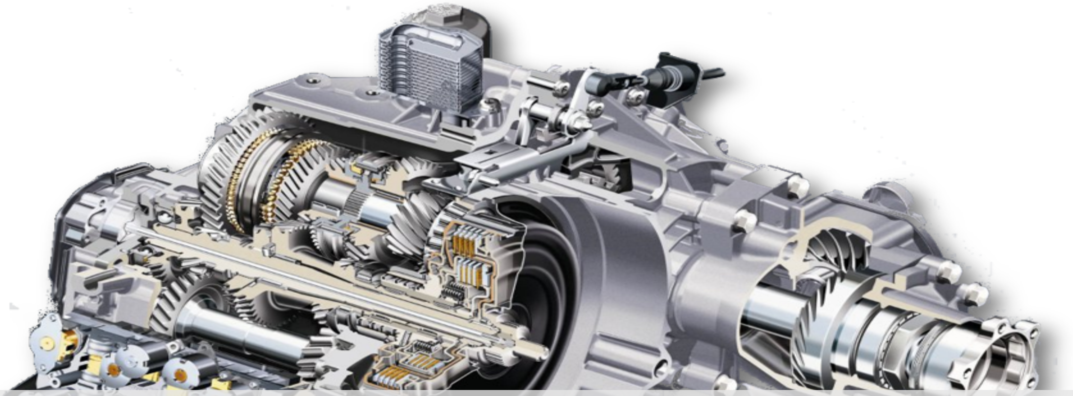
Table des matières



http://www.engineworld.fr/les-boites-robotisees-a-double-embrayage-22/

2 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

B2-10

Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse `http://florestan.mathurin.free.fr/`.

2.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathscr{D}(E/R_0)\} = \left\{\mathcal{T}\left(\overline{E} \to E\right)\right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.
Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathscr{D}(E/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m\,\overrightarrow{\Gamma(G,E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A,E/R_0)} \end{array}\right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G.
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A,E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

2.1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R\left(\bar{E} \rightarrow E\right)} = \overrightarrow{R_d\left(E/R_0\right)} = m\,\overrightarrow{\Gamma\left(G, E/R_0\right)}.$$

2.1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème –

Théorème du moment dynamique Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \bar{E} \rightarrow E\right)} = \overrightarrow{\delta\left(A, E/R_0\right)}.$$

2.2 Torseur cinétique

2.2.1 Définition

Définition –

Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\left\{\mathscr{C}\left(S/R_0\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{V}(P/R_0)\,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\sigma\left(A, S/R_0\right)} = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0)\,\mathrm{d}m \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur cinétique, $\overrightarrow{R_c}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m\,\overrightarrow{V}(G/R_0)$.
- Le moment cinétique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma\left(B, S/R_0\right)} = \overrightarrow{\sigma\left(A, S/R_0\right)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

2.2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

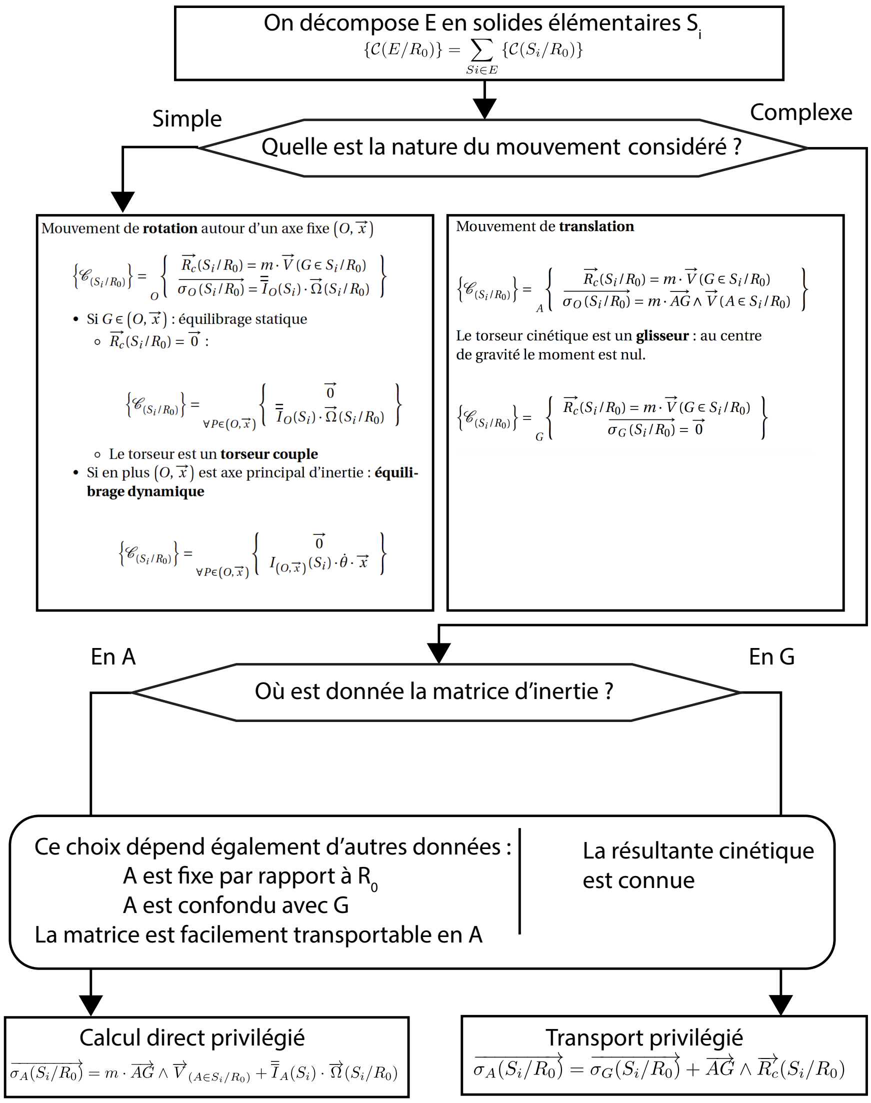
$$\overrightarrow{\sigma\left(A, S/R_0\right)} = I_A\left(S\right) \cdot \overrightarrow{\Omega\left(S/R_0\right)} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V\left(A, S/R_0\right)}.$$

2.2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A **fixe** dans le mouvement de S/R_0, on a : $\overrightarrow{\sigma\left(A, S/R_0\right)} = I_A\left(S\right) \cdot \overrightarrow{\Omega\left(S/R_0\right)}$.
- En appliquant cette formule en G, **centre d'inertie** de S, on a : $\overrightarrow{\sigma\left(G, S/R_0\right)} = I_G\left(S\right) \cdot \overrightarrow{\Omega\left(S/R_0\right)}$.

2.2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i. On étudie son mouvement dans le référentiel R_0. On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



2.3 Torseur dynamique

2.3.1 Définition

Définition –

Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathscr{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \displaystyle\int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0)\, \mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \displaystyle\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0)\, \mathrm{d}m \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$.
- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :$\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$.

2.3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

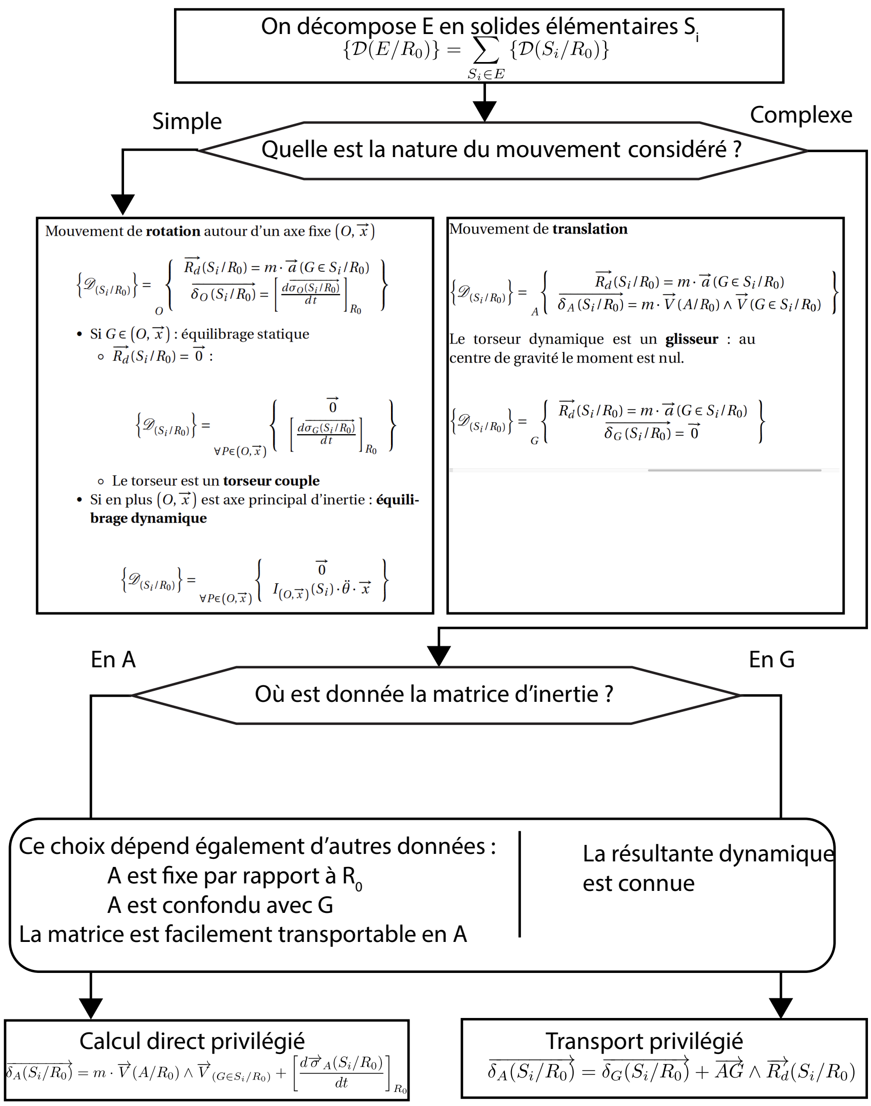
- Relation entre les **résultantes** :$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$.
- Relation entre les **moments** : $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

2.3.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point O **fixe** dans R_0, on a : $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$.
- En appliquant cette formule en un point G**, centre d'inertie de** S, on a : $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$.

2.3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i. On étudie son mouvement dans le référentiel R_0. On donne l'algorigramme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Bilan

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans $\mathcal{R}_0$ A
Torseur cinétique$\{\mathscr{C}\,(S/R_0)\}$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{V\,(G,S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma\,(A,S/R_0)} = I_A\,(S)\cdot\overrightarrow{\Omega\,(S/R_0)} + m\ \overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V\,(A,S/R_0)}\end{array}\right\}_A$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{V\,(G,S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma\,(G,S/R_0)} = I_G\,(S)\cdot\overrightarrow{\Omega\,(S/R_0)}\end{array}\right\}_G$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{V\,(G,S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma\,(A,S/R_0)} = I_A\,(S)\cdot\overrightarrow{\Omega\,(S/R_0)}\end{array}\right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathscr{D}\,(S/R_0)\}$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{\Gamma}\,(G,S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta\,(A,S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)}\wedge\overrightarrow{R_c}(S/R_0)\end{array}\right\}_A$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{\Gamma}\,(G,S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta\,(G,S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}\end{array}\right\}_G$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{\Gamma}\,(G,S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta\,(A,S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}\end{array}\right\}_A$

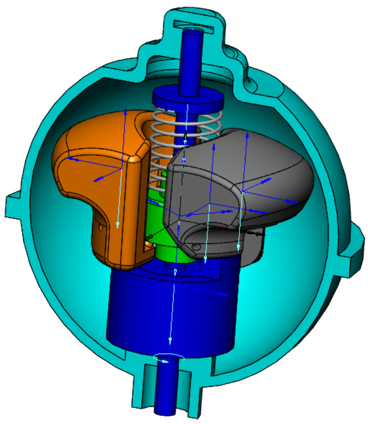
Application 1
Régulateur centrifuge – Sujet

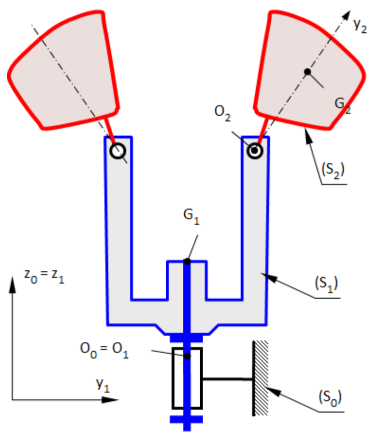
C. Gamelon & P. Dubois.

C1-05

C2-09

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-contre.

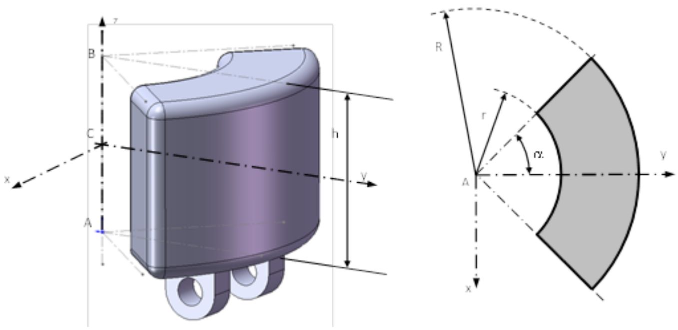




- (S_1) est en liaison pivot d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{z_0}\right)$ avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe $\left(O_2, \overrightarrow{x_1}\right)$ avec (S_1).
- $\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$.
- $\left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}\right) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1\overrightarrow{z_0}$.
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1\overrightarrow{z_0} + L_1\overrightarrow{y_1}$.
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2\overrightarrow{y_2}$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesse de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

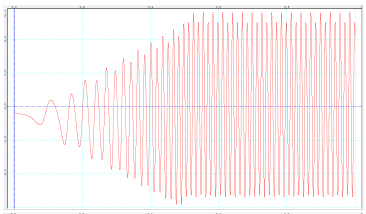
Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

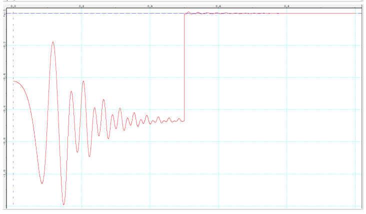
Question 3 Déterminer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 et le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \overrightarrow{x_2}$.

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.





Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.