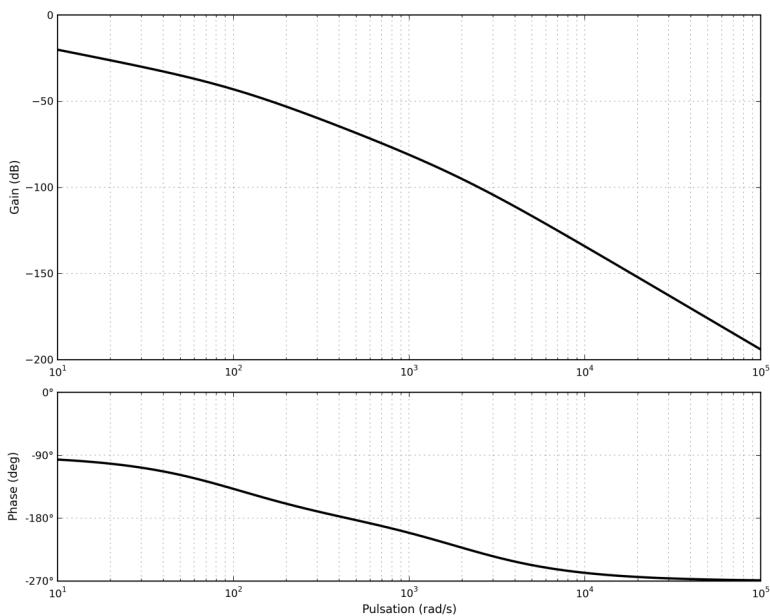


**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

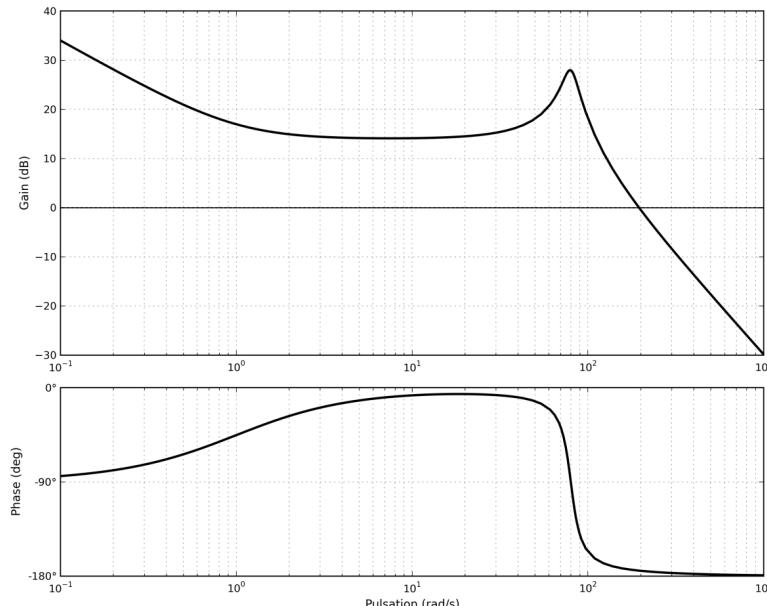


**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .



**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .



**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

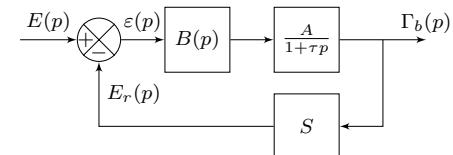
**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / g \text{ V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .





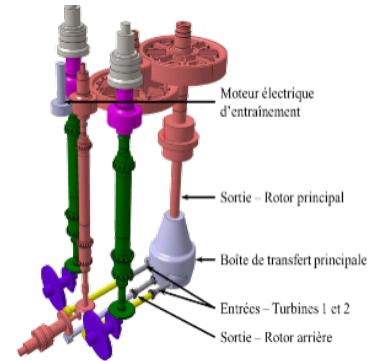
# TD 1

## Banc d'essai BTP – Sujet

Concours CCINP– TSI 2015

B2-07

C2-03



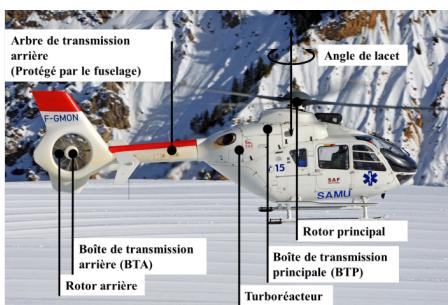
### Mise en situation

Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 2.5a). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 2.5b présente la structure du banc d'essai.

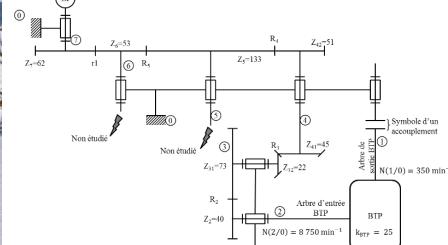
#### Objectif

Valider Req 1.1.1.

«requirement»
Précision de la régulation
Id = "1.1.1"
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul. "



(a) Hélicoptère.



(b) Structure du banc d'essai.

FIGURE 5 – Hélicoptère et banc d'essai

### Le moteur à courant continu

On note :

- ▶  $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- ▶  $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;
- ▶  $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- ▶  $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶  $c_m(t)$  : le couple moteur;
- ▶  $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- ▶  $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- ▶  $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 2.6.

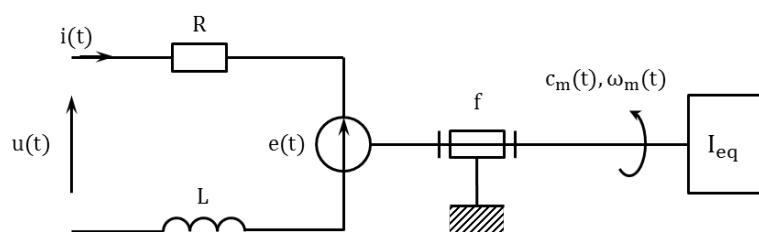


FIGURE 6 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.

Hypothèses :

- ▶ le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- ▶ les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- ▶ on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- ▶ on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- ▶ on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- ▶ pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 2.7.

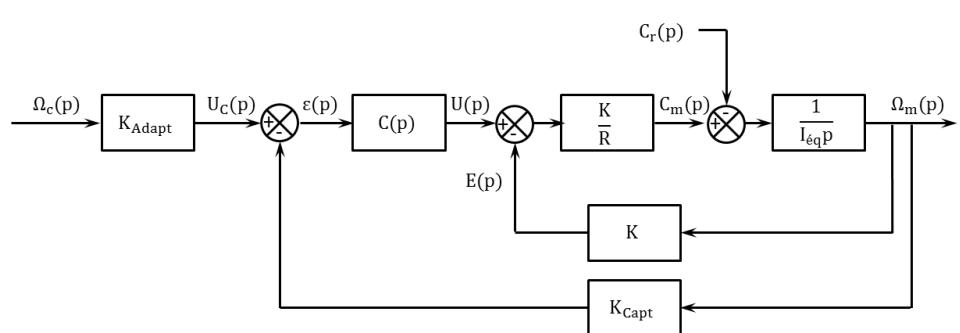


FIGURE 7 – Régulation en vitesse du banc d'essai.

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$  ?

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constante. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_c(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_c(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

#### Éléments de correction

1.  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .
2.  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_p}{K + K_p K_{\text{Capt}}} \text{ et } \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K^2 + K K_p K_{\text{Capt}}}$ .
3. .
4.  $K_2 = \frac{R}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})}$ .
5.  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$ .
6.  $\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}$ .
7. On montre que l'écart statique est annulé.
8.  $\varepsilon = 0$ .





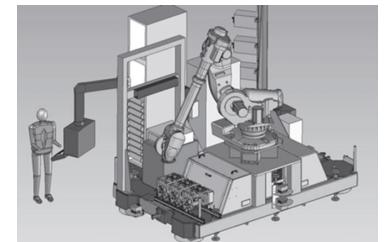
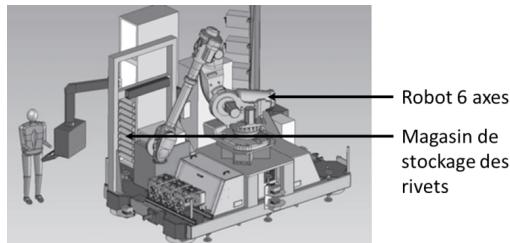
## TD 2

# Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet

Concours E3A – PSI 2015.

## Mise en situation

### Présentation



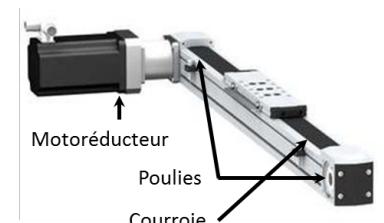
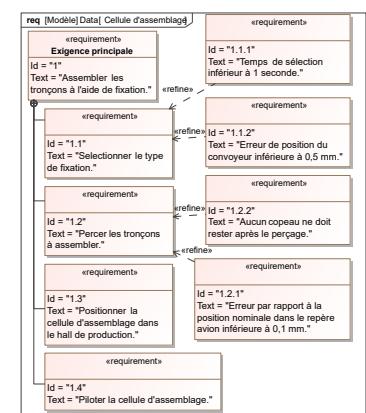
Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

L'objectif de cette partie est de valider les choix effectués par la société pour le sous ensemble de sélection des fixations de la cellule (exigence 1.1).

### Axe chariot

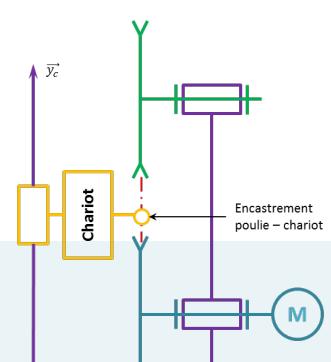
Le déplacement du chariot est assuré par un axe numérique asservi en vitesse et en position. Cet axe est composé d'un moteur à courant continu, d'un système de transmission de puissance de type poulies / courroie et d'un rail.

La modélisation du système de déplacement du chariot est donné ci-contre.



### Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Afin de sélectionner le type de fixation, la buse d'aspiration doit être déplacée en face de la cassette avec une erreur inférieure à 0,5 mm (voir exigences fonctionnelles). Cependant le fabricant du système poulie-courroie du rail indique déjà une erreur de  $\pm 0,25$  mm due notamment à l'élasticité de la courroie. Par conséquent, l'erreur en position de la commande doit être nulle. De plus, afin de ne pas perdre de temps lors



de la production, le temps maximal de déplacement lors de la sélection est imposé à une seconde.

L'étude se fera dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire un déplacement du chariot vers le haut entre les deux cassettes de rivets les plus éloignées. L'axe de déplacement est appelé  $\vec{y}_c$

## Notations domaine temporel – domaine de Laplace

Les notations entre le domaine temporel et celui de Laplace sont données dans la suite. Ainsi, si la fonction  $f(t)$  possède une transformée de Laplace, elle sera notée :  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

<input type="checkbox"/> $u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t);$	<input type="checkbox"/> $u(t)$ : tension moteur;
<input type="checkbox"/> $e(t) = K_E \omega_m(t);$	<input type="checkbox"/> $i(t)$ : courant moteur;
<input type="checkbox"/> $C_M(t) = K_C i(t);$	<input type="checkbox"/> $e(t)$ : force contre-électromotrice;
<input type="checkbox"/> $J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f\omega_m(t) = C_M(t) - C_R(t).$	<input type="checkbox"/> $\omega_m(t)$ : vitesse de rotation moteur;
	<input type="checkbox"/> $C_M(t)$ : couple moteur;
	<input type="checkbox"/> $C_R(t)$ : couple résistant modélisant l'action de pesanteur.

## Critères à respecter pour l'exigence 1.2

Exigence	Critères	Niveaux
Déplacer le chariot	<b>Précision</b> : erreur statique par rapport à une consigne de vitesse constante <b>Rapidité</b> : temps de réponse à 5% en réponse à une consigne échelon <b>Stabilité</b>	NULLE $T_{r5\%} = 0,1\text{s}$ maxi
	Marge de gain :	6 dB mini
	Marge de phase :	45° mini

## Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Compte tenu des vitesses de translation importantes, le système retenu est de type poulie-courroie.

## Détermination de l'inertie équivalente

Les grandeurs caractéristiques (notations et valeurs) des éléments de l'axe du chariot sont données dans le tableau ci-dessous.

Moment d'inertie du rotor du moteur autour de son axe	$J_m$	$140 \times 10^{-6}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur	$J_{rd}$	$60 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie motrice autour de son axe	$J_{PM}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie réceptrice autour de son axe	$J_{PR}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Masse totale du chariot	$M$	5 kg
Vitesse de rotation de l'arbre moteur	$\omega_m$	
Vitesse de rotation de l'arbre de sortie du réducteur	$\omega_r$	
Rayon d'une poulie motrice ou réceptrice	$R_p$	45 mm
Rapport de réduction réducteur ( $\omega_r / \omega_m$ )	$\lambda$	1/5

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

### Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

Le coefficient de frottement visqueux est donné par  $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$ , l'inductance par  $L = 9 \text{ mH}$ , la résistance de l'induit par  $R = 3 \text{ Ohm}$ , la constante de couple par  $K_c = 1,3 \text{ NmA}^{-1}$  et  $K_E = 1,3 \text{ V}(\text{rad s}^{-1})^{-1}$ .

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_C}{K_C K_e + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$ .

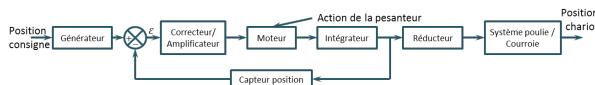
Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

La partie précédente a permis de déterminer un modèle du moteur. La suite de l'étude va permettre, par simulation, de déterminer les réglages nécessaires de l'axe vis-à-vis du cahier des charges. La figure suivante présente le principe de l'asservissement de l'axe du chariot.



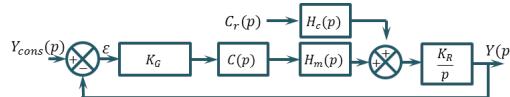
Les grandeurs caractéristiques des blocs de l'asservissement de l'axe chariot sont données dans le tableau ci-contre.

**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\varepsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne)?

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

### Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant  $C_R$  dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

Générateur	$K_G$	À déterminer
Capteur de position	$K_{capt}$	$5 \times 10^{-3} \text{ V rad}^{-1}$
Correcteur amplificateur	$C(p)$	Variable

Avec :

- $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ; \frac{(R + L p) K_M}{K_C}$
- $H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$
- $C_R(p) = C_r / p ;$
- $K_R = R_p \lambda .$

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Question 13** Conclure.

Afin de répondre totalement au cahier des charges, l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral dérivé est retenue. En effet, la commande de l'axe intègre directement ce type de correcteur. Dans la suite du problème, le correcteur  $C(p)$  sera de la forme :  $C(p) = K_I \left( 1 + \frac{1}{(T_I p)} \right) (1 + T_D p)$ . Le réglage des coefficients a été fait par simulation numérique. Afin de vérifier maintenant le critère de rapidité, on donne la réponse temporelle (figure ??) de l'axe à un échelon de position de 1 m.

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

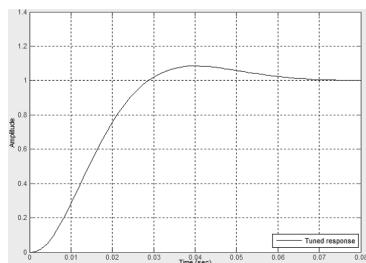
**Question 15** Tracer le diagramme de Bode.

On considère  $C_R(p) = 0$ . On prendra  $K_M = 0,8 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ ,  $T_e = 0,0051 \text{ s}$ ,  $T_m = 0,0074 \text{ s}$ .

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

On donne ci-dessous les diagrammes de Bode avec les correcteurs optimisés. Déterminer les marges de gain et marges de phase.

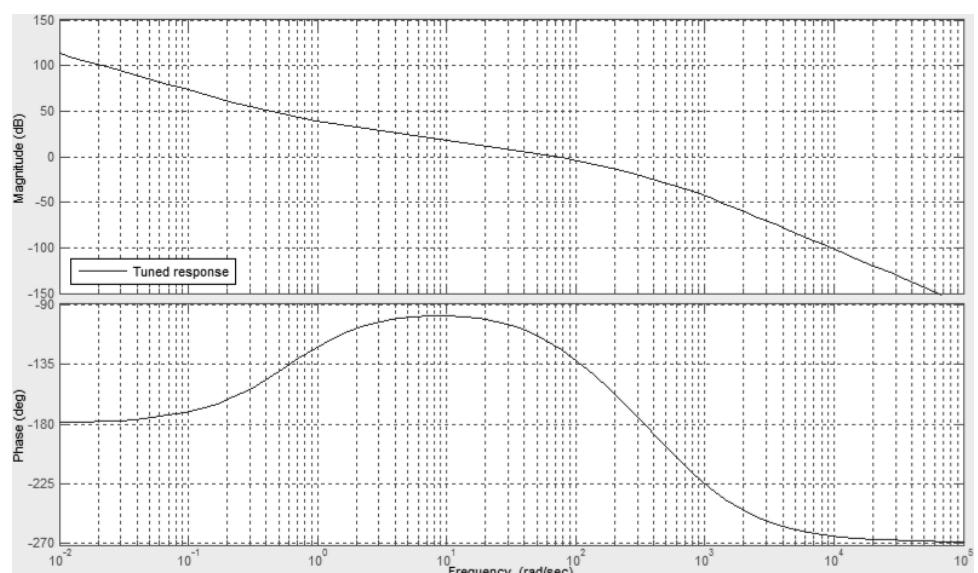
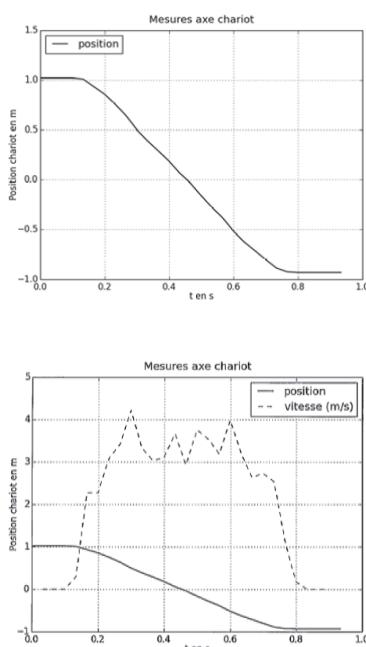


**FIGURE 8 – Réponse temporelle système réglé.**

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Afin de vérifier les réglages précédents, un essai sur le système réel est réalisé. Une consigne de 2 m est donnée. L'absence de système d'acquisition dédié impose un système de mesure extérieur au système réel. C'est un dispositif d'analyse d'image qui est retenu pour ces mesures.

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).





## TD 3

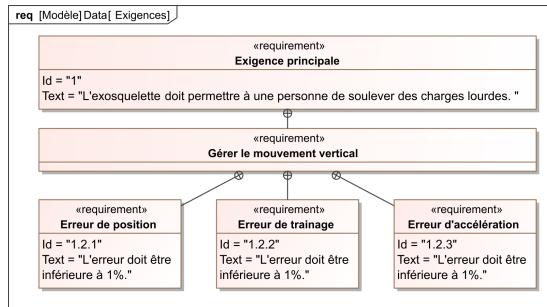
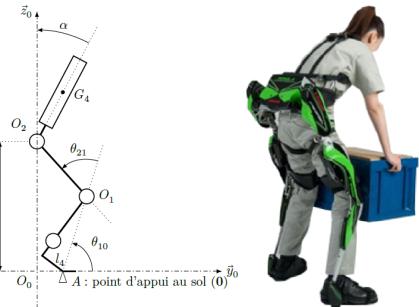
# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.

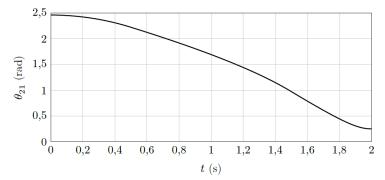


## Gestion du mouvement vertical

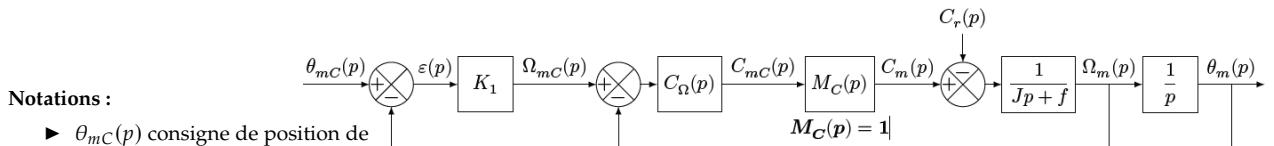
### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



- Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .
- En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que : l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ; l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .
- Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

### Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

- $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en  $rad\ s^{-1}$ );
- $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en  $rad\ s^{-1}$ );

- $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse; **Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en  $rad\ s^{-1}$ );

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

- $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique

par rapport aux autres blocs : **Méthode –**  
 $M_C(p) = 1$ ;

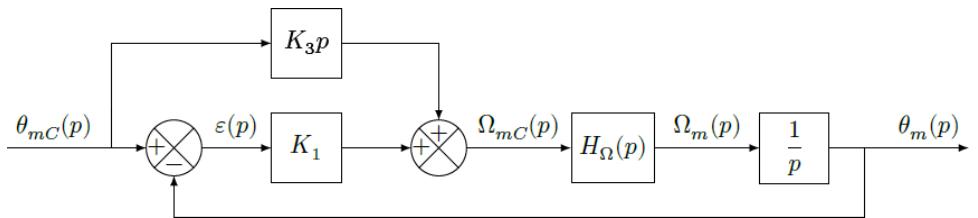
- $J$  moment d'inertie de l'en- On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée veau de l'axe moteur; échelon).

- $f$  coefficient de frottements vis- queux équivalent pour

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  semble en mouvement. pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33$  ms.



**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

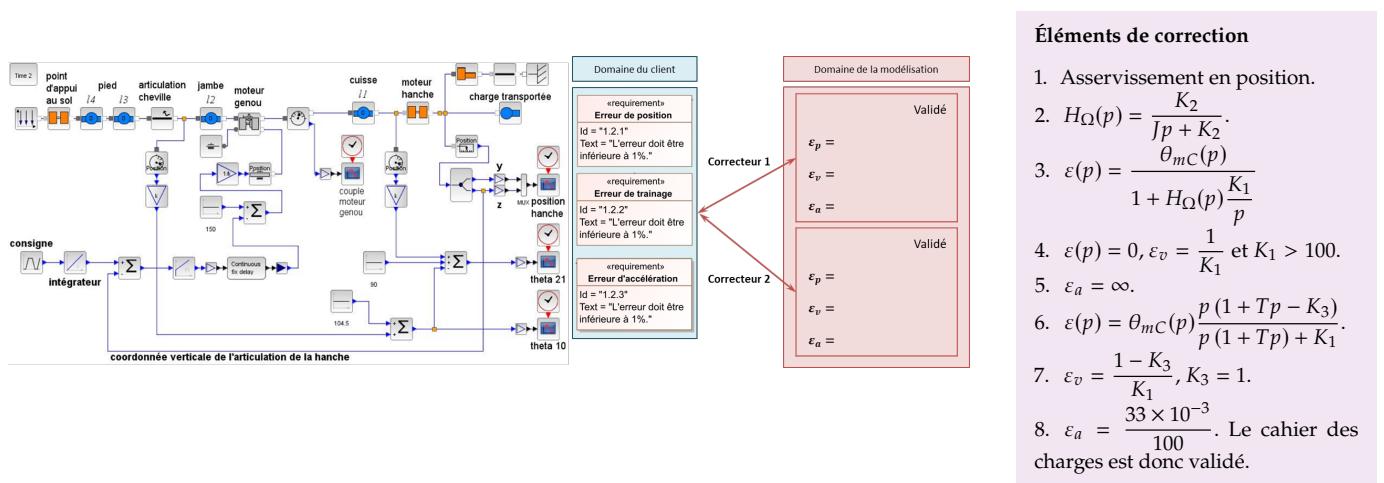
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



### Éléments de correction

- Asservissement en position.
- $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp + K_2}$ .
- $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}}$
- $\varepsilon(p) = 0, \varepsilon_v = \frac{1}{K_1}$  et  $K_1 > 100$ .
- $\varepsilon_a = \infty$ .
- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}$ .
- $\varepsilon_v = \frac{1 - K_3}{K_1}, K_3 = 1$ .
- $\varepsilon_a = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . Le cahier des charges est donc validé.





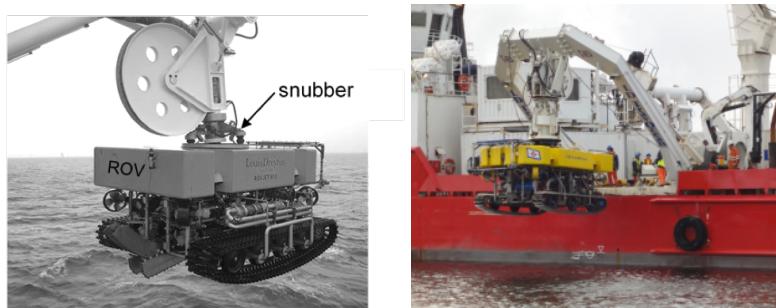
## TD 4

# Bateau support de ROV – Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

### Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.



**FIGURE 9** – ROV suspendu à la grue portique

#### Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

charges

Critère	Niveau
les mouvements du ROV pour une amplitude verticale du ROV maximale et de pulsations comprises entre 0,5 m et 10 m	< 1 m pour 5 m d'amplitude de houle
Temps de réponse, $t_{r5\%}$	< 3 s

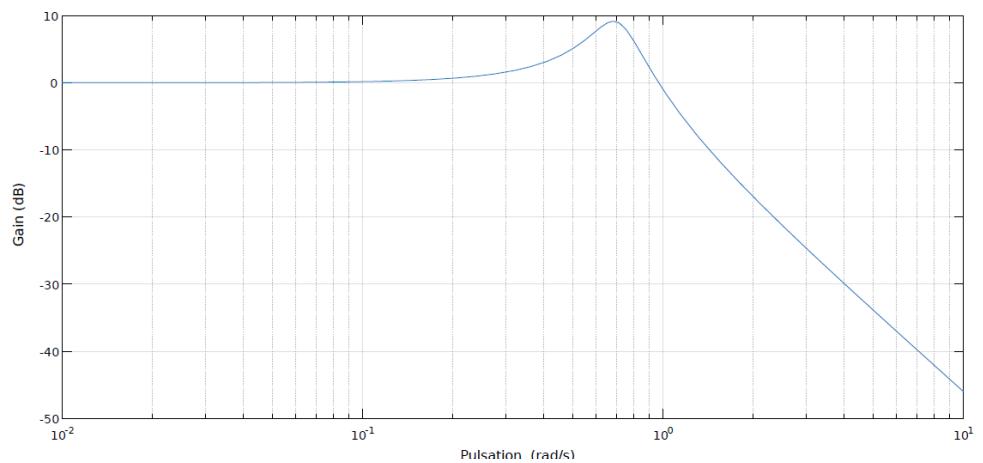
Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble  $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$  suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble  $S$  est  $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ , avec  $Y_S(p)$  la transformée

de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et  $Y_{\text{vague}}(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de  $B(p)$  dans la figure suivante.



**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (Figure 2.10).

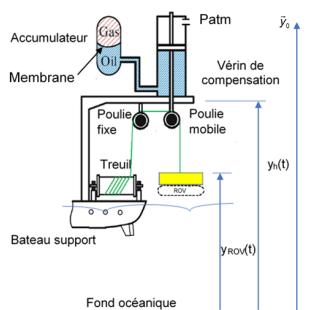


FIGURE 10 – Schéma d'implantation du PHC (non à l'échelle)

Les petites variations de pression  $\Delta p_E(t)$  et  $\Delta p_G(t)$  autour du point d'équilibre peuvent être définies par  $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$  et  $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$ . Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left( \frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{\text{ROV}}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par  $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma$  se traduit par  $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{ROV}(t) + c(\dot{y}_{ROV}(t) - \dot{y}_h(t))$  (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par  $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$ .

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliquée les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes}$$

définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation  $\tau\omega_0 = 2\zeta$ .

**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques.

Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_{vague}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle  $\omega_c$  et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.

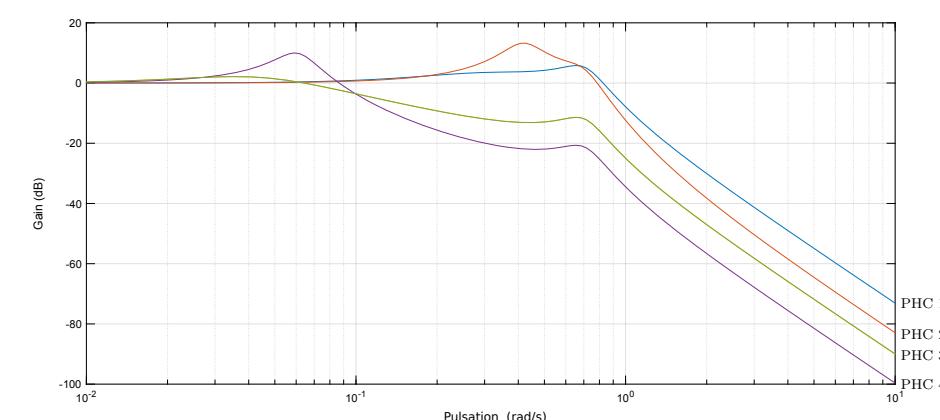


FIGURE 11 – Courbes de gain  $G(p)$  pour différents réglages du PHC

TABLE 2 – Volumes  $V_{G0}$  pour différents réglages du PHC

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
$V_{G0}$ ( $\text{m}^3$ )	96	1	52	2

La Figure 2.11 donne les diagrammes du gain de la fonction  $G(p)$  de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz  $V_{G0}$  correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à  $-14$  dB.

**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

#### Éléments de correction

1.  $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$  et

$$G_{dB(\omega)} < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$$

2. ...

3.  $K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}}$  et  $\tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}$ .

4.  $\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}$ ,  $\omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}$ ;  $\zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}$ .

5. .

6. .

7. PHC4.



## TD 5

# Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Banque PT – SIA – 2005.

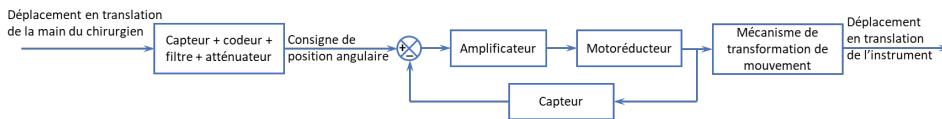
## Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon  $\vec{z}_1$ .

**TABLE 3** – Liste partielle des exigences.

Req.	Exigence	Niveaux
1	Vitesse de translation nominale	$> 0,1 \text{ m s}^{-1}$
2	Temps $t_1$ pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
3	Précision – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
4	Précision – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ m s}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
5	Stabilité – Dépassemment	Aucun
6	Stabilité – Marge de phase	$45^\circ$
7	Rapidité – Bande passante à $-3 \text{ dB}$ pour la partie mécanique	4 Hz

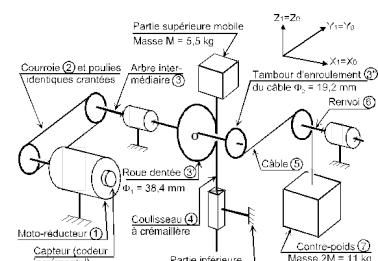
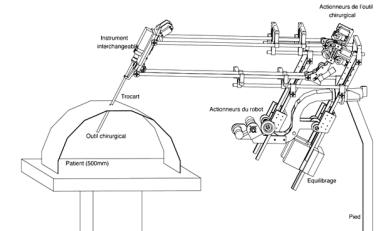
La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon  $\vec{Z}_1$ ) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.



La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure ci-contre présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006 ; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3) ;



- ▶ une roue dentée (3') de diamètre primitif  $\Phi_1 = 38,4 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;
- ▶ cette crémaillère est en liaison glissière d'axe  $\vec{z}_1$  par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse  $M = 5,5 \text{ kg}$ , les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse  $2M = 11 \text{ kg}$  tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3'') de diamètre  $\Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 19,2 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3).

Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :

- ▶ puissance nominale en sortie du réducteur :  $P_{\text{nom}} = 8,6 \text{ W}$ ;
- ▶ couple nominal en sortie du réducteur :  $C_{\text{nom}} = 1,4 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple de maintien en sortie du réducteur :  $C_{\text{maint}} = 1,5 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple maxi en sortie du réducteur :  $C_{\text{max}} = 2,7 \text{ Nm}$ ;
- ▶ vitesse nominale en sortie du réducteur :  $N_{\text{nom}} = 60 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ vitesse maxi en sortie du réducteur :  $N_{\text{max}} = 100 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur :  $J_1 = 3,70 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ capteur de position : codeur 360 incrémentés par tour monté sur le rotor du moteur;
- ▶ rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

Avec :

### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

- ▶  $u(t)$  tension appliquée aux bornes de l'induit
  - ▶  $i(t)$  intensité du courant traversant l'induit
  - ▶  $e(t)$  force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;
  - ▶  $\omega_{\text{rédu}}$  vitesse de rotation à la sortie du réducteur;
  - ▶  $C_{\text{rédu}}$  couple moteur ramené à la sortie du réducteur;
  - ▶  $R = 10 \Omega$  : résistance de l'induit;
  - ▶  $L = 2,2 \text{ mH}$  inductance de l'induit;
  - ▶  $k_e = 2,1 \text{ N m A}^{-1}$  constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
  - ▶  $k_e = 2,1 \text{ Vs rad}^{-1}$  constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
  - ▶  $C_r = 0,2 \text{ N m}$  couple résistant à l'induit par les frottements secondaires mené à la sortie du réducteur
  - ▶  $f_v = 0,04 \text{ N m s rad}^{-1}$  coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur
  - ▶  $J_{\text{équ}} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.
- Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.
- 
- Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

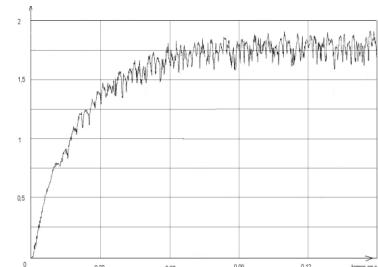
Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de  $M(p)$  suivante :  $M_1(p) = \frac{0,436}{1 + 14,5 \cdot 10^{-3}p + 3,1 \cdot 10^{-6}p^2}$ .

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension  $u(t) = 24$  V. Avec une génératrice tachymétrique dont le gain est de  $0,166$  V s rad $^{-1}$ , on a tracé la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ .

Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.



#### Remarque

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

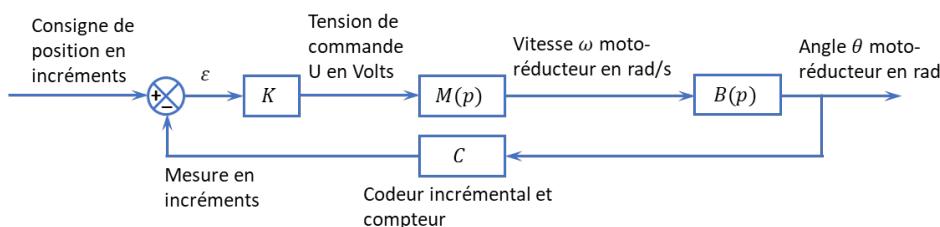
Dans la suite du problème, on néglige l'inductance  $L$  du moteur.

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

#### Respect du critère de marge de phase

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incrémentés est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



Le convertisseur-amplificateur  $K$  de gain  $k$  variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental  $C$  placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incrémentés par tour. Il est associé à un compteur – décompteur qui élabore la mesure de position en incrémentés. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.

**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

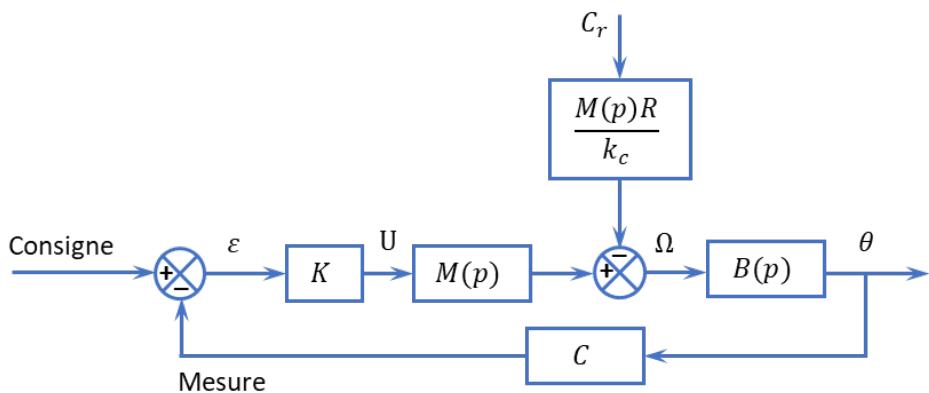
**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.

#### Remarque

Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à  $-180 + 45 = -135^\circ$ .

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{conso}}$  en incrément lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

Étant donné que la perturbation  $C_r$  intervient entre deux blocs de  $M(p)$ , on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.

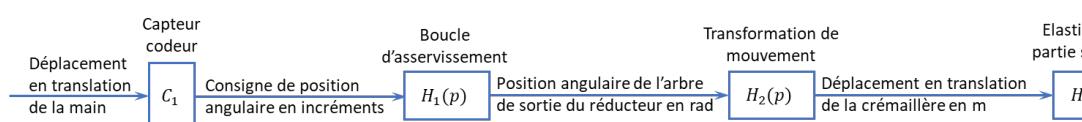


**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incréments entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

### Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

#### Modélisation par schéma-blocs



## Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est :

$H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$ . On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrène avec la crémaillère a un diamètre  $\Phi_1 = 38,4$  mm.

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incrément par mètre du bloc  $C_1$ .

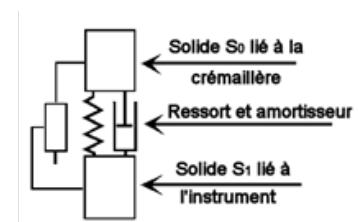
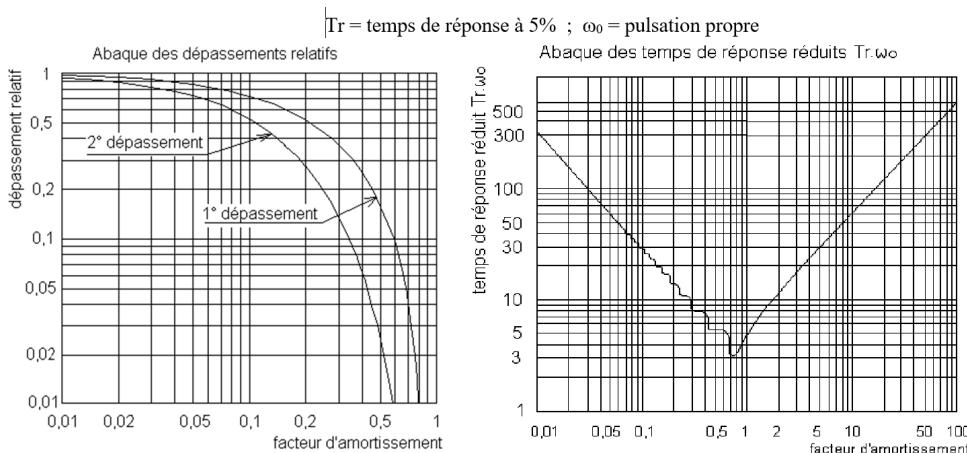
Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

## Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides :  $S_0$  représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés ; et  $S_1$  représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur  $k_0$  et un amortisseur de coefficient  $f_0$ , montés en parallèle comme le montre le schéma.

Pour identifier la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$  de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement  $d_{\text{crém}}(t) = 20 \times 10^{-3}$  m à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement  $d_{\text{instrum}}(t)$  de l'instrument.



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassements relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3$  dB est-il satisfait ?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de  $H_3(p)$ , de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit  $m_1$  la masse du solide  $S_1$ . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté  $\vec{z}$ . L'origine  $O$  du mouvement de  $S_1$  correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit  $a_0$  l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota :  $a_0$  est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :

$$m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0.$$

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0$ ,  $f_0$ ,  $m_1$ .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6$  kg.

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3$  dB de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3\text{dB}} > \omega_{03}$ ).

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur  $c_1$  du bloc  $C_1$ . La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}. \text{ Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de } 100 \text{ mm s}^{-1}. \text{ On a tracé sur la figure 2.12 les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.}$$

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

On donne figure 2.13, la courbe d'amplitude (gain) de  $H(p)$  pour  $p = j\omega$  dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal traité par le capteur-codeur  $C_1$  de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps :  $T_1 = 0,04$  s ;  $T_2 = 0,1$  s ;  $T_3 = 0,5$  s.

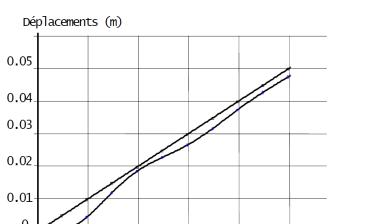


FIGURE 12 – Courbes de déplacement de la main

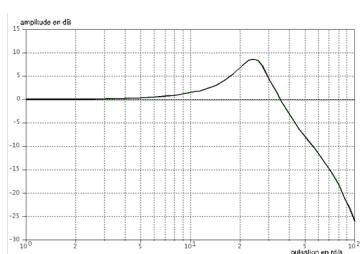


FIGURE 13 – Courbe de gain

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténusés de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

#### Éléments de correction

$$1. U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p); \\ E(p) = k_e\Omega_{\text{rédu}}(p); C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p); C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p).$$

$$2. M(p) = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} \cdot \frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1$$

3. .

4. .

$$5. M_2(p) = \frac{k_c}{\frac{R J_{\text{équ}}}{k_e k_c + R f_v} p + 1}$$

$$6. G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}, \text{ on a } \tau = 0,02 \text{ s.}$$

$$7. B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad,} \\ H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{k G_S}{1 + T p}.$$

8. .

9. L'écart statique est nul.

$$10. \varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}$$

$$11. H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$$

12. .

13. .

14. .

$$15. H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

16. .

$$17. \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

$$18. \Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

19. ► Écart dynamique maximal : 5 mm.

► Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.

► Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

20. .

$$21. T_2 = 0,1 \text{ s.}$$





## TD 6

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2006

## Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé enrayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.



### Objectif

L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure 2.16 où  $v_c$  est la consigne de glissement.

On note :

- ▶  $H_1(p)$  la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve);
- ▶  $H_2(p)$  la fonction de transfert de la roue au freinage;
- ▶  $C(p)$  le correcteur de la boucle de régulation;
- ▶  $M(p)$  la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure;
- ▶  $v_m$  : glissement estimé.

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse de train  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

On a  $M = 8200 \text{ kg}$ ,  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ ,  $I/r^2 = 400 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :

$$H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}.$$

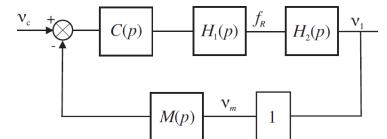


FIGURE 14 – Structure de la chaîne de régulation de glissement

**Marges de stabilité, performances en boucle ouverte**

Pulsation de coupure à 0 dB

$$\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$$

Marge de phase

$$\Delta\varphi \geq 60^\circ \text{ au point de fonctionnement}$$

Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique  $\mu = f(\nu)$ **Réponse à un échelon de consigne de glissement**

Écart en régime permanent

Nul

Temps du 1<sup>er</sup> maximum

$$t_m \leq 3,5 \text{ s}$$

Dépassement

$$D \simeq 18 \%$$

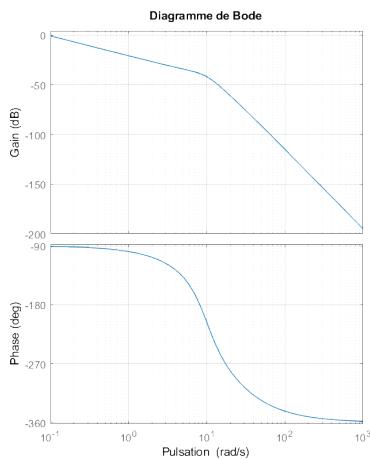
**Réponse à une variation en échelon de l'adhérence**

Écart en régime permanent

Nul

Temps de réponse

$$t_r \leq 9 \text{ s}$$

**FIGURE 15** – Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ 

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

**Synthèse du régulateur de la boucle de régulation**

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode – Marge de phase**

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode –**

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |FTBO(j\omega_c)| = 0$ .

**Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement**

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de

glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$ .

On supposera sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 5** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Question 6** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 7** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 8** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

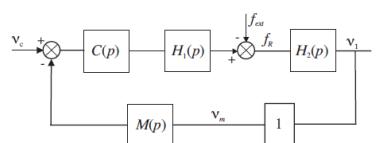
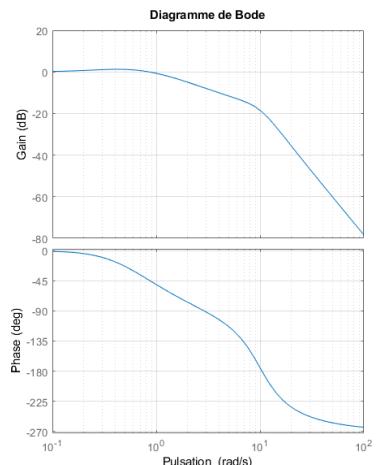
**Question 9** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

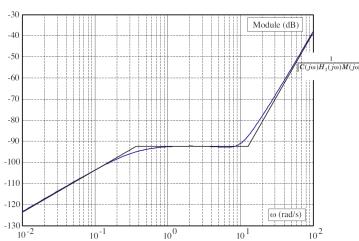
## Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 10** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .





**Question 11** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $||H_2(j\omega)||$ .

**Question 12** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $||F_2(j\omega)||$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Question 13** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + Tp}$ .

**Question 14** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 15** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

### Retour sur le cahier des charges

**Question 16** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

#### Éléments de correction

1. ...
2.  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .
3.  $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .
4. \*\*\*
5. \*\*\*
6. \*\*\*
7. \*\*\*
8. \*\*\*
9. \*\*\*
10. \*\*\*

## TD 7

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016

## Mise en situation

### Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

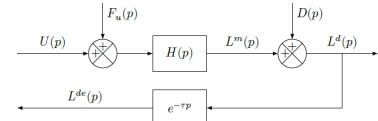
Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure 2.16.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$  ;



**FIGURE 16** – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

- marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

## Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure 2.17.

**FIGURE 17 – Structure de commande à une boucle**

En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

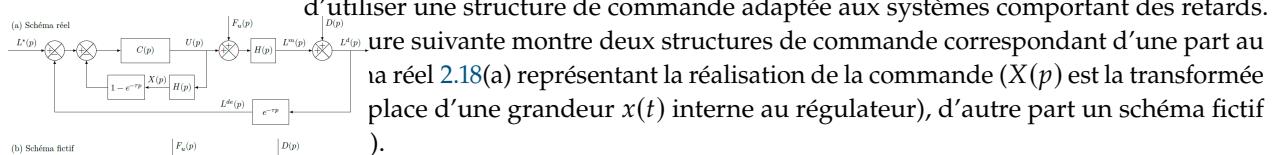
**Question 1** La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{Ti_1 p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

## Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards.



**FIGURE 18 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard.**

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{Ti p}\right)$$

permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier

des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

## Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;
- ▶ la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

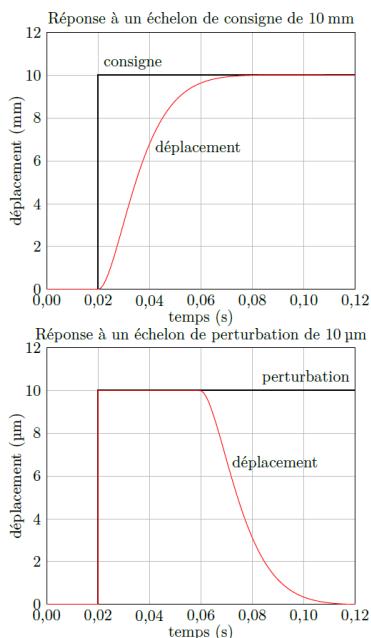
- ▶  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- ▶  $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- ▶ l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- ▶ les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- ▶ une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- ▶ on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- ▶ le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure (a) reste stable du point vue interne.

### Retour sur le cahier des charges



**FIGURE 20** – Evolutions temporelles de la position  $L^d(t)$

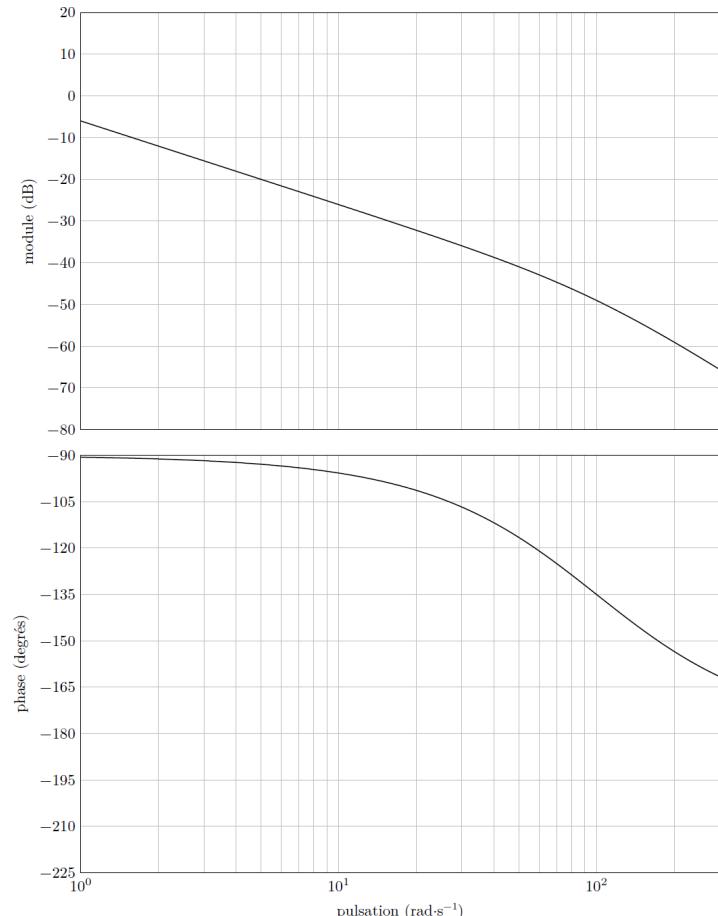
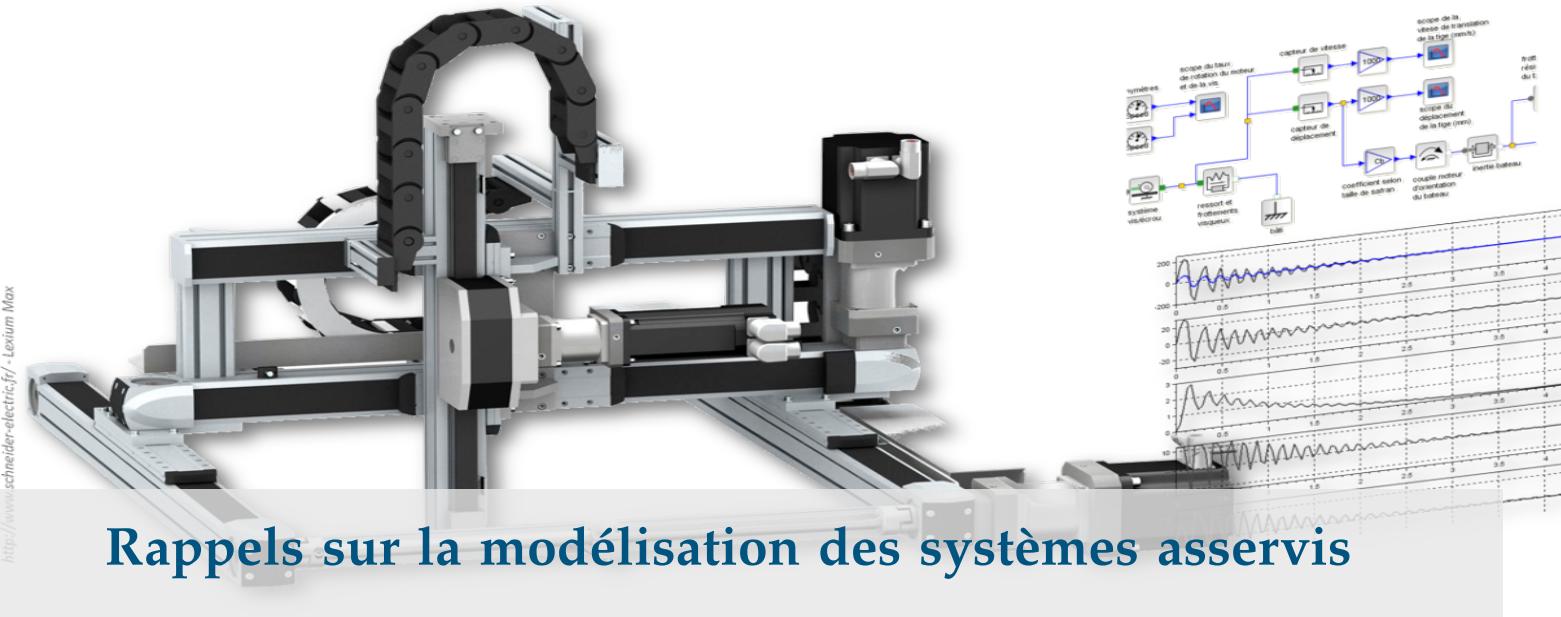


Figure B – Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$

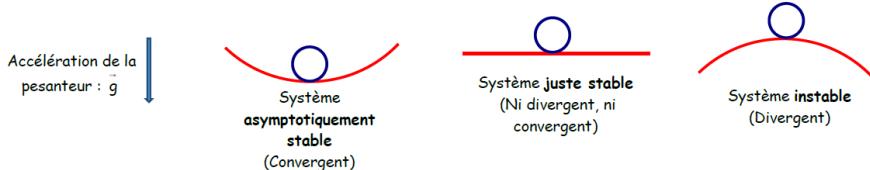


# Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

## 1 Notion de stabilité

### 1.1 Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



### 1.2 Premières définitions

#### Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- ▶ abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre ;
- ▶ son régime transitoire finit par disparaître ;
- ▶ sa sortie finit par ressembler à l'entrée ;
- ▶ sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

#### Remarque

La stabilité d'un système **est indépendante** de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionnelle.

3.1 Notion de stabilité . . . . . 63

3.2 Marges de stabilité . . . . . 66

C1-01

C2-03

### Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro au cours du temps.

## 1.3 Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles  $p_i$  de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de  $H(p)$  on peut alors retrouver une fonction de la forme :

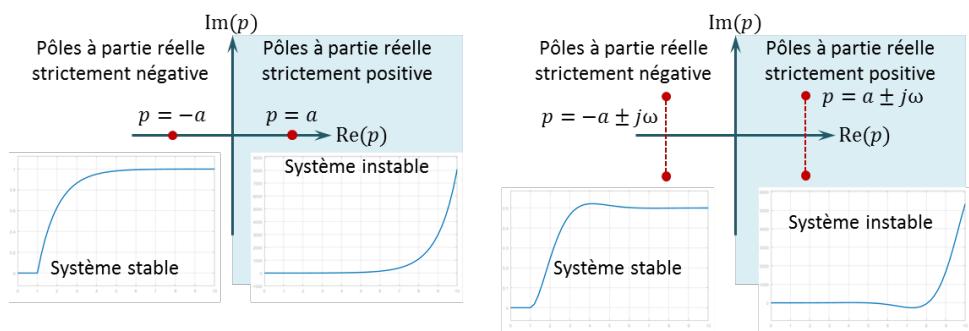
$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :

- ▶ les pôles réels (de type  $p = -a$ ) induisent des modes\* du type  $e^{-at}$ ;
- ▶ les pôles complexes conjugués (de type  $p = -a \pm j\omega$ ) induisent des modes du type  $e^{-at} \sin \omega t$ .

**On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.**

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.



**FIGURE 1** – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicelle

## 1.4 Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicelle associée.

\*. mode : fonction temporelle associée à un pôle

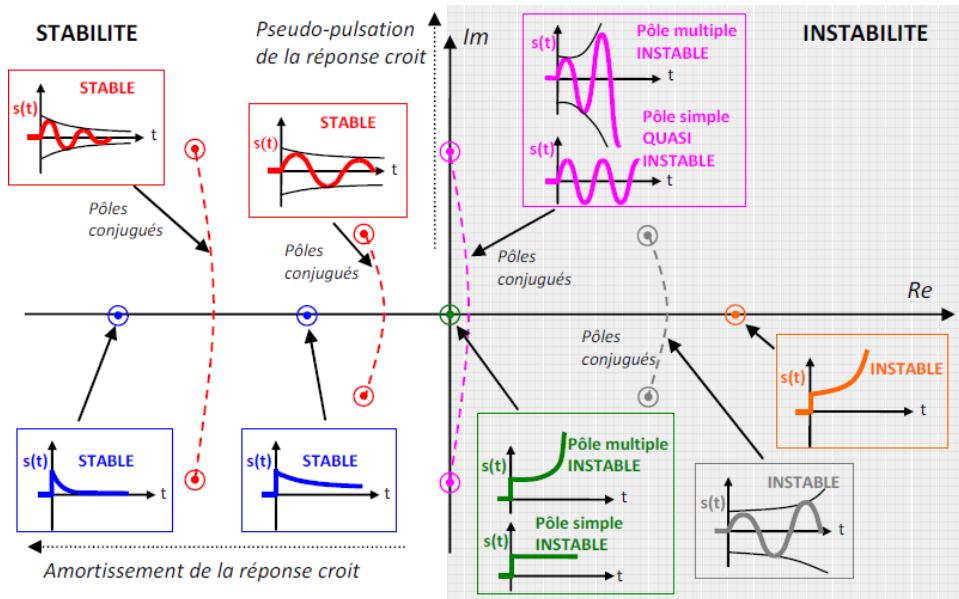


FIGURE 2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [mathurin\_stabilite].

### Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

### Remarque

On peut montrer que :

- ▶ pour les systèmes d'ordre 1 et 2 : le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- ▶ pour les systèmes d'ordre 3 : de la forme  $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$  les coefficients doivent être strictement de même signe et  $a_2a_1 > a_3a_0$ .

## 1.5 Pôles dominants [1]

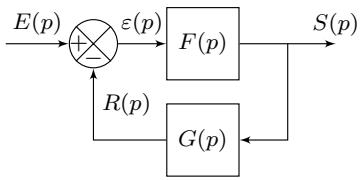
Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

## 1.6 Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

## 2 Marges de stabilité

### 2.1 Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par  $H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$ .

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :  $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}$ .

#### Définition – Équation caractéristique

Soit  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  une fonction de transfert. On appelle  $D(p) = 0$  l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de  $D(p)$  correspondent aux pôles de  $H(p)$ .

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera  $1 + H_{BO}(p) = 0$ .

### 2.2 Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

### 2.3 Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme  $1 + H_{BO}(p) = 0$ . Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation  $H_{BO}(p) = -1$ . Ainsi dans le plan complexe, le point  $(-1; 0)$  permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de  $-180^\circ$ .

#### Résultat –

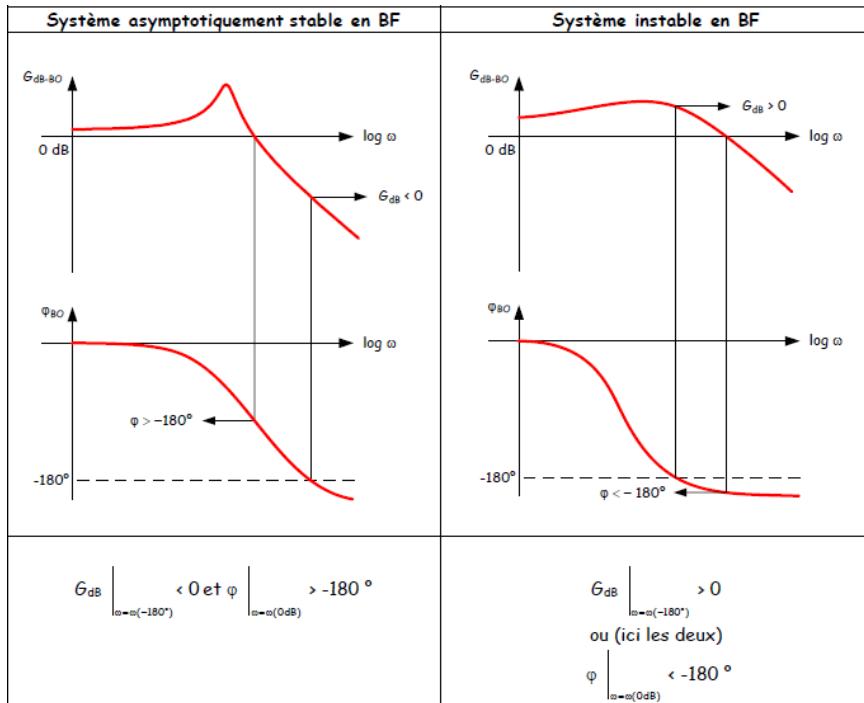
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

$$G_{dB}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0dB}} > -180^\circ.$$

En notant  $\omega_{-180^\circ}$  la pulsation pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$  et  $\omega_{0dB}$  la pulsation pour laquelle le gain est nul.

### Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



## 2.4 Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

### Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

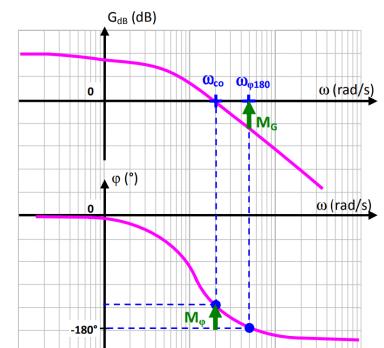
- ▶ la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- ▶ la marge de phase est supérieure à 45°.

### Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que  $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$  où  $\omega_{c0}$  est la pulsation de coupure pour laquelle  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$ .

### Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que  $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$  où  $\omega_{\varphi180}$  est la pulsation pour laquelle  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180^\circ$ .



La marge de gain permet compte de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

- ▶ la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- ▶ le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- ▶ le système n'est pas invariant au cours du temps;
- ▶ on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- ▶ certaines non linéarités sont ignorées.

# Application 0

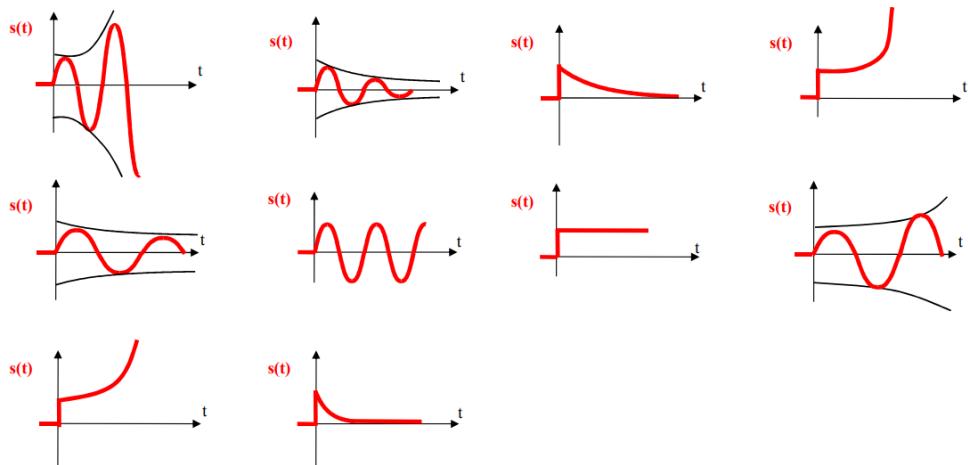
## Stabilité des systèmes – Sujet

### Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03



### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

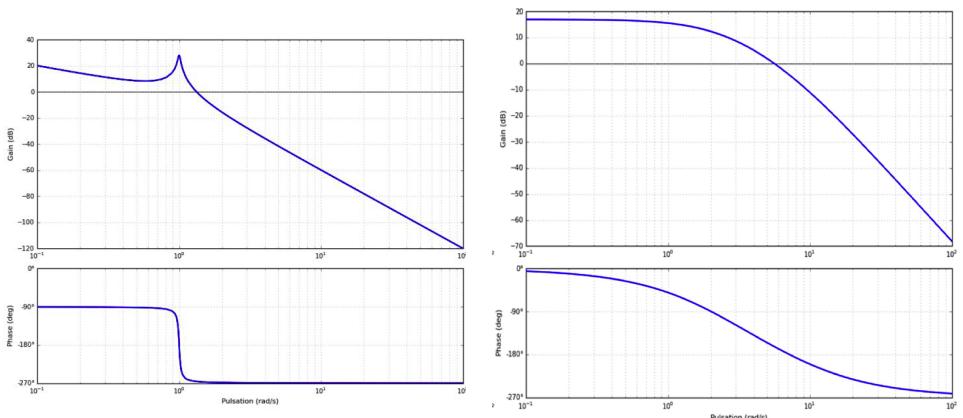
- |                               |                            |                      |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$                  | 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 2. $-3, -2, 0;$               | 5. $-j, j, -1, 1;$         | 8. $2, -1, -3;$      |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 6. $-1, +1;$               | 9. $-6, -4, 7.$      |

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

**Question 2** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

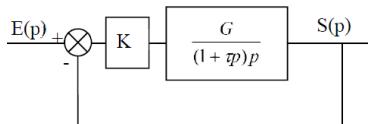


## Exercice 4 – Étude de la stabilité

### Objectif

- ▶ Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- ▶ La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45 °.

On donne le schéma ci-contre.



On a  $K = 1$ ,  $\tau = 0,1$  et  $G = 20$ .

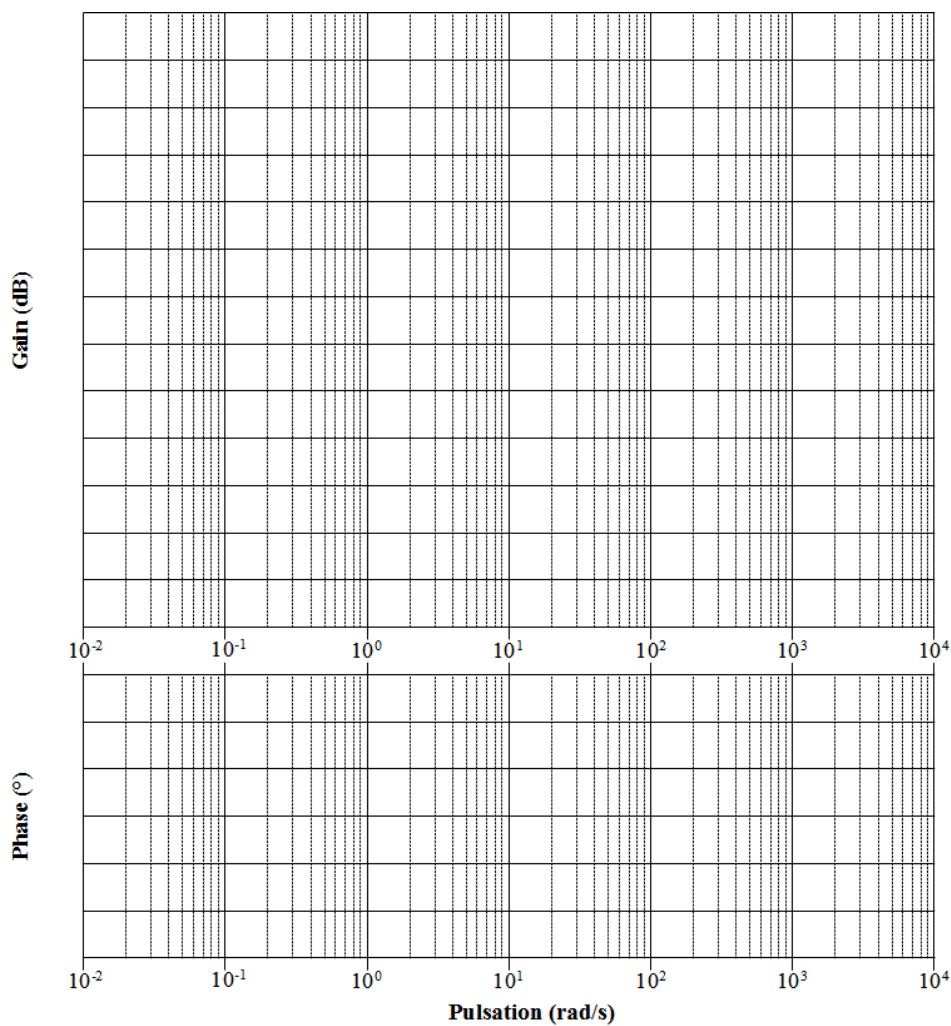
**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.





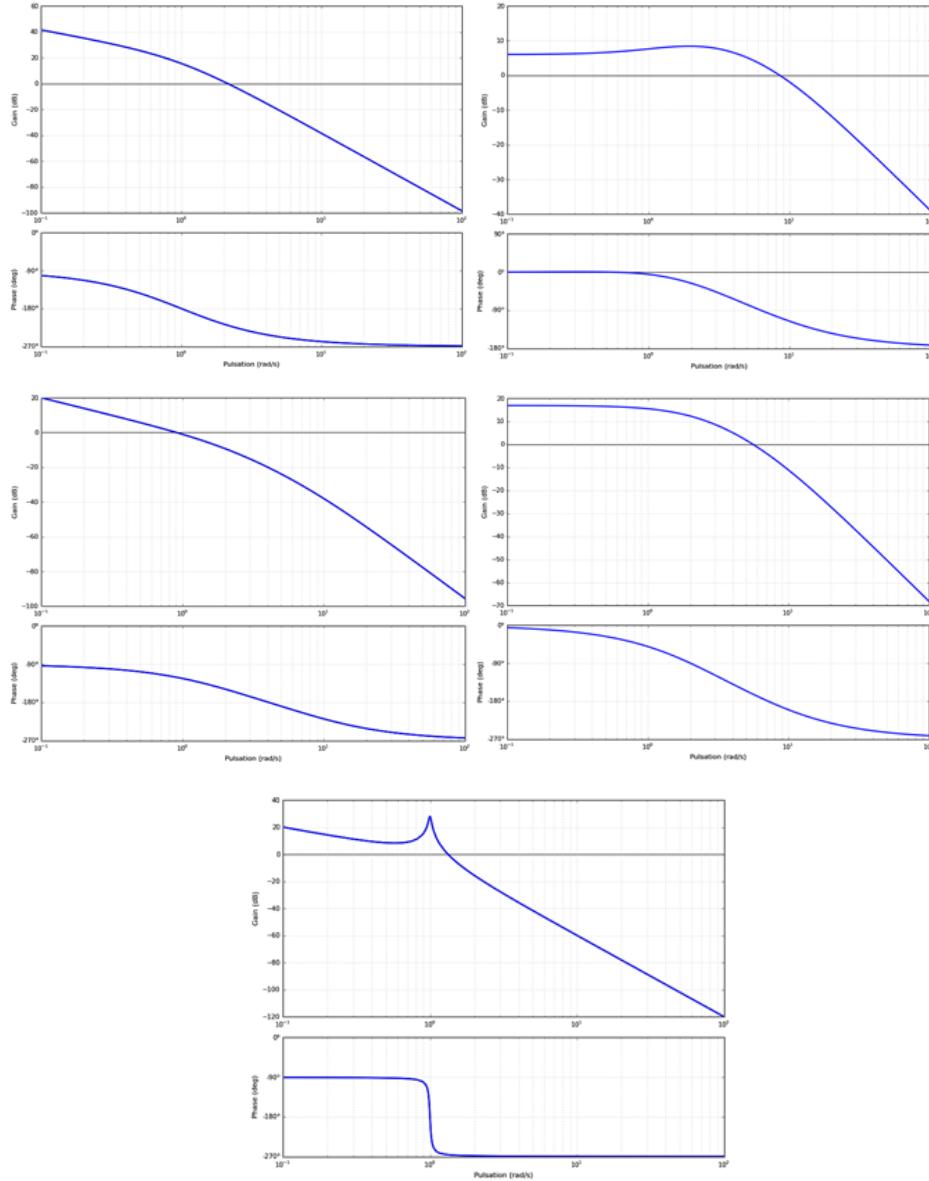
# Application 1

## Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

C2-03

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.







## TD 0

# Drone quadri-rotor – Sujet

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

## Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ ) et en tangage (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{y})$ ) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

## Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

## Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 %
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s



de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ . On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

## Recherche du point de fonctionnement $\omega_0$

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{Z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240$  g. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ . La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.

**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

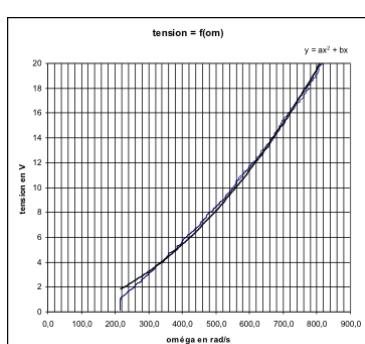
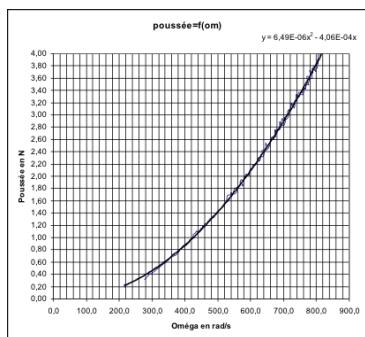
Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$  et la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s en régime permanent lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125$  ms.

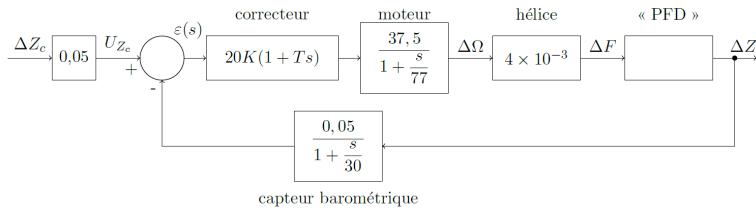
**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :





Le gain du capteur barométrique est de  $0,05 \text{ V m}^{-1}$ . On pose  $z(t) = z_0 + \delta z(t)$ ,  $\Delta Z(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta z(t)$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :  $m\ddot{z} = 4F - mg$ .

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 3.3, en gras avec un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2s$ ).

**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2s$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et  $1000 \text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120 \text{ dB}$  et  $10 \text{ dB}$ .

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega_{c0\text{dB}} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure 3.4 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.

**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

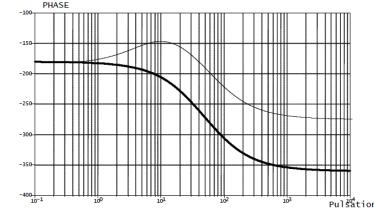


FIGURE 3 – Courbe de phase

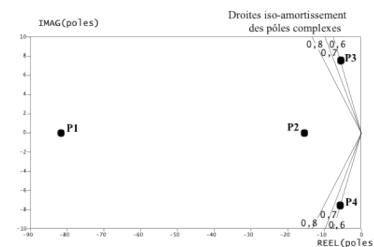
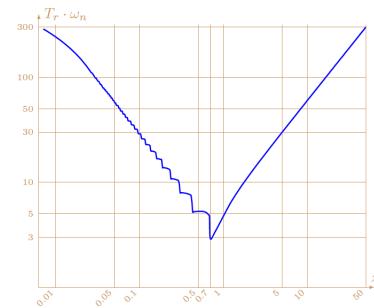


FIGURE 4 – Carte des pôles



### Éléments de correction

1.  $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0;$
2.  $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}.$
3.  $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}.$
4.  $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}.$
5.  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}.$
6.  $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$  et  $k_b = \frac{a}{b\tau}.$
7.  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}.$
- 8.
- 9.
10.  $K = 17,9.$
11. FTBO de classe 2,  $\varepsilon_s$  nul.
12.  $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j.$
13.  $\xi = 0,6$
- 14.
15.  $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}.$   $\omega_n \simeq 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16.  $t_{5\%} \simeq 0,61 \text{ s}.$

# TD 1

## Stabilisateur actif d'image – Sujet

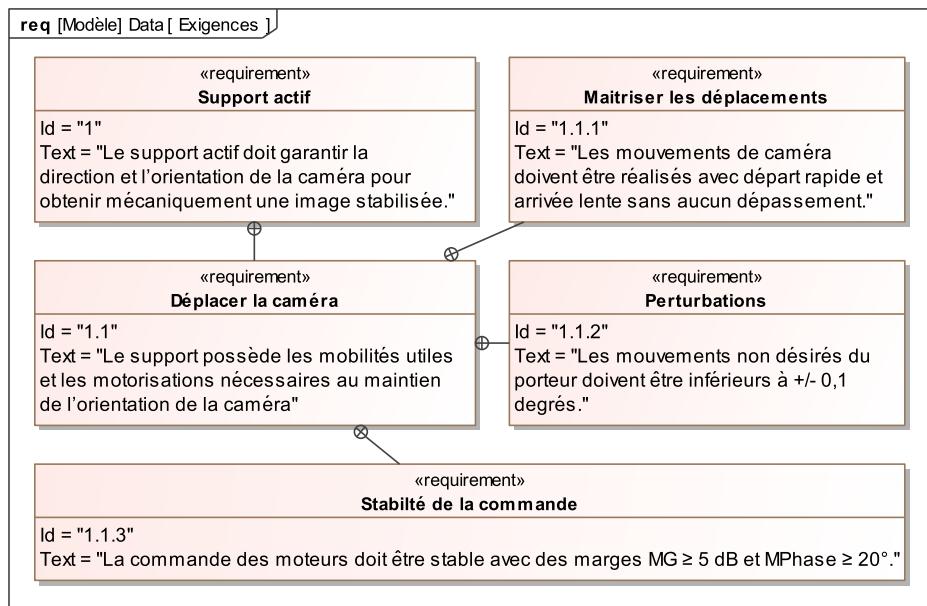
Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

### Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



### Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

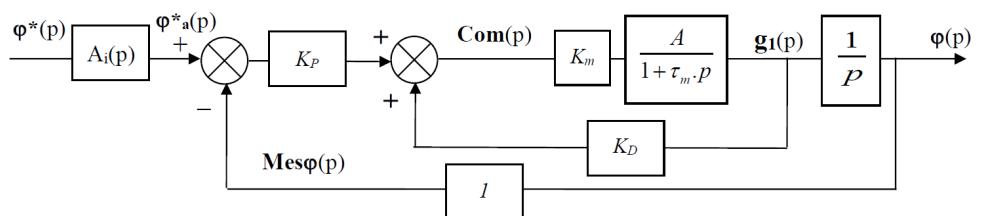
### Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne

présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur  $K_m$  ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur  $\text{com}(t)$  et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Le réglage retenu est tel que  $K_m A = 1$ . **Le retour  $K_D$  agit par un sommateur.** Dans cette étude,  $A_i(p) = 1$ .



Modèle 1 de l'axe de tangage

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

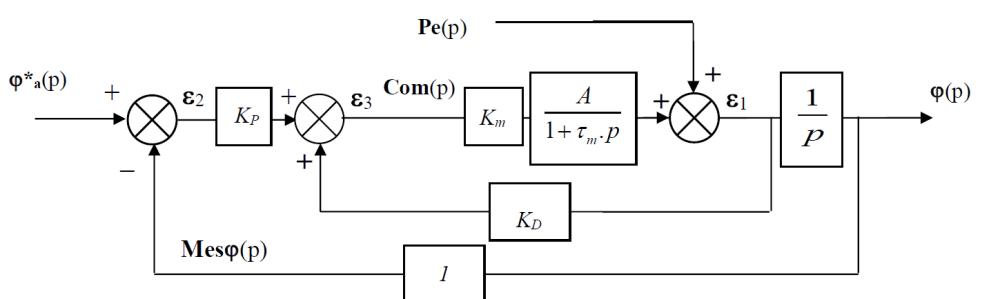
Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqués.

En accord avec les résultats précédents, on fixe  $K_D = 0,5$  et  $\tau_m = 0,2 \text{ s}$ . Dans un premier temps on impose  $K_P = 10 \text{ s}^{-1}$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ( $A_1(p) = 1$ ). On considère ici que la consigne est constante donc  $\varphi_a^*(t) = 0$ . Une perturbation  $\text{Pe}(p)$  agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle  $\text{Com}(p)$  la transformée de Laplace de la commande du moteur  $\text{com}(t)$ .



Modèle 2 de l'axe de tangage

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $\text{Pe}(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $\text{com}(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$ .

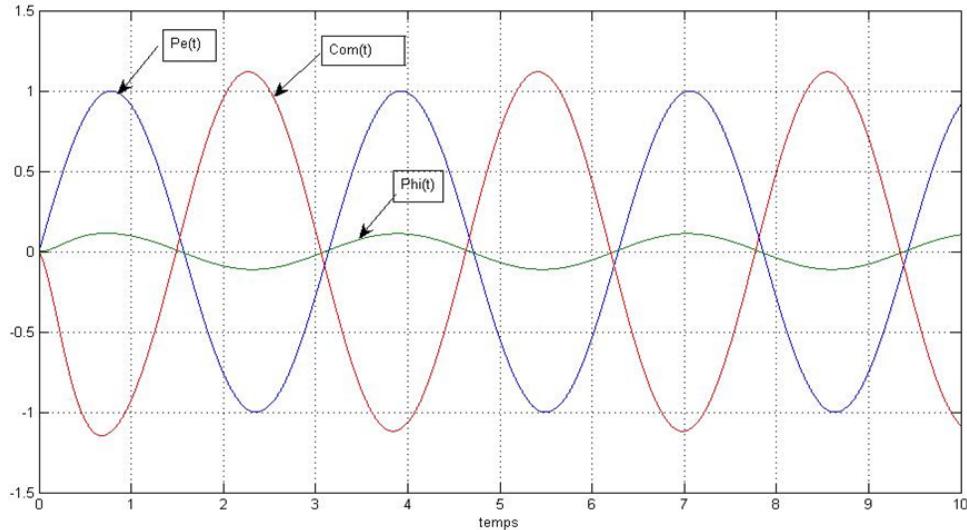
**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5 \text{ dB}$  et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

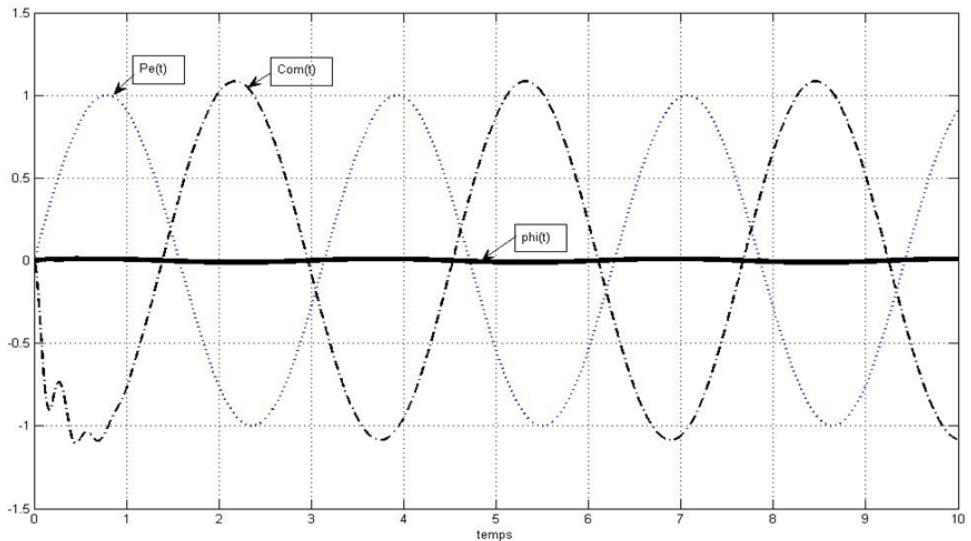
$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

$\omega$ (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	-112°	-135°	-153°	-160°	-166°
$20 \log  F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

Le figure suivante présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).



**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $\text{Com}(t)$  relativement à  $\text{Pe}(t)$  en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure suivante).



**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

## Synthèse

### Éléments de correction

$$\frac{K_P}{A_i(p)} \quad \text{et} \quad \text{FTBF}(p)$$

$$A_i(p) = \frac{K_P}{(1 + \tau_m p)^{1/2}}$$

$$2. K_D < 1.$$

$$3.$$

$$4. \text{Stab}(p) =$$

$$\frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{(1 + \tau_m p)^{1/2}} = 1/1.1$$

$$5. \lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = -1.$$

$$6. \frac{\text{Mes}\varphi(p)}{K_m A K_P}$$

$$\frac{\text{Pert}(p)}{1 + \tau_m p} = 1.1.2$$

$$7. \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ.$$

$$8. K_P < 1, 41.$$

$$9. .$$

$$10. .$$

**tion 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances attendues.

### Domaine du commanditaire Performances attendues

#### «requirement» Maitriser les déplacements

I.1.1" : "Les mouvements de caméra doivent être réalisés avec départ rapide et arrivée sans aucun dépassement."

#### «requirement» Perturbations

I.1.2" : "Les mouvements non désirés du sujet doivent être inférieurs à +/- 0,1 %."

#### «requirement» Stabilité de la commande

I.1.3" : "La commande des moteurs doit être stable avec des marges MG  $\geq 5$  dB et  $\omega_n \text{asse } \geq 20^\circ$ ".

### Domaine de la simulation Performances simulées

#### Méthode

Condition sur  $K_D$

Validation de 1.1.1

#### Méthode

Validation de 1.1.2

#### Méthode

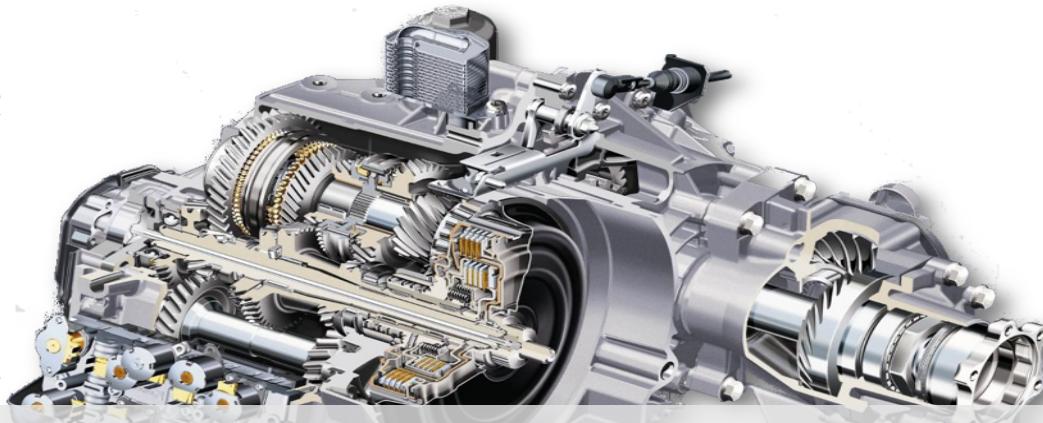
Condition sur  $K_P$

Validation de 1.1.3

Correction  $K_D$

Correction  $K_P$

## Bilan



# Résolution des problèmes de dynamique plans à une mobilité

## 1 Introduction

### Objectif

L'objectif de ce cycle est triple. L'étude dynamique des systèmes de solide permet de :

- ▶ déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en tenant compte des masses (et des répartitions de masses) des pièces ou des classes d'équivalence cinématique;
- ▶ dimensionner les actionneurs permettant d'actionner un système;
- ▶ déterminer les équations de mouvement.

On distingue deux principaux types de problèmes en dynamique :

▶ **type 1 :**

- on connaît : les actionneurs et les inerties,
- on détermine : les lois de mouvement et les actions mécaniques dans les liaisons ;

▶ **type 2 :**

- on connaît : les lois de mouvement et inerties,
- on détermine : les caractéristiques des actionneurs et les actions mécaniques de liaison.

### Définition – Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** se définit à partir d'une repère spatial (orthonormé direct  $(O_g; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ ) et d'une base de temps ( $t$ ) et est animé d'un mouvement de **translation rectiligne uniforme** (à vitesse constante) par rapport à un référentiel absolu fixe ou à un autre référentiel galiléen  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

On peut également le définir comme un référentiel « dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique ».

4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Première approche du PFD . . . . .	84
4.3	Théorème de l'énergie cinétique dans des particuliers (mais fréquents) . . . . .	87
4.4	Loi de mouvement en trapèze . . . . .	89

C1-05

C2-08

C2-09

### Remarques

Dans la pratique, on fera toujours la **supposition qu'un repère est galiléen**. Cela dépendra effectivement des mouvements mis en jeu et des échelles temporelles et spatiales considérées. Par exemple :

- ▶ pour étudier des mouvements de l'ordre de quelques minutes à l'échelle humaine, le **référentiel terrestre** (origine liée au centre de la terre et les trois axes liés au globe terrestre) est approprié;
- ▶ pour étudier les effets météorologiques (ouragans, courants marins), ou les mouvements des satellites, il convient alors de tenir compte de l'inertie de la terre et on pourra choisir le **référentiel géocentrique** (origine liée au centre de la terre et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées) comme référentiel galiléen;
- ▶ pour étudier le mouvement des planètes, il convient mieux d'utiliser le **référentiel héliocentrique** (origine liée au centre du soleil et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées).

Une chronologie galiléenne est obtenue par une horloge précise (Quartz, atomique, ou mouvement des astres). En mécanique classique (ou Newtonienne), les deux repères d'**espace et de temps** sont supposés **indépendants** ce qui n'est pas le cas de la mécanique relativiste.

## 2 Première approche du Principe Fondamental de la Dynamique

### 2.1 Principe Fondamental de la Dynamique

#### Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Dans le cas général, soit un ensemble matériel  $E$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), alors la somme des actions mécaniques extérieures (**torseur des actions mécaniques extérieures** s'appliquant sur  $E$ ) est égale au **torseur dynamique** du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{\mathcal{D}(E/R_0)\}.$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}(E/R_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(P, E/R_0)} \end{array} \right\} \\ \overrightarrow{R_d(E/R_0)} &= m_E \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}. G \text{ d} \end{aligned}$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel la relation est vérifiée. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

#### Résultat – Relation de Varignon

Le torseur dynamique étant un torseur, on peut utiliser la relation de Varignon pour changer le point d'application du torseur dynamique :

$$\overrightarrow{\delta(B, S_2/S_1)} = \overrightarrow{\delta(A, S_2/S_1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d(S_2/S_1)}.$$

### Remarques

- ▶ Les méthodes permettant de déterminer le torseur dynamique dans un cas quelconque seront vues ultérieurement.

- La démarche de calcul du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur  $E$  est la même que celle vu lors de l'utilisation du PFS (ce sont les mêmes torseurs).

## 2.2 Équations de mouvement

### Définition – Équations de mouvement

Une **équation de mouvement** est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure **aucune composante inconnue d'action mécanique**. Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement. On nomme « **intégrale première du mouvement** » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

## 2.3 Théorèmes généraux

Du principe fondamental de la dynamique découle plusieurs théorèmes généraux.

### Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  et de centre de gravité  $G$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  est égale à la résultante dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  (notée  $\vec{R}_d(E/R_0)$ ) :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \vec{R}_d(E/R_0) = m\overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

### Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  en un point quelconque  $A$  est égale au moment dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  en  $A$  (noté  $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$ ) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

### Théorème – Théorème des actions mutuelles

Soient ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) deux sous-ensembles matériels de ( $E$ ), en mouvement par rapport à un référentiel galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}.$$

### Remarque

On peut alors définir un Newton comme l'effort à mettre en œuvre pour mettre en mouvement 1 kg avec une accélération de  $1 \text{ m s}^{-2}$  en son centre de gravité  $G$ .

## 2.4 Principe Fondamental de la Dynamique : applications simplifiées

### Définition – Solide en translation par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel  $E$  (de centre d'inertie  $G$ ) est en mouvement de translation dans un référentiel galiléen ( $R_g$ ) alors :

- ▶ d'après le **théorème de la résultante dynamique** : la résultante des efforts extérieurs est égale au produit de la masse par l'accélération de  $G$  par rapport à  $R_g$  :  $m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_g)} = \overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)}$ ;
- ▶ d'après le **théorème du moment dynamique** : le moment des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur  $E$  est égal au vecteur nul en tout point :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{0} \forall A$ .

### Définition – Solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel  $E$  (de centre d'inertie  $G$ ) est en mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$  (dirigé par  $\vec{u}$  unitaire) fixe dans un référentiel galiléen ( $R_g$ ) alors, d'après le **théorème du moment dynamique** :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} \cdot \vec{u} = J_\Delta(E) \cdot \ddot{\theta} \quad \forall A \in \Delta$  avec :

- ▶  $J_\Delta(E)$  le moment d'inertie de  $E$  par rapport à l'axe  $\Delta$  (en  $\text{kg m}^2$ );
- ▶  $\ddot{\theta}$ , l'accélération angulaire de  $E$  par rapport à  $R_g$  suivant  $\Delta$  :  $\overrightarrow{\Omega}(E/R_g) \cdot \vec{u}$ .

## 2.5 Méthodologie

### Méthode – Résolution du PFD

La méthodologie de résolution d'un problème de dynamique est très similaire à celle utilisée lors de la détermination des performances statiques des systèmes.

1. On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème.
2. On construit un graphe de structure.
3. On isole le solide ou le système de solides considérés.
4. On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé.
5. On écrit le PFD.
6. On projette les relations vectorielles sur les axes choisis.
7. On injecte les lois de comportement (ressort, loi de Coulomb, ...).
8. On effectue la résolution.

### Méthode – Équations de mouvement

Idée de base : minimiser le nombre d'équations à écrire.

- ▶ Si on cherche à déterminer un couple moteur, on écrira plutôt un théorème du moment dynamique en projection sur l'axe de rotation.
- ▶ Si on cherche à déterminer l'effort transmis par un vérin, on écrira plutôt un théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe de translation.

### 3 Théorème de l'énergie cinétique dans des particuliers (mais fréquents)

#### Hypothèse

Nous allons traiter ici de cas particuliers du théorème de l'énergie cinétique. Une formulation plus générale sera vue ultérieurement. Les solides isolés seront forcément :

- **ou bien** en translation par rapport à un référentiel galiléen;
- **ou bien** en rotation par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen;
- **ou bien** de masse (ou d'inertie) négligeable.

#### 3.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

##### Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ )

**La puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

#### Remarque

- Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors en tout point  $A$  la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$ .
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

$$\begin{aligned} \text{Le comoment des torseurs est défini par : } & \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} \\ &= \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)}} \right\}_P \otimes \\ & \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)}} \right\}_P = \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}}. \end{aligned}$$

On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

#### 3.2 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

##### Définition – Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

#### Remarque

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.

- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

### 3.3 Énergie cinétique

Il faudra bien veiller à ce que chaque des torseurs soit exprimé en un même point pour effectuer le comoment.

#### Définition – Expression avec les comoments

L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/R) \} \otimes \{ \mathcal{C}(S/R) \}.$$

#### Cas particuliers

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V(G, S/R)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe**  $(O, \vec{z})$  par rapport  $R$  :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/R)}^2.$$

### 3.4 Énergie cinétique équivalente

#### Définition – Énergie cinétique équivalente

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $E_c(E/R)$

- avec **son inertie équivalente**  $J_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$  :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg}$ ) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$  :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

### 3.5 Théorème de l'énergie cinétique

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne

des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

### 3.6 Méthodologie

#### Méthode – Équations de mouvement

- ▶ On réalise le graphe de liaisons exhaustif.
- ▶ On isole l'ensemble du mécanisme (à l'exclusion du bâti).
- ▶ On fait un bilan des puissances extérieures (et on les calcule).
- ▶ On fait un bilan des puissances intérieures (et on les calcule).
- ▶ On calcule l'énergie cinétique de l'ensemble isolé.
- ▶ On applique le théorème de l'énergie cinétique (TEC).

## 4 Loi de mouvement en trapèze

Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- ▶ phase 1 mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croît de façon linéaire et la position de façon parabolique ;
- ▶ phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement ;
- ▶ phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante et négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.

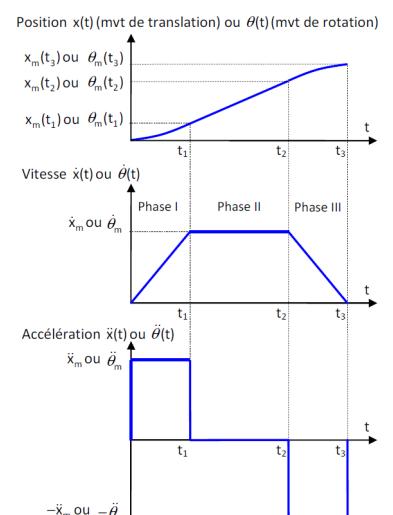
Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

- ▶ d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse/accélération ;
- ▶ de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération accélérations maximale ;
- ▶ de déterminer la hauteur du palier de vitesse ;
- ▶ de déterminer la distance parcourue.

#### Résultat –

Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

- ▶  $t_1 = \frac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par  $\frac{1}{2}t_1\dot{x}_m$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par  $2 \cdot \frac{1}{2}t_1\dot{x}_m + (t_2 - t_1)\dot{x}_m$ .



	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \frac{1}{2} \ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t - t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\frac{1}{2} \ddot{x}_m (t - t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t - t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\ddot{x}_m (t - t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$

# Application 1

## Pompe à plateau – Sujet

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

C1-05



Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

### Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

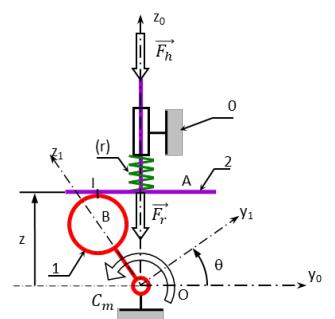
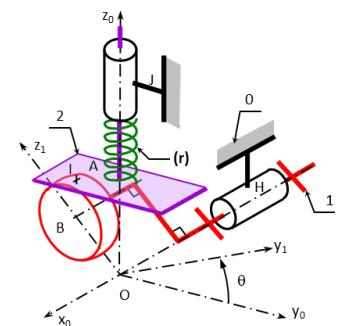
- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$ ;
- $\overrightarrow{OB} = e\vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{BI} = R\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{OA} = z\vec{z}_0$ .

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (r), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$ .

Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$ .

### Résolution cinématique

**Question 1** En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer  $z$  en fonction de  $\theta$  et de constantes du problème. Déterminer alors  $\overline{V}(A, 2/0)$  et  $\overline{\Gamma}(A, 2/0)$ .



**Résolution dynamique**

**Question 2** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le PFD.

**Question 3** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

**Résolution énergétique – Pour plus tard...**

**Question 4** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

**Question 5** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

**Pour aller plus loin...**

**Question 6** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

# Application 2

## Réducteur – Sujet

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1, Z_{21}, Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les moments d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  suivant l'axe  $\vec{z}_0$  sont de notés  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une poulie de rayon  $R$  est placée sur l'extrémité droite de l'arbre 3. Une charge de masse  $M$  y est suspendue.

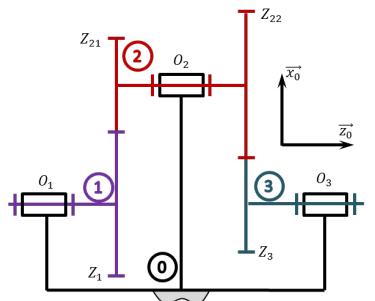
**Question 1** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

**Question 2** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur seul ramené à l'axe moteur.

**Question 3** Déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble réducteur et charge ramené à l'arbre moteur.

**Question 4** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

**Question 5** Déterminer la relation entre le couple d'entrée, les grandeurs inertielles et l'accélération de l'arbre 1.



C1-05



## Application 3

### Axe numérique – Sujet

Pour aller rechercher des produits dans leurs rayons, Amazon utilise des axes linéaires afin de déplacer un préhenseur.

Les performances dynamique de l'axe demandées sont les suivantes :

- ▶ vitesse linéaire maximale :  $50 \text{ m min}^{-1}$ ;
- ▶ accélération linéaire maximale :  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

La loi de commande suivie par l'axe est un trapèze de vitesse. Dans le cas d'un système à un seul axe, l'accélération maximale est toujours atteinte, la vitesse maximale, non.



#### Objectif

L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques du moteur (vitesse et couple) permettant d'atteindre ces performances.

**Question 1** Quelle est la vitesse maximale que l'axe peut atteindre en  $\text{m s}^{-1}$ .

**Question 2** Combien de temps l'axe met-il pour atteindre la vitesse maximale ?

**Question 3** Quelle distance l'axe parcourt-il pour atteindre la vitesse maximale ?

**Question 4** Quelle est la longueur minimale à commander pour que l'axe puisse atteindre la vitesse maximale ?

**Question 5** Donner les profils de position, vitesse et accélération pour réaliser 5 cm.

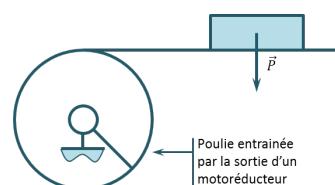
**Question 6** Tracer le profil de la position, de la vitesse et de l'accélération pour parcourir une distance de 50 cm. On cherchera à atteindre les performances maximales de l'axe.

Un motoréducteur permet d'entraîner un système poulie – courroie permettant de déplacer la charge. On considère :

- ▶ une charge de masse 1 kg;
- ▶ un poulie de rayon 5 cm;
- ▶ un réducteur de rapport de transmission 1 : 20.

**Question 7** Déterminer le couple à fournir par la poulie pour déplacer la charge lorsque l'accélération est au maximum.

**Question 8** Déterminer la vitesse et le couple à fournir par le moteur en considérant que l'inertie du motoréducteur est négligeable.



**Question 9** Donner la méthode permettant de prendre en compte l'inertie  $J$  du motoréducteur ? Quel serait l'impact de la prise en compte de cette hypothèse ?

# TD 1

## Véhicule TIM – Sujet

L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertIELS étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

Florestan Mathurin.

C1-05

C2-08

C2-09



### Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues lestées peut être assimilé au solide 1 représenté sur la figure 1, de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de masse  $G$ .

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  tel que  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .

L'action de contact entre l'ensemble des roues 1 et le plan 0, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point  $G$  en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\lim}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Pour une masse du solide 1  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\lim}$  tel que  $\tan \alpha_{\lim} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

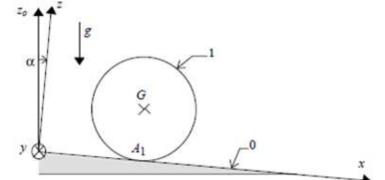


Figure 1

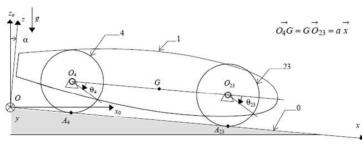
1: Cette action de contact peut s'écrire :  $\{T(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} -T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{Bmatrix}_{A_1}$  où  $C_r$  représente le couple de résistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que :  $|C_r| = r|N_{01}|$  à la limite de l'équilibre et  $|C_r| < r|N_{01}|$  à l'équilibre.

## Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle  $\alpha$ , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  telle que  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ . Le modèle est donné figure suivante. On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

- ▶ d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie  $G$ , de masse  $M$  en translation par rapport au repère galiléen  $R$  avec  $\vec{OG} = \vec{x}\vec{x} + R\vec{z}$  ;
- ▶ de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie  $O_{23}$ , de masse  $2m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  sera noté  $2I$ . Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_{23}$  ;
- ▶ d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie  $O_4$ , de masse  $m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_4, \vec{y})$  sera noté  $I$ . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_4, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_4$  ;
- ▶ un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté  $C_m \vec{y}$ .



Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\} = \begin{cases} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -N_{0i}r\vec{y} \end{cases}_{A_i}$  avec  $i = 4$  ou  $23$ .

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aérodynamique qui peut être modélisée par le torseur  $\begin{cases} -\frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ 0 \end{cases}_{O_{23}}$  avec  $\rho$  masse volumique du véhicule,  $S$  surface alaire,  $C_x$  coefficient de traînée du véhicule,  $\dot{x}$  vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.

**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :  $C_m = (M + 3m) g \cos \alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m) g \sin \alpha + \frac{1}{2} R \rho S C_x \dot{x}^2$ .

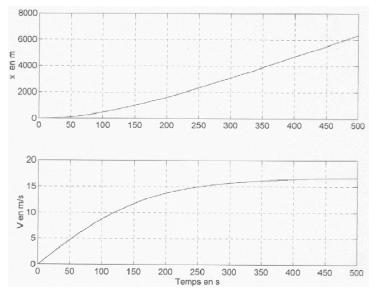
**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple  $C_m$  constant. Les données véhicules sont :  $M = 70 \text{ kg}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $R = 0,25 \text{ m}$ ,  $C_m = 3,245 \text{ mN}$ ,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ . L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-dessous.

**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2} \rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).



#### Éléments de correction

1.  $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0; N_{01} - mg \cos \alpha = 0; C_r = RT_{01}.$
2.  $\tan \alpha_{\lim} = \frac{r}{R}.$
3.  $r = 0,002 \text{ m}.$
4. Pour  $\tan \alpha_{\lim} < f$  il y a donc roulement sans glissement.
5.  $\dot{x} = R\dot{\theta}_{23}$  et  $\ddot{x} = R\ddot{\theta}_4.$
6.  $(M + 3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M + 3m)\ddot{x}$  et  $-(M + 3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0.$
7.  $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$  et  $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4.$
- 8.
- 9.
- 10.
11.  $\frac{1}{2}\rho S C_x = 0,025 \text{ kg m}^{-1}.$
12.  $\alpha = 1^\circ.$