

# Modélisation géométrique – Lois entrées-sorties

# 6

## 6.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

6.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques . . . . .	1
6.2 Résolution des lois entrée-sortie . . . . .	2

### Méthode – Modélisation d'un système mécanique réel

Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- identifier les classes d'équivalence cinématique, c'est-à-dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement;
- identifier les surfaces de contact entre les classes d'équivalence;
- associer une liaison cinématique aux surfaces de contact;
- tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'équivalence et respectant leur positionnement relatif;
- relier les liaisons de manière filaire;
- indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'équivalence.

### Méthode – Paramétrage d'un mécanisme cinématique

Pour paramétrier un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'équivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'équivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'équivalence).

Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

- si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation);
- si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.

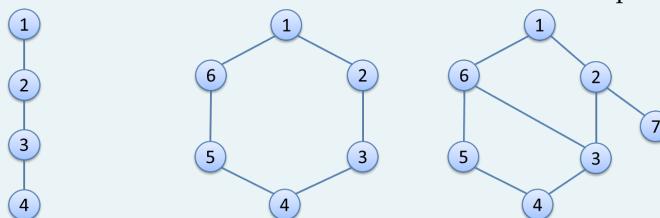
### Définition – Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

- les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment);
- les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :

Les chaînes ouvertes    Les chaînes fermées    Les chaînes complexes



## 6.2 Résolution des lois entrée–sortie

### Méthode – Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétriser le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

### Méthode – Manipulation du système d'équations

1. Pour supprimer une longueur  $\lambda$  : on met les deux équations sous la forme  $\lambda =$  et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle  $\varphi$  : on met une équation sous la forme  $\cos \varphi =$  et la seconde sous la forme  $\sin \varphi =$  et on utilise la relation  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

### Méthode – Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.

# Modélisation cinématique

## Définition – Solide Indéformable

On considère deux points  $A$  et  $B$  d'un solide indéformable noté  $S$ . On note  $t$  le temps.  $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB(t)}^2 = \text{constante}$ .

## Définition – Trajectoire d'un point appartenant à un solide

Soit un point  $P$  se déplaçant dans un repère  $\mathcal{R}_0 \left( O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0 \right)$ . La trajectoire du point  $P$  est définie par la courbe  $\mathcal{C}(t)$  paramétrée par le temps  $t$ . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\vec{i}_0 + y(t)\vec{j}_0 + z(t)\vec{k}_0$$

## Définition – Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 \left( O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0 \right)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1, \left( O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \right)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ . Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . La vitesse du point  $P$  appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)(t)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_0P(t)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

## Résultat –

Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- ▶ si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- ▶ si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison pivot de d'axe  $(O, \vec{u})$  alors  $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- ▶ si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule à doigt de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$ .

## Résultat – Dérivation vectorielle

Soient  $S_0$  et  $S_1$  deux solides en mouvements relatifs et  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  les repères orthonormés directs associés. Soit  $\vec{v}$  un vecteur de l'espace. On note  $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$  le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \vec{v}.$$

### Résultat – Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient  $A$  et  $B$  deux points appartenant à un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à  $S_0$ . Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(B \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\vec{R}}$$

### Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . Pour chacun des points  $A$  appartenant au solide  $S_2$ , on a :

$$\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V(A, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$$

#### Remarque

- ▶  $\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse absolu;
- ▶  $\overrightarrow{V(A, S_2/S_1)}$  est appelé vecteur vitesse relatif;
- ▶  $\overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

### Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}$$

### Définition – Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 \left( O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0 \right)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1, \left( O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \right)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ .

Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . L'accélération du point  $P$  appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)(t)} = \left[ \frac{d(\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)(t)})}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$



## 8 Transmetteurs de puissance

### 8.1 Transmission par engrenages

8.1 Transmission par engrenages ..... 5

#### Définition –

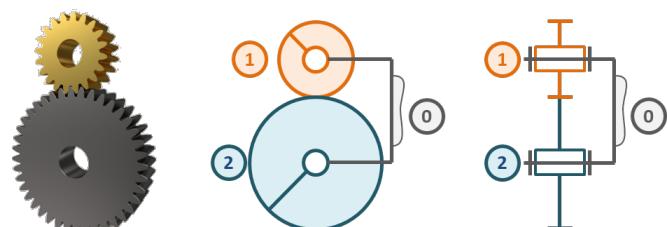
**Engrenage** Un engrenage est constitué de deux roues dentées en contact. Une roue dentée est caractérisée (entre autre) par son nombre de dents  $Z$ , son diamètre primitif  $D$  en mm et son module en mm. On a  $D = mZ$ . Pour que deux dents engrènent elles doivent avoir le même module.

#### 8.1.1 Engrenage – Contact extérieur

##### Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$n$  caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici  $n = 1$ .

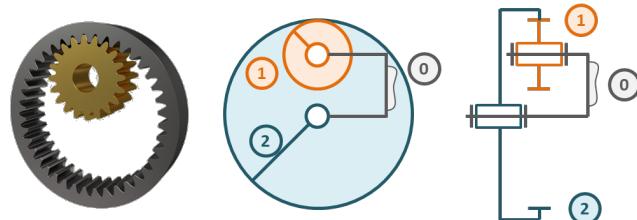


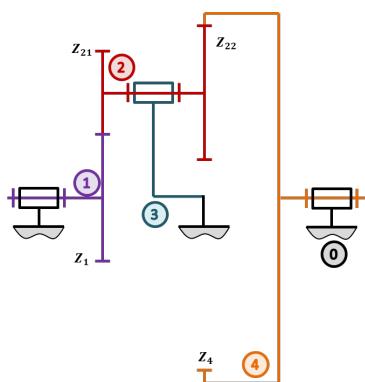
#### 8.1.2 Engrenage – Contact intérieur

##### Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = +\frac{Z_1}{Z_2}$$

$n$  caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici  $n = 0$ .



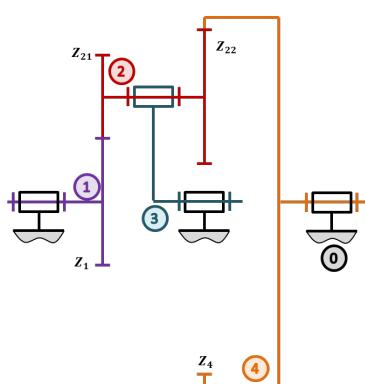


### 8.1.3 Train d'engrenages à axes fixes

Résultat –

$$\frac{\omega(4/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$$

$n$  caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici  $n = 1$ .

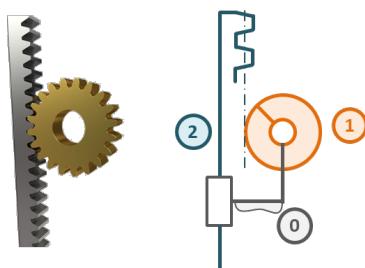


### 8.1.4 Train d'engrenages épicycloïdal

Méthode –

1. On identifie le porte-satellite, ici 3.
2. On bloque le porte-satellite. On peut alors se ramener au cas du train simple (voir ci-dessus).
3. On écrit le rapport de vitesse **par rapport au porte-satellite 3** :  $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} = K$  (raison du train épicycloïdal).
4. En fonction de la roue bloquée, on réalise une décomposition des vitesses.  
Par exemple, Si 4 est bloquée, on peut chercher à établir  $\frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$ .
5. On repart du point 3 et on a :  $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(4/0) + \omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)} = K \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0) - \omega(3/0)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{K}{K-1}$ .

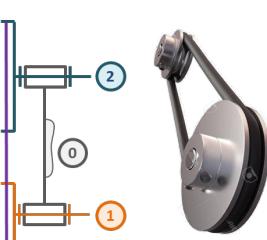
### 8.1.5 Système pignon – crémaillère



Résultat –

Soit  $R$  le rayon primitif du pignon. On a  $V(2/0) = \pm R \omega(1/0)$ .

### 8.1.6 Transmission par poulie chaîne et par poulie courroie



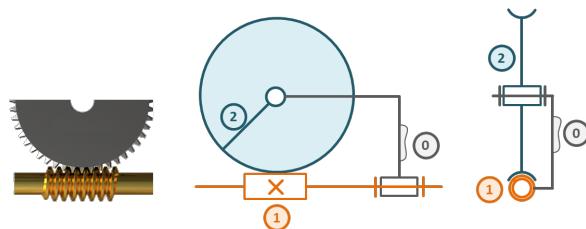
Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \frac{D_1}{D_2}.$$

### 8.1.7 Roue et vis sans fin

**Résultat –**

Soit  $Z$  le nombre de dents de la roue et  $n$  le nombre de filets de la vis, on a  $\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \pm \frac{n}{Z}$ .

**8.1.8 Système vis-écrou****Résultat –**

En notant  $v$  la vis et  $e$  l'écrou, soit  $p$  le pas de la vis (ici à droite) on a

$$v(v/e) = \omega(v/e) \frac{p\pi}{2\pi}$$

**8.1.9 Système de transmission Rotation – Rotation**

	Joint de Oldham	Joint de cardan	Joint tripode
Homocinétique	Oui	Non, Oui si doublé	Quasi
Défaut d'alignement axial	Oui	Non	Non
Défaut d'orientation entre les axes	Non	Oui	Oui
Utilisation	Maxpid :)	Colonne de direction (DAE), manivelle de volet roulant	Automobile



# Application 0

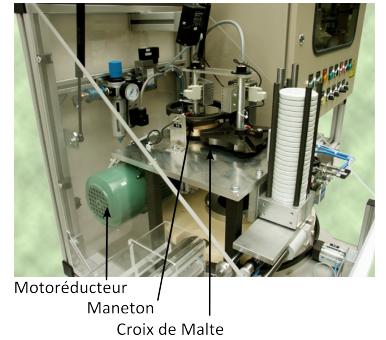
## Capsuleuse de bocaux – Galet – Sujet

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute.**

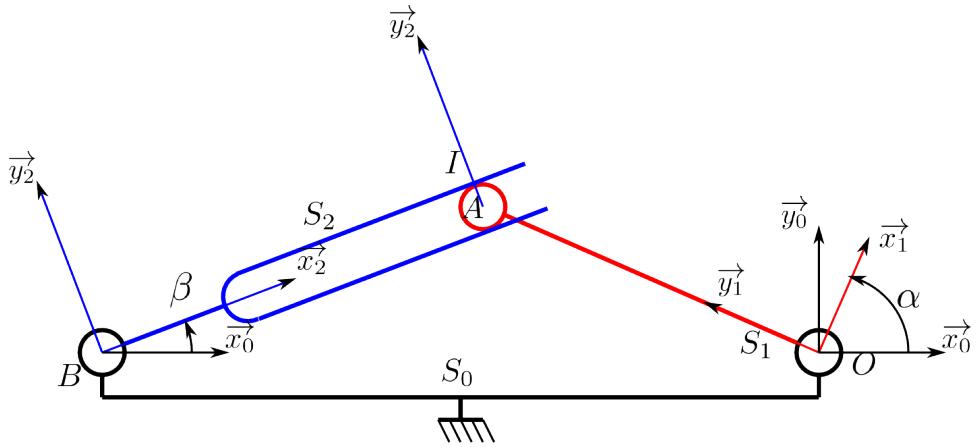


### Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :

- ▶  $\mathcal{R} = \left( O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au bâti  $S_0$ . On note  $\overrightarrow{OB} = -L\vec{x}_0$  avec  $L = 145$  mm;
- ▶  $\mathcal{R}_1 = \left( O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$  le repère lié à l'arbre  $S_1$ . On pose  $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$  avec  $R = 141$  mm et  $\alpha = \left( \vec{x}_0, \vec{x}_1 \right)$ . L'arbre  $S_1$  est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a :  $\dot{\alpha} = 10$  tr/min;
- ▶  $\mathcal{R}_2 = \left( B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 \right)$  le repère lié à l'arbre  $S_2$ . On pose  $\overrightarrow{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$ ,  $\overrightarrow{AI} = r\vec{y}_2$  et  $\beta = \left( \vec{x}_0, \vec{x}_2 \right)$ ;



**Question 1** Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

**Question 2** Établir la loi entrée/sortie du système.

**Question 3** Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

**Question 4** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ .

**Question 5** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$ .

**Question 6** En déduire l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$  dans la base  $\mathcal{R}_2$ . On donne  $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$ .

**Question 7** D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$ ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

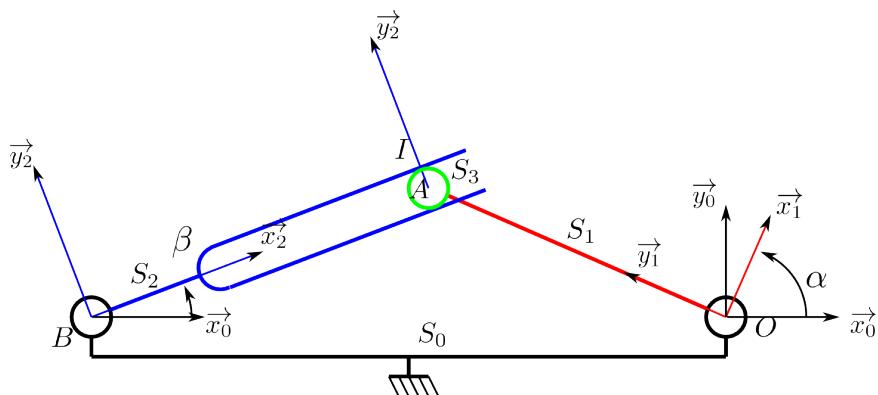
**Question 8**  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$  est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse? Si oui, comment? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

### Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet  $S_3$  en bout de l'arbre  $S_1$ . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le  $S_2$ .  $S_3$  et  $S_1$  sont en liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  et de centre  $A$ .



Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



**Question 9** Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

**Question 10** Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement** ?

**Question 11** Calculer la vitesse de rotation du galet  $\dot{\gamma}$  en commençant par exprimer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ ? Indice : décomposer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$  en fonction des mouvements connus.

**Question 12** Valider le choix du galet.



## Application 1

# TODO OMNIROB – Le robot collaboratif de l'usine du futur d'Airbus – Sujet

### Objectif

Déterminer le modèle cinématique direct ou inverse de la commande Omniprob.  
Valider le critère de mobilité omnidirectionnelle et analyser les limites du modèle.

Les roues utilisées pour le robot omniprob sont des roues holonomes également appelées Mecanum (voir figure suivante) qui sont mises en mouvement par quatre moteurs commandés indépendamment. La surface de roulement de ces roues spéciales est pourvue de rouleaux ellipsoïdes répartis sur la circonférence à un angle de 45°.

Le paramétrage cinématique est donné dans les pages suivantes.

**Question 1** En analysant la géométrie du contact entre les rouleaux et le sol, proposer la liaison équivalente entre le châssis 3 et le sol.

Hypothèses :

- ▶ Les roues sont parfaitement symétriques par rapport aux plans  $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$  et  $(O_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .
- ▶ Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Données :

- ▶ Le nombre de rouleaux 1 par roue est  $n = 8$ .
- ▶ Les rouleaux sont inclinés d'un angle  $\alpha_a = -45^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la roue.

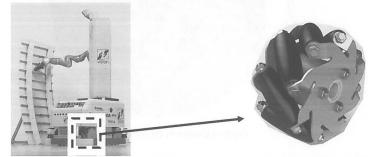
Notations : torseurs cinématiques.

- ▶ Le torseur cinématique de 3/0 pourra s'exprimer dans la base locale du robot  $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  avec les notations  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3}$   
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}\vec{z}_3 = \omega\vec{z}_3 \\ V_{RX}\vec{x}_3 + V_{RY}\vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3}.$$

Dans le mouvement de rotation de la roue a, le rouleau 1 reste en contact avec le sol suivant la corde  $I_{1a\_ext}I_{1a\_int}$  (annexe 4).

On peut alors démontrer que la fluctuation du rayon  $r$  de l'ellipsoïde est telle que :

$$\Delta r \% = \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) \sin \alpha_a \text{ avec } n \text{ le nombre de rouleaux.}$$



Pour les roues de cette étude,  $\alpha_a = -45^\circ$  et  $n = 8$  rouleaux, on obtient une fluctuation de rayon de 14 % lorsque le point de contact  $I_{1a}$  se déplace le long de la corde de rouleau 1. On supposera donc le rayon  $r$  comme étant constant.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)}$  en fonction du paramétrage du robot dans la base  $\mathcal{B}_3$ .

On constate que la variation d'angle  $\theta_{2a}$  lors du contact d'un rouleau avec le sol reste faible,  $\theta_{2a} << 1$ . Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de  $\cos \theta_{2a}$ , on

gardera pour la suite du sujet une expression de la vitesse  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$

**Question 3** En vous aidant de l'annexe 3, déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 2/3)}$  en fonction du paramétrage du robot.

**Question 4** En vous aidant de l'annexe 1, déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 3/0)}$  en fonction du paramétrage du robot et des notations du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  proposées.

**Question 5** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(I_{1a}, 3/0)}$ .

Afin d'établir le modèle cinématique du robot, on introduit une notation classique en robotique avec les vecteurs suivants :

►  $\dot{q}_k$  étant le vecteur des vitesses articulaires des roues  $k = a, b, c$  et  $d$  tel que

$$\dot{q}_k = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2k} \\ \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2k} \\ \omega_{1k} \\ \omega \end{pmatrix}. \text{ On aura par exemple pour la roue } a \text{ le vecteur } \dot{q}_a = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}.$$

►  $\dot{q}$  étant le vecteur des vitesses articulaires pilotées donc les vitesses des 4 moteurs

$$\text{des roues } a, b, c \text{ et } d \text{ tel que } \dot{q} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix};$$

►  $\dot{X}_R$  étant le vecteur des vitesses opérationnelles du robot tel que  $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} \text{ exprimé dans la base locale } \mathcal{B}_3 \text{ du robot.}$$

Dans un premier temps nous allons chercher les relations entre  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour  $k = a, b, c$  et  $d$ .

**Question 6** À partir des équations des questions 2 à 4, déduire de la condition de roulement sans glissement du rouleau 1 par rapport au sol 0 la relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour la roue  $a$ . On utilisera les notations proposées et on rappelle que l'on note  $\omega = \dot{\varphi}$ .

La relation précédente pourra se noter  $\dot{X}_R = \mathcal{J}_a \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$  avec  $\mathcal{J}_a$  la matrice jacobienne relative à la roue  $a$ .

De façon analogue en prenant  $\lambda, -\lambda, \ell$  ou  $-\ell$  on trouve rapidement les matrices jacobiniennes relatives aux roues  $b, c$  et  $d$ .

$\dot{X}_R$  étant unique on peut obtenir 4 équations faisant intervenir uniquement les 4 inconnues articulaires  $\omega_{2a}, \omega_{2b}, \omega_{2c}$  et  $\omega_{2d}$  que l'on souhaite déterminer.

En effet, pour chaque relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  on peut écrire pour :

- la roue  $a$  :  $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2a} + (\lambda + \ell)\omega$  (eq1);
- la roue  $b$  :  $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2b} + (\lambda + \ell)\omega$  (eq2);
- la roue  $c$  :  $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2c} - (\lambda + \ell)\omega$  (eq3);
- la roue  $d$  :  $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2d} - (\lambda + \ell)\omega$  (eq4).

Trouver le modèle cinématique direct (MCD) revient à obtenir  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ . Ainsi on remarquera que les coordonnées de  $\dot{X}_R$  se déduisent facilement en utilisant les simplifications issues des 3 combinaisons :

- (eq1)+(eq2)+(eq3)+(eq4);
- (eq2)-(eq1)+(eq4)-(eq3);
- (eq1)+(eq2)-(eq3)-(eq4).

**Question 7** Déduire de ces 3 simplifications, le modèle cinématique direct (MCD) du robot,  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

**Question 8** Déduire également à l'aide des équations (eq1), (eq2), (eq3), (eq4), le modèle cinématique inverse (MCI) du robot  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

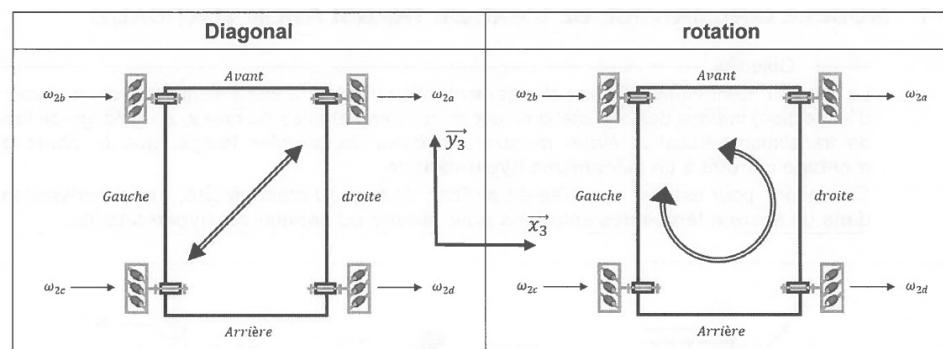
Le contrôle du robot peut également être envisagé dans l'espace de travail lié au bâti à savoir le système de coordonnées du repère global.

En notant  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3} \left\{ \begin{array}{l} \varphi \overrightarrow{z_0} = \omega \overrightarrow{z_0} \\ V_X \overrightarrow{x_0} + V_Y \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_3}$  le torseur cinématique

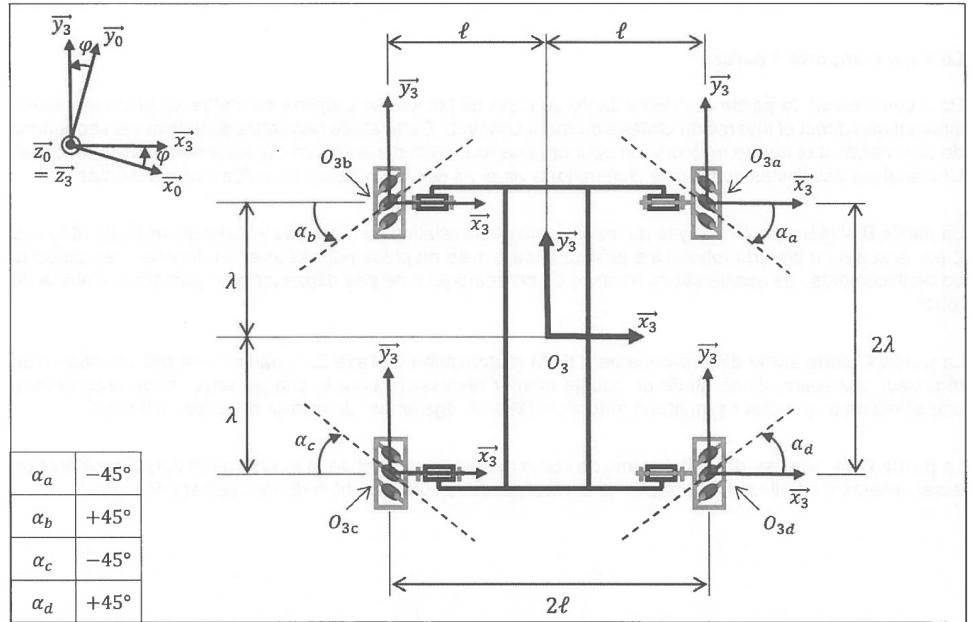
de 3/0 dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ , le changement de base étant une rotation d'un angle  $\varphi$  selon  $\overrightarrow{z_0}$ , il vient immédiatement

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ \omega \end{pmatrix}.$$

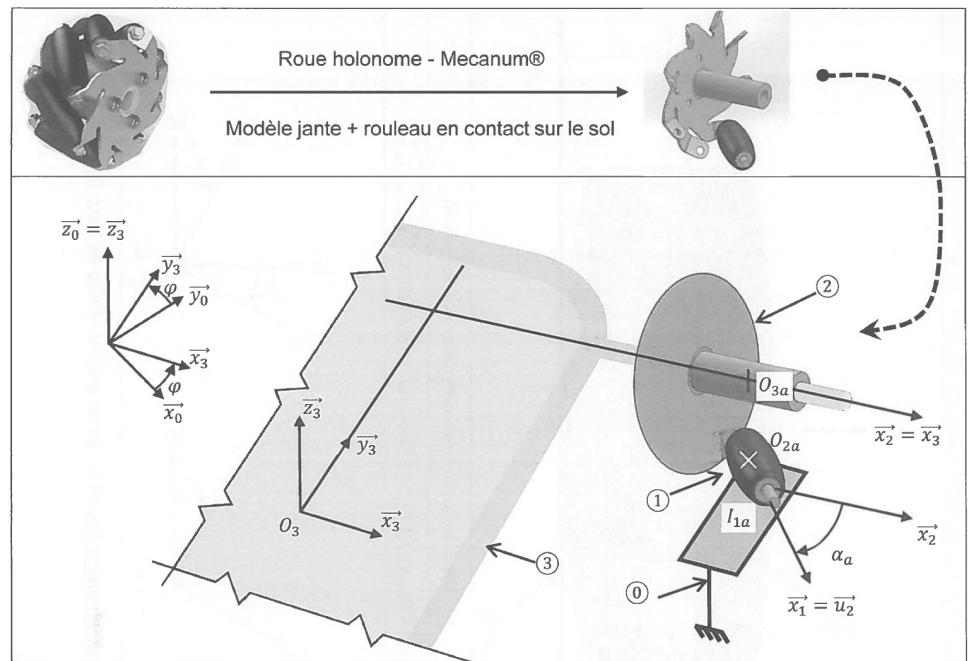
**Question 9** À partir des résultats précédents, indiquer comment commander la vitesse de rotation des moteurs des 4 roues  $a, b, c$  et  $d$  pour que le robot se déplace suivant une direction diagonale puis tourne sur lui-même,  $\omega_m$  est une vitesse de rotation algébrique.



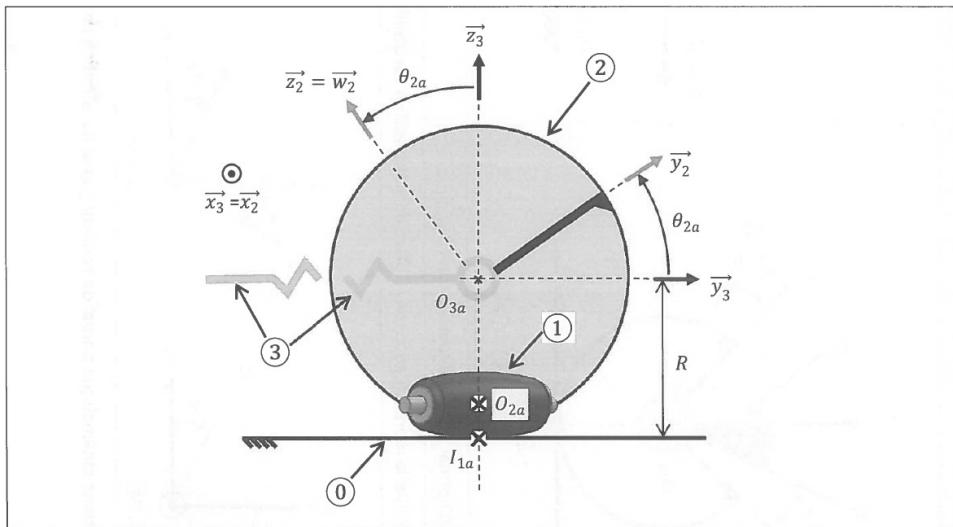
**Question 10** Conclure sur le comportement omnidirectionnel du robot des limites possibles.



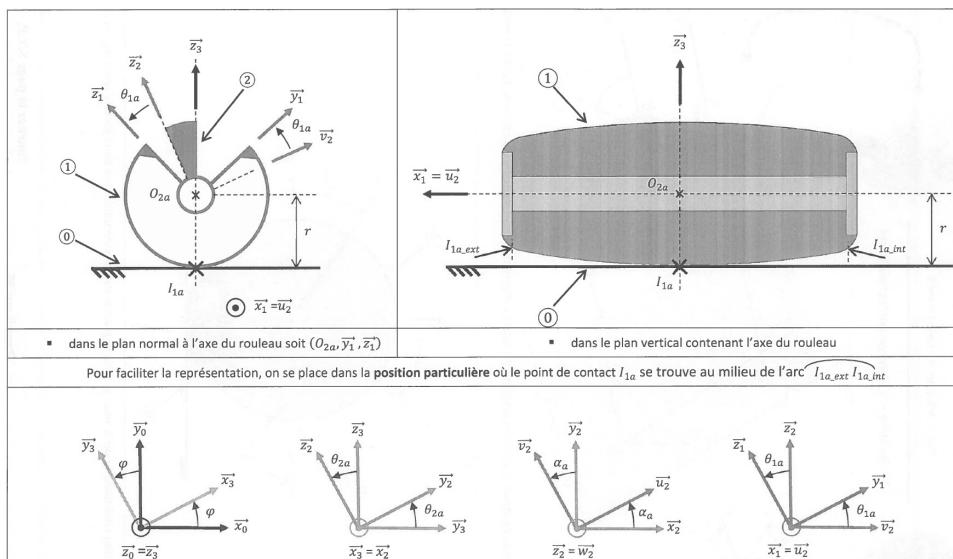
Annexe 1 : Schéma cinématique plan du robot – Paramétrages repères robot et repère global



Annexe 2 : Schéma cinématique 3D de principe du robot – Représentation partielle du châssis 3 avec la roue a



Annexe 3 : Schéma cinématique de la roue a dans le plan vertical contenant l'axe de la jante 2  
soit  $(O_{3a}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

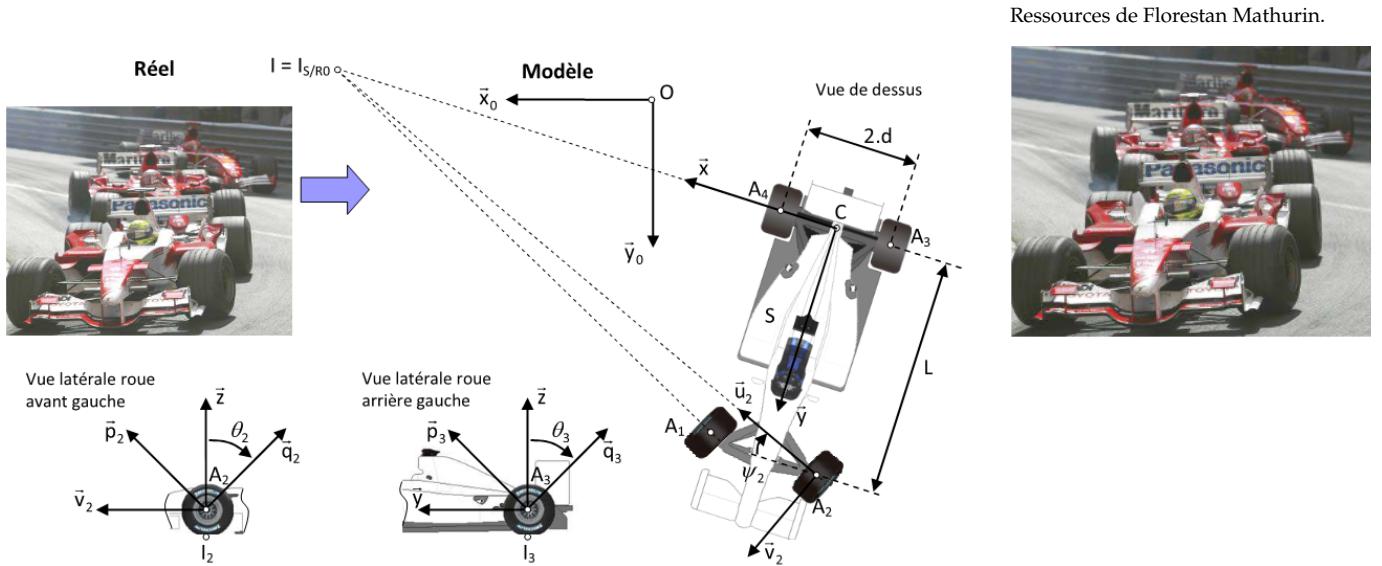


Annexe 4 : Schéma cinématique partiel du rouleau 1 seul de la roue a dans la position particulière où  $I_{1a}$  se trouve au milieu de l'arc  $I_{1a\_ext} I_{1a\_int}$ .



## Application 2

### Étude des performances cinématiques en virage d'une Formule 1 – Sujet



#### Mise en situation

Une Formule 1 doit assurer un certain nombre d'exigences techniques afin d'assurer les meilleures performances en course tout en garantissant la sécurité du pilote. Une de ces exigences est que « le système doit tenir la trajectoire en phase de virage ». Pour y parvenir, le véhicule dispose d'une cinématique particulière permettant aux roues de tourner sur le sol en limitant le risque de glissement. On s'intéresse aux conséquences pratiques nécessaires pour assurer la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol. On supposera donc que les 4 roues roulent sans glisser dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

Pour cette étude on considère que le véhicule est constitué d'un châssis ( $S$ ) et de 4 roues ( $S_i$ ) avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . Le châssis est modélisé par un rectangle  $A_1A_2A_3A_4$  tel que  $\overrightarrow{A_4A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2d\vec{x}$  et  $\overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2} = L\vec{y}$  où  $L$  correspond à l'empattement du véhicule et  $2d$  à la voie.

On définit le repère  $\mathcal{R}(C; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  attaché au châssis où le point  $C$ , origine du repère, est tel que  $\overrightarrow{A_4C} = d\vec{x}$ . Le véhicule est en phase de virage et on considère alors qu'il est en rotation par rapport au repère  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour du point  $I_{S/R0} = I$ ,

centre instantanée de rotation du mouvement. On pose  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x})$  angle de rotation du châssis par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

On définit le repère  $\mathcal{R}_i (A_i; \vec{u}_i, \vec{p}_i, \vec{q}_i)$  attaché à chaque roue ( $S_i$ ). Ces 4 roues de rayon  $R$  sont en liaison pivot avec le châssis ( $S$ ) suivant les axes  $(A_i, \vec{u}_i)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . On pose  $\theta_i = (\vec{z}, \vec{q}_i)$  angle de rotation de la roue  $i$  par rapport au châssis. Afin d'assurer la direction du véhicule, les 2 roues pivotent d'un angle  $\psi_1$  suivant l'axe  $(A_i, \vec{z})$  pour la roue 1 et d'un angle  $\psi_2$  suivant l'axe  $(A_2, \vec{z})$  pour la roue 2 avec  $\psi_1 = (\vec{x}, \vec{u}_1) = (\vec{y}, \vec{v}_1)$  et  $\psi_2 = (\vec{x}, \vec{u}_2) = (\vec{y}, \vec{v}_2)$ . On considère que le contact sol/roue et assimilable à un contact ponctuel en  $I$  de normale  $(I, \vec{z})$  tel que  $\overrightarrow{I_i A_i} = R \vec{z}$ .

**Question 1** Établir les figures géométriques utiles.

**Question 2** Écrire la condition de roulement sans glissement de la roue ( $S_1$ ) par rapport au sol  $\mathcal{R}_0$ . En déduire une relation vectorielle simple entre  $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$  et  $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$ .

**Question 3** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  écrit en  $I$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)}$  et  $\overrightarrow{II_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Question 4** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S_1/S)\}$  écrit en  $A_1$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S)}$  et  $\overrightarrow{A_1 I_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Question 5** Déduire des relations précédentes que  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{A_1 I_1} = \vec{0}$ .

**Question 6** On pose  $\overrightarrow{IA_1} = a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1 + c\vec{z}$ , montrer que l'on a nécessairement  $a = -\frac{R\dot{\theta}_1}{\dot{\beta}}$  et  $b = 0$  pour que la relation obtenue question précédente soit respectée.

**Question 7** Montrer que l'axe ( $D_1$ ) de la roue ( $S_1$ ) passe par  $I$ , puis en déduire que l'axe ( $D_i$ ) de la roue ( $S_i$ ) passe par  $I$ .

On pose par la suite  $\overrightarrow{IC} = \rho \vec{x}$  et on note  $\overrightarrow{V(C, S/R)} = V \vec{y}$  ( $\rho$  est le rayon du virage et  $V$  la vitesse du véhicule).

**Question 8** À partir de  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  exprimé en  $I$ , quelle relation simple existe-t-il entre  $V$  et  $\rho$  ?

**Question 9** En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_3$  et  $\dot{\theta}_4$  des deux roues arrières ( $S_3$ ) et ( $S_4$ ) en fonction de  $\rho$ ,  $R$ ,  $d$  et  $V$ . Que constate-t-on ?

**Question 10** En déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu arrière pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_3$  et  $I_4$ .

On considère que le véhicule roule à 90 km/h, les roues ont pour diamètre 80 cm et le virage décrit une courbe telle que la vitesse angulaire du véhicule  $\dot{\beta} = 0,1$  rad/s. On donne  $d = 1$  m.

**Question 11** Déterminer graphiquement les vitesses des roues  $S_1, S_2, S_3, S_4$  en  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Utiliser une échelle judicieuse pour les vitesses et justifier les constructions.

**Question 12** Que constate-t-on sur les roues avant et en déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu avant pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_1$  et  $I_2$ .

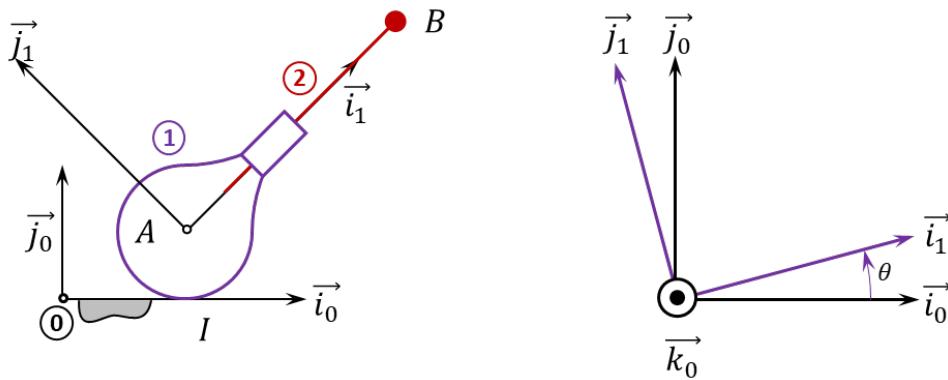


# Applications au Roulement sans glissement

## Mouvement RT – RSG ★★

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{IA} = R\vec{j}_0$  et  $\vec{AB} = \lambda(t)\vec{i}_1$ . De plus  $R = 15 \text{ mm}$ . On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point  $I$ .



**Question 13** Déterminer  $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ .

**Question 14** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point  $B$ .

**Question 15** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$ .

Indications :

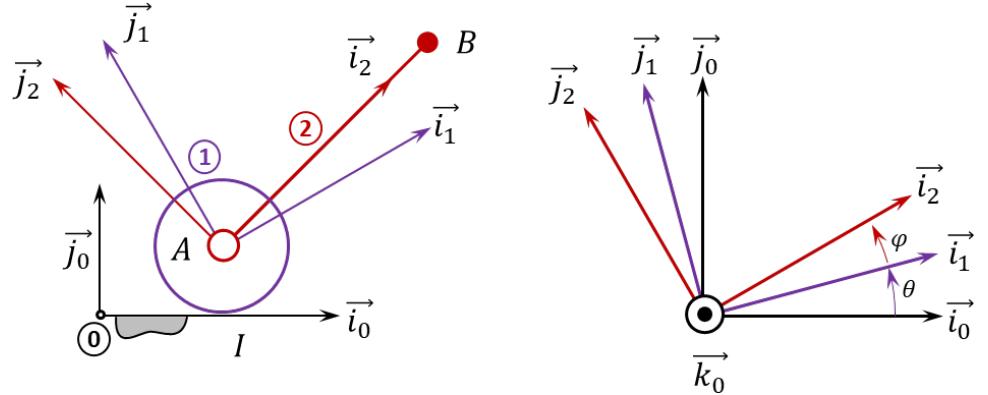
1.  $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda}\vec{i}_1 + \dot{\theta}(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0)$ .
2.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}\vec{i}_1 + \dot{\theta}(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$ .
3.  $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\vec{j}_1 + \ddot{\theta}(t)(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) + \dot{\theta}(t)(\dot{\lambda}(t)\vec{j}_1 - \lambda(t)\dot{\theta}\vec{i}_1)$ .

Corrigé voir 12.

### Mouvement RR – RSG ★★

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{IA} = R\vec{j}_0$  et  $\vec{AB} = L\vec{i}_2$ . De plus  $R = 15 \text{ mm}$ . On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point  $I$ .



**Question 16** Déterminer  $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ .

**Question 17** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point  $B$ .

**Question 18** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$ .

Indications (à vérifier...):

$$1. \overrightarrow{V(B, 2/0)} = L\dot{\phi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) \left( L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right).$$

$$2. \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{k}_0 \\ L\dot{\phi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) \left( L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right) \end{array} \right\}_B.$$

$$3. \overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = L\ddot{\phi}(t)\vec{j}_2 - L\dot{\phi}(t)(\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t) \left( L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right) - L\dot{\theta}(t)(\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2.$$

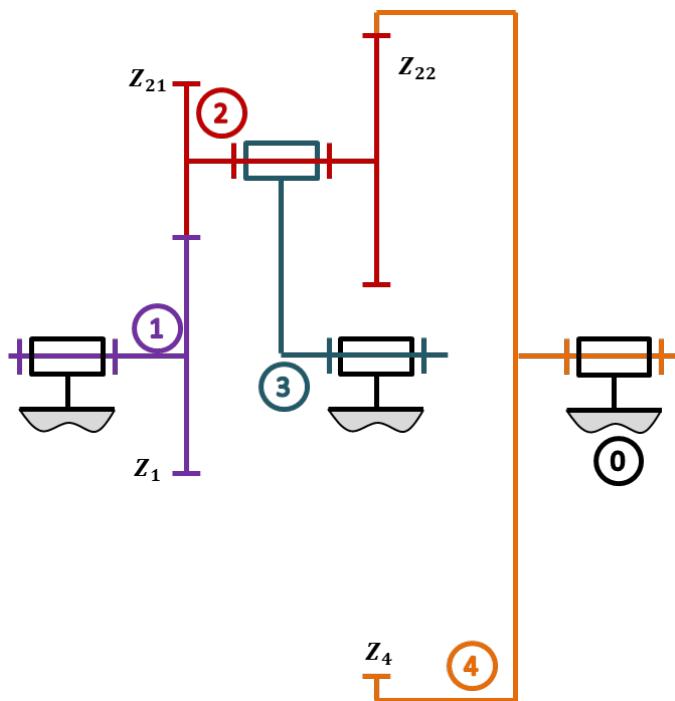
Corrigé voir 15.

### Train simple ★

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



**Question 19** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 20** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 21** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

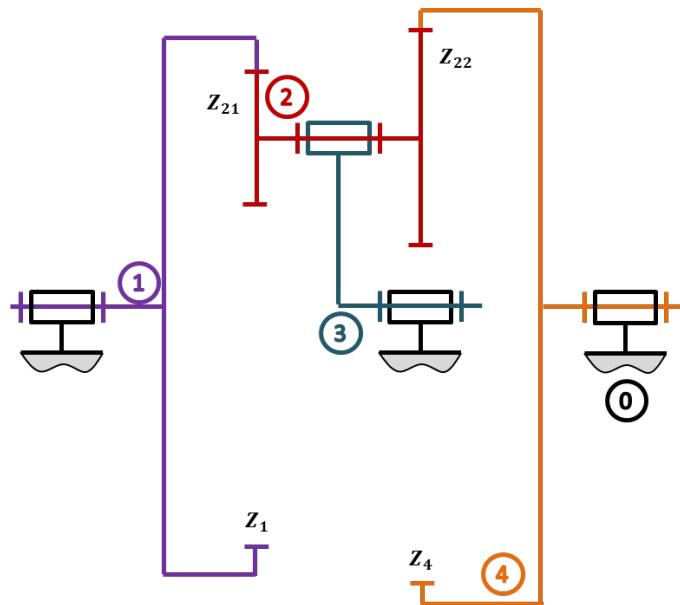
Corrigé voir 18.

### Train simple ★

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



**Question 22** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 23** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 24** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

Corrigé voir 21.