

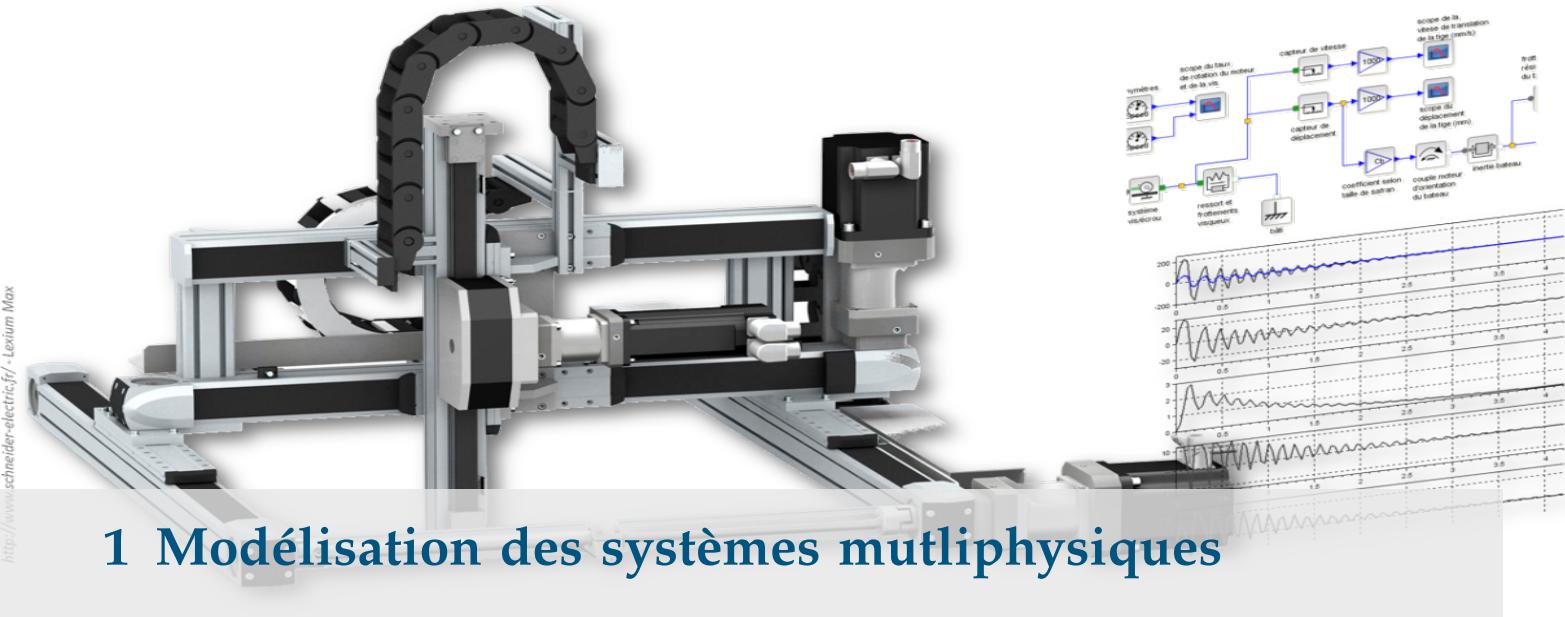
# Table des matières

<b>Table des matières</b>	i
<b>1 Modélisation des systèmes mutiphysiques</b>	1
1.1 Introduction . . . . .	1
1.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ? . . . . .	1
1.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ? . . . . .	1
1.2 Modélisation des systèmes multiphysiques . . . . .	2
1.2.1 Modélisation causale et acausale . . . . .	2
1.2.2 Les différents modèles et outils . . . . .	3
1.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients . . . . .	3
1.3 Modélisation des systèmes physiques . . . . .	4
1.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques . . . . .	4
1.3.2 Modélisation des systèmes électriques . . . . .	5
1.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques . . . . .	5
1.4 Modélisation des non-linéarités . . . . .	5
1.4.1 Linéarisation . . . . .	6
1.4.2 Saturation . . . . .	6
1.4.3 Seuil . . . . .	7
1.4.4 Hystérésis . . . . .	7
1.5 Modélisation des systèmes numériques . . . . .	7
Application 1 : Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet . . . . .	9
Application 1 : Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Corrigé . . . . .	11
Application 2 : La Seine Musicale – Sujet . . . . .	13
Application 2 : La Seine Musicale – Corrigé . . . . .	15
Application 3 : Direction automatique découpée – Sujet . . . . .	17
Application 3 : Direction automatique découpée – Corrigé . . . . .	19
<b>2 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis</b>	21
2.1 Définitions préliminaires et détermination des performances . . . . .	21
2.1.1 Définitions . . . . .	21
2.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques . . . . .	22
2.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace . . . . .	23
2.2.1 Définitions . . . . .	23
2.2.2 Théorèmes . . . . .	23
2.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs . . . . .	24
2.3.1 Définitions . . . . .	24
2.3.2 Algèbre de blocs . . . . .	25
2.3.3 Fonctions usuelles . . . . .	25
2.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre . . . . .	26
2.4.1 Systèmes d'ordre 1 . . . . .	26
2.4.2 Systèmes d'ordre 2 . . . . .	27
2.5 Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	28
2.5.1 Définitions . . . . .	28
2.5.2 Gain . . . . .	28
2.5.3 Intégrateur . . . . .	29
2.5.4 Dérivateur . . . . .	29
2.5.5 Systèmes d'ordre 1 . . . . .	29
2.5.6 Systèmes d'ordre 2 . . . . .	29
2.5.7 Retard . . . . .	30

2.5.8	Tracé du diagramme de Bode . . . . .	30
Application 1 :	Réponses fréquentielles – Sujet . . . . .	31
Application 1 :	Réponses fréquentielles – Corrigé . . . . .	35
TD 1 :	Banc d'essai BTP – Sujet . . . . .	39
TD 1 :	Banc d'essai BTP – Corrigé . . . . .	43
TD 2 :	Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet . . . . .	47
TD 2 :	Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé . . . . .	51
TD 3 :	Tête de découpe de tissus – Sujet . . . . .	55
TD 3 :	Tête de découpe de tissus – Corrigé . . . . .	57
TD 4 :	Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet . . . . .	61
TD 4 :	Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé . . . . .	65
TD 5 :	Bateau support de ROV – Sujet . . . . .	69
TD 5 :	Bateau support de ROV – Corrigé . . . . .	73
TD 6 :	Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet . . . . .	79
TD 6 :	Robot pour la chirurgie endoscopique – Corrigé . . . . .	87
TD 7 :	Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet . . . . .	95
TD 7 :	Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Corrigé . . . . .	99
Colle 8 :	Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Sujet . . . . .	109
Colle 8 :	Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Corrigé . . . . .	111
Colle 2 :	Cisaille à découpe au vol – Sujet . . . . .	115
Colle 2 :	Cisaille à découpe au vol – Corrigé . . . . .	119
TD 8 :	Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Sujet . . . . .	125
TD 8 :	Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Corrigé . . . . .	129
Colle 3 :	Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Sujet . . . . .	133
Colle 3 :	Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Corrigé . . . . .	137
<b>2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis</b>		<b>141</b>
2.1	Stabilité des systèmes asservis . . . . .	141
2.1.1	Notion de stabilité . . . . .	141
2.1.2	Marges de stabilité . . . . .	143
2.2	Rapidité des systèmes asservis . . . . .	146
2.2.1	Rappel : critère de rapidité dans le domaine temporel . . . . .	146
2.2.2	Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2 . . . . .	147
2.2.3	Résultats dans le diagramme de Bode . . . . .	147
2.3	Précision des systèmes asservis . . . . .	148
2.3.1	Système non perturbé . . . . .	148
2.3.2	Système perturbé . . . . .	150
Application 1 :	Stabilité des systèmes – Sujet . . . . .	151
Application 1 :	Stabilité des systèmes – Corrigé . . . . .	153
Application 2 :	Stabilité des systèmes – Sujet . . . . .	157
Application 2 :	Stabilité des systèmes – Corrigé . . . . .	159
Application 3 – Sujet . . . . .		161
Application 3 – Corrigé . . . . .		163
Application 4 :	Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet . . . . .	165
Application 4 :	Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé . . . . .	167
TD 1 :	Drone quadri-rotor – Sujet . . . . .	171
TD 1 :	Drone quadri-rotor – Corrigé . . . . .	175
TD 2 :	Stabilisateur actif d'image – Sujet . . . . .	179
TD 2 :	Stabilisateur actif d'image – Corrigé . . . . .	183
TD 3 :	Direction automobile découpée – Sujet . . . . .	187
TD 3 :	Direction automobile découpée – Corrigé . . . . .	191
TD 4 :	Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Sujet . . . . .	197

TD 4 : Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Corrigé	201
TD 5 : Radar d'avion – Sujet	207
TD 5 : Radar d'avion – Corrigé	209
TD 6 : Base TC200 Teclron – Sujet	211
TD 6 : Base TC200 Teclron – Corrigé	213
Colle 1 : Performances – Sujet	217
Colle 1 : Performances – Corrigé	219
Colle 2 : Performances – Sujet	223
Colle 2 : Performances – Corrigé	225
Colle 3 : Performances – Sujet	229
Colle 3 : Performances – Corrigé	231





# 1 Modélisation des systèmes multiphysiques

B2-02

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ?

Pour comprendre le fonctionnement des systèmes qui nous entourent, il est souvent nécessaire de maîtriser un voire plusieurs domaines de la physique. En effet, le winch utilisé dans le laboratoire a un fonctionnement essentiellement mécanique. En revanche, le simulateur de drone  $D^2C$  est composé d'une partie mécanique (rotation du banc et des hélices) une partie électrotechnique (moteurs) une partie électronique (commande des moteurs) une partie informatique (gestion de la commande et des informations).

Pour modéliser un système, plusieurs outils peuvent être nécessaires. Lorsqu'un outil est associé à un champ de la physique, on peut parler de modèle « mono physique » :

- ▶ pour modéliser la géométrie d'un système ou le comportement d'un mécanisme, on peut faire appel à SolidWorks par exemple;
- ▶ pour modéliser la partie électrique d'un système il est possible d'utiliser un logiciel comme PSpice;
- ▶ pour programmer une interface graphique d'un logiciel, il est possible d'utiliser Python...

En revanche, lorsqu'on veut que tous ces domaines communiquent, il faut une plate forme commune permettant l'échange entre les modèles. On parle alors de modélisation multiphysique. Il est possible d'utiliser des logiciels comme Scilab (Xcos – Modelica) ou Matlab (Simulink – Simscape).

### 1.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ?

Dans l'industrie, les modèles sont indispensables. Ils permettent d'avoir un modèle numérique, image du produit que l'on cherche à réaliser ou que l'on a déjà. L'image doit être aussi fidèle à la réalité que possible. On a vu que ce modèle peut-être « monophysique » ou « multiphysique ».

L'objectif du modèle est de se substituer au produit réel. Les simulations réalisées sur le modèle ont pour objectif de remplacer des expérimentations sur le produits, considérées comme coûteuse en temps et en argent.

Il est possible de recenser les avantages et inconvénients liés à la simulation des modèles [Crevits2015].

1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Systèmes multiphysiques	2
1.3 Modélisation monophysique . . . . .	4
1.4 Non-linéarités . . . . .	5
1.5 Numérique . . . . .	7

**Y. Crevits**, *Éléments de modélisation multiphysique des systèmes industriels en vue de leur simulation numérique*, Juin 2015.

**Ph. Fichou**, *La modélisation multiphysique*, Technologie, Mars 2012.

**Yvan Liebgott**, *Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques avec MATLAB*.

**Frédéric Mazet**, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

**Patrick Beynet**, *Sciences industrielles de l'ingénieur MP - PSI*, Éditions Ellipses.

**Ivan Liebgott**, *Modélisation et Simulation des systèmes Multi-Physiques avec MATLAB-Simulink*.

- ✓ Pouvoir prévoir le comportement du système réel alors qu'il n'existe pas encore lors de la phase de conception ;
  - ✓ permettre la prévision de phénomènes (en météorologie par exemple) ;
  - ✓ éviter ou limiter le recours aux expérimentations réelles qui peuvent être très coûteuses ou très dangereuses, voire proscribes (essais nucléaires militaires) ou impossibles dans l'état actuel des connaissances et des moyens (projet ITER) ;
  - ✓ quand l'échelle de temps des phénomènes dans le système réel ne permet pas une expérience « en une durée raisonnable » pour effectuer des observations ou des mesures. (premiers instants de l'univers ( $t < 10^{-6}$ s) ou l'évolution des galaxies ( $t > 10^6$  années)) ;
  - ✓ « observer » ou représenter des variables inaccessibles à l'expérience ou la mesure ;
  - ✓ les manipulations sont faciles sur un modèle. Elles peuvent être répétées, voire itérées automatiquement pour apprécier de très nombreuses situations ;
  - ✓ le droit à l'erreur, sans risque ;
  - ✓ la possibilité de supprimer des phénomènes perturbateurs ou des effets secondaires.
- 
- ✗ Avoir une confiance aveugle dans les simulations et ses résultats : des erreurs liées aux modèles ou aux calculs peuvent ne pas être perçues immédiatement ;
  - ✗ « oublier » les conditions de la simulation et les hypothèses formulées pour établir le modèle et surtout dans le cas des systèmes complexes ;
  - ✗ « inverser » la réalité et « forcer » le réel à intégrer les contraintes du modèle ;
  - ✗ oublier le niveau de précision des résultats provenant du modèle.

## 1.2 Modélisation des systèmes multiphysiques

### 1.2.1 Modélisation causale et acausale

Lorsque le fonctionnement d'un système est régit par une équation différentielle, dont l'ordre de dérivation de la sortie est supérieur à l'ordre de dérivation de l'entrée, la sortie est une conséquence de l'entrée. En passant l'équation dans le domaine de Laplace puis en la traduisant sous forme de schéma bloc, on obtient alors un bloc **orienté** traduisant ainsi la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie.

On parle ici de modélisation **causale**.

Les liens entre les blocs représentent une grandeur physique (courant, tension, position, vitesse *etc.*).

En modélisation acausale, les entrées et sorties ne sont pas spécifiées. Les liens entre entrées et sorties sont définies de manière implicite. Lorsqu'on visualise la traduction graphique d'un modèle acausal, les liens ne sont pas orientés (les blocs sont « réversibles »). Les blocs sont traversés par des flux d'énergie d'un même domaine physique.

Dans Matlab – Simulink, on parle de grandeurs potentielles (across) et de grandeur traversante (through) :

- ▶ une variable potentielle est mesurée par un instrument en parallèle avec la chaîne d'énergie ;
- ▶ une variable traversante est mesurée par un instrument en série avec la chaîne d'énergie.

Dans Scilab – Coselica, (langage Modelica), on parle de variables potentielles et flux.

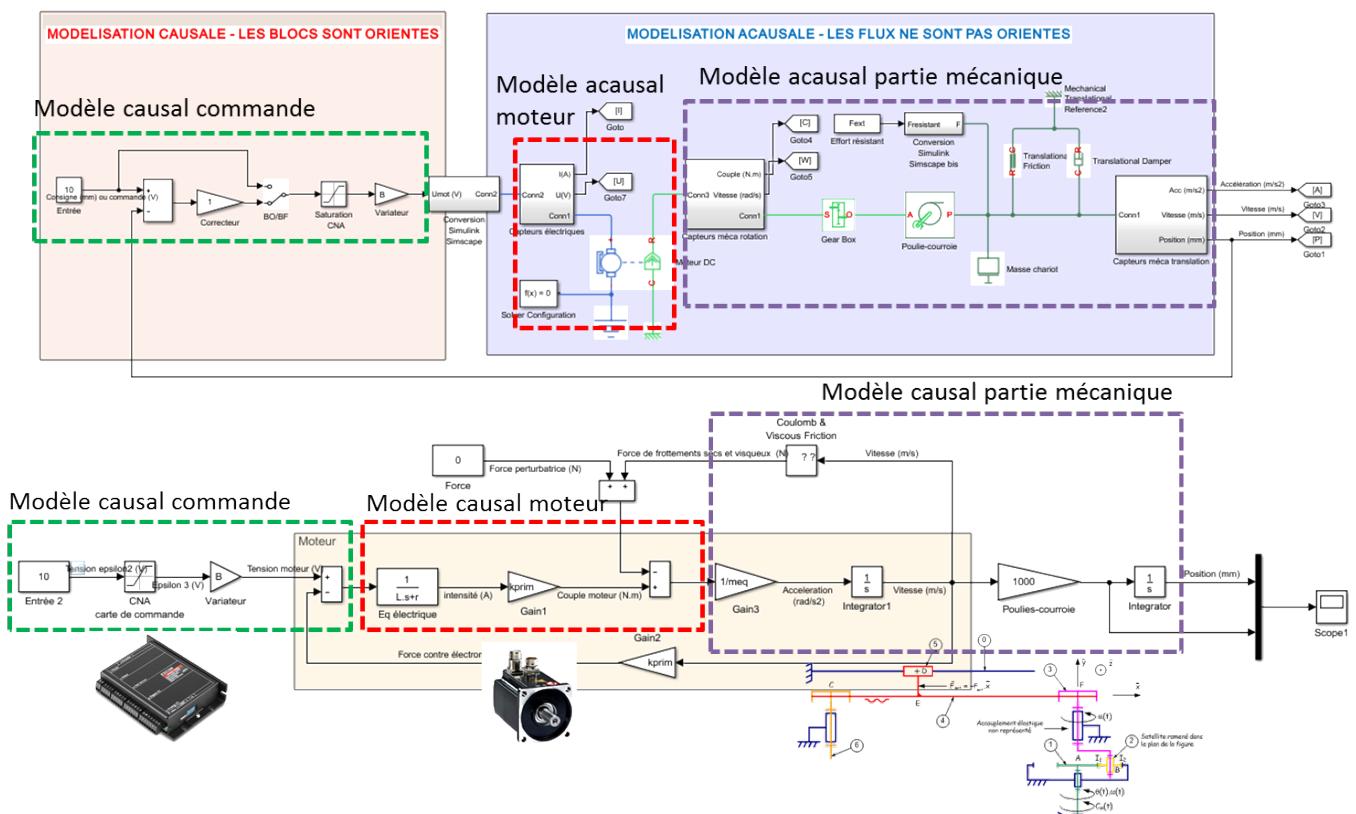
- ▶ variables potentielles : les variables qui sont reliées au même port sont égales ;
- ▶ variables flux : les variables qui aboutissent au même port ont pour somme 0.

**TABLE 1.1** – Modélisation acausale dans Matlab – Simulink – Simscape : variables « across » et « through ».

Domaine physique	Variables « across »	Variables « through »
Électrique	Tension (V)	Courant (A)
Hydraulique	Pression (Pa)	Débit ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
Mécanique de translation	Vitesse linéaire ( $\text{m s}^{-1}$ )	Force (N)
Mécanique de rotation	Vitesse angulaire( $\text{rad s}^{-1}$ )	Moment (Nm)
Thermique	Température (K)	Flux thermique et flux d'entropie

## 1.2.2 Les différents modèles et outils

La figure ci-dessous présente un modèle causal et un modèle acausal du système de laboratoire « Control'X » en utilisant le logiciel Matlab-Simulink.



Visuellement on constate que sur le modèle causal, les composants du système apparaissent. Ainsi, sans connaître les lois de comportements des composants, il est possible de réaliser le modèle multiphysique d'un système.

En modélisation acause, on utilise une représentation par schéma-blocs. Il est ici indispensable de connaître les modèles de connaissance ou de comportement des composants pour réaliser le modèle.

## 1.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients

Que ce soient des modèles causaux ou acausaux, Matlab a recours à des solveurs pour simuler le comportement des systèmes. En effet, des équations différentielles, linéaires ou non, sont « cachées » derrière les blocs.

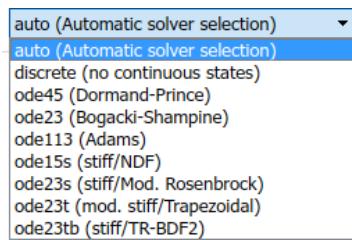


FIGURE 1.1 – Solveurs Matlab

Par défaut, nous laisserons un choix automatique du solveur. Cependant, certains modèles imposeront (via un message d'erreur) le changement de ce solveur. Par ailleurs le pas de simulation devra être changé dans certain cas, dans le but d'améliorer la précision des résultats.

Attention, il est à noter qu'il peut être difficile de réaliser de diagramme de Bode en utilisant un modèle acausal. Ceci peut être un handicap en phase de conception d'un système car il devient plus délicat de déterminer les résonances du système.

## 1.3 Modélisation des systèmes physiques

On utilisera ici Matlab – Simulink. Certains modèles sont aussi transposables avec Scilab – Xcos.

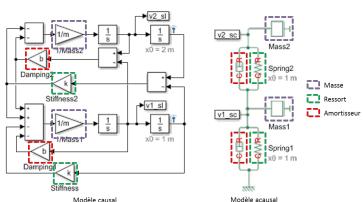


FIGURE 1.2 – Modélisation causale et acausele d'un système avec deux systèmes « masse – ressort – amortisseur » en série.

### 1.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques

#### Introduction

Deux modes de modélisation des systèmes mécanique est disponible : une modélisation 1D (mouvement de translation suivant une seule direction, mouvement de rotation autour d'un axe fixe) ou une modélisation 3D. La modélisation 1D est possible directement dans Matlab. Pour la modélisation 3D, il est plus aisé d'utiliser SolidWorks.

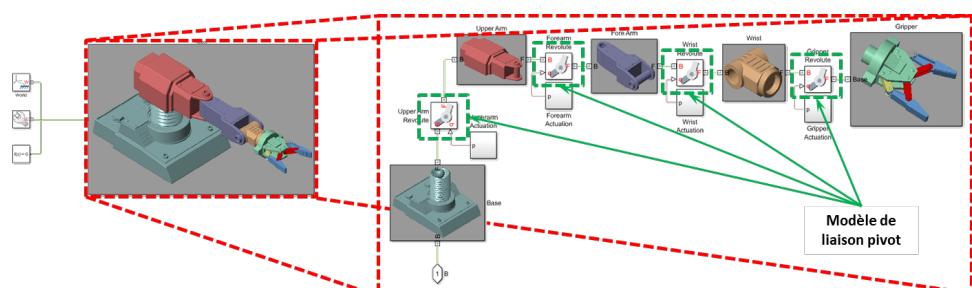
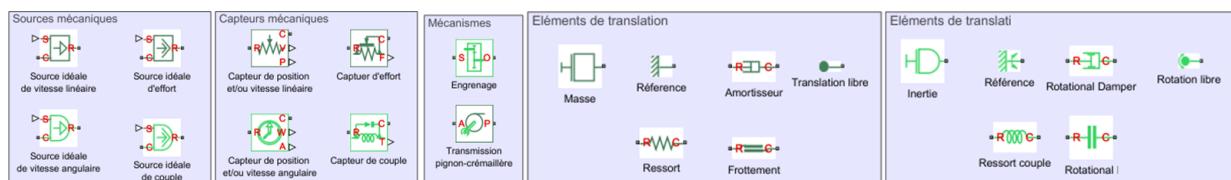


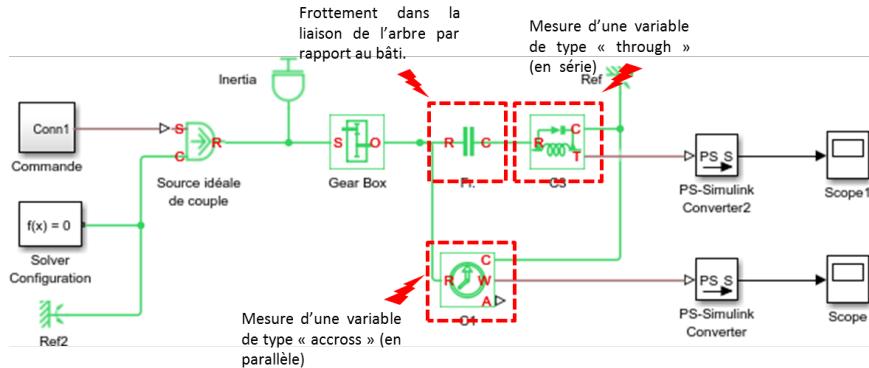
FIGURE 1.3 – Modélisation acausele 3D d'un bras robotisé.

#### Blocs communément utilisés en modélisation multiphysique.

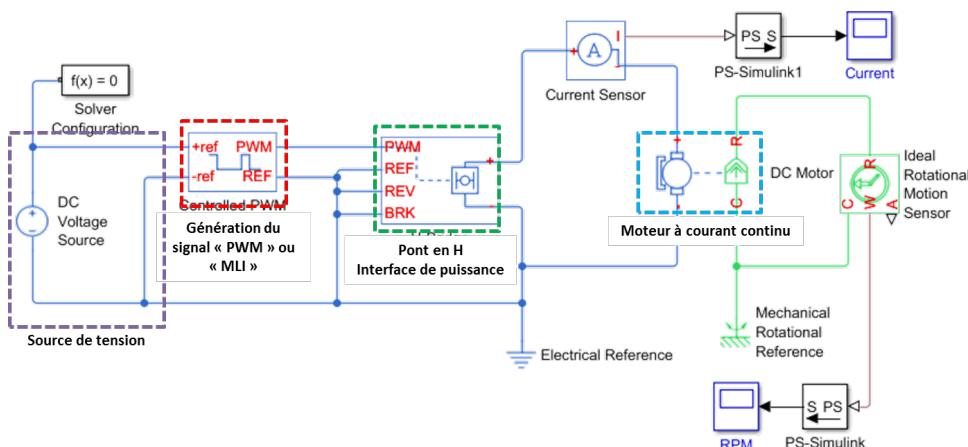
Les éléments communément utilisés sont donnés dans la figure suivante.



La figure suivante illustre une transmission mécanique modélisée en utilisant Simulink. On notera le positionnement des capteurs pour mesurer des variables accross ou through, ainsi que le positionnement du bloc permettant de modéliser les frottements.



### 1.3.2 Modélisation des systèmes électriques



**FIGURE 1.4 –** Modélisation acausale de la commande d'un moteur à courant continu.

### 1.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques

En cas de besoin, des exemples complémentaires sont disponibles en utilisant Matlab – Simulink.

## 1.4 Modélisation des non-linéarités

Même si on cherche à modéliser les blocs d'un système par des équations linéaires (à coefficients constants), il est très fréquent de rencontrer des systèmes (notamment mécaniques) qui n'obéissent pas des lois linéaires (par exemple, le comportement du Maxpid est non linéaire : suivant la plage de fonctionnement – entre 0 et 5° ou entre 85 et 90° – un tour de moteur ne correspond pas au même mouvement angulaire du bras).

Deux solutions s'offrent alors à nous : linéariser le fonctionnement ou modéliser la non linéarité. Les modèles causaux sont par essence linéaire. Cependant, il est possible d'intégrer des non-linéarités modélisables relativement simplement (seuil, saturation, hystérésis). Il est en revanche plus délicat de modéliser les non linéarités géométriques des mécanismes. En revanche dans les modèles acausal, la passerelle entre SolidWorks et Matlab, permet par exemple de modéliser des systèmes mécaniques non linéaires.

Attention : l'analyse fréquentielle d'un système non linéaire n'a pas (peu ?) de sens, même s'il est possible d'effectuer un diagramme de Bode, notamment avec Matlab...

### 1.4.1 Linéarisation

Lorsqu'un système est non linéaire, il peut être possible de le linéariser. Cela signifie que **localement** (sur un certain intervalle) on approche le comportement du système par une droite. On conséquence, on conserve la validité de notre modélisation de type SLCI. Cependant, il faut faire attention à la zone de validité du modèle : si le comportement du système est fortement linéaire la linéarisation ne sera valable que dans une certaine zone.

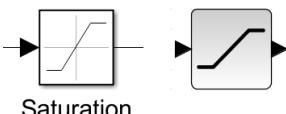
#### Exemple – Loi entrée sortie du Maxpid



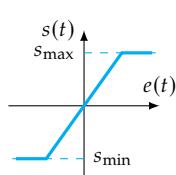
Le comportement mécanique du Maxpid n'est pas linéaire. Si on désire modéliser ce comportement sur un système causal, il est impératif d'utiliser une loi linéaire. Dans le premier cas, on modélise le comportement en utilisant une régression linéaire. Ce modèle génère des erreurs, mais il est « utilisable » sur toute la plage de fonctionnement.

Il est aussi possible, dans un second cas, de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Ainsi, le modèle sera plus fidèle à la réalité autour de ce point de fonctionnement. Par contre, les écarts s'accroissent en s'éloignant du point de fonctionnement.

### 1.4.2 Saturation



Paramètres :  $s_{\max}$  et  $s_{\min}$

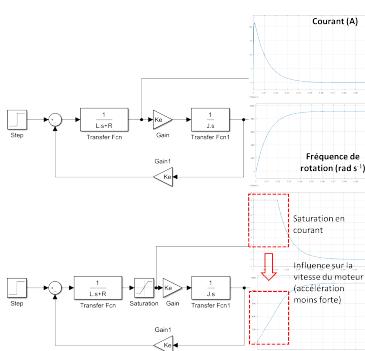


Même si vous l'avez peut-être peu remarqué, les saturations sont omniprésentes sur les systèmes réels. Les principales sources de saturation sont des saturations en tension ou des saturations en courant.

En régime saturé, au delà d'une certaine valeur d'entrée, le signal de sortie du bloc reste identique et égal à la valeur de saturation.

Tout d'abord, dans les systèmes asservis et corrigés, le correcteur permet souvent une amplification de la consigne. Par exemple, un correcteur proportionnel de valeur 5 dans la boucle ouverte permet de multiplier par 5 la tension de commande. Celle-ci peut alors être supérieure à la tension que la source peut fournir.

De même, suivant la charge agissant sur un système (charge électrique ou mécanique), le courant nécessaire à un déplacement peut devenir très important, notamment en phase transitoire. Un pic de courant peut avoir pour effet de détériorer des composants.



#### Exemple –

Prenons par exemple le cas du moteur à continu du Maxpid dont la modélisation est (ou devrait être) bien connue. Sollicitons le moteur par un échelon de tension et observons les signaux que nous ne regardons peut être pas toujours, par exemple le courant. Au démarrage du moteur, si on néglige la bobine et qu'on néglige l'existence d'une tension dans la boucle de retour, le courant initial est de l'ordre de  $\frac{U}{R} \approx \frac{48}{2} = 24$  A. Pour certains systèmes ce courant peut détériorer des composants. Afin de limiter le courant, des saturateurs permettant d'éviter de dépasser certaines intensités.

La conséquence peut ici être un ralentissement du système. En effet, le courant «

plafromant », l'accélération n'est pas aussi forte qu'on l'attendrait. En conséquence, le système est moins rapide.

### 1.4.3 Seuil

Les seuils (ou bandes mortes – dead band) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie reste nulle quand l'entrée varie dans un certain intervalle.

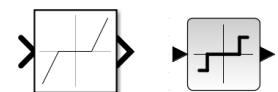
Dans le cas d'une modélisation causale, on peut utiliser le seuil pour modéliser le frottement sec. En effet, dans le cas d'un système piloté par un moteur à courant continu, une petite tension ne suffit pas à actionner le système. Il faut vaincre les frottements secs. Le seuil permet de modéliser ce comportement.

### 1.4.4 Hystérésis

Les hystérésis (Relay) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie est différente quand l'entrée croît ou lorsqu'elle décroît.

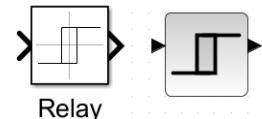
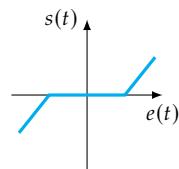
## 1.5 Modélisation des systèmes numériques

On verra dans un chapitre ultérieur que les systèmes que nous manipulons sont souvent numériques. En effet, que ce soit sur le Maxpid, le Control'X, le D2C, la cheville NAO etc. les grandeurs analogiques mesurées sont converties en grandeurs numériques grâce à un CAN (convertisseur analogique numérique). La fréquence d'échantillonnage ou la quantification du signal peuvent avoir un impact non négligeable sur les performances du système.

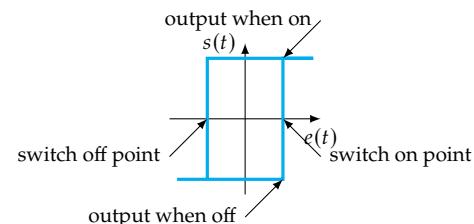


Dead Zone

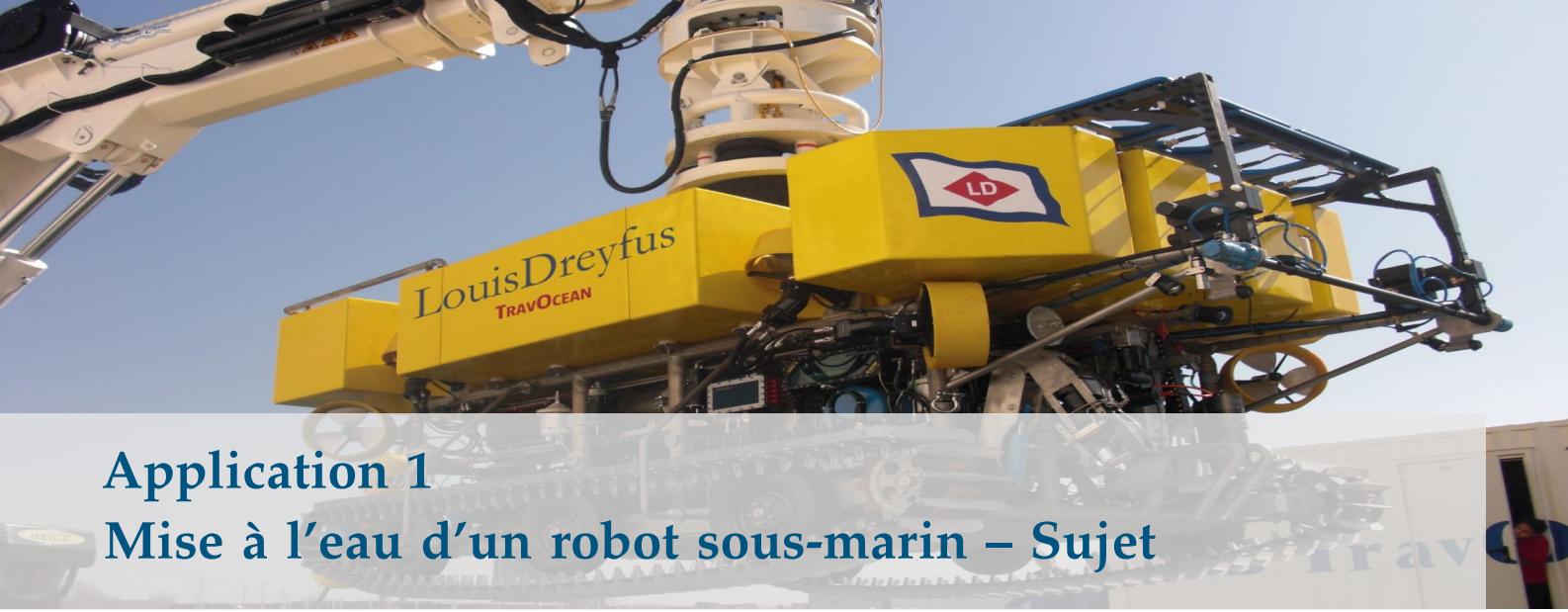
Paramètres : valeur mini et valeur maxi



Paramètres : switch on point, switch off point, output when on, output when off







## Application 1 Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet

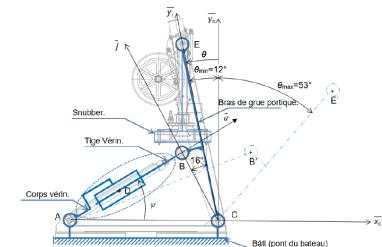
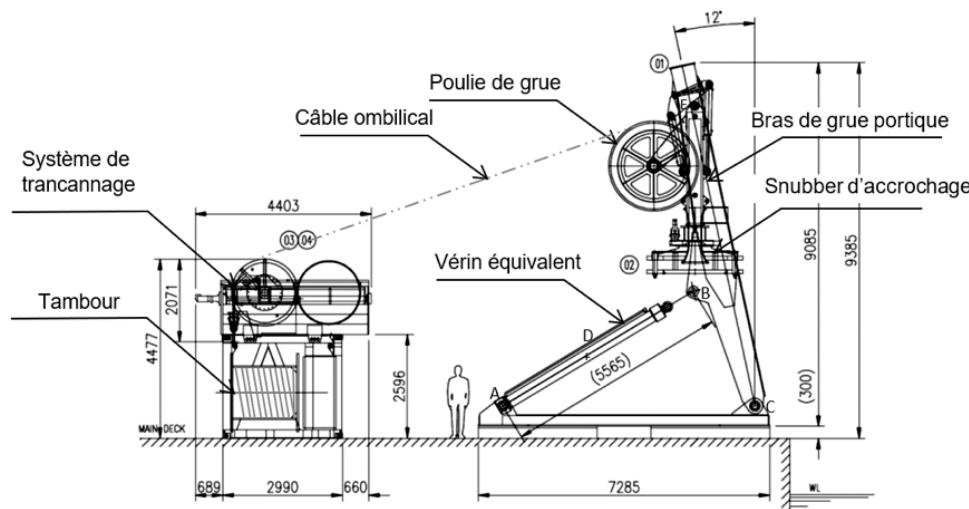
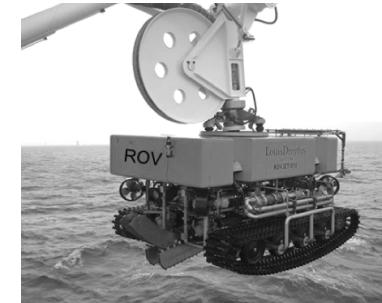
Concours Centrale – MP 2019

B2-02

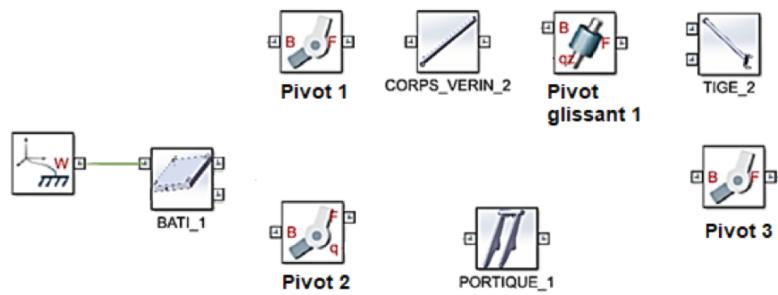
Pour réaliser l'ensouillage sous-marin de câbles, ceux-ci sont déposés sur le fond marin par un navire câblier. Le robot sous-marin ROV (Remotely Operated Vehicle) est déposé sur le fond marin par un bateau support et ensouille le câble provenant du navire câblier après l'avoir détecté et s'être aligné dans l'axe de celui-ci.

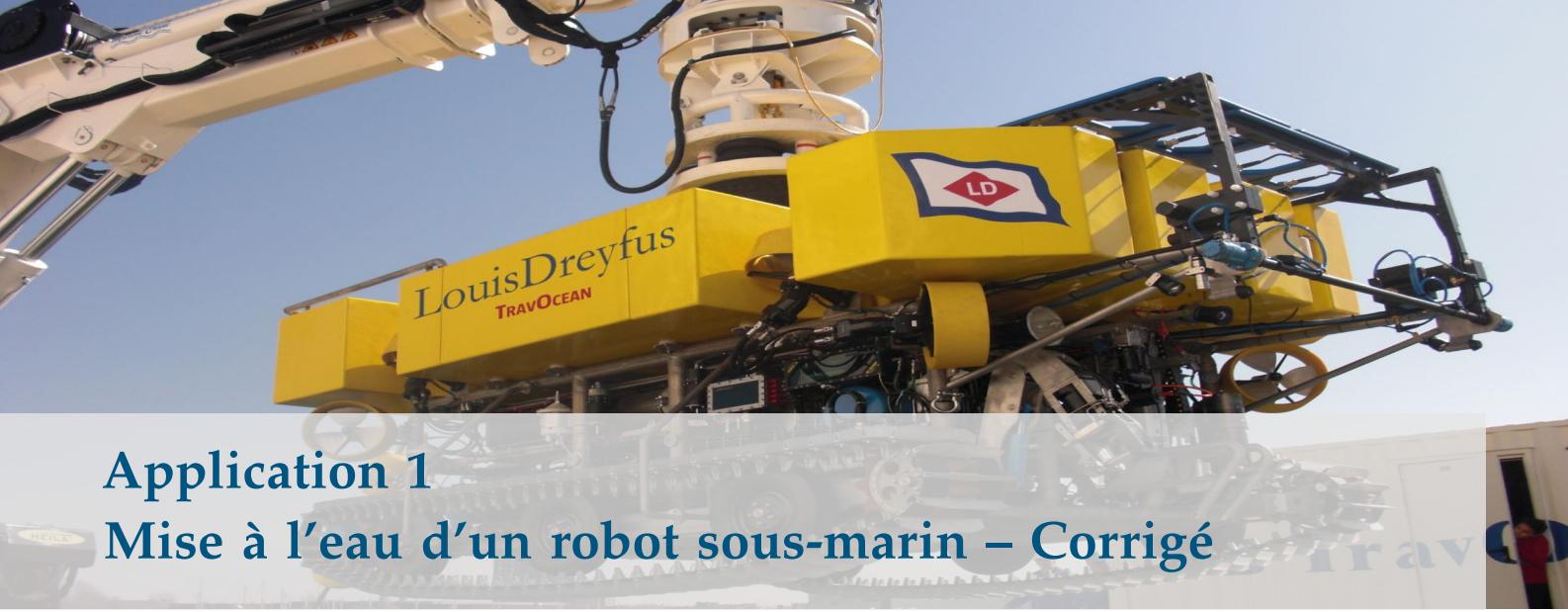
Pour transférer le ROV du pont du bateau support jusqu'à l'aplomb de la surface d'immersion une grue portique est utilisée. La grue portique est actionnée par un ensemble de deux vérins hydrauliques modélisés en un seul vérin équivalent pour cette étude.

Lors de la descente du ROV dans la mer, il est suspendu à un câble ombilical. Un bon équilibrage hydrostatique est nécessaire pour assurer l'horizontalité du ROV pendant la descente.



**Question 1** À partir des figures précédentes, relier les composants du modèle de simulation multiphysique de la grue portique. Quel(s) ensemble(s) n'ont pas été modélisés?

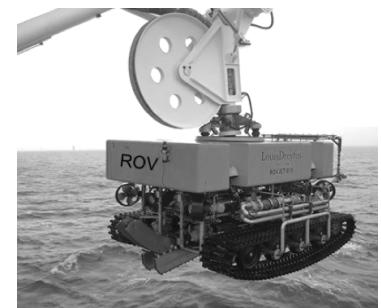




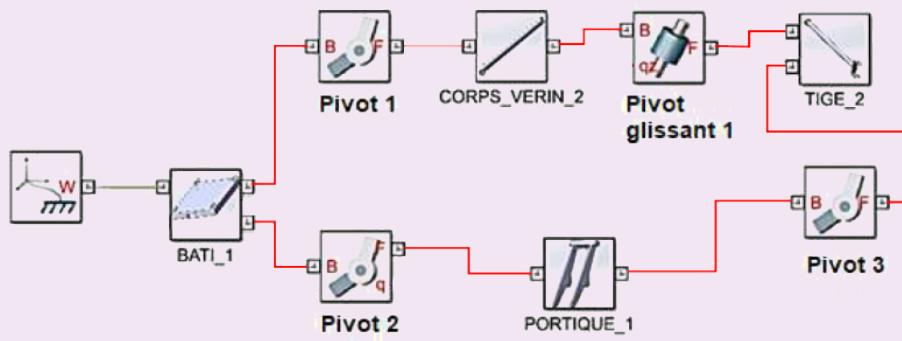
## Application 1 Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Corrigé

Concours Centrale – MP 2019

B2-02



### Correction







## Application 2 La Seine Musicale – Sujet

La Seine Musicale est un équipement à vocation musicale à fort rayonnement culturel, dont l'objet est de créer ou d'aménager des espaces pour des concerts, des expositions, des installations permanentes ou provisoires.

L'un des défis architecturaux de ce projet consiste à mettre en mouvement la voile, équipée de 470 panneaux photovoltaïques, autour de l'auditorium, tout en garantissant une acoustique exceptionnelle.

Les deux demi-voiles sont mises en mouvement de manière indépendante par des chariots motorisés, ainsi qu'une couronne motorisée déplaçant chacun des sommets des demi-voiles par l'intermédiaire de bielles.

Chaque chariot (central et latéral) se déplace grâce à quatre galets, appelés galets de roulement, qui roulent sur les deux rails circulaires concentriques de la voie médiane de roulement et grâce à quatre autres galets de guidage qui roulent sur les côtés des deux rails. Chacun des deux chariots centraux est motorisé à l'aide de deux motoréducteurs qui entraînent chacun en rotation deux des quatre galets de roulement. Afin d'optimiser son rendement énergétique, cette voile se déplace chaque jour toutes les 15 minutes pour suivre le soleil du garage Est au garage Ouest.

Afin d'effectuer un premier dimensionnement en phase d'avant-projet des solutions techniques choisies, un modèle multiphysique simple de la chaîne de traction d'un chariot motorisé est réalisé (Figure 2.4). On se place dans le cas le plus défavorable avec un seul motoréducteur fonctionnel qui entraîne deux galets de roulement (roue).

Concours Centrale – MP 2020

B2-02

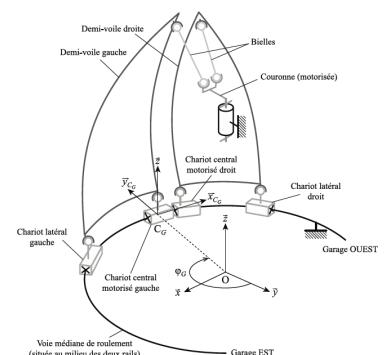
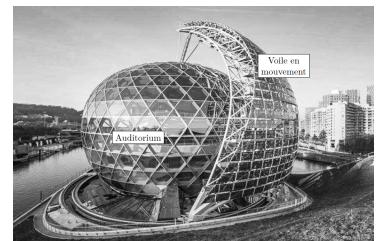


FIGURE 1.5 – Schéma d'architecture de la voile solaire

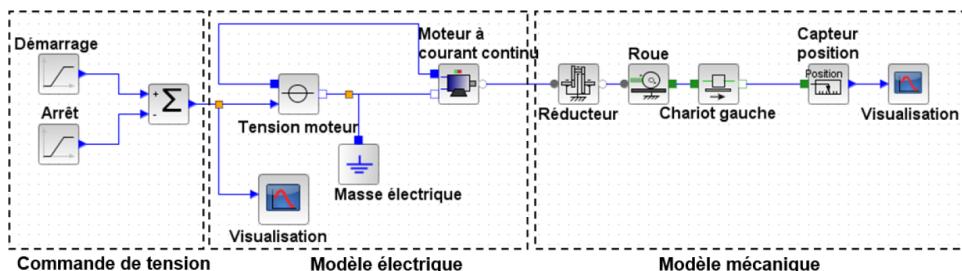


FIGURE 1.6 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voie

Le modèle multiphysique est constitué de trois parties :

- ▶ commande en tension qui résulte de la superposition de deux rampes pour générer la loi de vitesse trapézoïdale;
- ▶ modèle électrique constitué d'un moteur à courant continu alimenté;

- modèle mécanique constitué d'un réducteur, d'une roue de chariot, d'une masse mobile de la demi-voile et d'un capteur de position.

Lors de son déplacement, il peut arriver que la voile soit soumise à l'effet du vent. Il est donc important de le prendre en compte dans le modèle pour évaluer son impact sur le déplacement. Par ailleurs, afin d'assurer une durée de vie du moteur conforme à son mode de fonctionnement, il est important de pouvoir estimer la consommation électrique du moteur en fonctionnement.

Le modèle Figure 2.4 a donc été enrichi de nouveaux blocs, à savoir : un capteur de courant, un capteur de tension et l'effort extérieur lié au vent (échelon).

**Question 1** Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

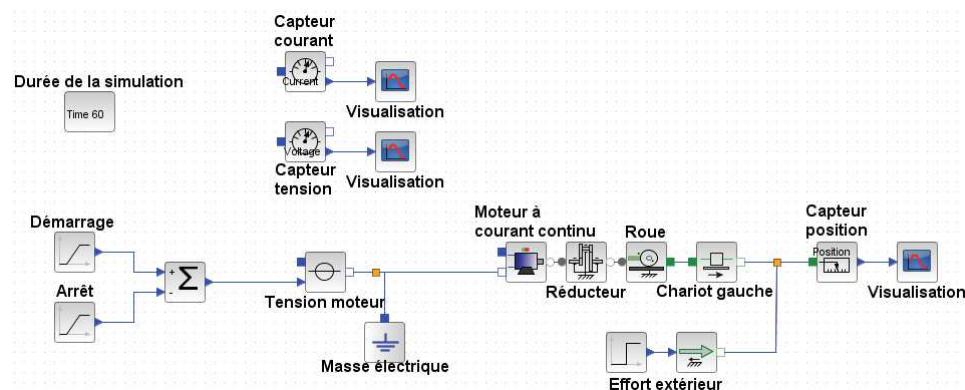


FIGURE 1.7 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voie



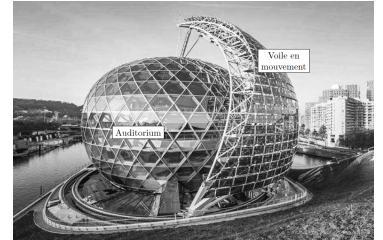
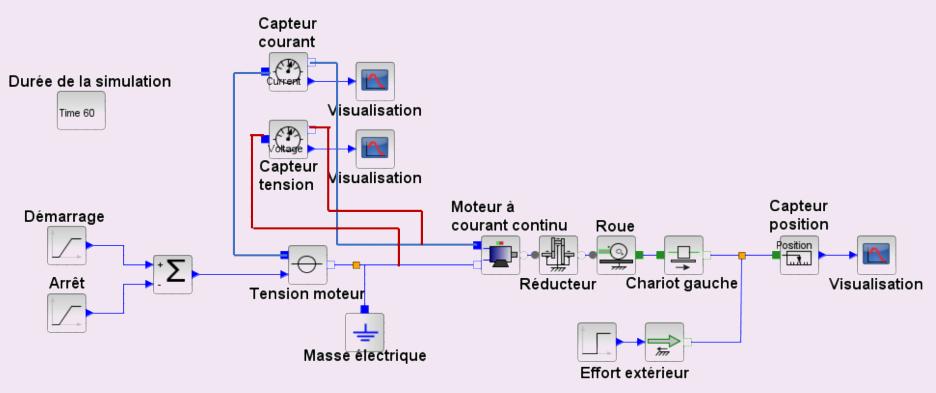
## Application 2 La Seine Musicale – Corrigé

Concours Centrale – MP 2020

B2-02

**Question 1** Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

### Correction







## Application 3 Direction automatique découplée – Sujet

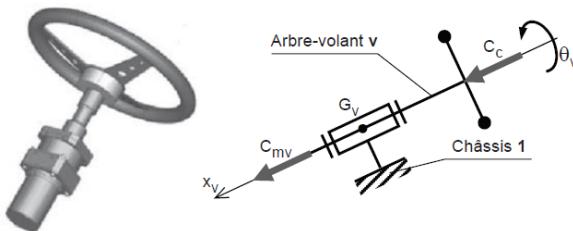
Banque PT – SI A 2017

B2-02



Depuis maintenant de nombreuses années, les commandes de vol d'avions sont passées d'une technologie purement mécanique à la technologie par fil (Fly by Wire). Le secteur automobile suit cette tendance qui présente de nombreux avantages. C'est le système de direction par fil (Steer by Wire), encore nommé direction découpée, qui fait l'objet de l'étude proposée.

La Figure 2.17 donne une vue de cette unité sous la forme d'une maquette numérique à laquelle est associé le schéma cinématique qui servira de base à l'étude mécanique.



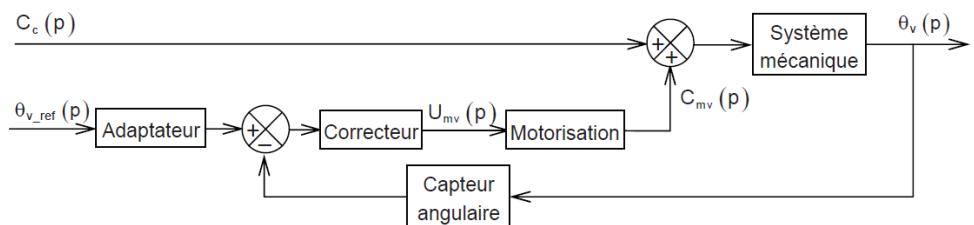
**FIGURE 1.8 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique**

L'unité de pilotage est constituée d'une chaîne d'énergie chargée de solliciter le volant par un couple  $C_{mv}\vec{x}_v$  qui résiste à l'action du conducteur  $C_c\vec{x}_v$  quand celui-ci cherche à tourner le volant.

En effet, la simple dynamique du système mécanique de l'unité de pilotage ne donnerait pas au conducteur la sensation de manier la direction d'une automobile. La composante  $C_{mv}$  est donc élaborée pour que la dynamique du volant en termes d'inertie et de raideur soit équivalente à celle d'une direction conventionnelle optimisée selon le type de conduite visée.

La composante  $C_{mv}$  est élaborée à partir de la consigne d'angle du volant  $C_{v\_ref}$ , transmise par le générateur de consigne intégré au contrôleur de modèles, et de la composante  $C_c$  du couple conducteur.

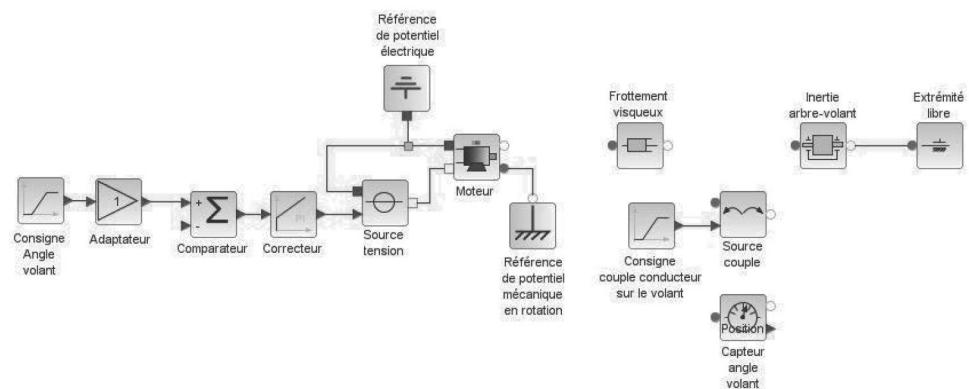
Le modèle de la structure sous la forme d'un schéma bloc décrivant le comportement asservi de cette unité est donné Figure 2.28. On précise que la variable d'entrée est  $\theta_{v\_ref}(p)$ , que la variable de sortie est  $\theta_v(p)$  et que la variable  $C_c(p)$  est considérée comme une perturbation. Un signal de commande  $U_{mv}(p)$  pilote la motorisation.



**FIGURE 1.9 –** Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

Un modèle acausal de cette structure dont certains composants ne sont pas reliés aux autres, est donné sur le cahier réponses.

**Question 1** Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 2.28.





## Application 3

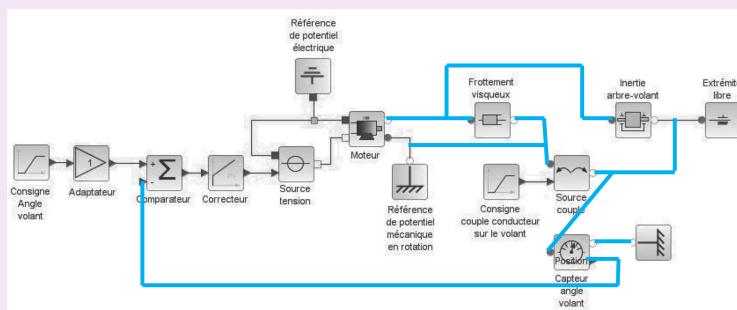
### Direction automatique découpée – Corrigé

Banque PT – SI A 2017

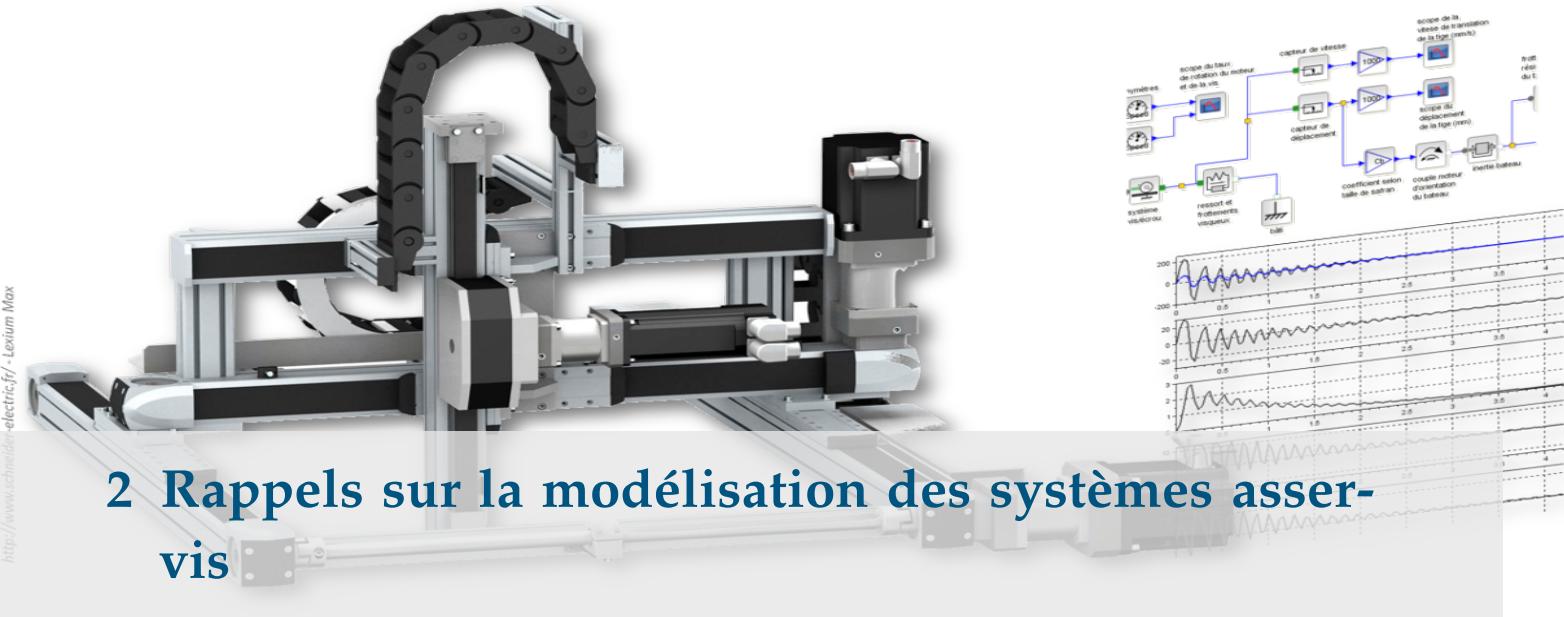
**Question 1** Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 2.28.

B2-02

Correction







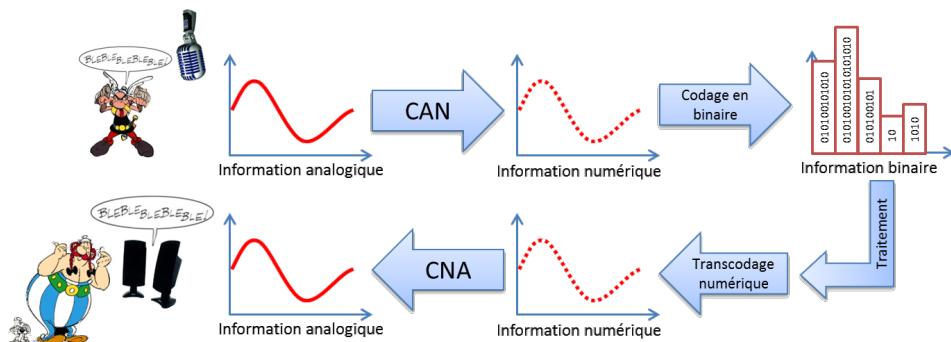
## 2 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

## 2.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

### 2.1.1 Définitions

## Définition – Informations analogiques et numériques

- ▶ Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
  - ▶ Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).



## Définition – Systèmes automatiques ou asservis

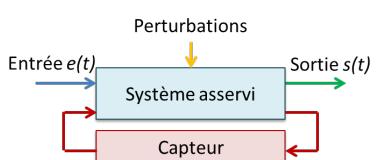
Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable ;
  - la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger

<b>2.1</b>	Premières définitions . . . . .	21
<b>2.2</b>	Transformée de Laplace . . . . .	23
<b>2.3</b>	Modélisation par fonction de transfert et schéma- blocs . . . . .	24
<b>2.4</b>	Systèmes d'ordre 1 & 2 . . . . .	26
<b>2.5</b>	Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	28

- B2-04
  - B2-05
  - B2-06
  - B2-07
  - C1-01
  - C2-01
  - C2-02
  - C2-03



de la qualité de la tâche accomplie.

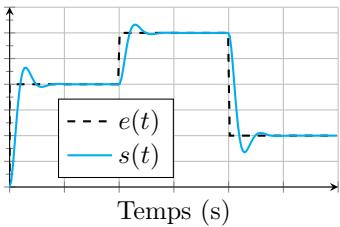


FIGURE 2.1 – Système suiveur.

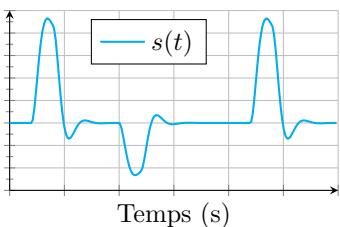


FIGURE 2.2 – Système régulateur.

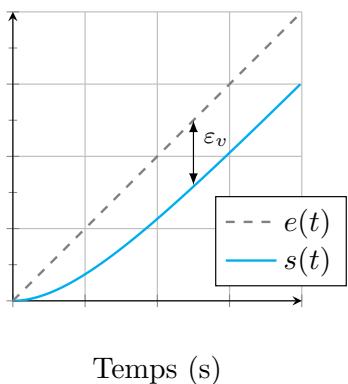


FIGURE 2.3 – Erreur de trainage.

### Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

### 2.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

#### Définition – Précision en position – Écart statique $\varepsilon_s$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_s$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

#### Définition – Précision en vitesse $\varepsilon_v$

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

#### Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

#### Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

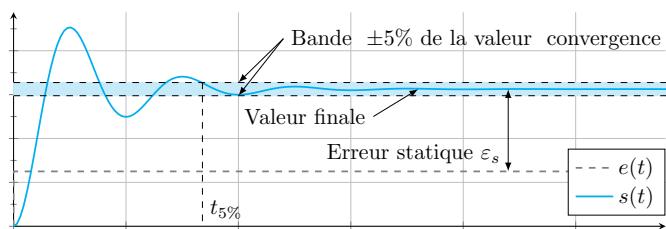


FIGURE 2.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

### Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 2.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

### 2.2.1 Définitions

#### Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

#### Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p)$  ...

#### Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^nF(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### 2.2.2 Théorèmes

#### Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

#### Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Théorème – Retard**

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

**Théorème – Amortissement**

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

## 2.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

### 2.3.1 Définitions

**Définition – Fonction de transfert – Transmittance**

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

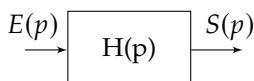
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

**Définition – Classe – ordre – pôles – zéros**

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

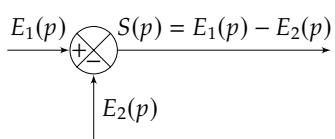
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- ▶ Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Le degré de  $D(p)$  est appelé **ordre  $n$  du système** ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).
- ▶ L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- ▶ S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  $\alpha$  est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

**Définition – Modélisation d'un bloc**

Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition – Modélisation d'un comparateur**

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

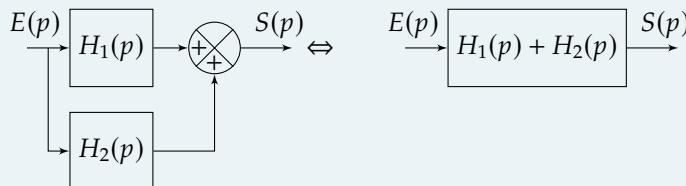
### 2.3.2 Algèbre de blocs

#### Résultat – Blocs en série

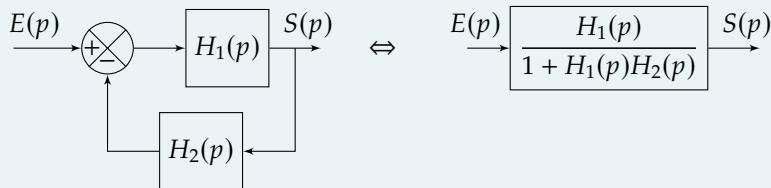


*Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.*

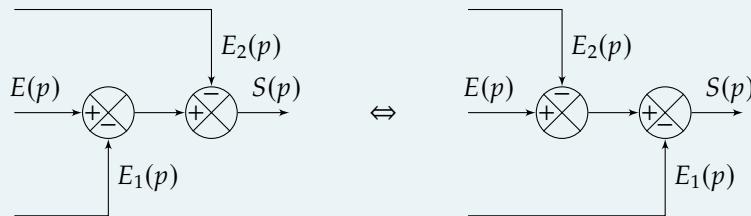
#### Résultat – Blocs en parallèle



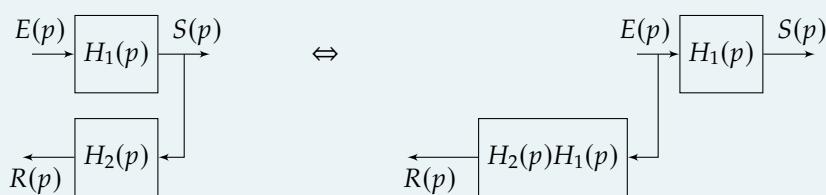
#### Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



#### Résultat – Comparateurs en série



#### Résultat – Point de prélèvement

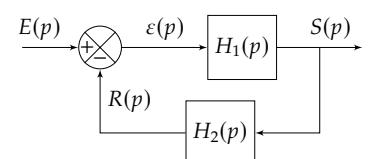


### 2.3.3 Fonctions usuelles

#### Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

*Formule de Black*

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



**Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO**

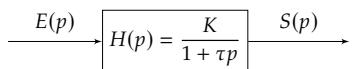
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

**Définition – Théorème de superposition**

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1E_1 + H_2E_2$ .

## 2.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

### 2.4.1 Systèmes d'ordre 1

**Définition – Système d'ordre 1**

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

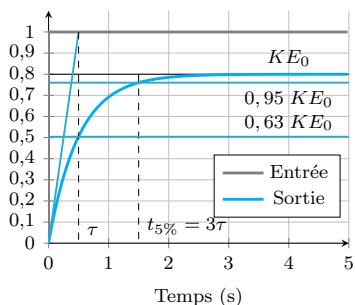
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶  $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- ▶  $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

**Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre**

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- ▶ la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;

- $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_\infty$ .

### Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

On note :

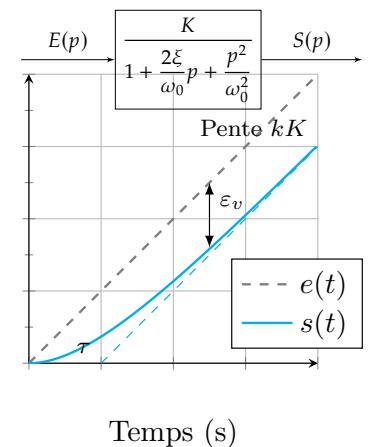
- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- $\xi$  (lire  $\chi i$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- $\omega_0$  pulsation propre du système (rad/s ou  $s^{-1}$ ).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

Analytiquement, on montre que  $s(t) = Kk \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

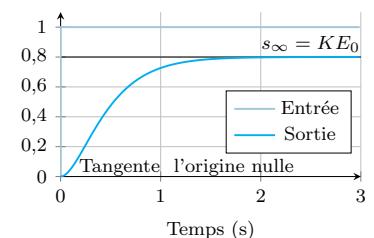
- pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ .



Temps (s)

### Résultat – $\xi \geq 1$ : système non oscillant et amorti (apériodique)

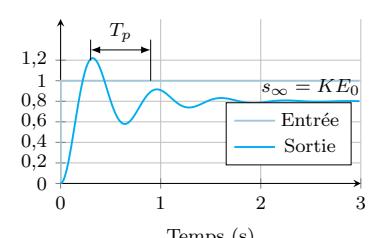
- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.



Temps (s)

### Résultat – $\xi < 1$ : système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ .



Temps (s)

- La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ .

#### Résultat –

- Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $KE_0$  ( $2KE_0$  crête à crête).
- Pour  $\xi \approx 0,69$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

## 2.5 Réponse fréquentielle des SLCI

### 2.5.1 Définitions

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
- $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

- $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
- $\omega$  : la pulsation en rad/s;
- $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

#### Définition – Gain & Phase

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

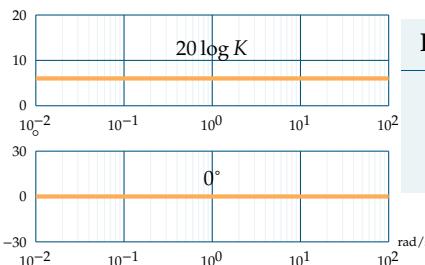
- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

#### Résultat –

On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega);$
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega)).$

### 2.5.2 Gain



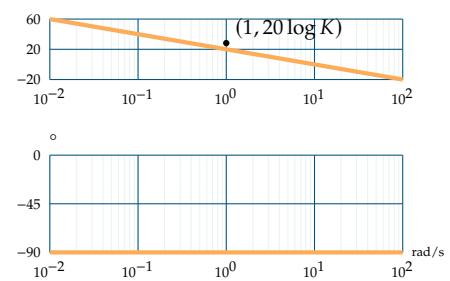
#### Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

- Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .

### 2.5.3 Intégrateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

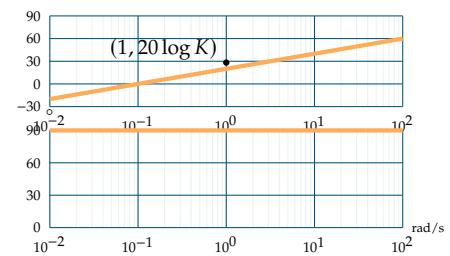
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 2.5.4 Dérivateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

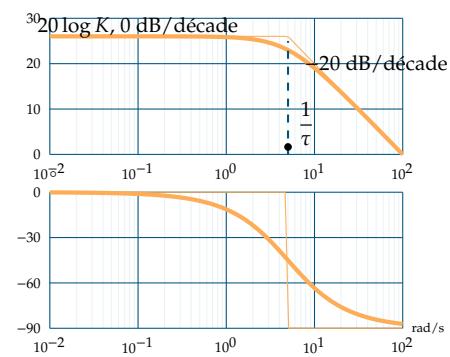
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .



### 2.5.5 Systèmes d'ordre 1

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

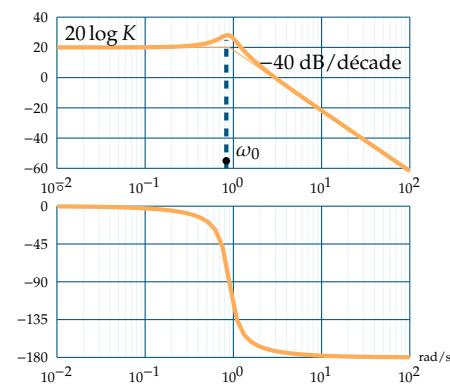
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 2.5.6 Systèmes d'ordre 2

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .
- ▶ Cas où  $\xi < 1$ .
  - ▶ Diagramme de gain asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
    - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40\text{dB/decade}$ .
  - ▶ Diagramme de phase asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;



- pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .

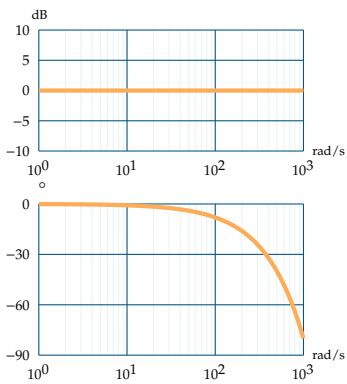
Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

### Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

## 2.5.7 Retard



### Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$ .

## 2.5.8 Tracé du diagramme de Bode

### Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

### Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

# Application 1

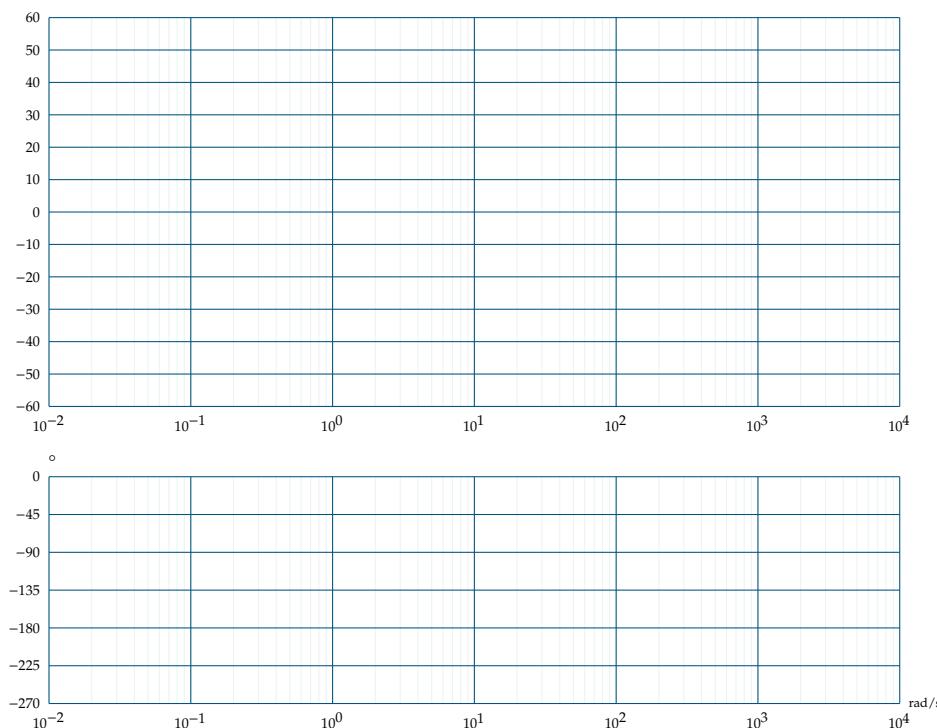
## Réponses fréquentielles – Sujet

D'après Sébastien Grange.

### Diagramme de Bode

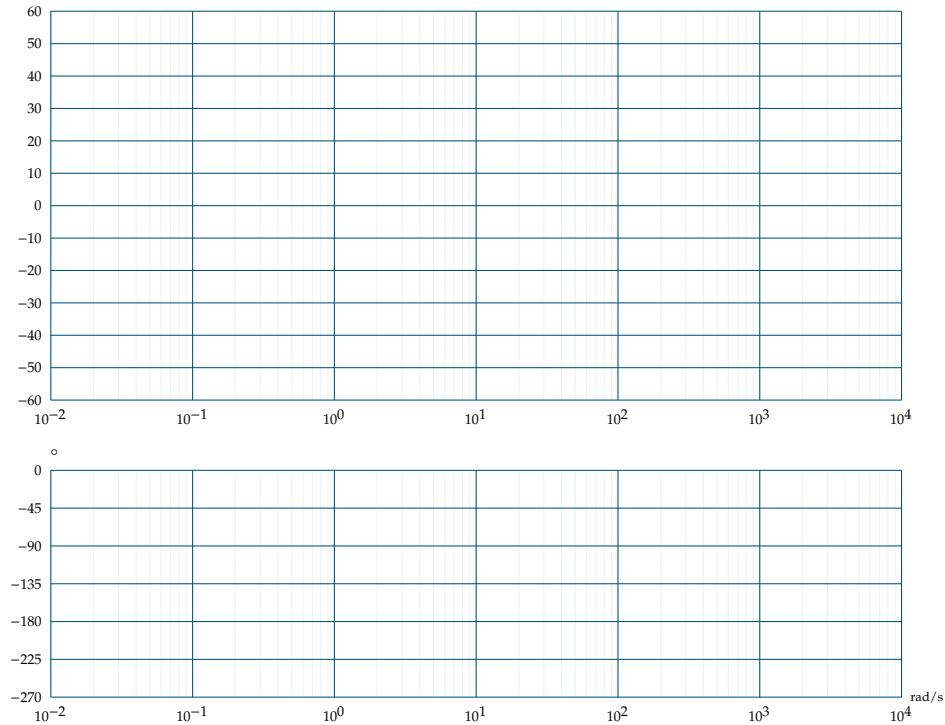
**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

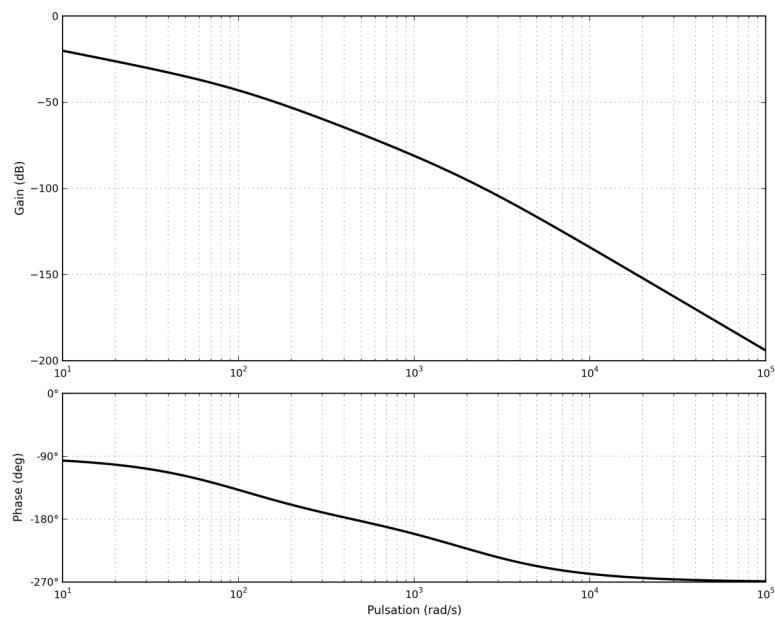


**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$



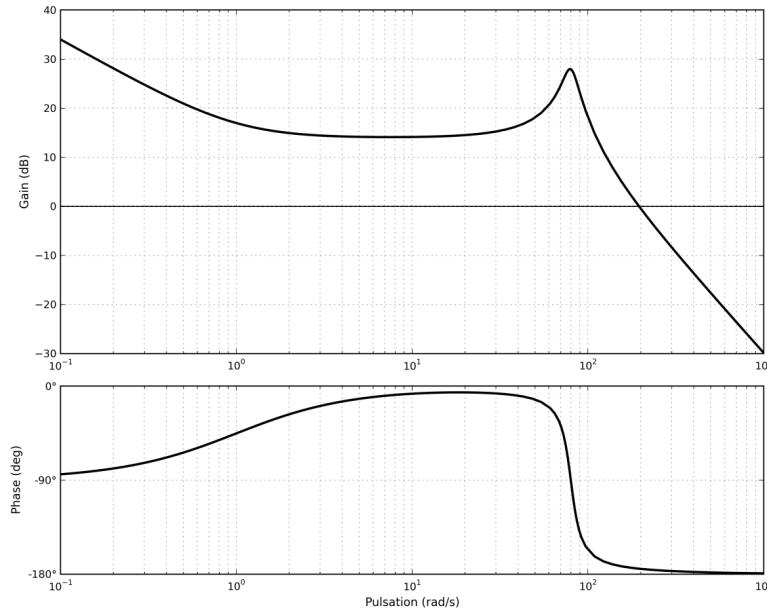
**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .



**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert

du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .



**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

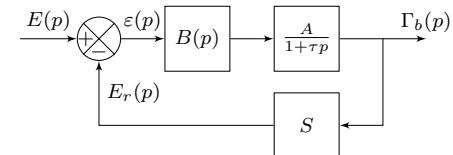
**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / g \text{ V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .



# Application 1

## Réponses fréquentielles – Corrigé

D'après Sébastien Grange.

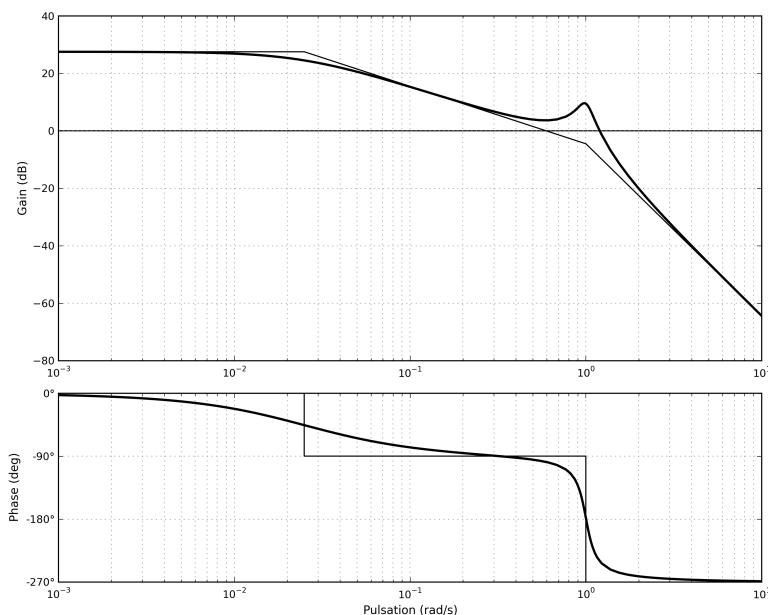
### Diagramme de Bode

**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

#### Correction

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1 + 40p) \left( 1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1} p + \frac{p^2}{1^2} \right)}$$



**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

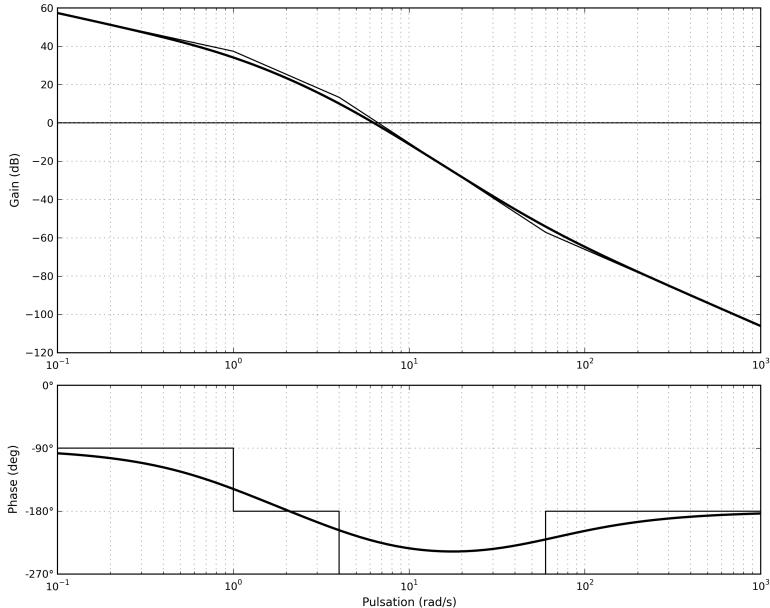
$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

### Correction

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + (2 \cdot 1,25)/2p + p^2/2^2)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + p)(1 + 0,25p)}$$

	1 rad/s	$\frac{1}{0,25} = 4$ rad/s	$\frac{1}{0,0167} = 60$ rad/s
$1 + 0,0167p$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0° +20 dB/décade +90°
$\frac{1}{1 + p}$	0 dB/décade	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90° -20 dB/décade -90°
$\frac{1}{1 + 0,25p}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90° -20 dB/décade -90°
$1/p$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90° -20 dB/décade -90°
$H(p)$	-20 dB/décade -90°	-40 dB/décade -180°	-60 dB/décade -270° -40 dB/décade -180°

Poistionnement du diagramme asymptotique de gain : en  $\omega = << 1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $H(p) \approx \frac{75}{p}$ . Ainsi pour  $\omega \approx 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $H_{dB}(0,1) = 20 \log(75/0,1) = 57 \text{ dB}$ .



**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .

### Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1<sup>er</sup> ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\frac{1}{\tau}$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a :  $1/T_1 \approx 100$  et  $1/T_2 \approx 2000$  donc  $T_1 = 0,01 \text{ s}$  et  $T_2 = 0,0005 \text{ s}$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1<sup>er</sup> ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \approx -20$  et  $K \approx 1$ .

On a donc :  $H(p) = \frac{1}{p(1 + 0.01p)(1 + 0.0005p)}$ .

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc :  $H(p) \simeq \frac{1}{p(1 + 0.01p)}$ .

**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

#### Correction

On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente :  $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$ .

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que :  $G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) \simeq -60 \text{ dB}$  et donc  $S_0 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$ . D'après la courbe de phase, on peut lire :  $\varphi(\omega = 300\text{rad/s}) = -175 \text{ degrés}$ . On a donc :  $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$ . L'angle est à mettre en radians.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .

#### Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .

$$H(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + 2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $1/\tau$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a :  $1/T \simeq 1$  et  $T = 1 \text{ s}$ .

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\omega_0$ . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a :  $\omega_0 \simeq 80 \text{ rad/s}$ .

Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a :  $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$  et  $\xi \simeq 0,11$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \simeq 33$  et  $K \simeq 4,5$

**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / \text{g V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



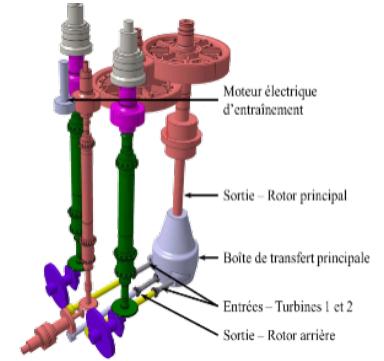
# TD 1

## Banc d'essai BTP – Sujet

Concours CCINP– TSI 2015

**B2-07**

**C2-03**

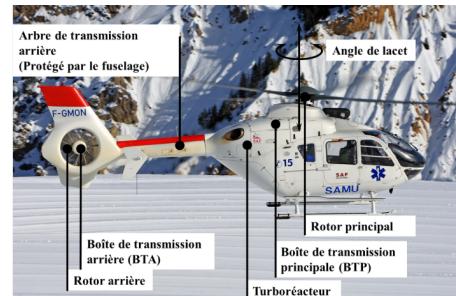


### Mise en situation

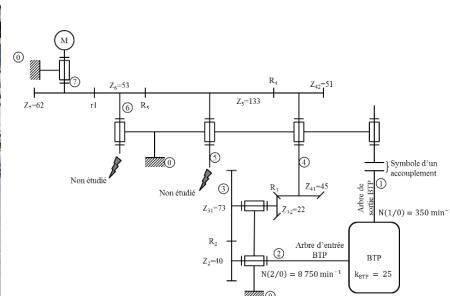
Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 2.5a). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 2.5b présente la structure du banc d'essai.

#### Objectif

Valider Req 1.1.1.



(a) Hélicoptère.



(b) Structure du banc d'essai.

«requirement»	Précision de la régulation
Id = "1.1.1"	Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

FIGURE 2.5 – Hélicoptère et banc d'essai

### Le moteur à courant continu

On note :

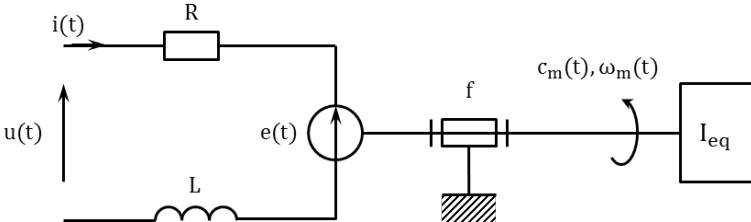
- $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;

- ▶  $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- ▶  $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶  $c_m(t)$  : le couple moteur;
- ▶  $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- ▶  $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- ▶  $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 2.6.

- ▶  $R$  : la résistance de l'induit;
- ▶  $L$  : l'inductance de l'induit;
- ▶  $f$  : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à  $\omega_m(t)$ ;
- ▶  $I_{eq}$  : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;

**FIGURE 2.6 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.**



Hypothèses :

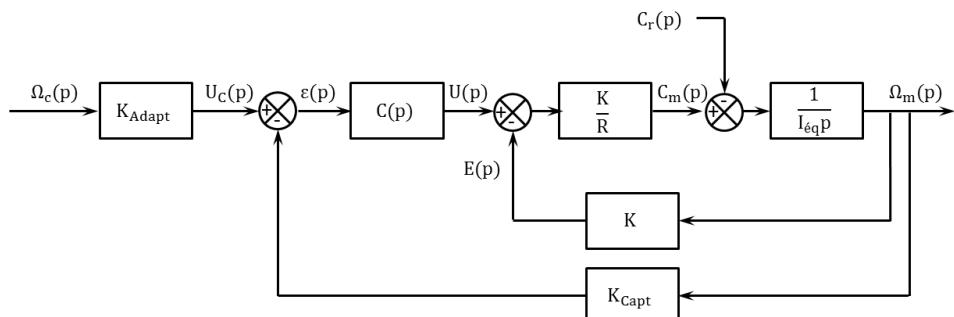
- ▶ le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- ▶ les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- ▶ on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- ▶ on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- ▶ on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- ▶ pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 2.7.



**FIGURE 2.7 – Régulation en vitesse du banc d'essai.**

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$  ?

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$ . On considère

que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_C(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_C(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

#### Éléments de correction

1.  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .
2.  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_p}{K + K_p K_{\text{Capt}}} \text{ et } \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K^2 + K K_p K_{\text{Capt}}}.$
3. .
4.  $K_2 = \frac{R}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})}.$
5.  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p).$
6.  $\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}.$
7. On montre que l'écart statique est annulé.
8.  $\varepsilon = 0.$





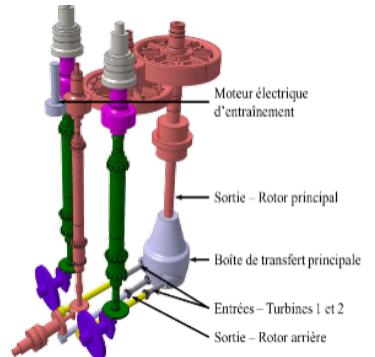
## TD 1

# Banc d'essai BTP – Corrigé

Concours CCINP– TSI 2015

**B2-07**

**C2-03**



## Mise en situation

### Objectif

Valider Req 1.1.1.

## Le moteur à courant continu

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{\text{Adapt}}$ ?

### Correction

Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

Afin d'avoir un asservissement précis ( $\varepsilon(p) = 0$  lorsque  $\Omega_c(p) = \Omega(p)$ ), on prend  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .

«requirement»
<b>Précision de la régulation</b>
Id = "1.1.1"
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

### Correction

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{K^2}{RI_{\text{eq}}p}} = \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} = \frac{1/K}{1 + \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2}p}$$

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p)}{1 + \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p) K_{\text{Capt}}} = \frac{K_{\text{Adapt}} K C(p)}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KC(p) K_{\text{Capt}}}$$

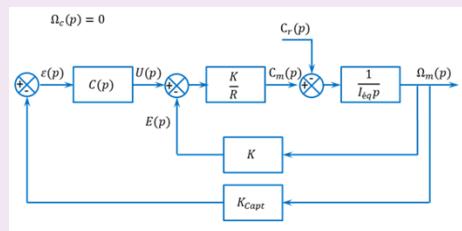
$$H_1(p) = \frac{K_{\text{Adapt}} K K_P}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} = \frac{\frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}}{\frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} p + 1} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$$

Soit par identification :  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}$  et  $\tau_1 = \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}}$ .

**Hypothèse 2 :** on considère que  $\Omega_c(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .

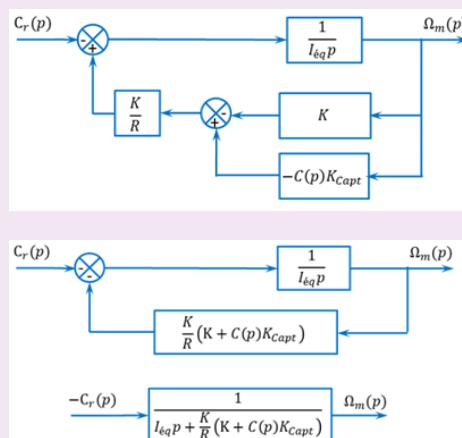
**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

#### Correction



**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

#### Correction



$$\text{On a donc : } H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{1}{\frac{K}{R} \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = -\frac{\frac{R}{K} \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right)}{1 + \frac{R I_{\text{eq}}}{K \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right)} p}$$

$$= -\frac{K_2}{1 + \tau_2 p} \text{ Soit par identification : } K_2 = \frac{R}{K \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right)} \text{ et } \tau_2 = \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}$$

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_c(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

#### Correction

Par superposition on a :  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

#### Correction

On a, pour des échelons de consignes :  $\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$  avec  $\Omega_{c0} = 202 \text{ rad/s}$  et  $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$  avec  $C_{r0} = 990 \text{ Nm}$ .

L'écart statique  $\varepsilon_S$  s'écrit en sortie du comparateur :

$$\begin{aligned}\varepsilon_S &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}\Omega_m(p)) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} \left( p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_1(p)\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_2(p)C_r(p)) \right) \\ &\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( K_{\text{Adapt}}\frac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}}K_1\frac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}}K_2\frac{C_{r0}}{p} \right) \\ &\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}}K_1)\Omega_{c0} + K_{\text{Capt}}K_2C_{r0}\end{aligned}$$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

#### Correction

En choisissant  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ , l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain  $K_P$  important  $K_1 \rightarrow 1$  et  $K_2 \rightarrow 0$ , mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

#### Correction

En reprenant le raisonnement de la question \*\*, et en remplaçant  $C(p)$  par  $K_I/p$  dans

$$\text{les expressions de } H_1(p) \text{ et } H_2(p) : \lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} p}{1 + \frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}}} =$$

$$\frac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}.$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{1}{R \left( K + \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = 0$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p) \right)$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} K_{\text{Adapt}} / K_{\text{Capt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} 0 C_r 0 = 0$$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.



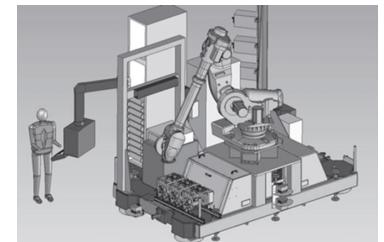
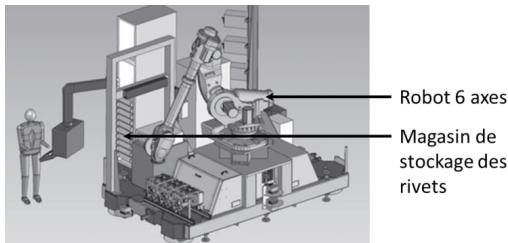
## TD 2

# Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet

Concours E3A – PSI 2015.

## Mise en situation

### Présentation



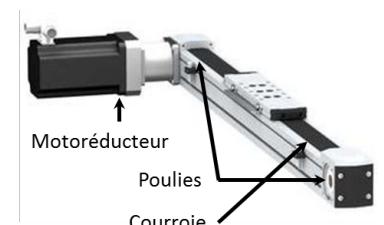
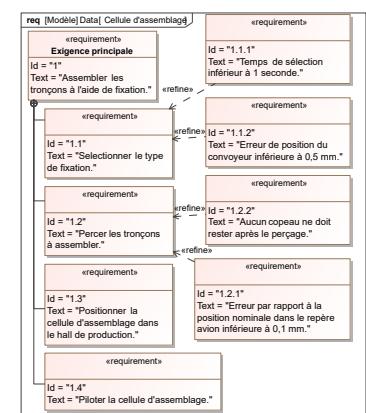
Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

L'objectif de cette partie est de valider les choix effectués par la société pour le sous ensemble de sélection des fixations de la cellule (exigence 1.1).

### Axe chariot

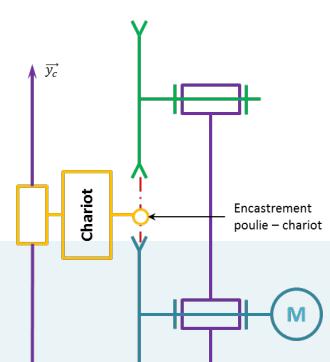
Le déplacement du chariot est assuré par un axe numérique asservi en vitesse et en position. Cet axe est composé d'un moteur à courant continu, d'un système de transmission de puissance de type poulies / courroie et d'un rail.

La modélisation du système de déplacement du chariot est donné ci-contre.



### Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Afin de sélectionner le type de fixation, la buse d'aspiration doit être déplacée en face de la cassette avec une erreur inférieure à 0,5 mm (voir exigences fonctionnelles). Cependant le fabricant du système poulie-courroie du rail indique déjà une erreur de  $\pm 0,25$  mm due notamment à l'élasticité de la courroie. Par conséquent, l'erreur en position de la commande doit être nulle. De plus, afin de ne pas perdre de temps lors



de la production, le temps maximal de déplacement lors de la sélection est imposé à une seconde.

L'étude se fera dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire un déplacement du chariot vers le haut entre les deux cassettes de rivets les plus éloignées. L'axe de déplacement est appelé  $\vec{y}_c$

## Notations domaine temporel – domaine de Laplace

Les notations entre le domaine temporel et celui de Laplace sont données dans la suite. Ainsi, si la fonction  $f(t)$  possède une transformée de Laplace, elle sera notée :  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

<input type="checkbox"/> $u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t);$	<input type="checkbox"/> $u(t)$ : tension moteur ;
<input type="checkbox"/> $e(t) = K_E \omega_m(t);$	<input type="checkbox"/> $i(t)$ : courant moteur ;
<input type="checkbox"/> $C_M(t) = K_C i(t);$	<input type="checkbox"/> $e(t)$ : force contre-électromotrice ;
<input type="checkbox"/> $J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f\omega_m(t) = C_M(t) - C_R(t).$	<input type="checkbox"/> $\omega_m(t)$ : vitesse de rotation moteur ;
	<input type="checkbox"/> $C_M(t)$ : couple moteur ;
	<input type="checkbox"/> $C_R(t)$ : couple résistant modélisant l'action de pesanteur.

## Critères à respecter pour l'exigence 1.2

Exigence	Critères	Niveaux
Déplacer le chariot	<b>Précision</b> : erreur statique par rapport à une consigne de vitesse constante <b>Rapidité</b> : temps de réponse à 5% en réponse à une consigne échelon <b>Stabilité</b>	NULLE $T_{r5\%} = 0,1\text{s}$ maxi
	Marge de gain :	6 dB mini
	Marge de phase :	45° mini

## Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Compte tenu des vitesses de translation importantes, le système retenu est de type poulie-courroie.

## Détermination de l'inertie équivalente

Les grandeurs caractéristiques (notations et valeurs) des éléments de l'axe du chariot sont données dans le tableau ci-dessous.

Moment d'inertie du rotor du moteur autour de son axe	$J_m$	$140 \times 10^{-6}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur	$J_{rd}$	$60 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie motrice autour de son axe	$J_{PM}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie réceptrice autour de son axe	$J_{PR}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Masse totale du chariot	$M$	5 kg
Vitesse de rotation de l'arbre moteur	$\omega_m$	
Vitesse de rotation de l'arbre de sortie du réducteur	$\omega_r$	
Rayon d'une poulie motrice ou réceptrice	$R_p$	45 mm
Rapport de réduction réducteur ( $\omega_r / \omega_m$ )	$\lambda$	1/5

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

### Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

Le coefficient de frottement visqueux est donné par  $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$ , l'inductance par  $L = 9 \text{ mH}$ , la résistance de l'induit par  $R = 3 \text{ Ohm}$ , la constante de couple par  $K_c = 1,3 \text{ NmA}^{-1}$  et  $K_E = 1,3 \text{ V}(\text{rad s}^{-1})^{-1}$ .

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_C}{K_C K_e + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$ .

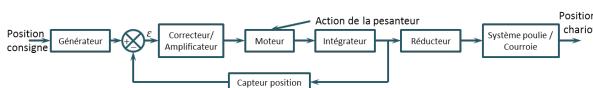
Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

La partie précédente a permis de déterminer un modèle du moteur. La suite de l'étude va permettre, par simulation, de déterminer les réglages nécessaires de l'axe vis-à-vis du cahier des charges. La figure suivante présente le principe de l'asservissement de l'axe du chariot.



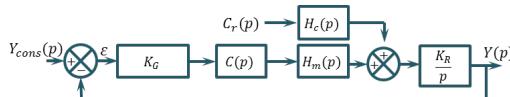
Les grandeurs caractéristiques des blocs de l'asservissement de l'axe chariot sont données dans le tableau ci-contre.

**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\varepsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne)?

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

## Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant  $C_R$  dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

Générateur	$K_G$	À déterminer
Capteur de position	$K_{capt}$	$5 \times 10^{-3} \text{ V rad}^{-1}$
Correcteur amplificateur	$C(p)$	Variable

Avec :

- $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ; \frac{(R + L p) K_M}{K_C}$
- $H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$
- $C_R(p) = C_r/p ;$
- $K_R = R_p \lambda .$

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Question 13** Conclure.

Afin de répondre totalement au cahier des charges, l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral dérivé est retenue. En effet, la commande de l'axe intègre directement ce type de correcteur. Dans la suite du problème, le correcteur  $C(p)$  sera de la forme :  $C(p) = K_I \left( 1 + \frac{1}{(T_I p)} \right) (1 + T_D p)$ . Le réglage des coefficients a été fait par simulation numérique. Afin de vérifier maintenant le critère de rapidité, on donne la réponse temporelle (figure ??) de l'axe à un échelon de position de 1 m.

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

**Question 15** Tracer le diagramme de Bode.

On considère  $C_R(p) = 0$ . On prendra  $K_M = 0,8 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ ,  $T_e = 0,0051 \text{ s}$ ,  $T_m = 0,0074 \text{ s}$ .

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

On donne ci-dessous les diagrammes de Bode avec les correcteurs optimisés. Déterminer les marges de gain et marges de phase.

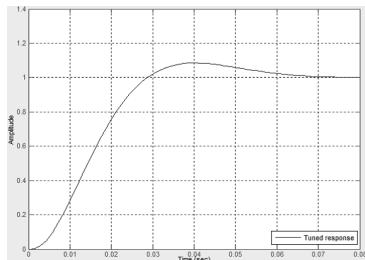
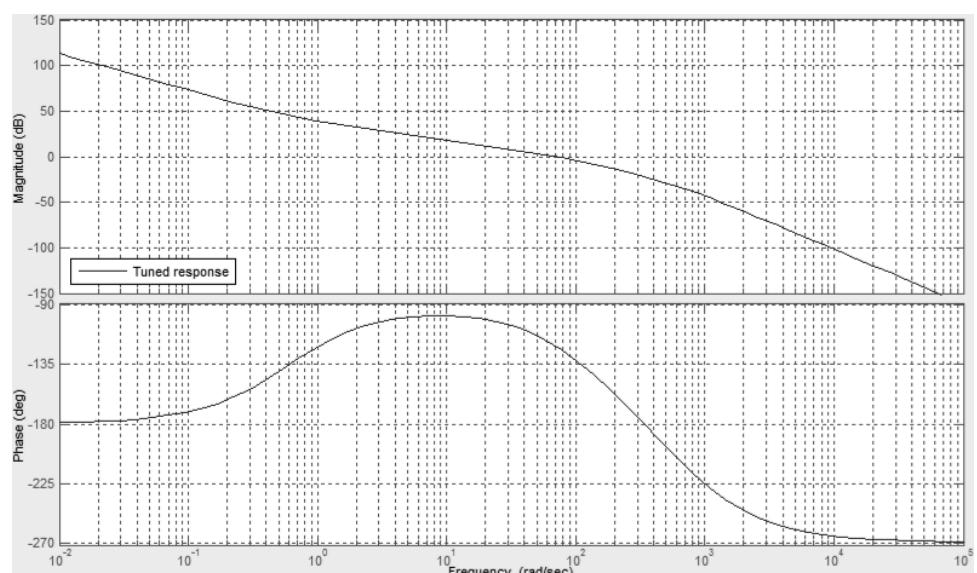
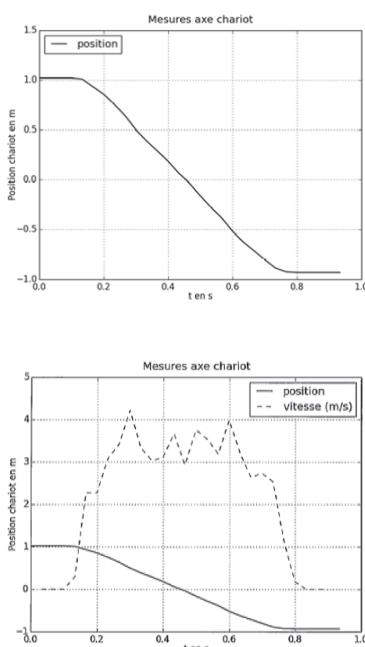


FIGURE 2.8 – Réponse temporelle système réglé.

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Afin de vérifier les réglages précédents, un essai sur le système réel est réalisé. Une consigne de 2 m est donnée. L'absence de système d'acquisition dédié impose un système de mesure extérieur au système réel. C'est un dispositif d'analyse d'image qui est retenu pour ces mesures.

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).





## TD 2

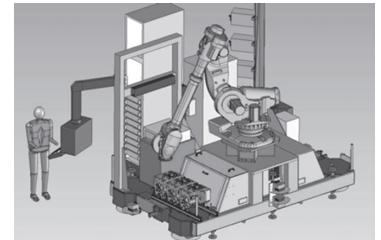
# Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé

Concours E3A – PSI 2015.

## Mise en situation

### Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

### Critères à respecter pour l'exigence 1.2



### Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

#### Correction

Utilisation d'un système vis-écrou.

### Détermination de l'inertie équivalente

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2J_{eq}\omega_m^2$ .

#### Correction

$E_c(\Sigma) = E_c(\text{moteur}) + E_c(\text{réducteur}) + E_c(\text{poulies}) + E_c(\text{chariot})$ .

- $E_c(\text{moteur}) = 1/2J_m\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{réducteur}) = 1/2J_{red}\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{poulies}) = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\omega_{red}^2 = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{chariot}) = 1/2MV^2 = 1/2MR_p^2\lambda^2\omega_m^2$ .

On a donc  $J_{eq} = MR_p^2\lambda^2 + (J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2 + J_{red} + J_m$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

#### Correction

$$J_{eq} = 0,0068 \text{ kg m}^2$$

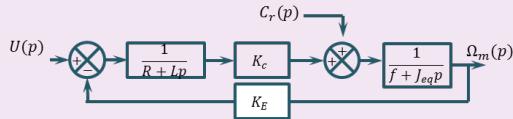
## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

### Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

### Correction



**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

### Correction

$$H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E + Rf}}{1 + \frac{RJ_{eq} + Lf}{K_c K_E + Rf} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E + Rf} p^2}$$

Le coefficient de frottement visqueux est donné par  $f = 0,2 \times 10^{-2}$  Nms rad $^{-1}$ , l'inductance par  $L = 9$  mH, la résistance de l'induit par  $R = 3$  Ohm, la constante de couple par  $K_c = 1,3$  NmA $^{-1}$  et  $K_E = 1,3$  V (rad s $^{-1}$ ) $^{-1}$ .

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_C}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$ . Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3}$  kg m $^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

### Correction

En faisant les applications numériques on montre que  $Rf$  est négligeable devant  $K_c K_E$  et que  $Lf$  est négligeable devant  $RJ_{eq}$ . On a donc :  $H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E}}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E} p^2} = \frac{K_C}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$ .

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

### Correction

$$\left\{ \begin{array}{l} T_e + T_m = \frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} \\ T_e T_m = \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E} \end{array} \right. \quad \text{On a (résolution d'une équation du second degré) : } \\ T_e = \frac{\frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} - \sqrt{\left(\frac{RJ_{eq}}{K_c K_E}\right)^2 - 4 \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E}}}{2}. T_e = 0,0051 \text{ s et } T_m = 0,0074 \text{ s.}$$

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

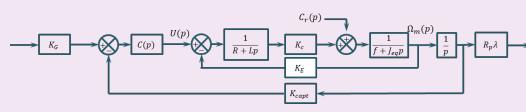
**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\varepsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

#### Correction

On doit avoir  $K_G = K_{\text{capt}} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{R_p} = 0,556 \text{ V rad}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

#### Correction



## Étude du modèle simplifié

**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

#### Correction

On raisonne par superposition :

Si  $C_r(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \end{aligned}$$

#### Correction

Si  $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C} \end{aligned}$$

On a donc :  $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Correction**

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Correction**

**Question 13** Conclure.

**Correction**

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

**Correction**

**Question 15** Tracer de diagramme de Bode.

**Correction**

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

**Correction**

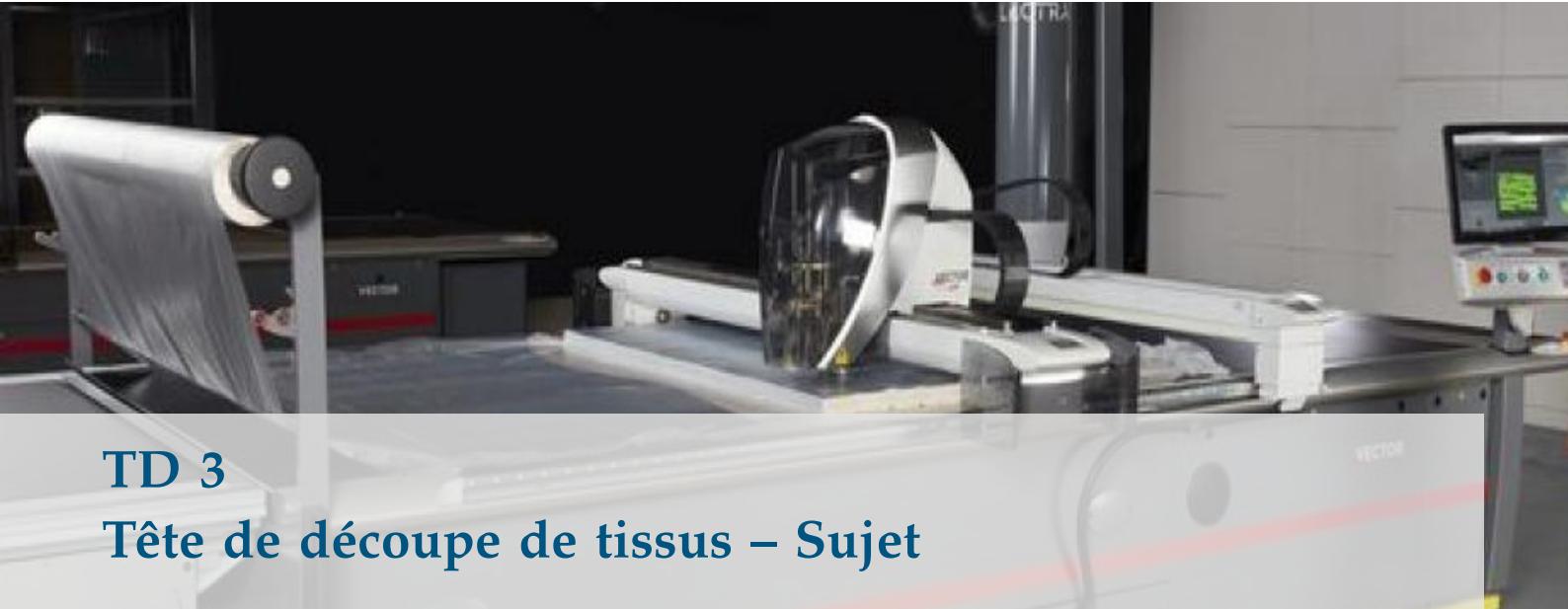
**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

**Correction**

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).

**Correction**



## TD 3

### Tête de découpe de tissus – Sujet

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 2.34) :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport à la table;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction  $\vec{x}_0$  par rapport au bras transversal;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

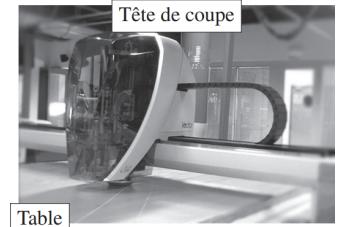
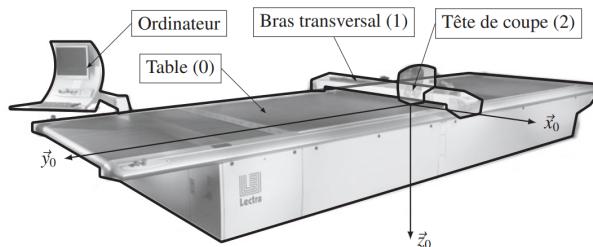


FIGURE 2.9 – Structure d'une table de découpe de tissus

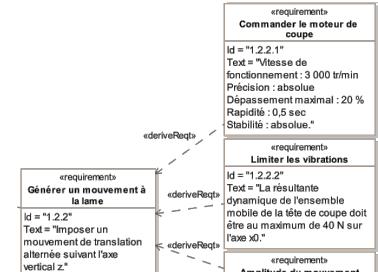


FIGURE 2.10 – Exigence 1.2.2.1

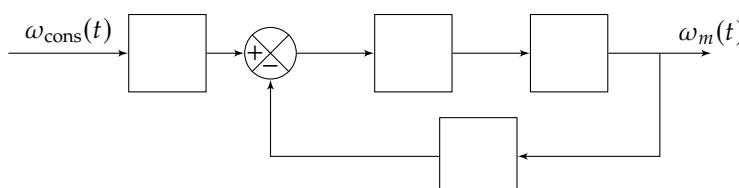
### Modélisation du comportement du moteur de coupe

#### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 2.12).

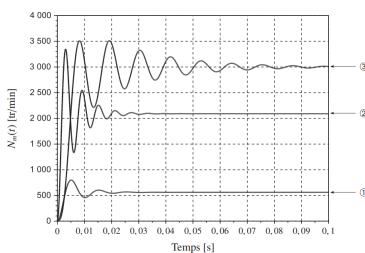
Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée  $\omega_m(t)$ , est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension  $u_{mes}(t)$ , image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne  $u_{cons}(t)$ , image de la vitesse de rotation de consigne  $\omega_{cons}(t)$ ; un adaptateur fournit  $u_{cons}(t)$  à partir de  $\omega_{cons}(t)$ . La tension écart  $\varepsilon(t) = u_{cons}(t) - u_{mes}(t)$  est alors transformée en tension d'alimentation du moteur  $u_m(t)$  par l'ensemble correcteur-variateur.

**Question 1** Compléter le schéma-bloc fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont :

- $R$ , résistance de l'induit;
- $L$ , inductance de l'induit;
- $k_e$ , constante de vitesse;
- $k_c$ , constante de couple;
- $u_m(t)$  est la tension d'alimentation du moteur;
- $i(t)$  est l'intensité traversant l'induit;
- $e(t)$  est la force contre-électromotrice;
- $\omega_m(t)$  est la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- $c_m(t)$  est le couple moteur;
- $c_r(t)$  est le couple résistant;
- $J$  est le moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ramené à l'arbre moteur, supposé constant dans cette partie.



**FIGURE 2.11** – Évolutions simulées de  $\omega_m(t)$ .

#### Éléments de correction

1. .
2.  $K_a = K_c$ .
3. .
4.  $K = \frac{1}{k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$  et  $\xi = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_ck_e}}$ .
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de  $K_p$ .
6.  $K_i \neq 0$  pour la courbe 3 uniquement.
7. .

**Question 2** On note  $K_a$  le gain de l'adaptateur et  $K_c$  le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre  $K_a$  et  $K_c$  pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu :  $u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t)$ ,  $c_m(t) = k_c i(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ . La fonction de transfert du moteur est notée  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

**Question 4** En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . On exprimera les constantes en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $k_e$ ,  $k_c$  et  $J$ .

## Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

### Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

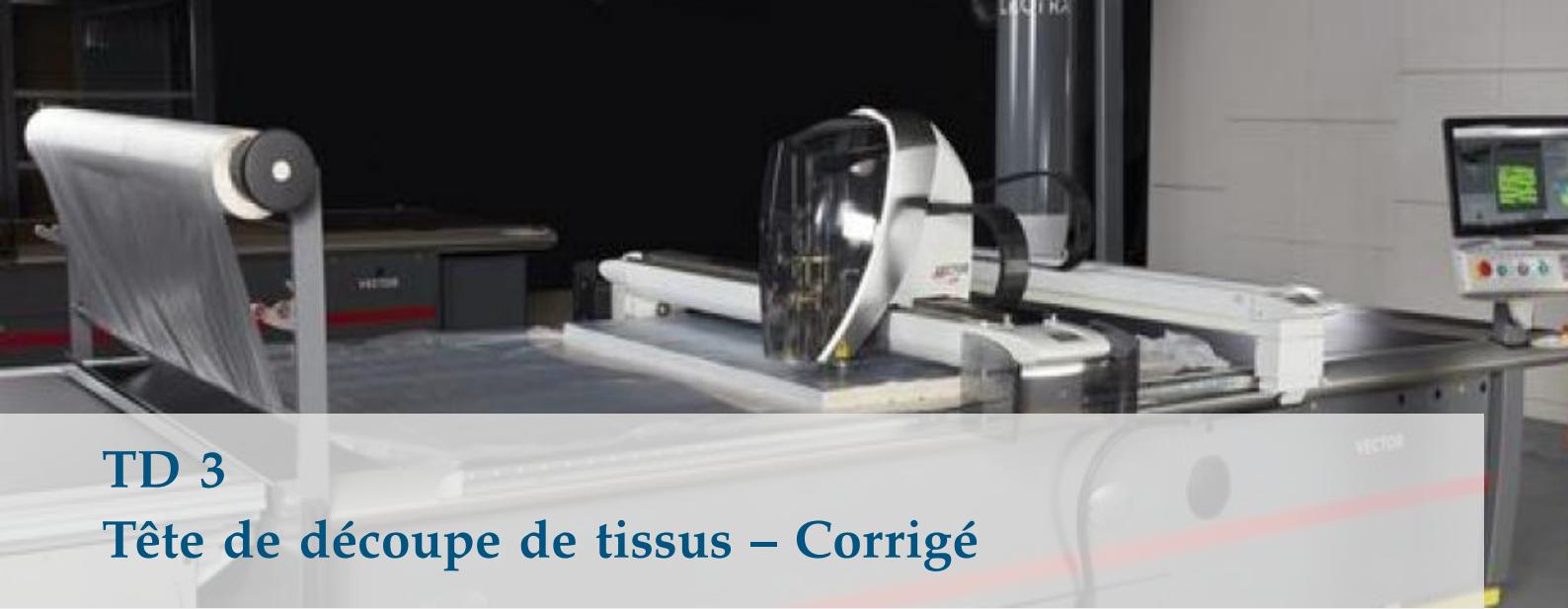
Le correcteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur de fonction de transfert  $H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

Les résultats de simulation de la réponse du moteur  $N_m(t)$ , en boucle fermée, pour une entrée échelon d'amplitude  $N_0 = 3000 \text{ tr min}^{-1}$  pour différentes valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  sont donnés sur la figure 2.13.

**Question 5** Pour les courbes 1 et 2 de la figure 2.13, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

**Question 6** Pour chaque courbe de la figure 2.13, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non.

**Question 7** Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.



## TD 3

### Tête de découpe de tissus – Corrigé

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

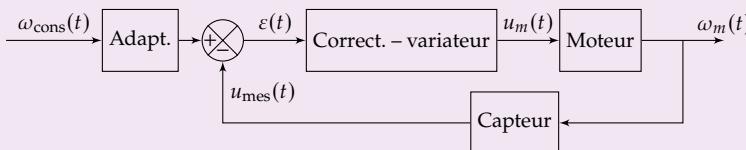
#### Modélisation du comportement du moteur de coupe

##### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 2.12).

**Question 1** Compléter le schéma-bloc fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

##### Correction



**Question 2** On note  $K_a$  le gain de l'adaptateur et  $K_c$  le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre  $K_a$  et  $K_c$  pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

##### Correction

On a  $\varepsilon(t) = K_a \omega_{\text{cons}}(t) - K_c \omega_m(t)$ .

Pour que  $\varepsilon(t)$  soit nul lorsque  $\omega_{\text{cons}}(t) = \omega_m(t)$ , il faut que  $K_a = K_c$ .

**Question 3** Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

##### Correction

On a  $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$ ,  $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) + Cr(p)$ ,  $C_m(p) = k_c I(p)$ ,  $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ .

**Question 4** En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique

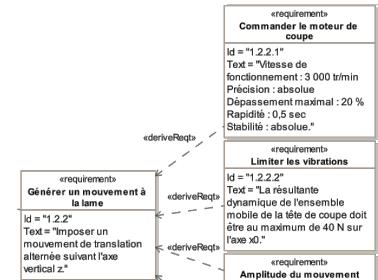
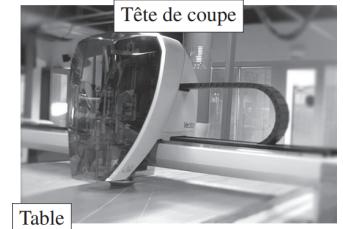


FIGURE 2.12 – Exigence 1.2.2.1

de la fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . On exprimera les constantes en fonction de  $R, L, k_e, k_c$  et  $J$ .

#### Correction

On a  $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) = \frac{C_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p) = Jp\frac{\Omega_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p)$ .

On a donc  $U_m(p) = \Omega_m(p)\left(\frac{Jp}{k_c}(R + Lp) + k_e\right)$  et  $H_m(p) = \frac{1}{\frac{JL}{k_c}p^2 + \frac{JR}{k_c}p + k_e}$   
 $\frac{1}{\frac{JL}{k_c k_e}p^2 + \frac{JR}{k_c k_e}p + 1}$ .

Par identification, on a donc  $K = \frac{1}{k_e}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{JR}{k_c k_e}$  soit  $\xi = \frac{JR}{2k_c k_e} \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}} = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$ .

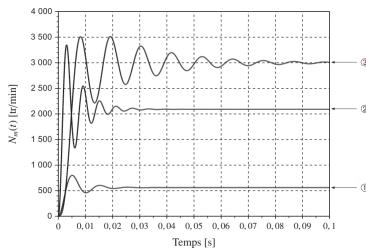


FIGURE 2.13 – Évolutions simulées de  $\omega_m(t)$ .

### Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

#### Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

**Question 5** Pour les courbes 1 et 2 de la figure 2.13, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

#### Correction

##### Méthode 1 – Coefficient d'amortissement

On note  $H_{BF}(p) = \frac{\omega_m(t)}{\omega_{cons}(t)}$ .

On a alors,  $H_{BF}(p) = K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K_c K_p K}{1 + K_p \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} K_c + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_p K_c}$ .

On a donc  $\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{2\xi}{\omega_0(1 + K_p K_c)}$  et  $\omega_{BF}^2 = \omega_0^2(1 + K_p K_c)$ .

Soit  $\xi_{BF} = \frac{\xi \omega_{BF}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi \omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi}{\omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}$ .

En conclusion, plus  $K_p$  augmente, plus le coefficient d'amortissement diminue et donc plus les pseudo oscillations deviennent grandes. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de  $K_p$ .

##### Méthode 2 – Calcul de l'écart statique

On montre que  $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_a}{1 + K_p K_c K}.$$

Lorsque  $K_p$  augmente,  $\varepsilon_S$  diminue. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de  $K_p$ .

**Question 6** Pour chaque courbe de la figure 2.13, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non.

#### Correction

On montre que  $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{p}\right) K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$ . Ainsi, si  $K_i$  non nul,  $\varepsilon_S = 0$  (courbe 3 uniquement).

**Question 7** Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

#### Correction

	Stabilité	1 <sup>er</sup> Dépassemement	Erreur statique	$T_{5\%}$
Exigences	Absolue	< 20 %	Nulle	0,5 s
Courbe 1	Stable OK	$D_1 = 45\%$ Pas OK	2450 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,015\text{ s}$ OK
Courbe 2	Stable OK	$D_1 = 59\%$ Pas OK	900 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,018\text{ s}$ OK
Courbe 3	Stable OK	$D_1 = 15\%$ OK	0 tr/min OK	$T_{5\%} = 0,048\text{ s}$ OK





## TD 4

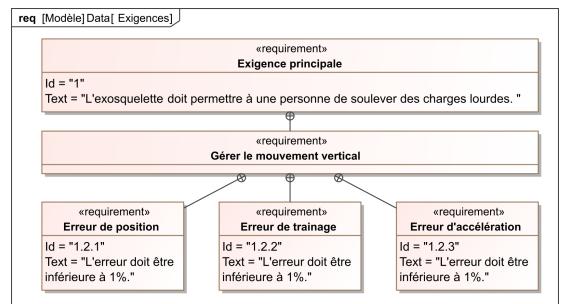
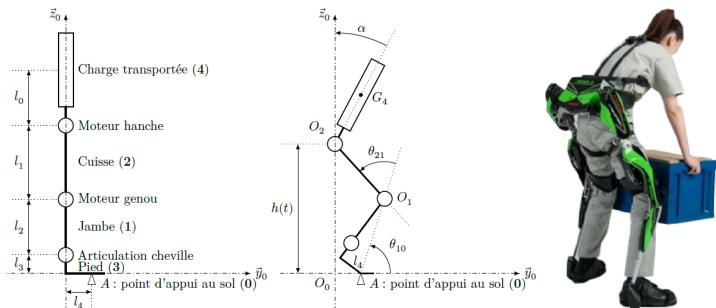
# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.

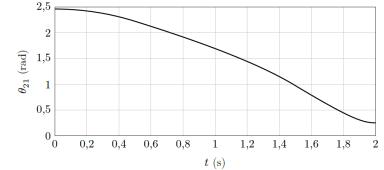


## Gestion du mouvement vertical

### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

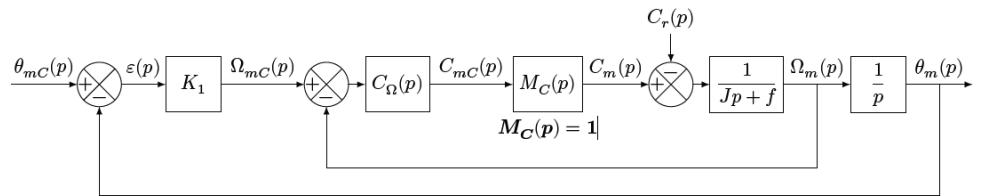
La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.

#### Notations :

- ▶  $\theta_{mC}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mC}(t)$  en rad);
- ▶  $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad);
- ▶  $C_{mC}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mC}(t)$  en Nm);
- ▶  $C_m(p)$  couple moteur (variable temporelle :  $c_m(t)$  en Nm);
- ▶  $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm);
- ▶  $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ );
- ▶  $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en rad  $s^{-1}$ );
- ▶  $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en rad  $s^{-1}$ );
- ▶  $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- ▶  $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ;
- ▶  $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- ▶  $f$  coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.



Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- ▶ l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ;
- ▶ l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

#### Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

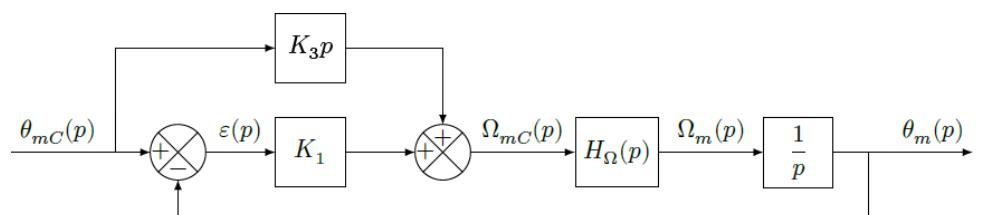
#### Méthode –

On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon).

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33$  ms.



**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

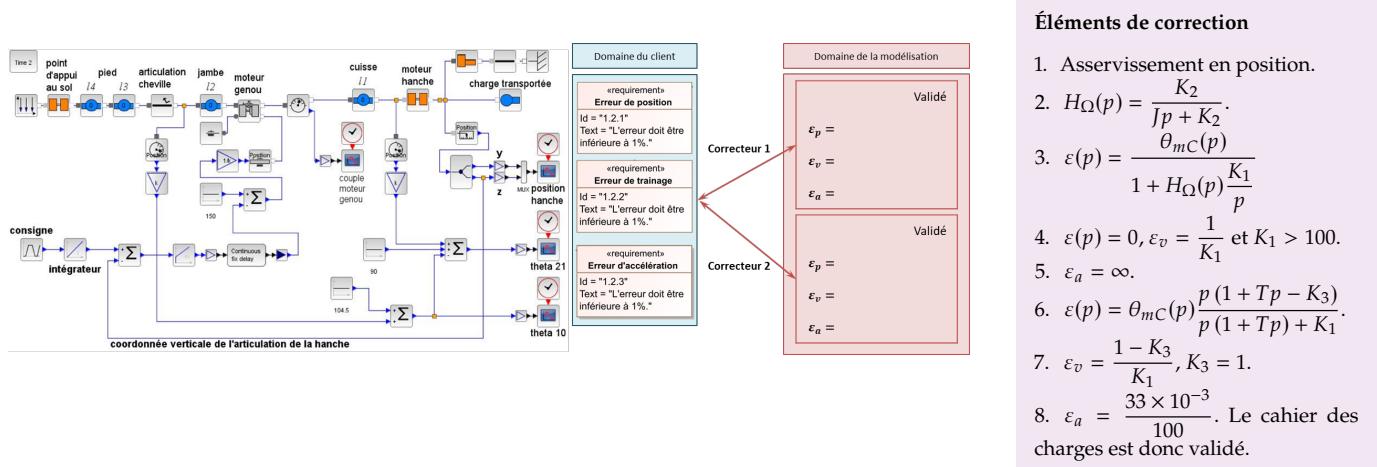
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.







## TD 4

# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

### Gestion du mouvement vertical

#### Objectif

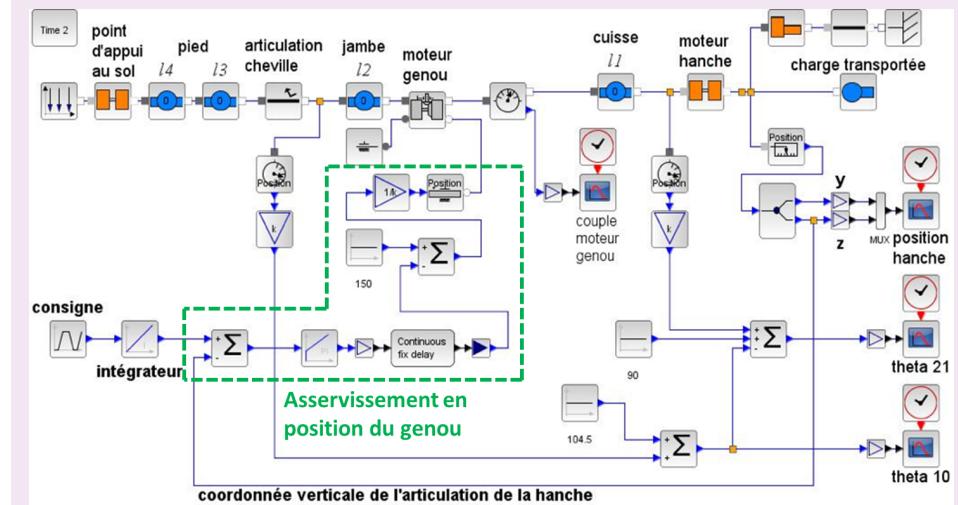
Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.



**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

#### Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Correction**

En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a :  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}$ . En conséquences :  $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp+K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Correction**

D'une part,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ . D'autre part,  $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p)$ . Par suite,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}}$ .

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Correction**

On a :

$$\blacktriangleright \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} = 0$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1);

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \quad (\text{ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et} \\ &\quad \text{de gain } K_1 \text{ en BO}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut  $\frac{1}{K_1} < 0,01$  et  $K_1 > 100$ .

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

En raisonnant de même, on a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{p}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty \quad (\text{ce qui était prévisible pour un système de classe 1}).$$

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

#### Correction

En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p);$
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p);$
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}.$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \varepsilon(p) &= \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)} \\ &= \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p). \\ \text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)}\right) &= \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp}\right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} &= \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}. \\ \text{Enfin, } \varepsilon(p) &= \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}. \end{aligned}$$

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

#### Correction

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir  $K_3 = 1$ .

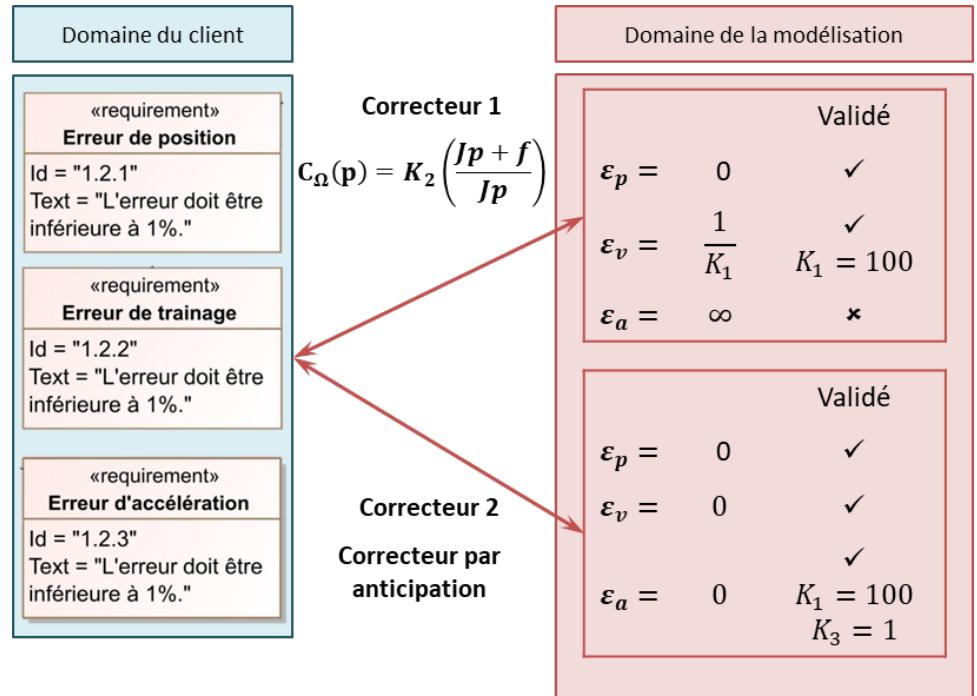
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

#### Correction

$$\begin{aligned} \text{On a : } \varepsilon_a &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p}. \text{ En} \\ \text{prenant } K_3 &= 1 \text{ et } K_1 = 100, \text{ on obtient : } \varepsilon_a = \frac{T}{p(1 + Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}. \text{ L'erreur est} \\ \text{donc de } 33 \times 10^{-5}. \text{ Le cahier des charges est donc validé.} \end{aligned}$$

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





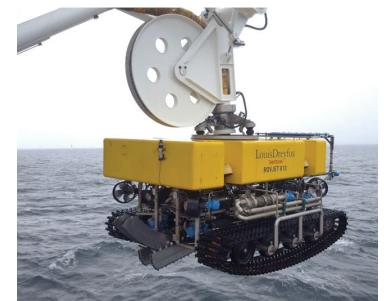
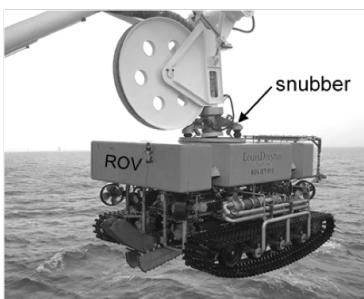
## TD 5

# Bateau support de ROV – Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

### Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.



**FIGURE 2.14** – ROV suspendu à la grue portique

### Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

**TABLE 2.1** – Extrait du cahier des charges

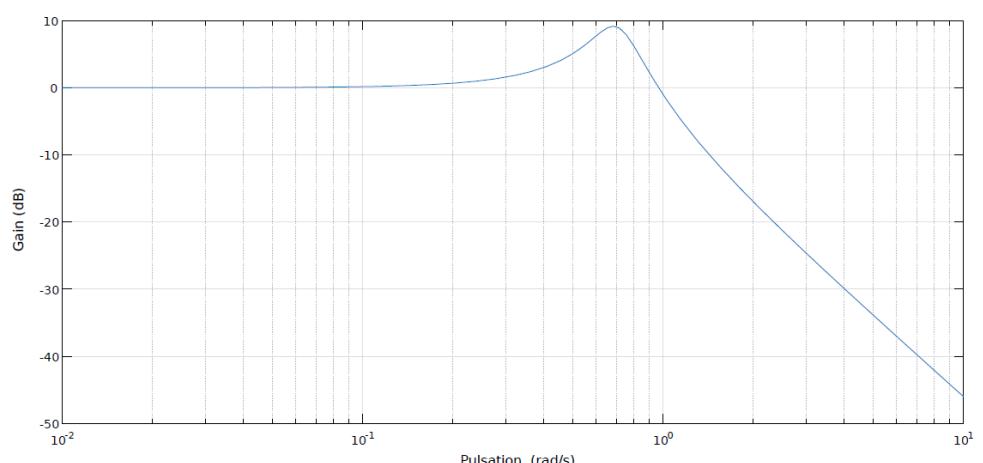
Exigence	Critère	Niveau
Id 1.1 : Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre $0,5 \text{ rad s}^{-1}$ à $1,7 \text{ rad s}^{-1}$	Amplitude verticale du ROVmaximale	< 1m pour 5 m d'amplitude de houle
Id 1.2 : Mise en tension du câble	Temps de réponse, $t_{r5\%}$	< 3 s

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble  $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$  suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble  $S$  est  $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  avec  $Y_S(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et  $Y_{\text{vague}}(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de  $B(p)$  dans la figure suivante.



**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (Figure 2.15).

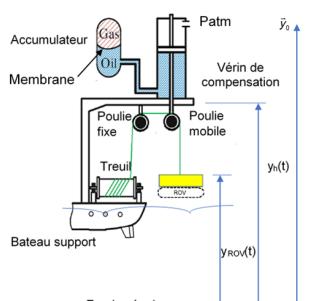


FIGURE 2.15 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression  $\Delta p_E(t)$  et  $\Delta p_G(t)$  autour du point d'équilibre peuvent être définies par  $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$  et  $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$ . Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left( \frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{\text{ROV}}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par  $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma$  se traduit par  $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{\text{ROV}}(t) + c(\dot{y}_{\text{ROV}}(t) - \dot{y}_h(t))$  (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par  $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$ .

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliquée les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

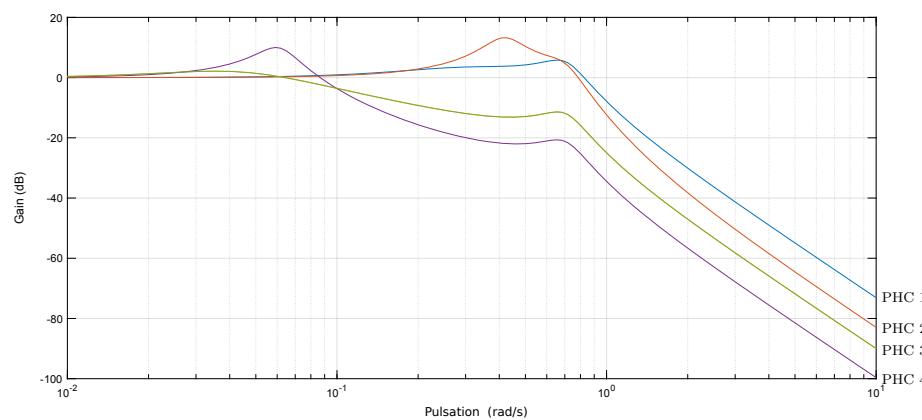
définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation  $\tau\omega_0 = 2\zeta$ .

**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle  $\omega_c$  et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.



La Figure 2.16 donne les diagrammes du gain de la fonction  $G(p)$  de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz  $V_{G0}$  correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

FIGURE 2.16 – Courbes de gain  $G(p)$  pour différents réglages du PHC

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
$V_{G0}$ ( $\text{m}^3$ )	96	1	52	2

TABLE 2.2 – Volumes  $V_{G0}$  pour différents réglages du PHC

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à  $-14$  dB.

**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

#### Éléments de correction

1.  $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{\text{vague}}(j\omega)} \right|$  et  
 $G_{\text{dB}(\omega)} < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14$  dB  $\forall \omega \in [0, 5; 1, 7]$  rad/s.
2. ...
3.  $K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}}$  et  $\tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}$ .
4.  $\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}$ ,  $\omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}$ ;  $\zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}$ .
5. .
6. .
7. PHC4.



## TD 5

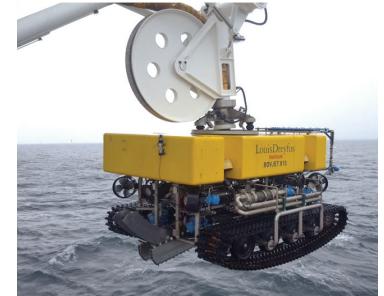
# Bateau support de ROV – Corrigé

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

## Introduction

### Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.



**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

### Correction

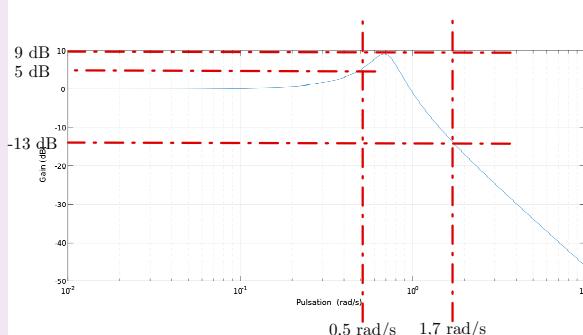
La définition du gain en décibel de la fonction de transfert  $B(j\omega)$  est  $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$ . L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$G_{dB}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1,7] \text{ rad/s.}$$

**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

### Correction

On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

### Correction

On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (2.2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left( p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR} \left( \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) = C_{qR} \left( 1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Par identification :

$$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions

initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes}$$

définies précédemment.

### Correction

La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta)p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1)p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} ; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

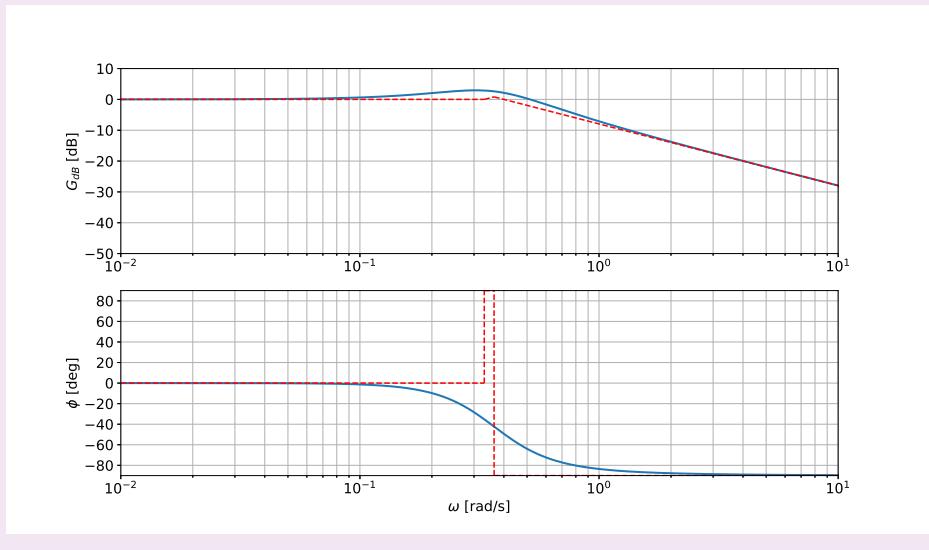
**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques.

Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

### Correction

Diagrammes de Bode de  $H(p)$ . On identifie 2 pulsations caractéristiques :  $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$  rad/s et  $\omega_n = 0,364$  rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  car  $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$ . La résonance sera toutefois faible.

$\omega$	BF $\omega \ll \omega_1$	MF $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	HF $\omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\frac{\tau\omega_n^2}{j\omega}$
$G_{\text{dB}}$	0	$20 \log \tau + 20 \log \omega$	$20 \log(\tau\omega_n^2) - 20 \log \omega$
$\phi$	0	$90^\circ$	$-90^\circ$

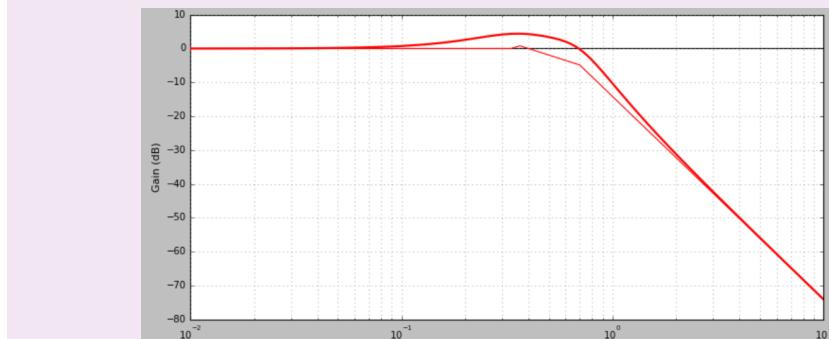


La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

#### Correction

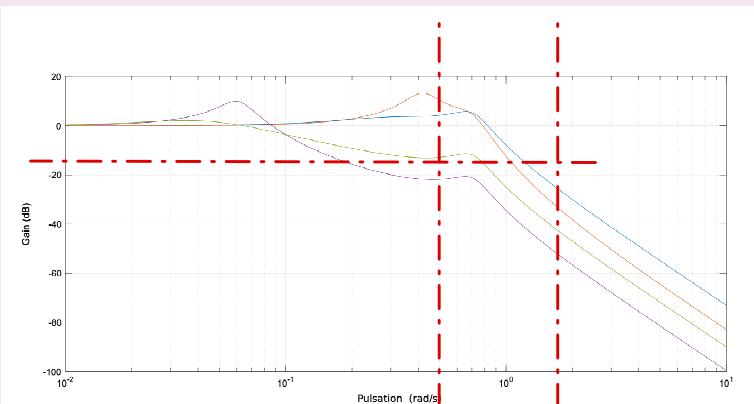
On a la relation  $G(p) = B(p)H(p)$ .



**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

#### Correction

Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.







## TD 6

# Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Banque PT – SIA – 2005.

## Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon  $\vec{z}_1$ .

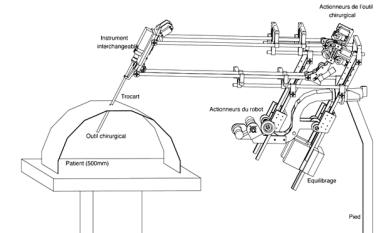
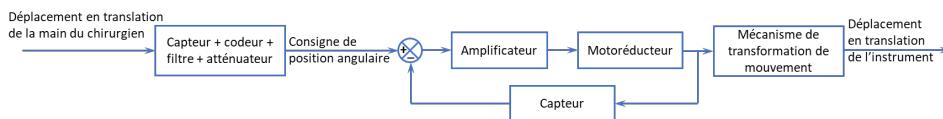


TABLE 2.3 – Liste partielle des exigences.

Req.	Exigence	Niveaux
1	Vitesse de translation nominale	$> 0,1 \text{ m s}^{-1}$
2	Temps $t_1$ pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
3	Précision – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
4	Précision – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ m s}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
5	Stabilité – Dépassemment	Aucun
6	Stabilité – Marge de phase	$45^\circ$
7	Rapidité – Bande passante à $-3 \text{ dB}$ pour la partie mécanique	4 Hz

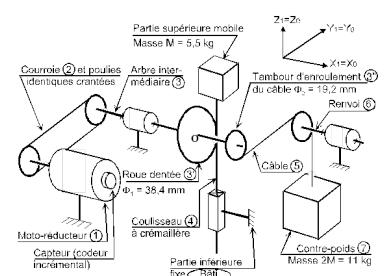
La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon  $\vec{Z}_1$ ) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.



La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure ci-contre présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006 ; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3) ;



- ▶ une roue dentée (3') de diamètre primitif  $\Phi_1 = 38,4$  mm solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;
  - ▶ cette crémaillère est en liaison glissière d'axe  $\vec{z}_1$  par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse  $M = 5,5 \text{ kg}$ , les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse  $2M = 11 \text{ kg}$  tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3") de diamètre  $\Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 19,2 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3).

Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :

- ▶ puissance nominale en sortie du réducteur :  $P_{\text{nom}} = 8,6 \text{ W}$ ;
  - ▶ couple nominal en sortie du réducteur :  $C_{\text{nom}} = 1,4 \text{ Nm}$ ;
  - ▶ couple de maintien en sortie du réducteur :  $C_{\text{maint}} = 1,5 \text{ Nm}$ ;
  - ▶ couple maxi en sortie du réducteur :  $C_{\text{max}} = 2,7 \text{ Nm}$ ;
  - ▶ vitesse nominale en sortie du réducteur :  $N_{\text{nom}} = 60 \text{ tr min}^{-1}$ ;
  - ▶ vitesse maxi en sortie du réducteur :  $N_{\text{max}} = 100 \text{ tr min}^{-1}$ ;
  - ▶ moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur :  $J_1 = 3,70 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
  - ▶ capteur de position : codeur 360 incrément par tour monté sur le rotor du moteur;
  - ▶ rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

Avec :

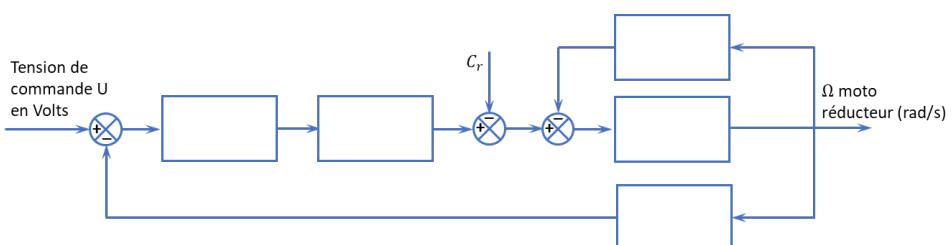
- ▶  $u(t)$  tension appliquée aux bornes de l'induit
  - ▶  $i(t)$  intensité du courant traversant l'induit
  - ▶  $e(t)$  force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;
  - ▶  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  vitesse de rotation à la sortie du réducteur;
  - ▶  $C_{\text{rédu}}(t)$  couple moteur ramené à la sortie du réducteur;
  - ▶  $R = 10 \Omega$  : résistance de l'induit;
  - ▶  $L = 2,2 \text{ mH}$  inductance de l'induit;
  - ▶  $k_c = 2,1 \text{ N m A}^{-1}$  constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
  - ▶  $k_e = 2,1 \text{ V s rad}^{-1}$  constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
  - ▶  $C_r = 0,2 \text{ N m}$  couple résistant induit par les frottements secs, ramené à la sortie du réducteur
  - ▶  $f_v = 0,04 \text{ N m s rad}^{-1}$  coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur
  - ▶  $J_{\text{équ}} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.

## Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

Le constructeur donne les caractéristiques électro-mécaniques exprimées à la sortie du réducteur. On rappelle les équations temporelles :  $u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_{\text{rédu}}(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t) = k_c i(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t) - C_r - f_v \omega_{\text{rédu}}(t) = J_{\text{équ}} \frac{d\omega_{\text{rédu}}(t)}{dt}$ .

Les transformées de Laplace des fonctions  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\omega_{\text{réd}}(t)$ ,  $C_{\text{réd}}(t)$  sont respectivement  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $E(p)$ ,  $\Omega_{\text{réd}}(p)$  et  $C_{\text{réd}}(p)$ . On considère toutes les conditions initiales nulles.

**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{réel}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

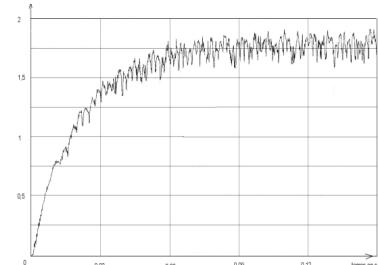
Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de  $M(p)$  suivante :  $M_1(p) = \frac{0,436}{1 + 14,5 \cdot 10^{-3}p + 3,1 \cdot 10^{-6}p^2}$ .

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension  $u(t) = 24$  V. Avec une génératrice tachymétrique dont le gain est de  $0,166$  V s rad $^{-1}$ , on a tracé la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ .

Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.



#### Remarque

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

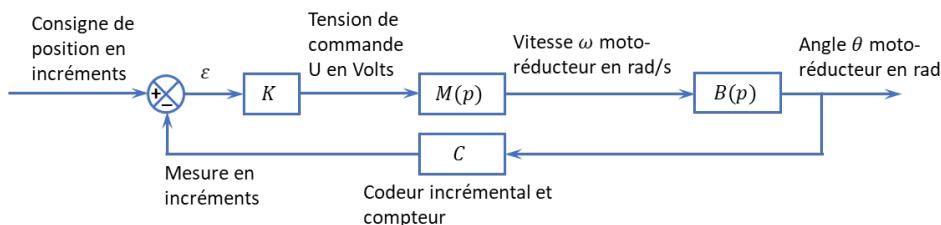
Dans la suite du problème, on néglige l'inductance  $L$  du moteur.

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

#### Respect du critère de marge de phase

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incrémentés est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



Le convertisseur-amplificateur  $K$  de gain  $k$  variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental  $C$  placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incrémentés par tour. Il est associé à un compteur – décompteur qui élabore la mesure de position en incrémentés. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.

**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

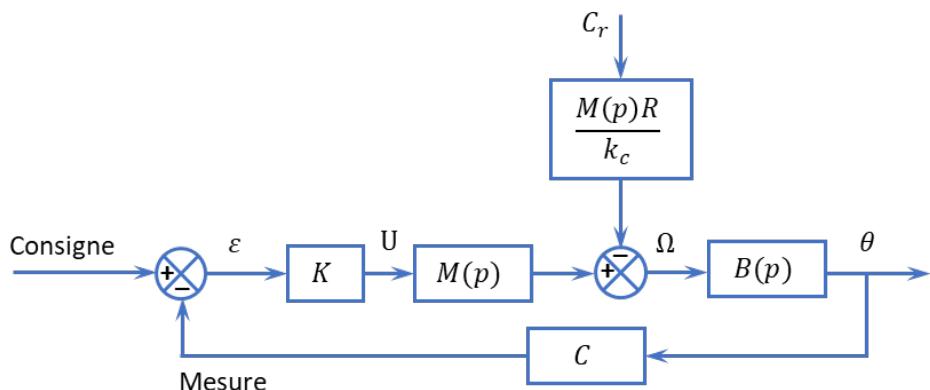
**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.

#### Remarque

Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à  $-180 + 45 = -135^\circ$ .

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{conso}}$  en incrément lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

Étant donné que la perturbation  $C_r$  intervient entre deux blocs de  $M(p)$ , on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.

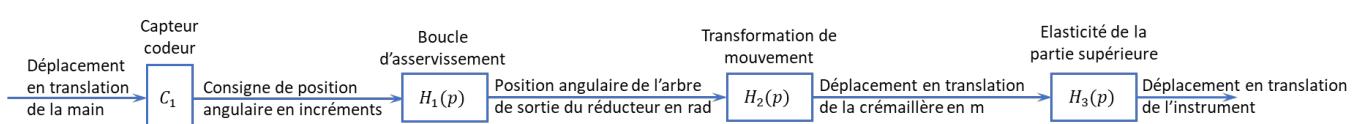


**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incréments entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

### Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

#### Modélisation par schéma-blocs



### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est :

$H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$ . On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrène avec la crémaillère a un diamètre  $\Phi_1 = 38,4$  mm.

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incrément par mètre du bloc  $C_1$ .

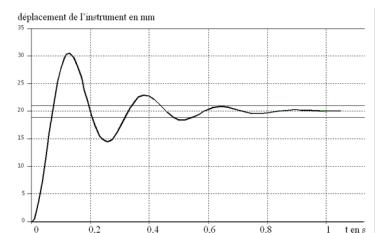
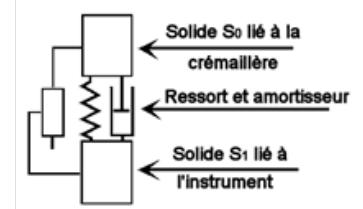
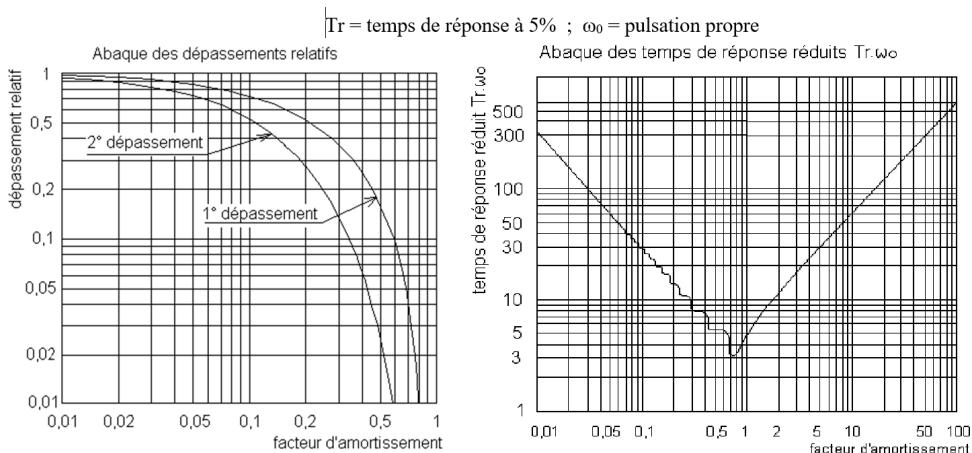
Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides :  $S_0$  représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés ; et  $S_1$  représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur  $k_0$  et un amortisseur de coefficient  $f_0$ , montés en parallèle comme le montre le schéma.

Pour identifier la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$  de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement  $d_{\text{crém}}(t) = 20 \times 10^{-3} \text{ m}$  à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement  $d_{\text{instrum}}(t)$  de l'instrument.



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassements relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3$  dB est-il satisfait ?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de  $H_3(p)$ , de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit  $m_1$  la masse du solide  $S_1$ . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté  $\vec{z}$ . L'origine  $O$  du mouvement de  $S_1$  correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit  $a_0$  l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota :  $a_0$  est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :

$$m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0.$$

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0$ ,  $f_0$ ,  $m_1$ .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6$  kg.

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3$  dB de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3\text{dB}} > \omega_{03}$ ).

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur  $c_1$  du bloc  $C_1$ . La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}. \quad \text{Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de } 100 \text{ mm s}^{-1}. \quad \text{On a tracé sur la figure 2.17 les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.}$$

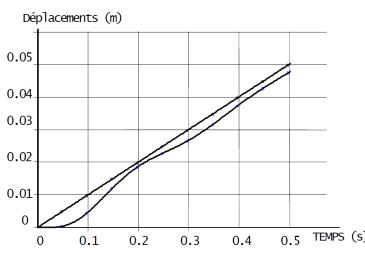


FIGURE 2.17 – Courbes de déplacement de la main

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

On donne figure 2.18, la courbe d'amplitude (gain) de  $H(p)$  pour  $p = j\omega$  dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal traité par le capteur-codeur  $C_1$  de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps :  $T_1 = 0,04$  s ;  $T_2 = 0,1$  s ;  $T_3 = 0,5$  s.

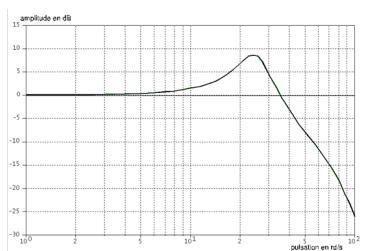


FIGURE 2.18 – Courbe de gain

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténusés de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

#### Éléments de correction

$$1. U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p); \\ E(p) = k_e\Omega_{\text{rédu}}(p); C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p); C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p).$$

$$2. M(p) = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} \cdot \frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1$$

3. .

4. .

$$5. M_2(p) = \frac{k_c}{\frac{R J_{\text{équ}}}{k_e k_c + R f_v} p + 1}$$

$$6. G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}, \text{ on a } \tau = 0,02 \text{ s.}$$

$$7. B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad,} \\ H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{k G_S}{1 + T p}.$$

8. .

9. L'écart statique est nul.

$$10. \varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}$$

$$11. H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$$

12. .

13. .

14. .

$$15. H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

16. .

$$17. \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

$$18. \Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

19. ► Écart dynamique maximal : 5 mm.

► Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.

► Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

20. .

$$21. T_2 = 0,1 \text{ s.}$$





## TD 6

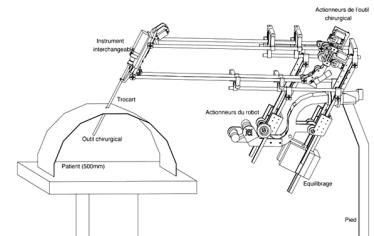
# Robot pour la chirurgie endoscopique – Corrigé

Banque PT – SIA – 2005.

## Présentation

### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

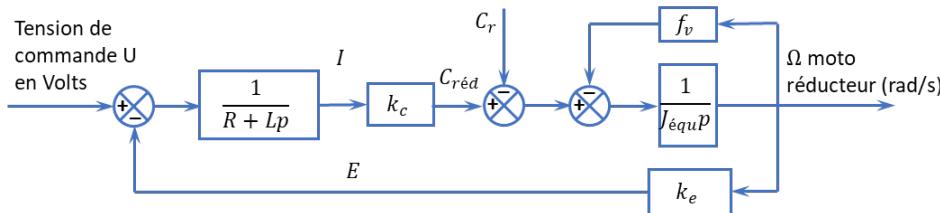
**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



#### Correction

On a :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p);$
- $E(p) = k_e \Omega_{rééd}(p);$
- $C_{rééd}(p) = k_c I(p);$
- $C_{rééd}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{rééd}(p) = J_{équ} p \Omega_{rééd}(p).$



**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{rééd}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

#### Correction

En raisonnant à partir des équations, on a :  $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{rééd}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{(J_{équ} p + f_v) \Omega_{rééd}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p)$   
 $\Rightarrow U(p) = \left( \frac{(J_{équ} p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{rééd}(p)$

Au final,  $M(p) = \frac{k_c}{(J_{équ} p + f_v) (R + Lp) + k_e k_c}$ .

En mettant l'expression sous forme canonique, on a :  $M(p) = \frac{k_c}{J_{\text{équ}}Lp^2 + (RJ_{\text{équ}} + Lf_v)p + k_e k_c + Rf_v}$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{J_{\text{équ}}L}{k_e k_c + Rf_v}p^2 + \frac{RJ_{\text{équ}} + Lf_v}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}.$$

En réalisant l'application numérique, on a :  $M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6}p^2 + 14,6 \times 10^{-3}p + 1}$ .

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

#### Correction

En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant  $L$ , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et  $M(p)$  se modélise par une fonction d'ordre 1.

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.

#### Correction

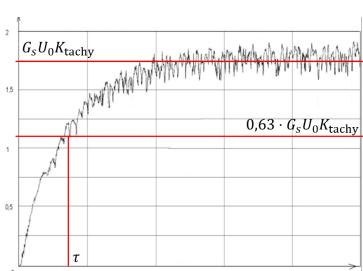
En utilisant la formulation de  $M_1(p)$  donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a :  $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$ . Au final,  $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -4607$  et  $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -70$ . Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme  $3,1 \times 10^{-6}(p + 4607)(p + 70)$ .  
Le pôle  $p_2$  est donc dominant par rapport à  $p_1$ .

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

#### Correction

En utilisant l'expression établie initialement en négligeant l'inductance, on a  $M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{RJ_{\text{équ}}}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}$ . En réalisant l'application numérique,  $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015p}$  ( $G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$  et  $T = 0,015 \text{ s}$ ).

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).



#### Correction

La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que  $24 \cdot G_S \cdot K_{\text{tachy}} = 1,75 \text{ V}$

soit  $G_S = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ . En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a  $\tau = 0,02 \text{ s}$ . On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse «  $L$  négligeable ».

## Respect du critère de marge de phase

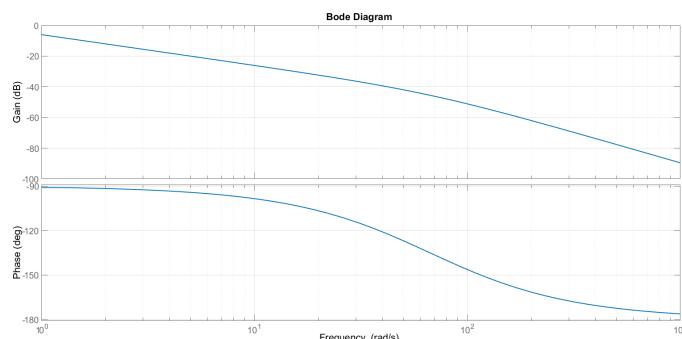
**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

### Correction

$B$  assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc  $B(p) = \frac{1}{50p}$ . Par ailleurs  $C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad}$ .

$$\text{On a donc } H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$$

**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.



### Correction

Au vu du tracé, la phase est supérieure à  $-135^\circ$  lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$  en incrémentaux lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

### Correction

#### Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

#### Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart

On a  $\epsilon(p) = \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$ .  $\text{Cons}(p) = \frac{1}{p}$ . On a alors  $\varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0$ .

**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

#### Correction

$$\begin{aligned}
 & \text{On a } \varepsilon(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left( \varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \\
 \Leftrightarrow & \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) = \text{Cons}(p) + B(p)CC_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \\
 & \text{Cons}(p) \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 & + C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 & + C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{\frac{G_S}{1 + Tp} R \frac{1}{50p} C}{k_c \left( 1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1 + Tp} \right)} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1 + Tp) 50p + CKG_S)} \\
 & = C_r \frac{G_S RC}{k_c CKG_S} = C_r \frac{R}{k_c K}.
 \end{aligned}$$

On a donc  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = C_r \frac{R}{k_c K}$  soient  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95$  incr.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

#### Correction

Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur  $k = 1$ .

## Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

### Modélisation par schéma-blocs

#### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

#### Correction

En notant  $x$  le déplacement en translation, on a  $x = \frac{38,4}{2}\Theta$ . On a donc  $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$ .

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incréments par mètre du bloc  $C_1$ .

#### Correction

Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que  $P = 1$ .

On a  $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$ .

On a donc  $c_1 = 148\,810 \text{ incr m}^{-1}$ .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

#### Correction

On souhaite maintenant que  $P_1 = \frac{1}{10}$  et  $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

#### Correction

Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de  $K = 1$ .

Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve  $\xi = 0,2$ .

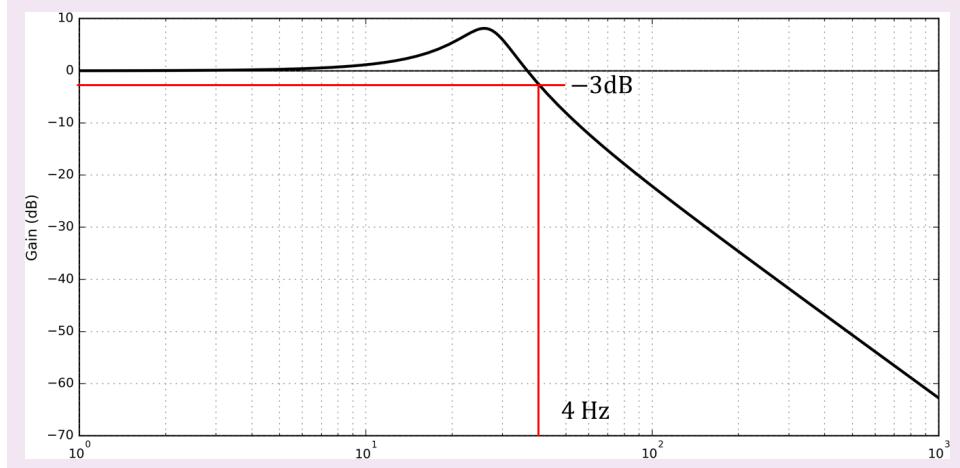
Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a  $\omega_0 Tr = 15$ . On a donc  $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait?

#### Correction

On trace le diagramme de Bode. La bande passante à -3 dB est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.



**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0, f_0, m_1$ .

#### Correction

$$\text{On a } m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0.$$

$$\text{On a donc } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6 \text{ kg}$ .

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3 \text{ dB}$  de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$ ).

#### Correction

$$\text{On a } \omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03} \text{ or } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2; \text{ donc nécessairement, } \omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}}$$

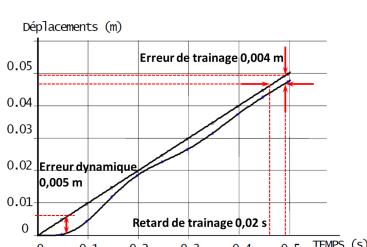
$$\Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1 \Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

#### Correction

- ▶ Écart dynamique maximal : 5 mm.
- ▶ Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.
- ▶ Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.



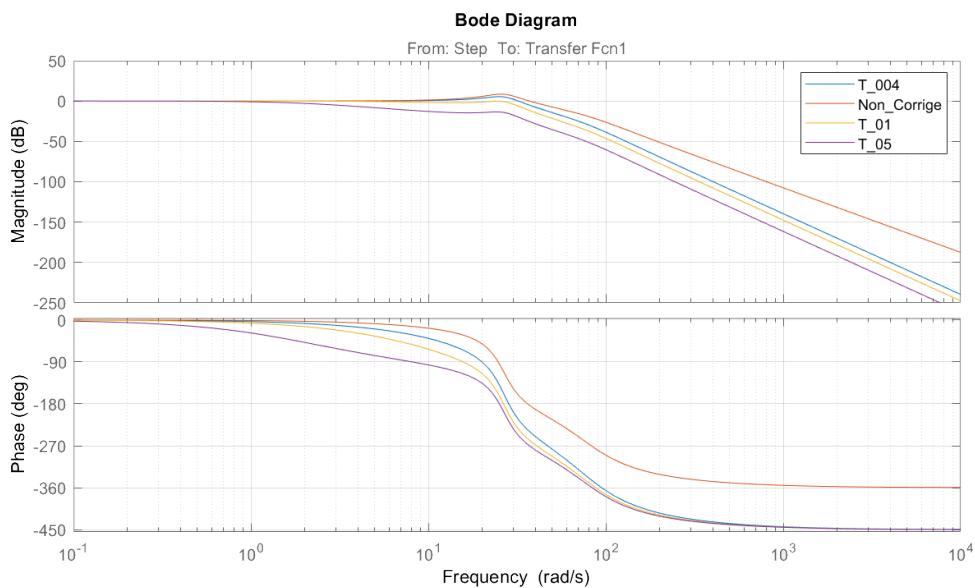
**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Correction

Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de  $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$ . À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport  $S/E$  est donc de  $10^{8/20} = 2,5$  ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténueres/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

### Amélioration des performances dynamiques

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténueres de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?



### Correction

Le filtre  $T_2 = 0,1 \text{ s}$  permet d'atténuer le gain à une pulsation de  $25 \text{ rad s}^{-1}$  sans trop atténuer le gain à des pulsations inférieures à  $6,3 \text{ rad s}^{-1}$ .





## TD 7

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2006



## Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé enrayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

### Objectif

L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure 2.34 où  $v_c$  est la consigne de glissement.

On note :

- ▶  $H_1(p)$  la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve);
- ▶  $H_2(p)$  la fonction de transfert de la roue au freinage;
- ▶  $C(p)$  le correcteur de la boucle de régulation;
- ▶  $M(p)$  la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure;
- ▶  $v_m$  : glissement estimé.

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

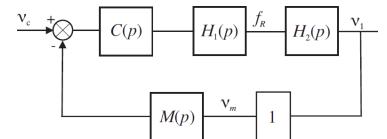
Pour une vitesse de train  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

On a  $M = 8200 \text{ kg}$ ,  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ ,  $I/r^2 = 400 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :

$$H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}.$$



**FIGURE 2.19** – Structure de la chaîne de régulation de glissement

**Marges de stabilité, performances en boucle ouverte**

Pulsation de coupure à 0 dB

$$\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$$

Marge de phase

$$\Delta\varphi \geq 60^\circ \text{ au point de fonctionnement nominal } B$$

Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique  $\mu = f(v)$ **Réponse à un échelon de consigne de glissement**

Écart en régime permanent

Nul

Temps du 1<sup>er</sup> maximum

$$t_m \leq 3,5 \text{ s}$$

Dépassee

$$D \simeq 18 \%$$

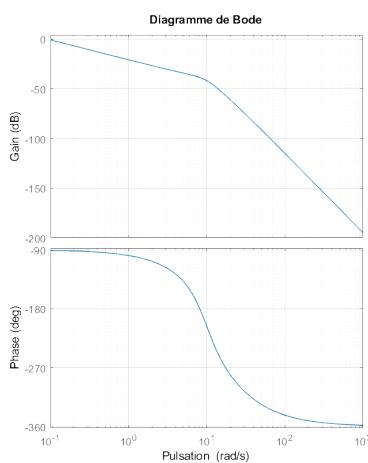
**Réponse à une variation en échelon de l'adhérence**

Écart en régime permanent

Nul

Temps de réponse

$$t_r \leq 9 \text{ s}$$

**FIGURE 2.20** – Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ 

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

**Synthèse du régulateur de la boucle de régulation**

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode – Marge de phase**

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode –**

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

**Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement**

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de

glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$ .

On supposera sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 5** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Question 6** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 7** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 8** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

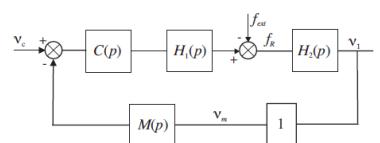
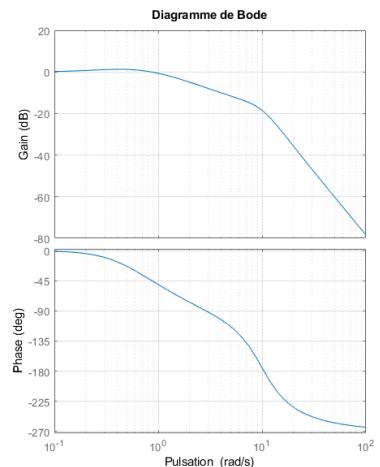
**Question 9** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

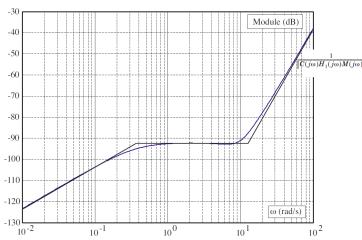
### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 10** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .





**Question 11** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $||H_2(j\omega)||$ .

**Question 12** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $||F_2(j\omega)||$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Question 13** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + Tp}$ .

**Question 14** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 15** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

### Retour sur le cahier des charges

**Question 16** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

#### Éléments de correction

1. ...
2.  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .
3.  $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .
4. \*\*\*
5. \*\*\*
6. \*\*\*
7. \*\*\*
8. \*\*\*
9. \*\*\*
10. \*\*\*



## TD 7

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2006 –  
Ressources UPSTI



## Mise en situation

### Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

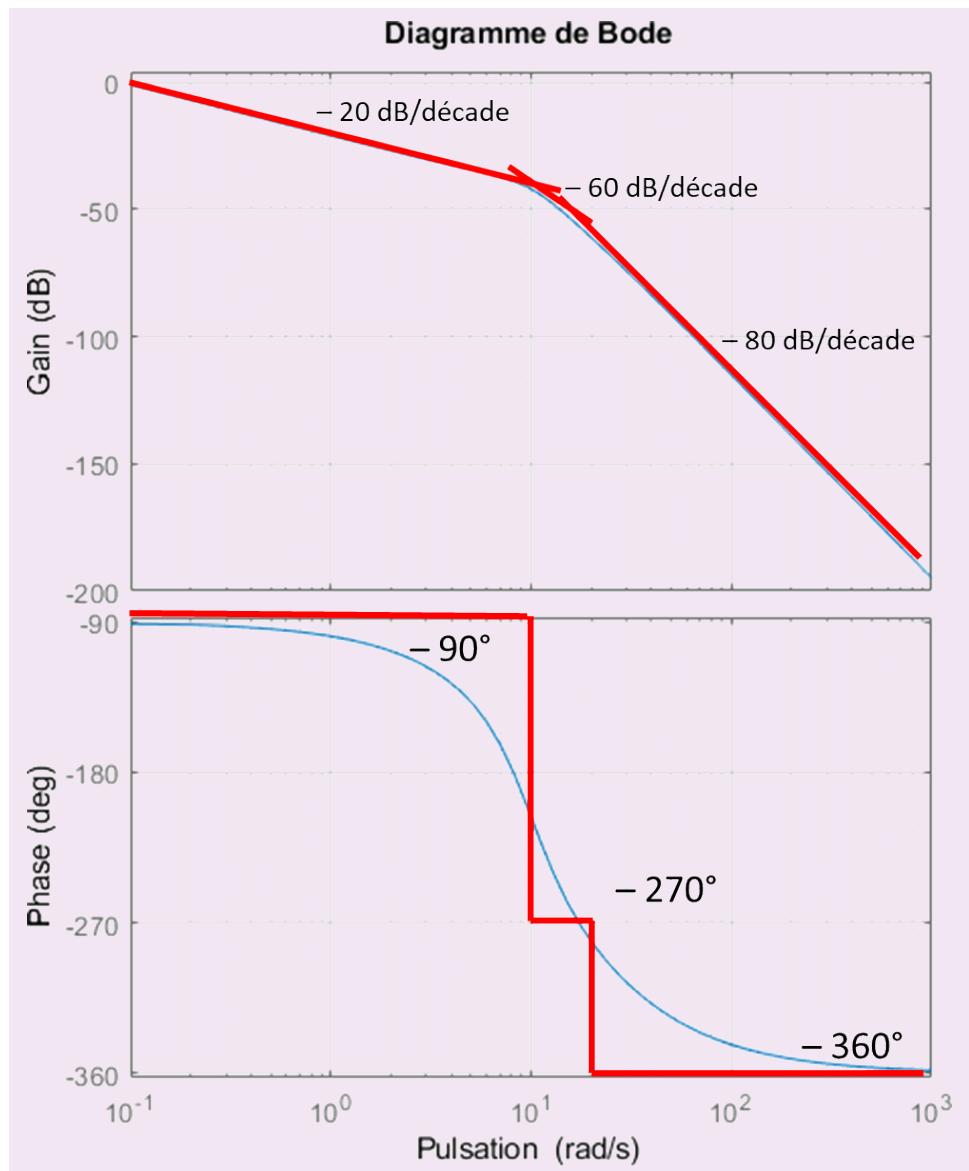
#### Correction

On a pour  $H_1(p)$ ,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$  et  $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$  soit  $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$ . Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$ . Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour  $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $\text{FTBO}(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$ .

On a donc  $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$ .

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	$-40 \text{ dB/decade}$	$-40 \text{ dB/decade}$	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ \text{FTBO}(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-60 \text{ dB/decade}$	$-80 \text{ dB/decade}$	
$\text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega))$	$-90^\circ$	$-270^\circ$	$-360^\circ$	



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :  

$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

#### Méthode – Marge de phase

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg [FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Correction**

La pulsation de coupure souhaitée est  $\omega_c \approx 1 \text{ rad s}^{-1}$ . On cherche donc  $K_r$  et  $T_i$  tels que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$ .

$$\begin{aligned}\arg[\text{FTBO}(j\omega)] &= \arg \left[ \underbrace{\frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{K_r}_{\rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \\ \arg \left[ \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \right] - 98,5\end{aligned}$$

**Remarque**

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque  $\omega = \omega_c$ . L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$

$$\text{Soit } \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5 + 180 \geq 60 \text{ et } \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ.$$

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Correction**

On en déduit que pour  $\omega = \omega_c = 1$ ,  $\arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) - 90 \geq -21,5^\circ$   
 $\Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) \geq 68,5^\circ$  et donc  $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .

**Attention :** à ce stade, la marge de phase serait de  $60^\circ$  SI la pulsation de coupure était de  $1 \text{ rad s}^{-1}$  ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode –**

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

**Correction**

En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ  $-20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$ . La fonction de transfert du correcteur est  $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) = K_r \frac{T_ip + 1}{T_ip}$ . Le gain dB du correcteur doit donc être de  $20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1 : 20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i\omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1$   
 $\Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$ .  
 On a donc  $K_r = 9,3$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Analytiquement (à vérifier...)} 20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1. \\
 & ||\text{FTBO}(j\omega)|| = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
 & = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \frac{1 + T_ip}{T_ip} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
 & = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \frac{1}{1 + 0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot \\
 & 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\
 & = \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2)^2 + 0,1^2}}
 \end{aligned}$$

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

#### Méthode –

Soit  $\omega_\varphi$  la pulsation telle que  $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$ . La marge de gain s'exprime alors par  $MG = -20 \log ||H(j\omega_\varphi)||$ .

#### Correction

**Approche analytique** On résout  $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

#### Approche graphique

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

#### Correction

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

#### Correction

- $K_f = 1$  : lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0 = 0,5$  : valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$ ;
- $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$ ;
- $\xi < 0,7$  (résonance).

**Question 8** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

### Correction

La pulsation propre  $\omega_0$  est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{(1+3,3p)}{(1+1,66p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 9** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $\nu_c(t) = \nu_{c0}u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

### Correction

#### Calcul du temps du 1<sup>er</sup> maximum

Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est donné par  $f(t_m) = 0$ , soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à  $t_m = 3,3$  s.

#### Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsorielle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour  $t = t_m$  :

$$\nu(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (ay(t) + by'(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec  $y(t) = te^{-t/\tau_2}$  dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2} dt = \left[ -\tau_2 te^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$\nu(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[ -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour  $t = t_m$  on obtient  $\nu(t_m) = 1.13$ , soit un dépassement de 13%.

**Question 10** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la

consigne de glissement relatif.

#### Correction

- Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

**Question 11** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$$

#### Correction

On a directement  $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}.$

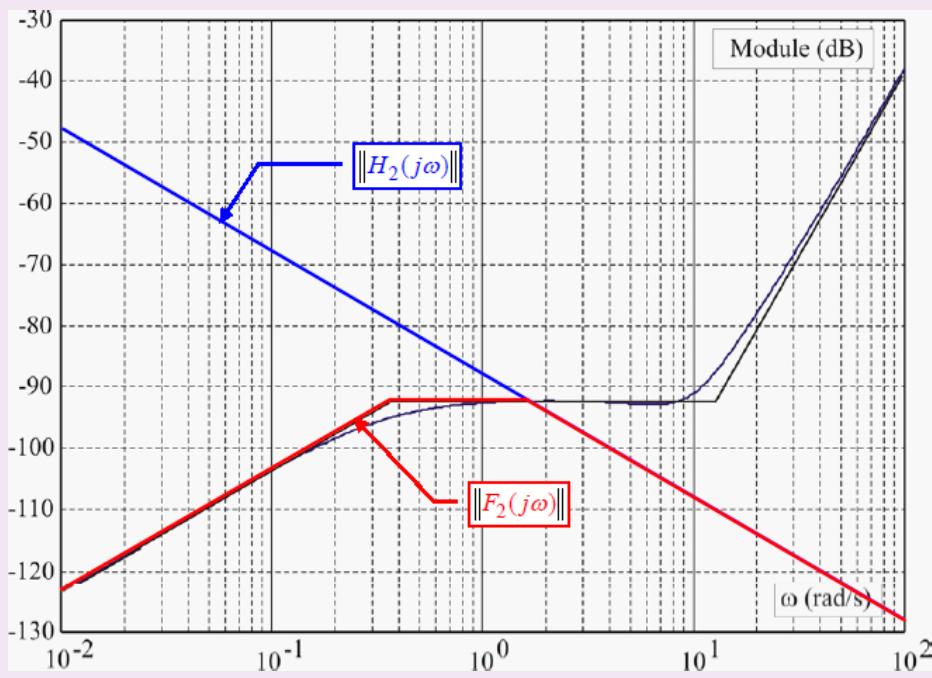
On peut alors déterminer le module et on a  $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|.$

Dans ces conditions :

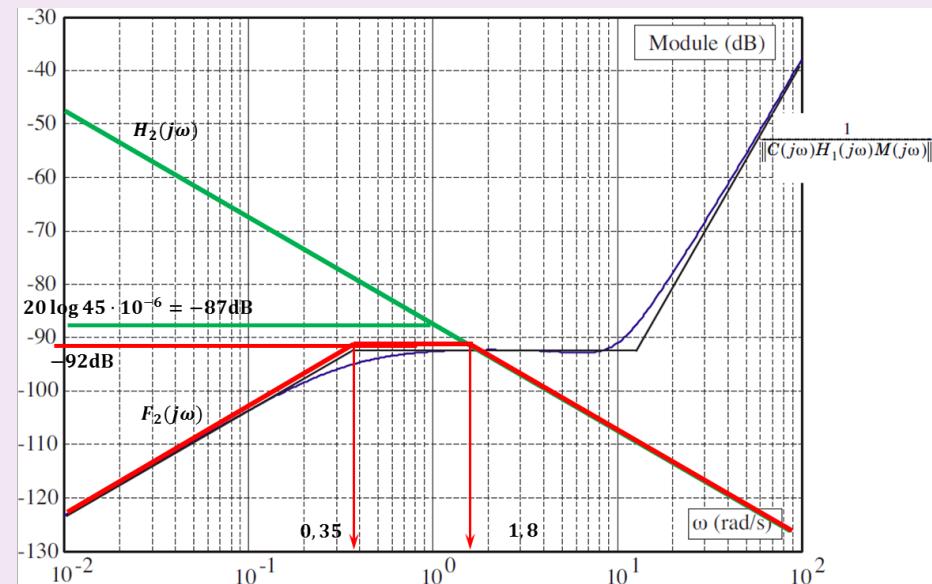
- si  $\left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \gg 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|;$
- si  $\left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \ll 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \|H_2(j\omega)\|.$

On peut en conclure que  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$

**Question 12** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}.$  Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|.$

**Correction**

**Question 13** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $|F_2(j\omega)|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Correction**

En analysant les brisures de  $F_2$ , on peut proposer la fonction de transfert suivante :  $F_2 = \frac{K_p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$  avec  $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \approx 2,9$  s,  $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \approx 0,6$  s. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, on a donc  $20 \log K\omega = 20 \log 0,01K = -123$  soit  $K = 100 \times 10^{-123/20} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ .

$$\text{Au final, } F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1 + 2,9p)(1 + 0,6p)}.$$

**Question 14** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

#### Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle  $p_2$  étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de  $p_1$ , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

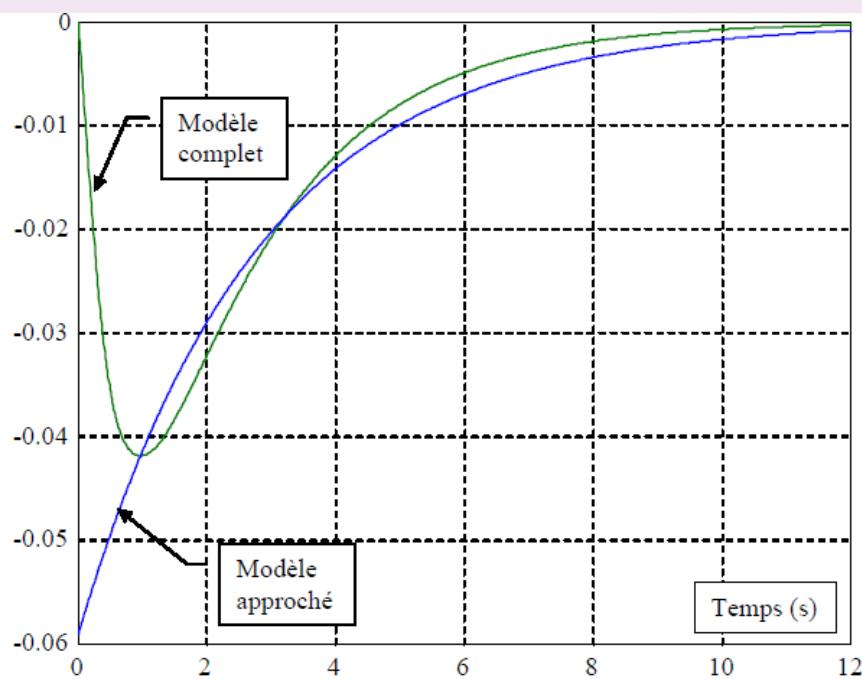
$$F_2(p) = -\frac{p}{12100(1 + 2,8p)}$$

**Question 15** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

#### Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1<sup>er</sup> ordre en partant d'une condition non nulle ( $v_1 = 0,05$ ) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de  $t_r = 3T = 8,4 \text{ s}$ .

**Question 16** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

**Correction**

Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

**Retour sur le cahier des charges**

**Question 17** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

**Correction**

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.





# Colle 1

## Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Mines Ponts 2016.

B2-04

### Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC<sup>2</sup>E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure 2.21 décrit les exigences auxquelles est soumis l'asservissement du MC<sup>2</sup>E.

### Validation des performances de l'asservissement d'effort

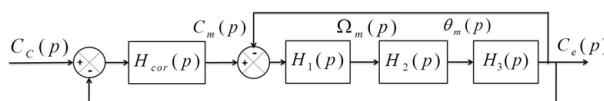
#### Modèle de connaissance de l'asservissement

##### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ .

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

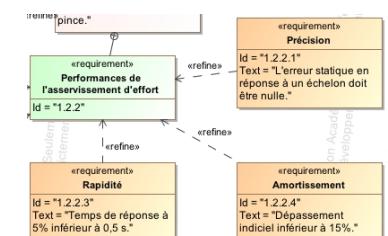
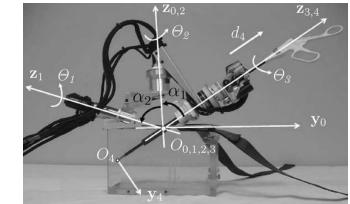


FIGURE 2.21 – Performances de l'asservissement.

On note :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

FIGURE 2.22 – Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;
- $C_c(p)$ , couple de consigne;
- $C_m(p)$ , couple moteur;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

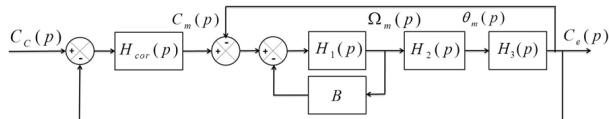


FIGURE 2.23 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 2.4.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

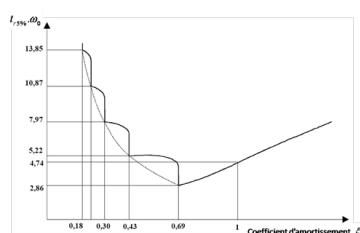
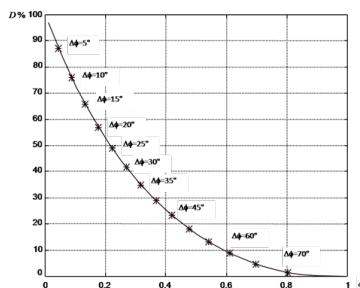
$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}.$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne  $K_i = 1$ .

**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.



## Diagrammes de Bode

On prend  $K_i = 0,4$ ,  $T_i = 0,01$  s et  $\tau = 0,5$  s.

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i (1 + T_i p)}{T_i p (1 + \tau p)^2}$ .



# Colle 1

## Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Corrigé

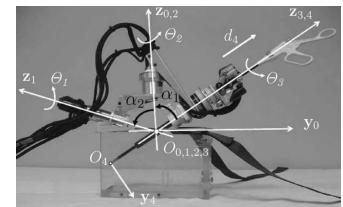
Mines Ponts 2016.

B2-04

### Présentation générale

### Validation des performances de l'asservissement d'effort

### Modèle de connaissance de l'asservissement



### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

### Correction

$$H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p} \text{ et } H_3(p) = K_C\theta.$$

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

### Correction

$$\text{Calculons } F(p) = \frac{C_e(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_C\theta}{Jp} \frac{1}{p}}{1 + K_C\theta \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}} = \frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } H_{BF}(p) &= \frac{F(p)H_{cor}(p)}{1 + F(p)H_{cor}(p)} \text{ soit } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta}}{1 + \frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta}} = \frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta + K_C\theta} \\ &= \frac{1/2}{\frac{J}{2K_C\theta}p^2 + 1}. \end{aligned}$$

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

### Correction

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude  $C_0/2$ . Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

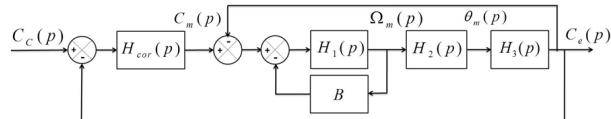


FIGURE 2.25 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

### Correction

$$\text{D'une part, } F_1(p) = \frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{B}{Jp}} = \frac{1}{Jp + B}. \text{ Par suite } FTBO(p) = \frac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + F_1(p)H_2(p)H_3(p)} \\ = \frac{\frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}}{1 + \frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p(Jp + B) + K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}.$$

$$\text{Par ailleurs, } H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + 2\tau p + \tau^2 p^2}.$$

$$\text{On a donc } \frac{B}{K_{C\theta}} = 2\tau \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \tau. \text{ D'autre part, } \tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}.$$

$$\text{Au final, } B = 2\sqrt{J K_{C\theta}} \text{ et } \tau = \frac{B}{2K_{C\theta}} = \frac{2\sqrt{J K_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}.$$

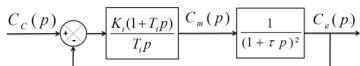


FIGURE 2.26 – Régulation avec correcteur PI.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 2.4.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

### Correction

- ▶ Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- ▶ Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

$$\text{On a } \varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_ip(1 + \tau p^2)}} = C_0 \frac{1}{p + \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_i(1 + \tau p^2)}}.$$

$$\text{Par suite, } \lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = 0.$$

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{K_{\text{BF}}}{1 + \frac{2\xi_{\text{BF}}}{\omega_{0\text{BF}}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\text{BF}}^2}}.$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

### Correction

Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.

En choisissant  $T_i = \tau$  (compensation du pôle double du système), on a alors  $\text{FTBO}(p) = \frac{K_i(1 + \tau p)}{\tau p(1 + \tau p)^2} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}$ .

On a alors  $\text{FTBF}(p) = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p) + K_i}$ .

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne  $K_i = 1$ .

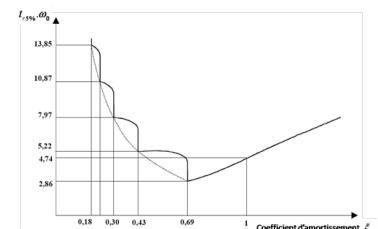
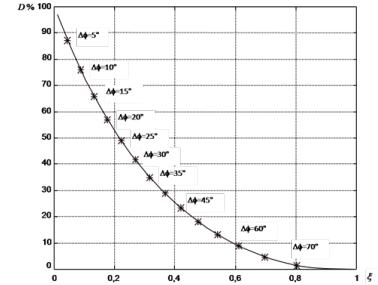
**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{e0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

### Correction

## Diagrammes de Bode

On prend  $K_i = 0,4$ ,  $T_i = 0,01$  s et  $\tau = 0,5$  s.

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_ip(1 + \tau p)^2}$ .



**Question 2.**

D'après l'équation de mouvement,  $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$ . On a donc  $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$ . (2)  
 On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$ ; donc  $H_2(p) = \frac{1}{p}$ . (2)  
 Enfin,  $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$  et donc  $H_3(p) = K_{C\theta}$ . (1)

**Question 3.**

On a dans un premier temps  $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$ .  
 Dans un second temps,  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$ .  
 Avec  $H_{cor}(p) = 1 : H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$ . (5)

**Question 4.**

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a :  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{Jp^2}{2K_{C\theta}}+1}$ . Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude  $C_0$  est une sinusoïde (d'amplitude  $C_0$  et de moyenne  $\frac{C_0}{2}$ ). (3)  
 Un mouvement sinusoïdal est sûrement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical. (2)

**Question 5.**

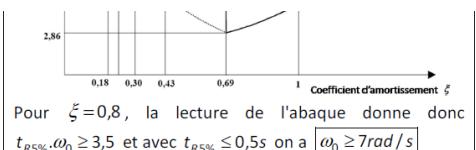
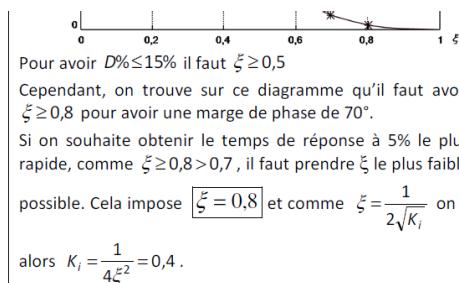
On a  $H_{BO}(p) = \frac{H_{cor}(p)\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{Jp^2}{K_{C\theta}}+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$ .  
 Par ailleurs,  $(1+tp)^2 = 1 + \tau^2 p^2 + 2tp$ . (3)  
 En identifiant,  $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$  et  $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$ . On a donc  $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$  et  $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$ . (2)

**Question 6.**

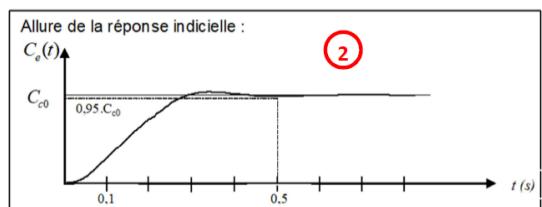
On a :  $\varepsilon(p) = \frac{C_e(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}}$ . En conséquences,  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}} = \lim_{p \rightarrow 0} C_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}} = 0$  Nm. (3) L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée. (2)

**Question 7.**

On a  $\frac{\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}} = \frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2+K_i(1+T_ip)}$ . Avec  $T_i = \tau$ , on a  $\frac{K_i}{\tau p(1+tp)+K_i}$ . La FTBF est bien d'ordre 2. (5)

**Question 9.**

Critère	Valeur
Dépassement	2% <span style="color:red;">(1)</span>
Tr5%	<0,5 s <span style="color:red;">(1)</span>
Erreur statique en réponse à un échelon	0 <span style="color:red;">(1)</span>



# Colle 2

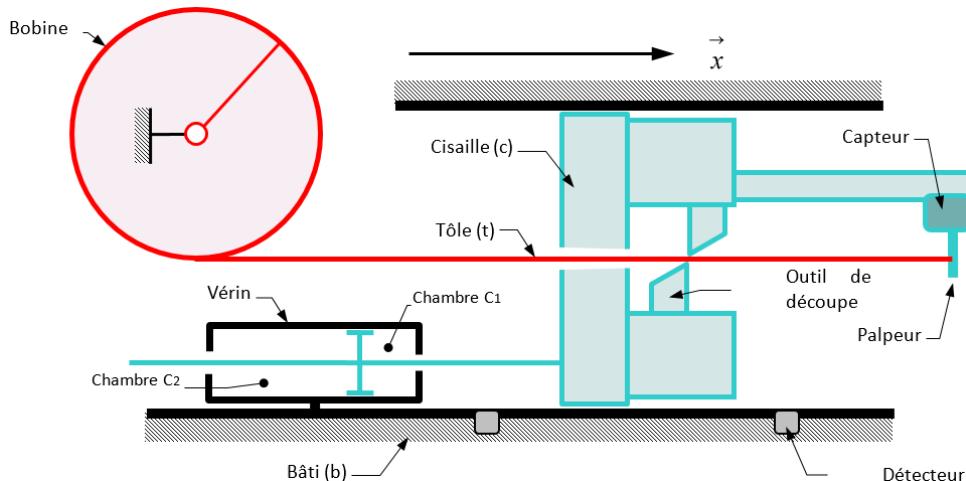
## Cisaille à découpe au vol – Sujet

D'après P. Dubois, C. Gamelon..

### Mise en situation

#### Objectif

- Identifier les paramètres du vérin.
- Quantifier l'erreur de trainage et déterminer son impact sur le système.
- Proposer des solutions pour la compenser.



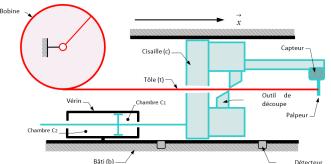
La machine, représentée par le schéma ci-dessus, permet de débiter en continu une bobine de tôle en tronçons de même longueur \*. La rotation continue à fréquence variable de la bobine impose à la tôle (**t**) une vitesse linéaire  $v(t)$  par rapport au bâti (**b**) constante. Les outils de découpe sont portés par la cisaille (**c**) qui est mise en mouvement par un vérin hydraulique.

En avançant, la tôle déplace le palpeur du capteur porté par la cisaille. Celui-ci délivre alors une tension  $u(t)$  proportionnelle à l'écart de position entre la tôle et la cisaille. Un amplificateur transforme ce signal en courant d'intensité  $i(t)$  pour commander un distributeur hydraulique qui fournit au vérin un débit d'huile  $q(t)$ . Au bout d'un certain temps, se déplaçant à la même vitesse, la cisaille et la tôle arrivent face à un détecteur qui déclenche la coupe. La tôle tombe, la cisaille recule jusqu'à son point de départ et attend que la tôle revienne en contact avec le palpeur pour recommencer un cycle. La position de la cisaille est ainsi « asservie » à la position de la tôle.

\*. <https://goo.gl/azqSkT>

B2-04

B2-06



On notera par des majuscules les transformées de Laplace des fonctions du temps notées en minuscules.

$$\text{Rappels : } \mathcal{L}[a] = \frac{a}{p}, \mathcal{L}[at] = \frac{a}{p^2} \text{ et} \\ \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}.$$

On note :

- ▶  $e(t)$  le déplacement de la tôle (**t**) par rapport au bâti (**b**);
- ▶  $\varepsilon(t)$  le déplacement de la tôle par rapport à la cisaille (**c**);
- ▶  $x(t)$  le déplacement de la cisaille par rapport au bâti.

$X(p)$  est la transformée de Laplace du déplacement  $x(t)$  et  $Q(p)$  celle du débit  $q(t)$ .

On note :

- ▶  $m$  la masse totale mise en mouvement par le vérin;
- ▶  $f$  le coefficient de frottement visqueux associé au déplacement de l'ensemble mobile. Les frottements créent un effort qui s'oppose au déplacement et qui est proportionnel à la vitesse :  $F_f(t) = -f \frac{dx(t)}{dt} \vec{x}$ ;
- ▶  $\Delta p(t)$  la différence de pression entre les deux chambres  $C_1$  et  $C_2$  du vérin;
- ▶  $S$  la surface du piston en contact avec l'huile.

## Schéma-bloc du système

On considère comme instant initial le moment où la tôle touche le palpeur. À cet instant  $e$  et  $x$  sont nuls. L'équation reliant les déplacements est donnée par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - x(t).$$

Le capteur, l'amplificateur et le distributeur délivrent des signaux de sortie proportionnels à leurs signaux d'entrée. On notera  $K_c$ ,  $K_a$  et  $K_d$  leurs gains respectifs. Soit  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$  la fonction de transfert associée à l'ensemble vérin plus charge déplacée.

**Question 1** Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

## Équation de comportement dynamique

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble mobile en projection sur  $\vec{x}$ , on a :  $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\Delta p(t) - f \frac{dx(t)}{dt}$ .

## Fonction de transfert du vérin

Pour le type de vérin utilisé, le débit d'alimentation a pour expression :  $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\Delta p(t)}{dt}$ .  $V$  est le volume moyen d'une chambre et  $B$  le module d'élasticité de l'huile, (ces deux paramètres sont des constantes).

**Question 2** Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert :  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ , que l'on mettra sous la forme :  $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$ .

## Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

$$\text{On pose } H_v(p) = \frac{K_v}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

Une simulation numérique a permis de tracer le diagramme de Bode donné page suivante. On se propose de retrouver les valeurs de  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  à partir du diagramme.

**Question 3** Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel  $\text{GdB}(\omega)$  en fonction des notations  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de  $H_v(j\omega)$ ). Quelle est sa valeur pour  $\omega = \omega_0$  ?

**Question 4** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

**Question 5** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers  $\infty$ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

**Question 6** Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de  $H_v(p)$  donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

**Question 7** Donner l'expression littérale de la phase  $\varphi(\omega)$  en fonction des notations  $\omega_0$  et  $\xi$ . Déterminer ses limites lorsque  $\omega$  tend vers 0 et lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre  $\omega_0$  puis pour 100 et 200 rad s<sup>-1</sup>. Tracer la courbe de phase.

### Détermination des gains $K_c$ , $K_a$ et $K_d$

Pour que le système soit stable en boucle fermée on décide de régler le correcteur pour avoir une marge de gain de 6 dB.

**Question 8** Quelle valeur  $K$  doit-on donner au produit des gains  $K_c K_a K_d$  (préciser les unités). On note  $K_0$  le produit  $KK_v$  (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de  $K_0$ ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue ?

#### Méthode –

Cette question est un peu prématurée par rapport à notre avancée. Cependant, vous pouvez tenter d'appliquer la méthode suivante :

1. Déterminer le gain (en dB) pour lequel la phase vaut -180°.
2. Chercher  $K$  tel que  $20 \log |FTBO| = -6$ .
3. Calculer  $K_0$ .

### Erreur de traînage

On note :  $H(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$ .

**Question 9** Donner l'expression de l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $H(p)$ . La tôle se déplace à vitesse constante  $v$ , quelle est la transformée  $E(p)$  de  $e(t)$ ? Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $v$  et des paramètres canoniques.

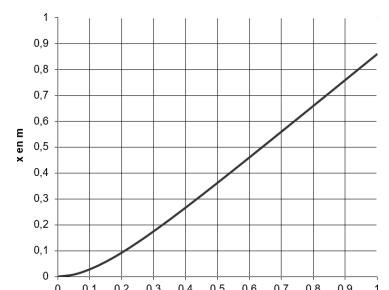
**Question 10** On appelle erreur de traînage  $\varepsilon_t$  la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de  $\varepsilon_t$ . Faire l'application numérique avec  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $K_0 = 7$  (unité SI).

### Identification temporelle

On donne ci-contre, le tracé de la courbe  $x(t)$  obtenu à l'aide d'un logiciel de simulation. Cette réponse est voisine de celle d'un premier ordre soumis à la même entrée. Soit  $F(p) = \frac{K_f}{1 + Tp}$  la fonction de transfert du système du premier ordre associé.

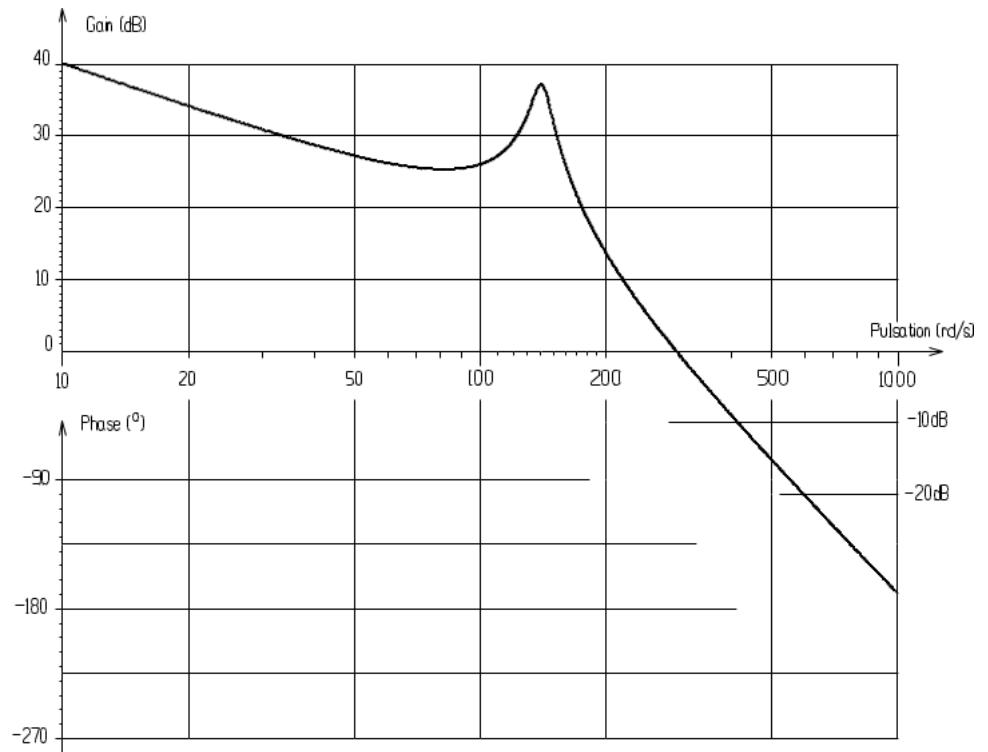
**Question 11** Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante :  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ ).

**Question 12** Déterminer les valeurs numériques de  $K_f$  et  $T$  à l'aide de relevés sur la courbe.



**Question 13** Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

**Question 14** Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?



# Colle 2

## Cisaille à découpe au vol – Corrigé

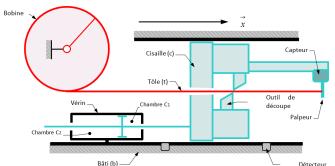
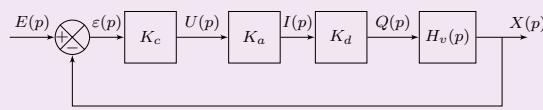
D'après P. Dubois, C. Gamelon..

### Mise en situation

#### Schéma-bloc du système

**Question 1** Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

#### Correction



### Équation de comportement dynamique

#### Fonction de transfert du vérin

**Question 2** Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert :  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ , que l'on mettra sous la forme :  $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$ .

#### Correction

D'une part,  $mp^2 X(p) = S\Delta P(p) - fpX(p) \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) = \Delta P(p)$ .

D'autre part :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Delta P(p) \Leftrightarrow 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} = \Delta P(p)$ .

On a donc :  $\frac{p(mp + f)}{S} X(p) = 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) + \frac{2BSpX(p)}{Vp} = \frac{2BQ(p)}{Vp}$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{p(mp + f)}{S} + \frac{2BSp}{Vp} \right) \frac{Vp}{2B} = \frac{Q(p)}{X(p)} \Leftrightarrow \left( \frac{p(mp + f)}{S} \frac{Vp}{2B} + Sp \right) = \frac{Q(p)}{X(p)}.$$

On a donc,  $H_v(p) = \frac{1}{p \left( \frac{(mp + f)Vp}{S} \frac{1}{2B} + Sp \right)} = \frac{1}{p \left( \frac{Vm}{2BS} p^2 + \frac{fV}{2BS} p + S \right)} =$

$$\frac{1/Q}{p \left( \frac{Vm}{2BS^2} p^2 + \frac{fV}{2BS^2} p + 1 \right)}.$$

Au final,  $k = \frac{1}{S}$ ,  $a = \frac{Vm}{2BS^2}$  et  $b = \frac{fV}{2BS^2}$ .

### Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

**Question 3** Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel  $GdB(\omega)$  en fonction des notations  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de  $H_v(j\omega)$ ). Quelle est sa valeur pour  $\omega = \omega_0$  ?

#### Correction

$$H_v(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$$

$$\begin{aligned} \text{En conséquence, } G_{dB}(\omega) &= 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right| = 20 \log K_v - 20 \log |j\omega| - \\ &20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \\ &= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \\ \text{Au final, } G_{dB}(\omega_0) &= 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi. \end{aligned}$$

**Question 4** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

#### Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend  $20 \log K_v - 20 \log \omega$ . La pente est donc de  $-20 \text{ dB/decade}$ . Elle coupe l'horizontale à 0 dB en  $\omega = K_v$ .

**Question 5** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

#### Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ , le gain tend  $20 \log K_v - 20 \log \omega$ ,  $G_{dB}$  tend vers  $= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 + 20 \log \omega_0^2 = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega$ .

La pente est donc de -60 dB/decade.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand

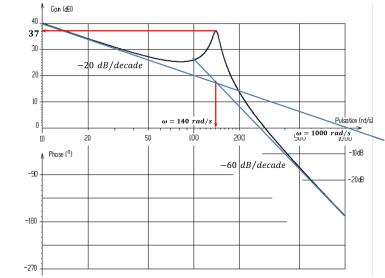
$$20 \log K_v - 20 \log \omega = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega \Leftrightarrow \log \omega = \log \omega_0. \text{ Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en } \omega = \omega_0.$$

**Question 6** Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de  $H_v(p)$  donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

#### Correction

Par lecture du graphe, on obtient  $\omega_0 = 140 \text{ rad/s}$  et  $K_v = 1000 \text{ s m}^{-2}$ .

$$G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 20 \log 1000 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 60 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow \frac{37 - 60 + 20 \log 140}{-20} = \log 2\xi \Leftrightarrow \xi \approx 0,05.$$



**Question 7** Donner l'expression littérale de la phase  $\varphi(\omega)$  en fonction des notations  $\omega_0$  et  $\xi$ . Déterminer ses limites lorsque  $\omega$  tend vers 0 et lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre  $\omega_0$  puis pour 100 et 200 rad s<sup>-1</sup>. Tracer la courbe de phase.

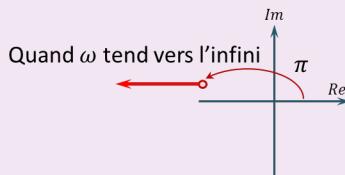
#### Correction

$$\varphi(\omega) = \arg K_v - \arg(j\omega) - \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$$

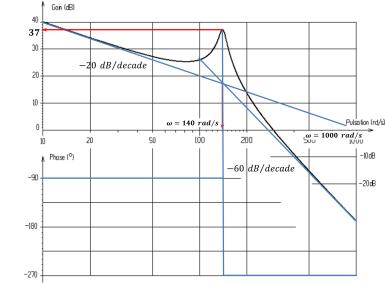
Lorsque  $\omega$  tend vers 0,  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\frac{\pi}{2}$ .

Lorsque  $\omega$  tend vers l'infini,  $-\arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$  tend vers  $\pi$  donc  $-\arg(\dots)$  tend vers  $-\pi$ .

Explication graphique de prof de SII...



Au final, lorsque  $\omega$  tend vers l'infini,  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\frac{3\pi}{2}$ .



## Détermination des gains $K_c$ , $K_a$ et $K_d$

**Question 8** Quelle valeur  $K$  doit-on donner au produit des gains  $K_c K_a K_d$  (préciser les unités). On note  $K_0$  le produit  $KK_v$  (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de  $K_0$ ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue?

#### Correction

Étant donné l'exigence demandée, le gain de la FTBO doit être de -6 dB lorsque la phase vaut -180°. On a déjà vu que pour cette phase, le gain décibel de  $H_v$  vaut 37 dB. Le gain dB vaut  $20 \log K + 20 \log |H_v|$ . On cherche donc  $K$  tel que  $20 \log K + 20 \log |H_v| = -6$ . Au final,  $K = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Par suite,  $K_0 = 7 \text{ s}^{-1}$ .

## Erreur de traînage

**Question 9** Donner l'expression de l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $H(p)$ . La tôle se déplace à vitesse constante  $v$ , quelle est la transformée  $E(p)$  de  $e(t)$ ? Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $v$  et des paramètres canoniques.

### Correction

On peut redémontrer le résultat suivant :  $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$ .

Exprimons  $\varepsilon(p)$  :  $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - H(p)\varepsilon(p)$ ; donc  $\varepsilon(p)(1 + H(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$ .

Le consigne étant une vitesse, on a donc  $E(p) = \frac{v}{p^2}$ . On a donc :  $\varepsilon(p) = \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}}$ .

**Question 10** On appelle erreur de traînage  $\varepsilon_t$  la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de  $\varepsilon_t$ . Faire l'application numérique avec  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $K_0 = 7$  (unité SI).

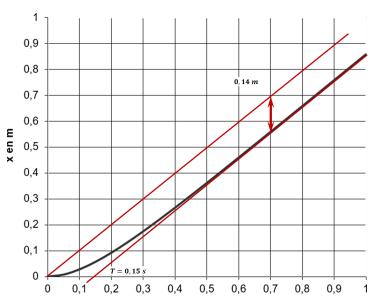
### Correction

L'entrée en vitesse précédente correspondant à une entrée en rampe, on a donc  $\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{v}{p + \frac{K_v K_c K_a K_d}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \frac{v}{K_v K_c K_a K_d} = \frac{1}{7} \simeq 0,14 \text{ m}$ . Pour compenser cette erreur, il suffit de régler la butée de la tôle à découper.

## Identification temporelle

**Question 11** Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante :  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ ).

**Question 12** Déterminer les valeurs numériques de  $K_f$  et  $T$  à l'aide de relevés sur la courbe.



### Correction

Première solution : cf cours pour un système du premier ordre soumis à une rampe.

Seconde solution : se raccrocher à ce que l'on sait (peut-être) pour un premier ordre soumis à un échelon... en effet, la rampe peut être assimilée à un premier ordre intégré. Ainsi, pour un système du premier ordre soumis à un échelon d'amplitude  $v$ , la valeur finale est  $vK_f$ . Ainsi, en intégrant, la pente en régime permanent sera de  $vK_f$ .

La pente étant de 1 on a  $K_f = 1$ .

Reste à savoir que l'asymptote coupe l'axe des abscisses en  $T$ . Après lecture,  $T = 0,15 \text{ s}$ .

**Question 13** Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

**Correction**

Même erreur que précédemment.

**Question 14** Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?

**Correction**

Il est possible de décaler la butée de 14 cm et ainsi supprimer l'écart de trainage.



## TD 8

# Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Sujet

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

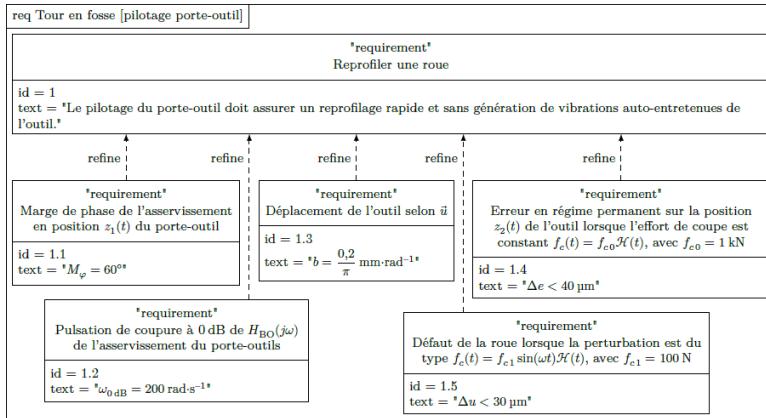
## Modélisation du mouvement pour la commande

### Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position  $z_1(t)$  comprenant un correcteur proportionnel.

Le système composé de l'outil et du porte-outil est modélisé sur la Figure 2.28. Le porte-outil, de masse  $m_1 = 5522 \text{ kg}$ , est considéré indéformable et en liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  avec le bâti. Une chaîne de motorisation électrique permet de déplacer le porte-outil et une structure de commande associée permet d'asservir la position  $z_1(t)$  par rapport à une position de référence. La chaîne de motorisation exerce une force motrice  $\vec{f}_m(t) = f_m(t)\vec{z}_0$  sur le porte-outil.

La cahier des charges est donné sur la figure suivante.



Les positions du porte-outil et du point C par rapport à leur position de référence sont respectivement paramétrées par  $z_1(t)\vec{z}_0$  et  $z_2(t)\vec{z}_0$ , avec  $z_1(t)\vec{z}_0$  et  $z_2(t)\vec{z}_0$  des grandeurs algébriques (Figure 2.28). Les conditions initiales sont toujours supposées nulles.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée au porte-outil puis à l'outil permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$m_1 \ddot{z}_1(t) + \lambda \dot{z}_1(t) + K z_1(t) = \lambda \dot{z}_2(t) + K z_2(t) + f_m(t)$$

$$m_2 \ddot{z}_2(t) + \lambda \dot{z}_2(t) + K z_2(t) = \lambda \dot{z}_1(t) + K z_1(t) + f_c(t)$$

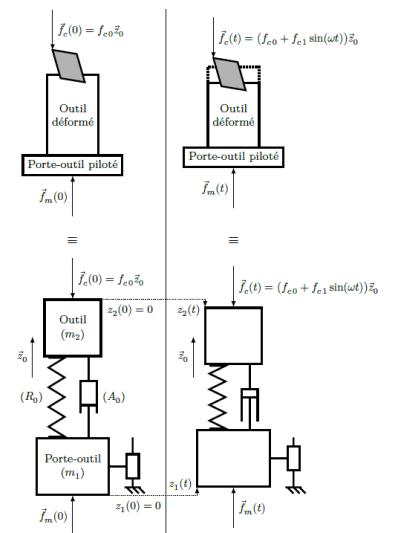
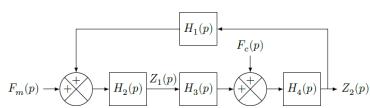
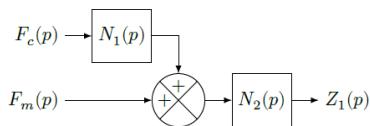


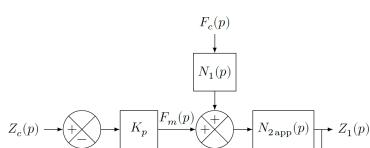
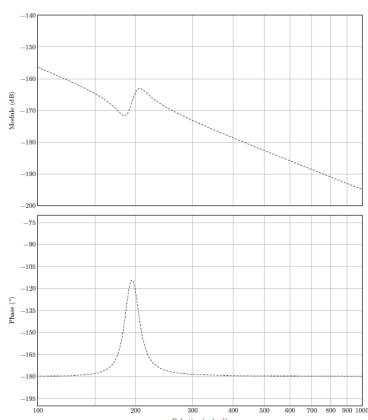
FIGURE 2.28 – Modèle de déformation de l'outil avec le porte-outil piloté



**FIGURE 2.29** – Modèle de l'outil et du porte-outil

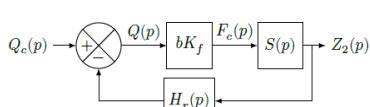


**FIGURE 2.30** – Modèle équivalent



**FIGURE 2.31** – Modèle de synthèse de la régulation en position  $z_1(t)$  du porte-outil

D'un point de vue numérique,  $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$  et  $\tau = 1 \text{ s}$ .



**FIGURE 2.32** – Modèle équivalent de la chaîne d'asservissement complète

Le modèle correspondant est représenté par le schéma bloc de la [Figure 2.18](#).

**Question 1** Exprimer les fonctions  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$  en fonction de  $K$ ,  $\lambda$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

Le modèle de la [Figure 2.18](#) est réduit au modèle équivalent de la figure [Figure 2.21](#).

**Question 2** Exprimer  $N_1(p)$  et  $N_2(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ .

**Question 3** Montrer que  $N_2(p)$  peut s'écrire sous la forme  $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2 (p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$ . Exprimer  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $A$  en fonction de  $m_1$  et  $m_2$ ,  $\lambda$  et  $K$ .

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_2(p)$  est représenté ci-contre.

**Question 4** Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

**Question 5** Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert  $N_2(p)$  peut être approchée par la fonction  $N_{2app}(p) = \frac{A}{p^2}$ . En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_{2app}(p)$  sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Le modèle approché ( $N_{2app}(p)$ ) est retenu pour la suite de l'étude. Le schéma bloc modélisant la régulation de la position  $z_1(t)$  est donné en figure [Figure 2.36](#), en considérant un correcteur proportionnel de gain  $K_p$ .

**Question 6** Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la [Figure 2.4](#).

## Analyse de l'influence d'un paramètre

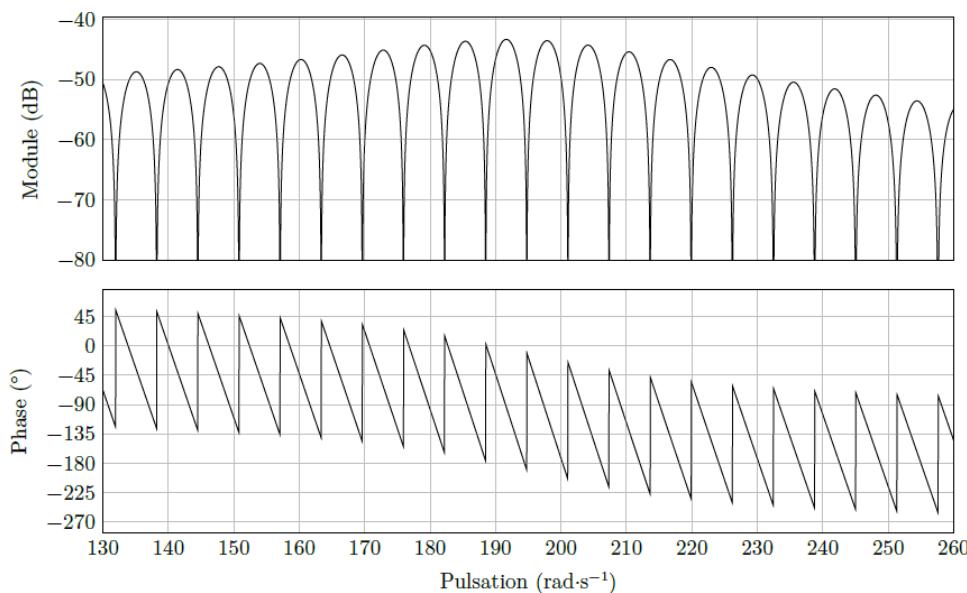
On a d'une part  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ .

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par  $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$  où  $\tau$  est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

**Question 7** Déterminer  $H_r(p)$  en fonction de  $\tau$ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

La [Figure 2.40](#) représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système modélisé [Figure 2.39](#), avec  $b = \frac{5 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ mm rad}^{-1}$



**FIGURE 2.33** – Diagramme de Bode de la boucle ouverte du schéma-blocs

Les « zéros de transmission » d'une fonction de transfert  $H(p)$  correspondent aux pulsations  $\omega$  pour lesquelles  $H(j\omega)$  est nul.

**Question 8** Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la Figure 2.40 en analysant les « zéros de transmission ».

**Question 9** Déterminer un ordre de grandeur du paramètre  $b$  permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.



## TD 8

# Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Corrigé

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

B2-07

C2-02



### Modélisation du mouvement pour la commande

**Question 1** Exprimer les fonctions  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$  en fonction de  $K$ ,  $\lambda$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

#### Correction

D'après le schéma-blocs  $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$ . D'après la première équation différentielle, on a :  $m_1p^2Z_1(p) + \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) = \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1p^2 + \lambda p + K}$ . On

a donc par identification  $H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_1(p) = \lambda p + K$ .

D'après le schéma-blocs  $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$ . D'après la seconde équation différentielle,  $m_2p^2Z_2(p) + \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) = \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p)}{m_2p^2 + \lambda p + K}$ . On

a donc par identification  $H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_3(p) = \lambda p + K$ .

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$$

**Question 2** Exprimer  $N_1(p)$  et  $N_2(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ .

#### Correction

En utilisant le premier modèle, on avait : 
$$\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$$
.

Ainsi,  $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))))$

$= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p)$

$\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p))$ .

En utilisant le schéma-blocs,  $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$ . Par identification, on obtient  $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$  et  $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $N_2(p)$  peut s'écrire sous la forme  $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$ .

Exprimer  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $A$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\lambda$  et  $K$ .

**Correction**

$$\begin{aligned}
N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\
&= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))} \\
&= \frac{m_2 \left( p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left( p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}. \\
\text{Par identification, on a : } A &= \frac{1}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, 2\xi_1\omega_1 = \frac{\lambda}{m_2} \text{ et } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} =, \\
\omega_2^2 &= K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, 2\xi_2\omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \\
\text{On a donc } \xi_1 &= \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.
\end{aligned}$$

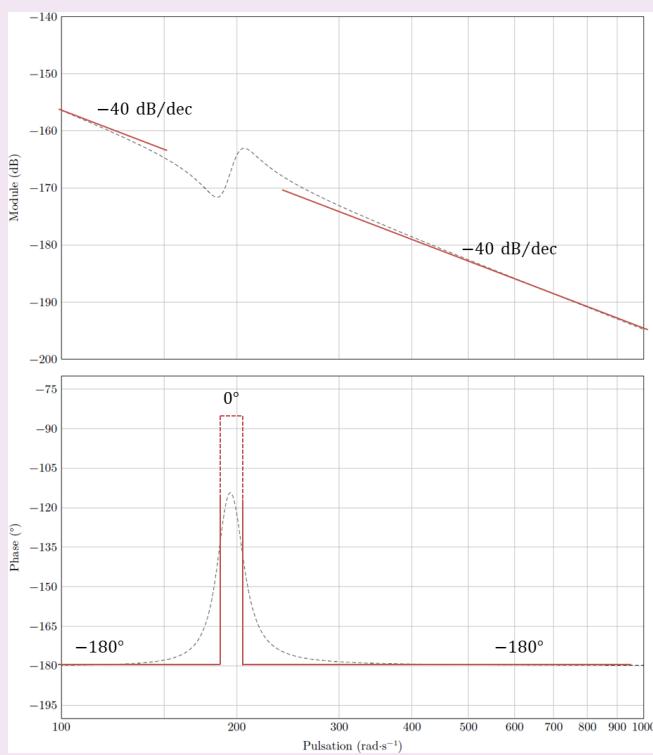
Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_2(p)$  est représenté ci-contre.

**Question 4** Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

**Correction**

D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement  $\omega_1 < \omega_2$ . On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert  $N_2(p)$ .

	$\omega_1$		
	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$
$\frac{A}{p^2}$	-40 dB/dec	-40 dB/dec	-40 dB/dec
$p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2$	0 dB/dec	40 dB/dec	40 dB/dec
$\frac{1}{p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2}$	0 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$20 \log N_2(p) $	-40 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$\text{Arg}(N_2(p))$	$-180^\circ$	$0^\circ$	$-180^\circ$



**Question 5** Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert  $N_2(p)$  peut être approchée par la fonction  $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$ . En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_{2\text{app}}(p)$  sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

#### Correction

Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s<sup>-1</sup>, on peut modéliser  $N_2(p)$  par un double intégrateur. Le gain dB est donc  $20 \log A - 20 \log \omega^2$ . Pour  $\omega = 500$  rad s<sup>-1</sup> on a  $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$  et  $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$ .

**Question 6** Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la Figure 2.4.

#### Correction

Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1 :**  $M\varphi = 60^\circ$  : impossible à respecter la phase sera toujours de  $-180^\circ$ .
- **req 1.2 :**  $\omega_{0\text{dB}} = 200$  rad s<sup>-1</sup> : critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4 :** erreur en régime permanent :  $\Delta c < 40 \mu\text{m}$  pour un échelon d'amplitude  $f_{c0} = 1 \text{kN}$  : critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5 :** défaut de la roue  $\Delta u < 30 \mu\text{m}$  lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

## Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ .

D'un point de vue numérique,  $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$  et  $\tau = 1 \text{ s}$ .

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par  $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$  où  $\tau$  est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

**Question 7** Déterminer  $H_r(p)$  en fonction de  $\tau$ .

#### Correction

D'après le schéma-blocs,  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ . D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$ . En conséquence,  $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

**Question 8** Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la Figure 2.40 en analysant les « zéros de transmission ».

#### Correction

$$\text{FTBO}(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p).$$

On a  $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$ .

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

- pour  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty$ ;

- pour  $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2$ .

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ .

Pour la phase,  $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j \sin(-\tau\omega))$ . Or  $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$ . On a donc  $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$ .

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal  $\frac{2\pi}{\tau}$  périodique.

**Question 9** Déterminer un ordre de grandeur du paramètre  $b$  permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

#### Correction

Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire  $b'$  tel que  $20 \log b' = 45$  soit  $b' = 10^{45/20} = 177$ . Au bilan, on aurait donc  $b_{lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$ .

Il faudrait déterminer si une augmentation de  $b$  réduit l'amortissement de l'asservissement.

# Colle 3

## Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Sujet

Concours CCINP – MP 2020.

B2-04

C2-03

### Présentation

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... lorsque ces lieux sont de grandes tailles.

### Étude de l'asservissement en intensité des moteurs



#### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en intensité du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence « 1.7.1.1 » et ses sous-exigences.

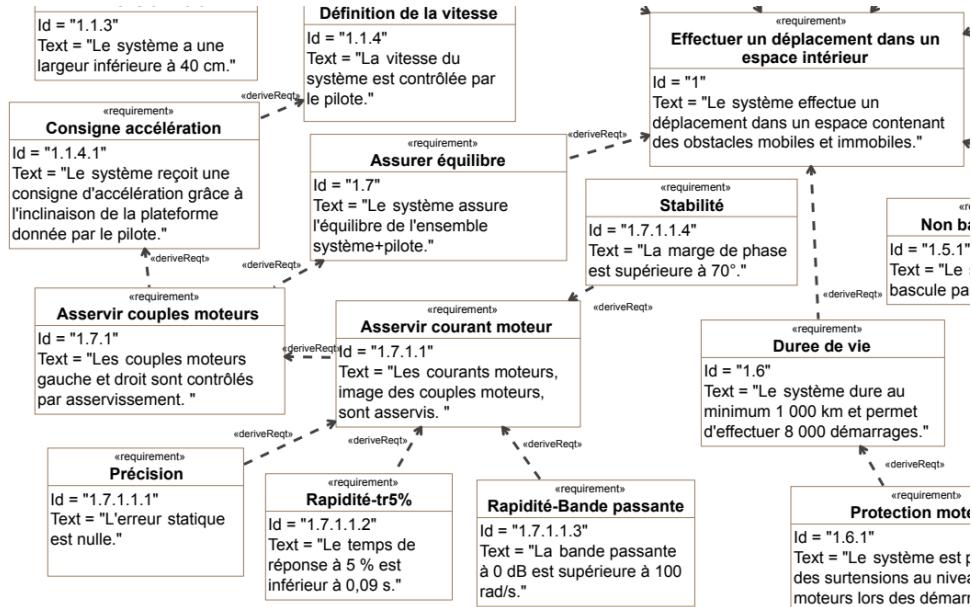


FIGURE 2.34 – Diagramme des exigences

### Modélisation du moteur

Le moteur brushless associé à son électronique de commande peut se modéliser par les équations d'une machine à courant continu.

On notera  $J_{\text{eq}}$  l'inertie équivalente des masses mobiles mises en jeu ramenée sur l'arbre moteur. On modélisera les différents frottements par un frottement visqueux générant un couple résistant, rapporté à l'arbre moteur, proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre moteur et de coefficient  $f$  ( $f > 0$ ). On rappelle les équations caractéristiques associées :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K_e \omega_m(t)$ ;
- $C_m(t) = K_e i(t)$ ;
- $J_{\text{eq}} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - f \omega_m(t)$ .

**Question 1** Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

**Question 2** Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans Figure 2.35. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

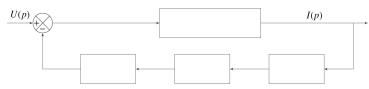


FIGURE 2.35 – Schéma-blocs

**Question 3** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ . Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

## Asservissement du moteur en intensité

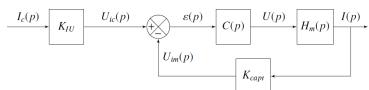


FIGURE 2.36 – Schéma-blocs

L'architecture retenue pour contrôler le couple moteur est un asservissement en intensité, image du couple moteur (voir équation précédente). Le schéma-blocs est représenté Figure 2.36. Un convertisseur IU fournit au calculateur une tension  $u_{ic}(t)$  image de l'intensité de consigne  $i_c(t)$ , proportionnelle à cette dernière de coefficient  $K_{iu}$ . De même, l'intensité réelle  $i(t)$ , mesurée par un capteur d'intensité de coefficient  $K_{capt}$ , a pour image  $u_{im}(t)$ . L'écart, noté  $\varepsilon(t) = u_{ic}(t) - u_{im}(t)$ , est traité par le correcteur de fonction de transfert  $C(p)$ , qui impose la tension  $u(t)$  aux bornes du moteur.

On donne la fonction de transfert du moteur :  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

**Question 4** Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à  $K_{iu}$ , caractéristique du convertisseur IU.

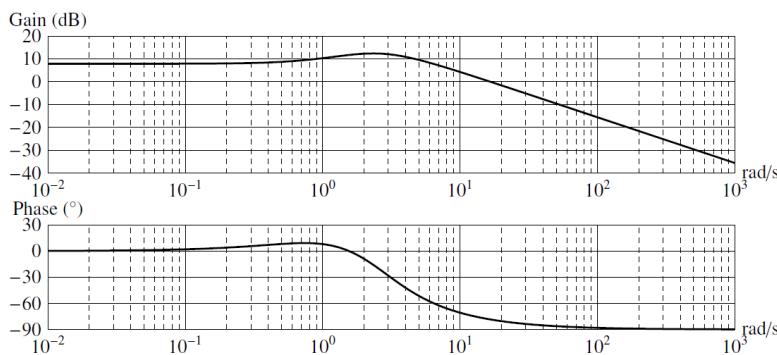
On prend, dans un premier temps, un correcteur purement proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

On en déduit la fonction de transfert  $H_I(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$  :

$$H_I(p) = \frac{K'}{1 + K'} \frac{\frac{1 + \tau_m p}{2z_m + K' \tau_m}}{1 + \frac{\omega_{0m}}{1 + K'} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2(1 + K')} p^2}, \text{ avec } K' = K_{iu} K_p K_m.$$

**Question 5** Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée  $\mu_s$ , pour une entrée indicielle (i.e.  $I_c(p)$  est un échelon unitaire), en fonction de  $K_{iu}$ ,  $K_p$  et  $K_m$ .

La Figure 2.37 présente les diagrammes de Bode en boucle ouverte de l'asservissement étudié, en prenant  $K_p = 10$ .



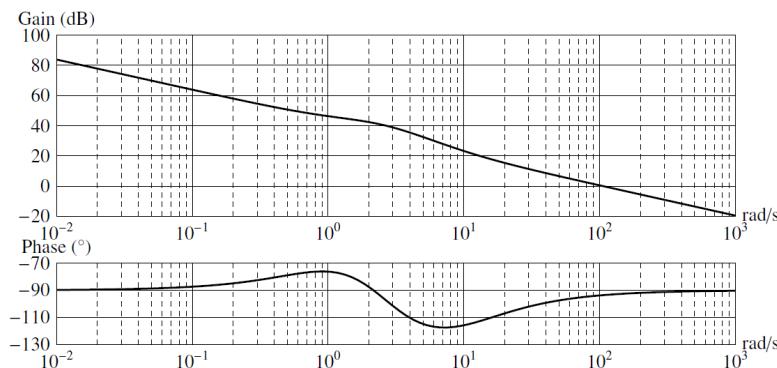
**FIGURE 2.37** – Diagrammes de Bode en boucle ouverte pour  $K_p = 10$

**Question 6** Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

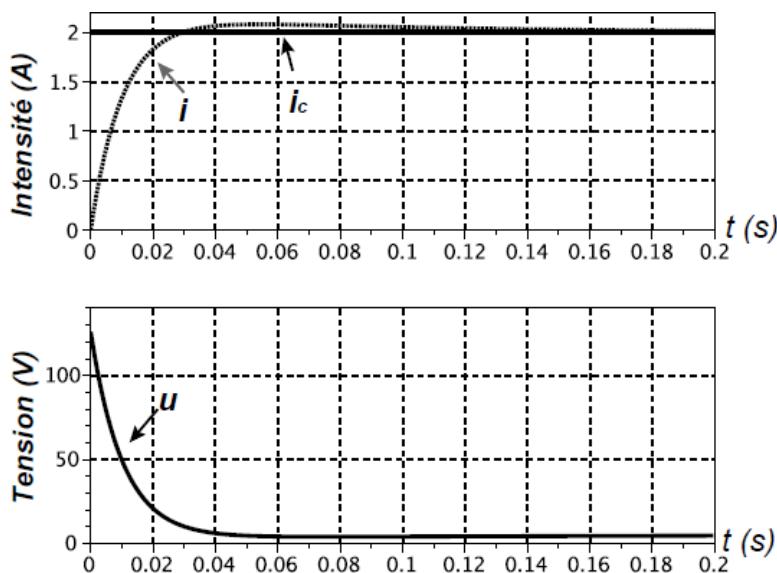
Dans un deuxième temps, il est décidé d'utiliser un correcteur de type proportionnel intégral. Sa fonction de transfert est notée :  $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour  $K_p = 10$  et  $K_i = 1000$ . On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

Une fois le correcteur réglé, on obtient les diagrammes de Bode en boucle ouverte (Figure 2.38) et les réponses temporelles (Figure 2.39), pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.



**FIGURE 2.38** – Diagrammes de Bode en boucle ouverte avec réglage du correcteur PI effectué



**FIGURE 2.39** – Réponses temporelles avec réglage du correcteur PI effectué

**Question 8** Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du système).

Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. Figure 2.40 présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.

**Question 9** Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

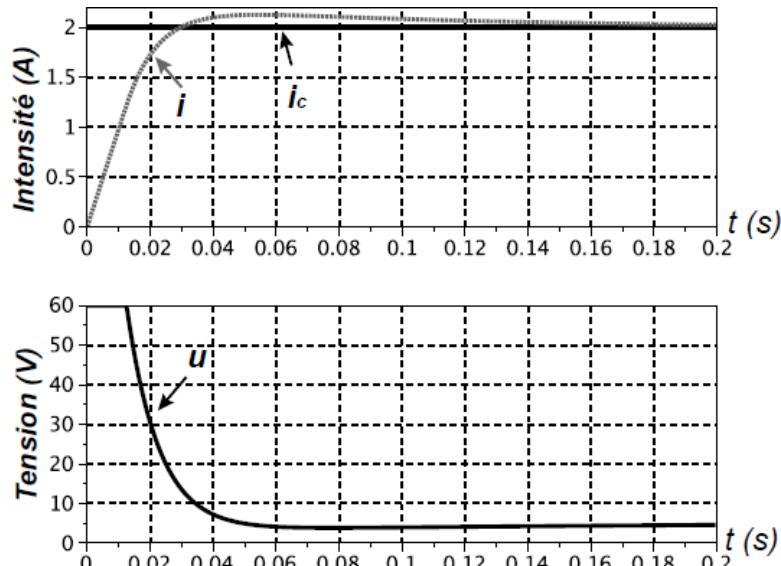


FIGURE 2.40 – Réponses temporelles du système finalement implanté

## Colle 3

# Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Corrigé

Concours CCINP – MP 2020.

### Présentation

B2-04

C2-03

### Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

#### Modélisation du moteur

**Question 1** Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

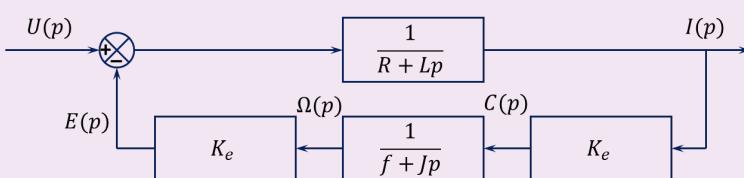


#### Correction

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p);$
- $E(p) = K_e \Omega_m(p);$
- $C_m(p) = K_e I(p);$
- $J_{eq}p\Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p).$

**Question 2** Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans Figure 2.35. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

#### Correction



**Question 3** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ . Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

#### Correction

En utilisant la formule de Black, on a  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{R+Lp}}{1 + K_e^2 \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{f+Jp}} =$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R + Lp) + K_e^2 \frac{1}{f + Jp}} &= \frac{f + Jp}{(R + Lp)(f + Jp) + K_e^2} \\ &= \frac{f + Jp}{Rf + (Lf + RJ)p + LJp^2 + K_e^2} = \frac{f}{Rf + K_e^2} \frac{1 + \frac{J}{f}p}{(Lf + RJ) \frac{p}{Rf + K_e^2} + \frac{LJp^2}{Rf + K_e^2} + 1}. \end{aligned}$$

On a donc  $K_m = \frac{f}{Rf + K_e^2}$ ,  $\tau_m = \frac{J}{f}$ ,  $\frac{1}{\omega_{0m}^2} = \frac{LJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow \omega_{0m} = \sqrt{\frac{Rf + K_e^2}{LJ}}$  et  $\frac{2z_m}{\omega_{0m}} = \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{\omega_{0m}}{2} \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{Lf + RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K_e^2}}.$

## Asservissement du moteur en intensité

**Question 4** Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à  $K_{IU}$ , caractéristique du convertisseur IU.

### Correction

Pour avoir  $\varepsilon = 0$  lorsque  $I_c(p) = I(p)$ , il faut nécessairement  $K_{capt} = K_{IU}$ .

**Question 5** Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée  $\mu_s$ , pour une entrée indicielle (i.e.  $I_c(p)$  est un échelon unitaire), en fonction de  $K_{IU}$ ,  $K_p$  et  $K_m$ .

### Correction

$K_{capt} = K_{IU}$ , il est donc possible de positionner  $K_{capt}$  en amont de la chaîne directe, de supprimer  $K_{IU}$  et de se ramener à un schéma-blocs à retour unitaire.

On a alors  $FTBO(p) = K_{capt}C(p)H_m(p)$  et  $\varepsilon(p) = \frac{I_c(p)}{1 + FTBO(p)}$ .

On a alors  $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{1}{p} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{1}{1 + K_m K_p K_{capt}}.$

**Question 6** Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1 » avec ce type de correcteur.

### Correction

Avec ce correcteur, l'exigence de précision nulle ne pourra pas être satisfaite.

**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour  $K_p = 10$  et  $K_i = 1000$ . On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

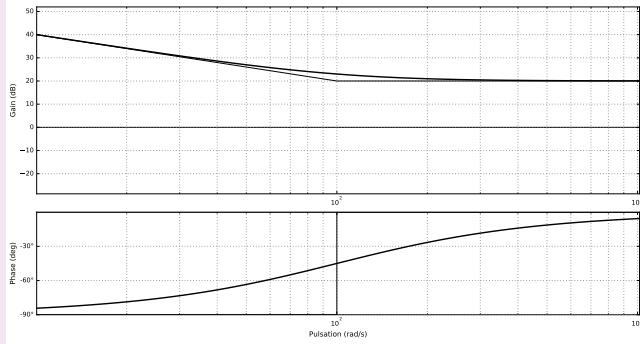
### Correction

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p p + K_i}{p} = K_i \frac{\frac{K_p}{K_i} p + 1}{p} = \frac{1000}{p} \left( \frac{1}{100} p + 1 \right).$$

On peut donc dresser le tableau de variation asymptotique.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega_1 = 100\text{rad/s}$	$\omega \rightarrow \infty$
$H_1(p) = \frac{K_i}{p} = \frac{1000}{p}$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	
$H_2(p) = 1 + \frac{p}{100}$	0 dB/décade 0°	20 dB/décade 90°	
$C(p)$	-20 dB/décade -90°	0 dB/décade 0°	

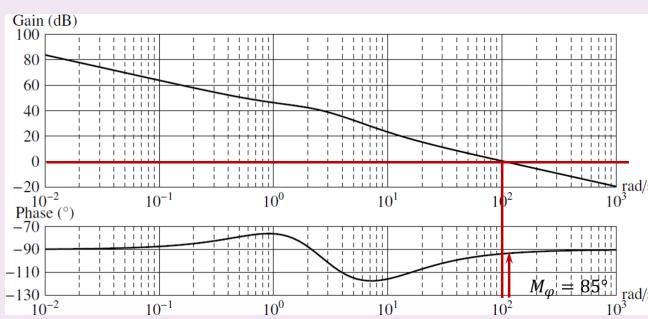
L'asymptote du gain décibel de «  $H_1(p)$  » coupe l'axe des abscisses en 1000.



**Question 8** Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du système).

### Correction

La marge de phase est respectée. Cependant la tension atteinte demandée par la commande (120 V) est peut être trop élevée pour le moteur.



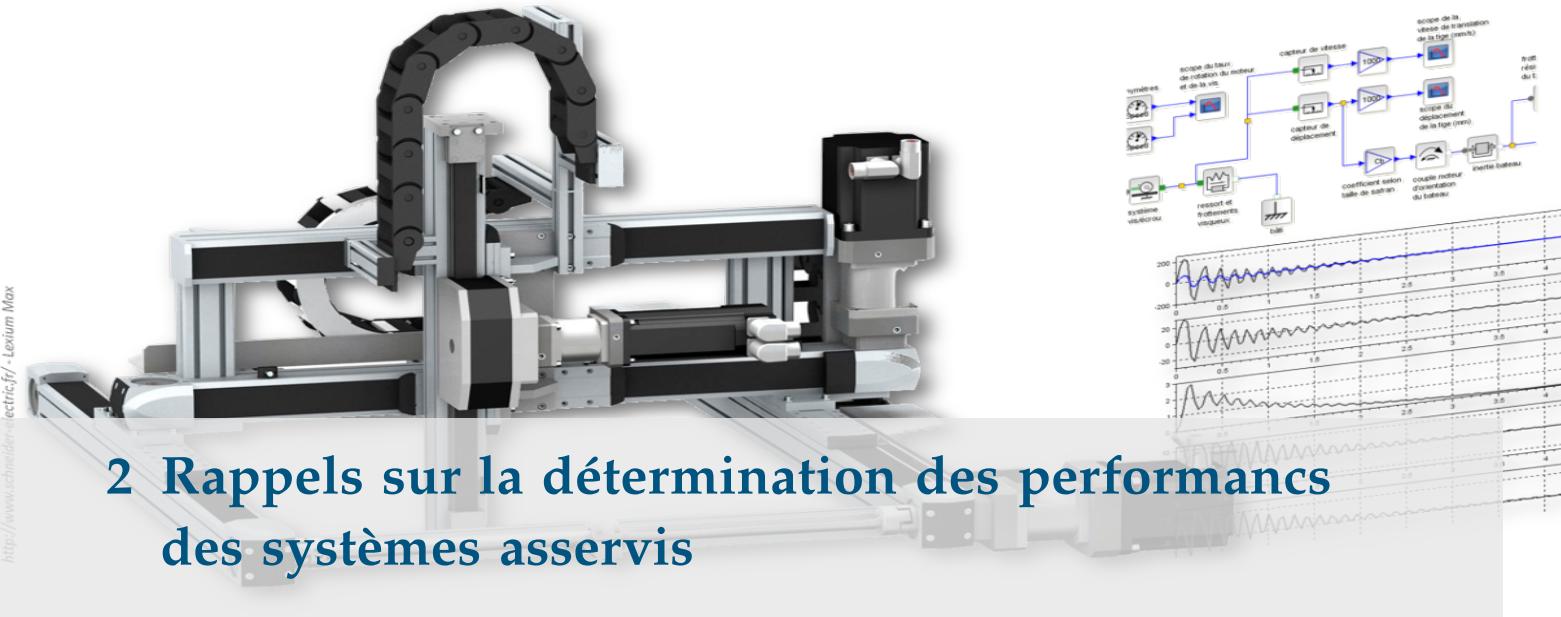
Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. Figure 2.40 présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.

**Question 9** Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

### Correction

Le constructeur a ajouté une saturation de ±60 V.





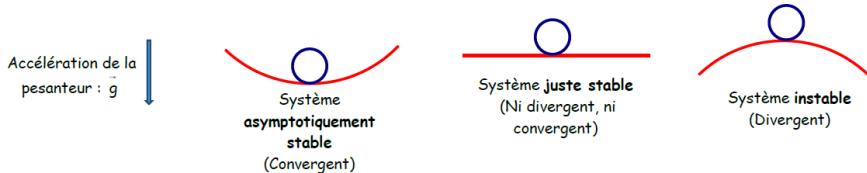
## 2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

### 2.1 Stabilité des systèmes asservis

#### 2.1.1 Notion de stabilité

##### Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



##### Premières définitions

###### Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- ▶ abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- ▶ son régime transitoire finit par disparaître;
- ▶ sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- ▶ sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

###### Remarque

La stabilité d'un système est indépendante de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

2.1 Stabilité des systèmes asservis . . . . .	141
2.2 Rapidité des systèmes asservis . . . . .	146
2.3 Précision des systèmes asservis . . . . .	148

C1-01

C2-03

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionale.

### Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionale tend vers zéro au cours du temps.

### Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles  $p_i$  de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de  $H(p)$  on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

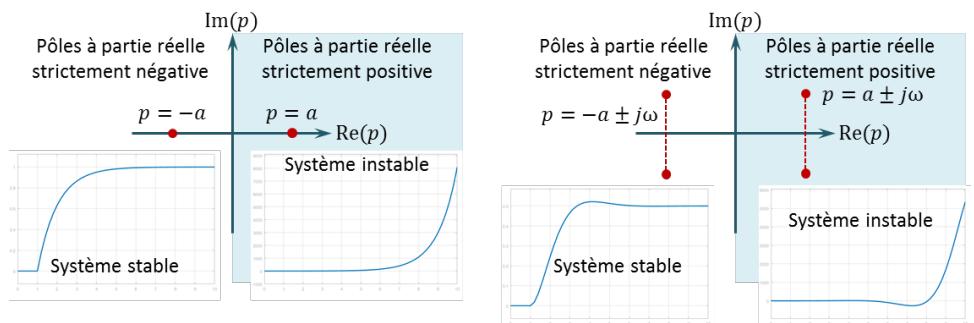
En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle.

- les pôles réels (de type  $p = -a$ ) induisent des modes du type  $e^{-at}$  ;
- les pôles complexes conjugués (de type  $p = -a \pm j\omega$ ) induisent des modes du type  $e^{-at} \sin \omega t$ .

**On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.**

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.



**FIGURE 2.1** – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

### Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.

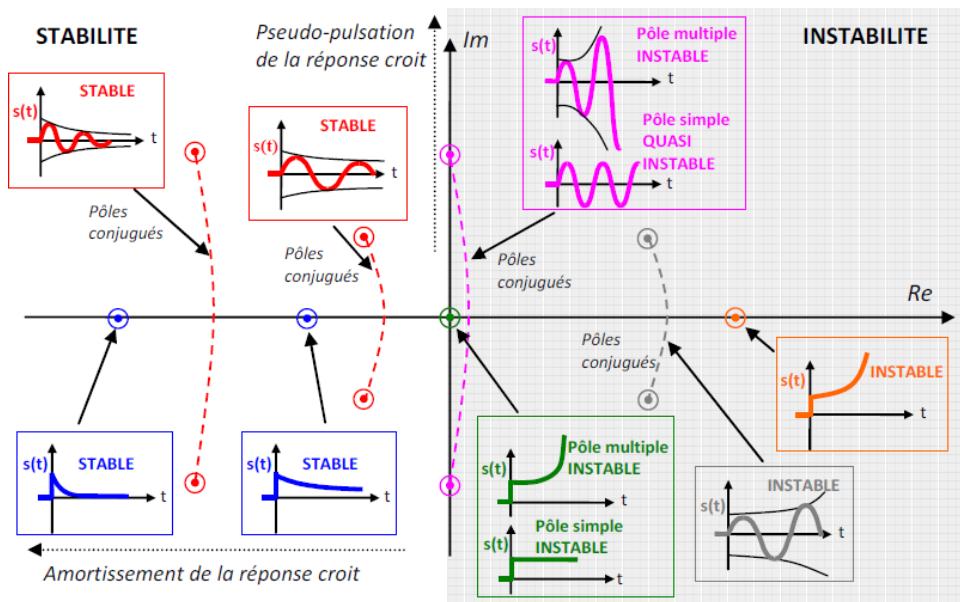


FIGURE 2.2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [F. Mathurin].

### Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

### Remarque

On peut montrer que :

- ▶ pour les systèmes d'ordre 1 et 2 : le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- ▶ pour les systèmes d'ordre 3 : de la forme  $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$  les coefficients doivent être strictement de même signe et  $a_2a_1 > a_3a_0$ .

### Pôles dominants [1]

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

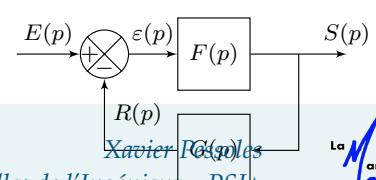
### Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

### 2.1.2 Marges de stabilité

Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par  $H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$ .



La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :  $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}.$

### Définition – Équation caractéristique

Soit  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  une fonction de transfert. On appelle  $D(p) = 0$  l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de  $D(p)$  correspondent aux pôles de  $H(p)$ .

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera  $1 + H_{BO}(p) = 0$ .

### Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

### Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme  $1 + H_{BO}(p) = 0$ . Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation  $H_{BO}(p) = -1$ . Ainsi dans le plan complexe, le point  $(-1; 0)$  permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de  $-180^\circ$ .

#### Résultat –

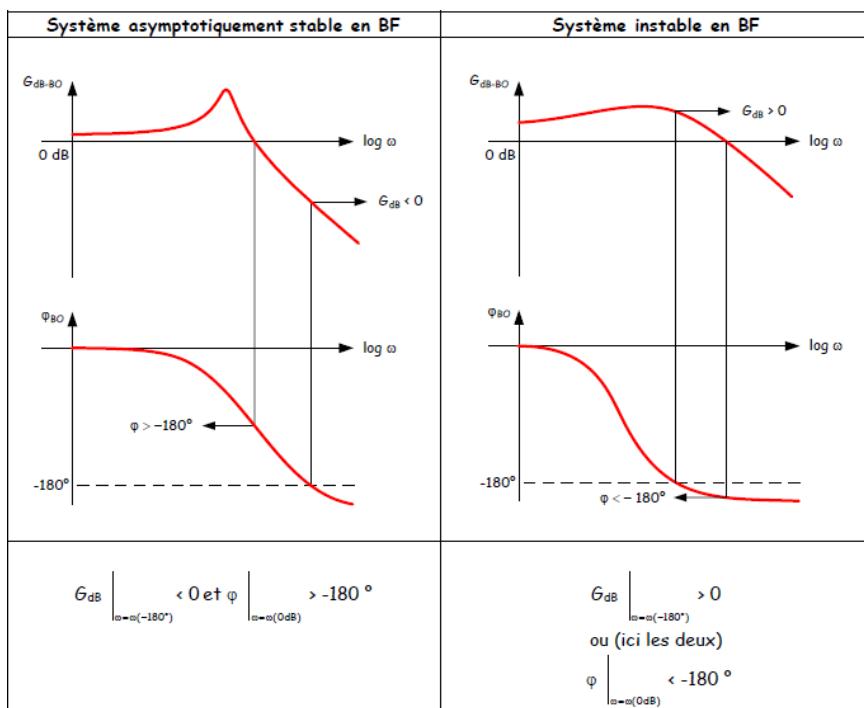
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

$$G_{dB}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0dB}} > -180^\circ.$$

En notant  $\omega_{-180^\circ}$  la pulsation pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$  et  $\omega_{0dB}$  la pulsation pour laquelle le gain est nul.

#### Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



### Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

#### Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

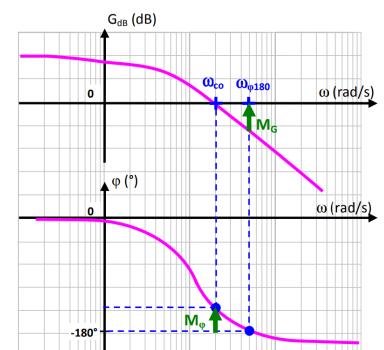
- ▶ la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- ▶ la marge de phase est supérieure à 45°.

#### Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que  $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$  où  $\omega_{c0}$  est la pulsation de coupure pour laquelle  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$ .

#### Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que  $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$  où  $\omega_{\varphi180}$  est la pulsation pour laquelle  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180^\circ$ .



La marge de gain permet de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

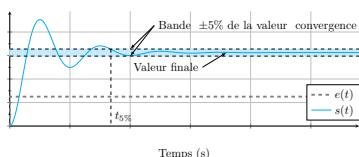
La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

- ▶ la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- ▶ le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- ▶ le système n'est pas invariant au cours du temps;
- ▶ on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- ▶ certaines non linéarités sont ignorées.

## 2.2 Rapidité des systèmes asservis

**Frédéric Mazet**, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

**Florestan Mathurin**, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.



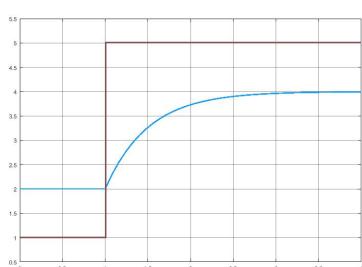
### Méthode – Détermination du temps de réponse

En pratique, on détermine le temps de réponse à 5%.

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

### Résultat –

Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.



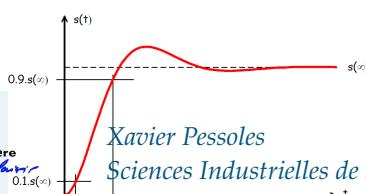
### Exemple – Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

Les pièges du temps de réponse à 5% :

- ▶ le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini**;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à  $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$ ;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

### Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractérise la « vivacité » d'un système.



## 2.2.2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

### Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par  $3\tau$ .

#### Résultat –

Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par  $\text{FTBF}(p) = \frac{K}{1 + \tau p + K}$ . La constante de temps est alors  $\tau_{\text{BF}} = \frac{\tau}{1 + K}$ .

#### Résultat –

Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

### Systèmes d'ordre 2

#### Résultat –

Pour un système du second, à  $\xi$  constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient  $K_{\text{BF}} = \frac{K}{1 + K}$ ,  $\omega_{\text{BF}} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$ ,  $\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$ .

#### Résultat –

- ▶ L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de  $\xi_{\text{BF}}$  le système peut devenir plus ou moins rapide.

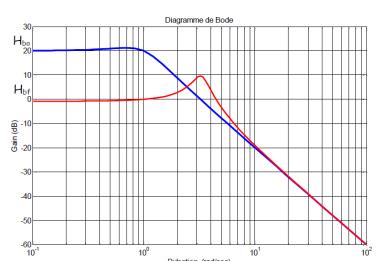
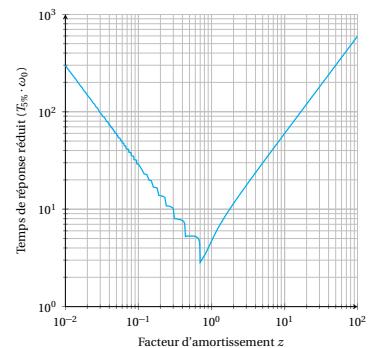
## 2.2.3 Résultats dans le diagramme de Bode

#### Résultat –

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.

#### Résultat –

Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.



## 2.3 Précision des systèmes asservis

### 2.3.1 Système non perturbé

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

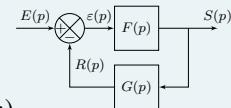
#### Définition –

La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.

Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :

$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \iff \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$



#### Définition –

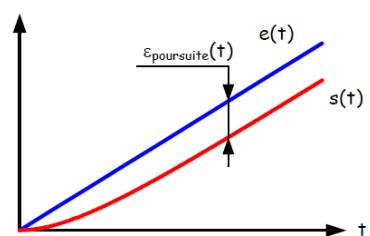
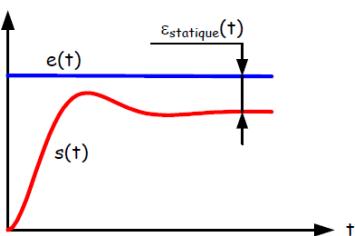
Un système est précis pour une entrée lorsque  $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$ .

#### Définition –

~

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

- ▶ écart statique, système sollicité par une entrée échelon :  $e(t) = E_0$  et  $E(p) = \frac{E_0}{p}$  ;
- ▶ écart en vitesse ou en poursuite, système sollicité par une rampe :  $e(t) = Vt$  et  $E(p) = \frac{V}{p^2}$  ;
- ▶ écart en accélération : système sollicité par une parabole,  $e(t) = At^2$  et  $E(p) = \frac{A}{p^3}$ .



### Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a :  $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p) \iff \varepsilon(p)(1 + F(p)G(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)G(p)}$ .

**Résultat –**

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

**Poursuivons ...**

On a  $\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}$  avec  $m < n$ .

**FTBO de classe nulle**

- ▶ Pour une entrée échelon :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$ .
- ▶ Pour une entrée de type rampe :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$ .
- ▶ Pour une entrée de type parabole :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$ .

**FTBO de classe 1**

- ▶ Pour une entrée échelon :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$ .
- ▶ Pour une entrée de type rampe :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{V}{K_{BO}}$ .
- ▶ Pour une entrée de type parabole :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = +\infty$ .

**FTBO de classe 2**

- ▶ Pour une entrée échelon :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$ .
- ▶ Pour une entrée de type rampe :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$ .
- ▶ Pour une entrée de type parabole :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{A}{K_{BO}}$ .

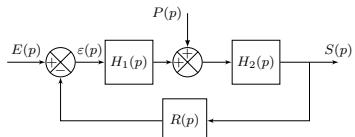
**Résultat –**

Classe	Consigne échelon $e(t) = E_0$ $E(p) = \frac{E_0}{p}$	Consigne en rampe $e(t) = Vt$ $E(p) = \frac{V}{p^2}$	Consigne parabolique $e(t) = At^2$ $E(p) = \frac{A}{p^3}$
0	$\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	$\varepsilon_V = +\infty$	$\varepsilon_A = +\infty$
1	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = \frac{V}{K_{BO}}$	$\varepsilon_A = +\infty$
2	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = 0$	$\varepsilon_A = \frac{A}{K_{BO}}$

### Remarque

L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

### 2.3.2 Système perturbé

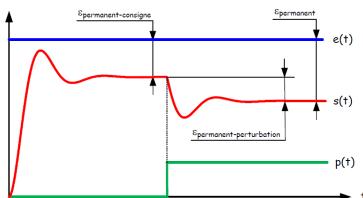


Soit le schéma-blocs ci-contre.

**L'écart est caractérisé par le soustracteur principal, c'est-à-dire celui situé le plus à gauche du schéma-blocs.**

Par lecture directe, on a :  $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)(H_2(p)(P(p) + \varepsilon(p)H_1(p)))$   
 $\iff \varepsilon(p) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \iff \varepsilon(p)(1 + R(p)H_1(p)H_2(p)) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)} - \frac{R(p)H_2(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p).$

On a donc :  $\varepsilon(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + FTBO(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\frac{R(p)H_2(p)}{1 + FTBO(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$



#### Résultat -

Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain  $K_1$  important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.

# Application 1

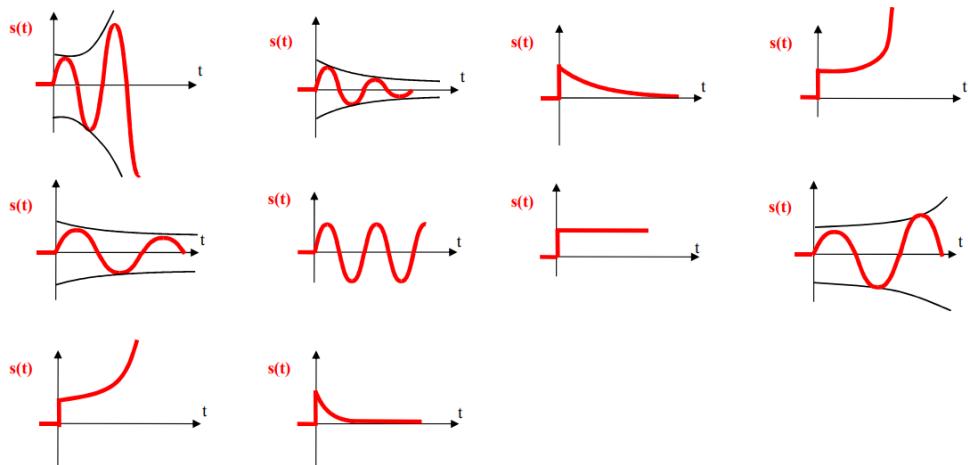
## Stabilité des systèmes – Sujet

### Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03



### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

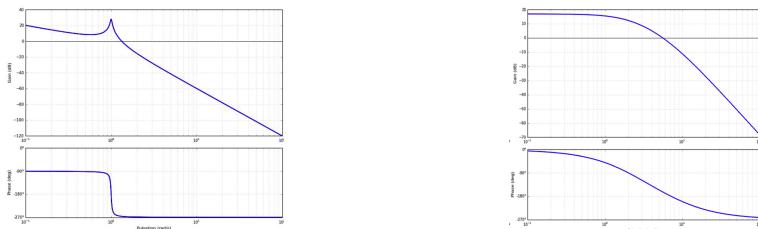
- |                               |                            |                      |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$                  | 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 2. $-3, -2, 0;$               | 5. $-j, j, -1, 1;$         | 8. $2, -1, -3;$      |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 6. $-1, +1;$               | 9. $-6, -4, 7.$      |

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

**Question 2** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

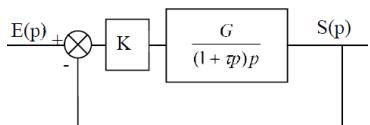


### Exercice 4 – Étude de la stabilité

#### Objectif

- ▶ Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- ▶ La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45 °.

On donne le schéma ci-contre.



On a  $K = 1$ ,  $\tau = 0,1$  et  $G = 20$ .

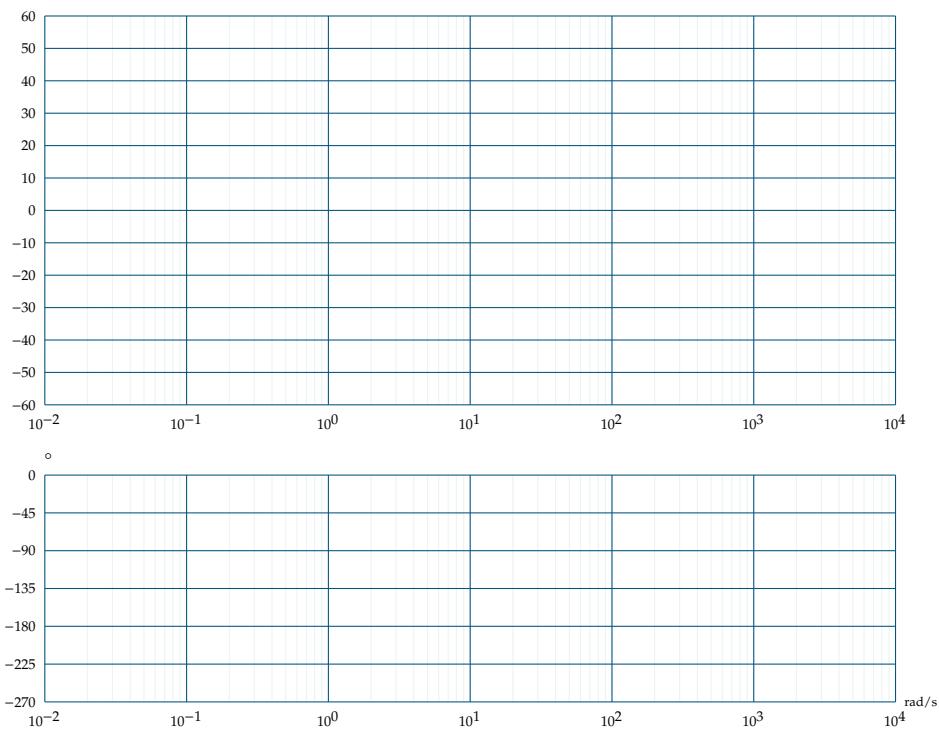
**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.



# Application 1

## Stabilité des systèmes – Corrigé

### Exercice 1 – Réponse impulsionale (entrée Dirac)

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03

### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

**Question 2** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

### Exercice 4 – Étude de la stabilité

**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

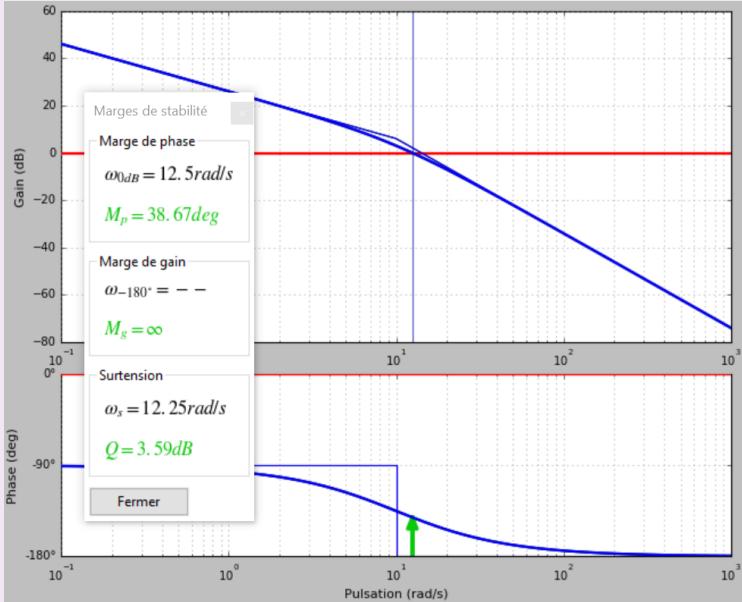
#### Correction

$$\text{Ici on a } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$$

$$\text{Erreur statique (entrée échelon)} : \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe)} : \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = \frac{1}{20}$$

**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

**Correction**

**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Correction**

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Correction**

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ ;
2. On calcule  $\varphi(\omega_c)$ ;
3. La marge de phase est de  $\varphi(\omega_c) - (-180)$ .

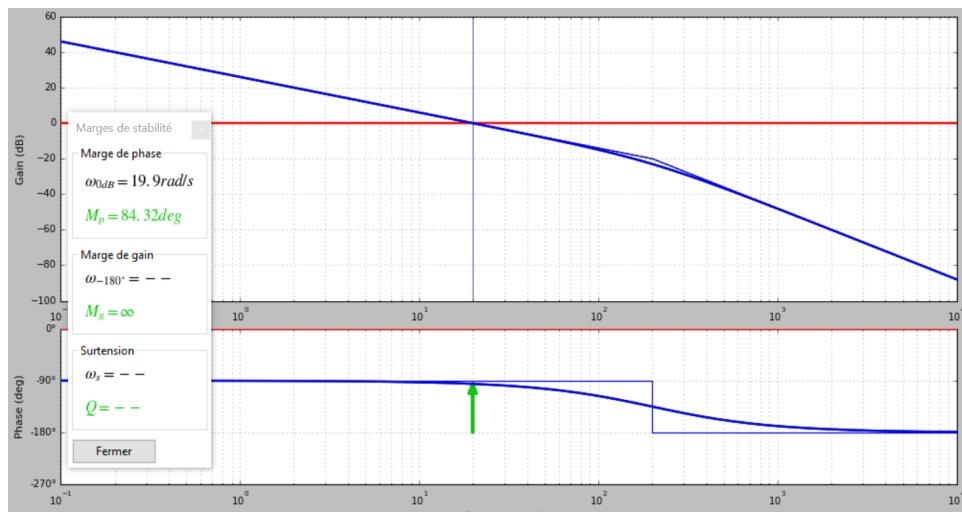
Cherchons  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ . On a  $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$ .  
 $20 \log |FTBO(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20 \log 20 - 20 \log \omega \sqrt{1 + 0,01\omega^2}$ .  
 $G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1 + 0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1 + 0,01\omega_c^2)$  On pose  $x = \omega_c^2$  et on a :  
 $400 = x (1 + 0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$ . On a donc  $\Delta = 412,3^2$  et  $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$   
on conserve la racine positive et  $x_1 = 156,15$  et  $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$ .  
 $\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1 + 0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$ .  
La marge de phase est donc de  $38,66^\circ$ .

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.

**Correction**

Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour  $\tau = 0,005$





# Application 2

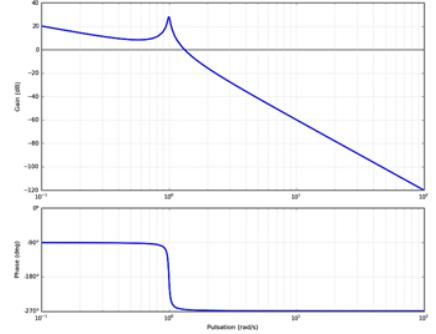
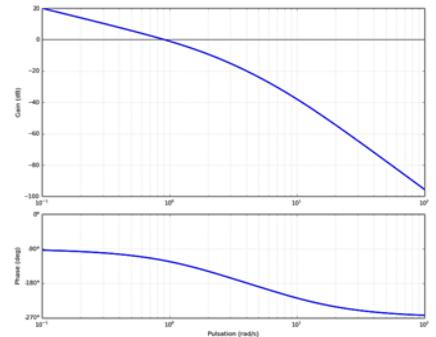
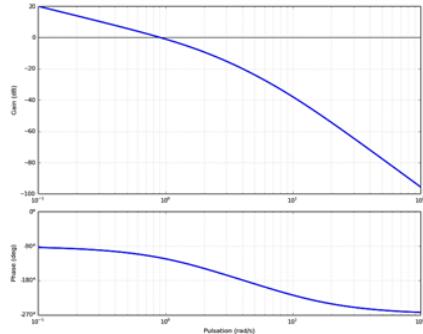
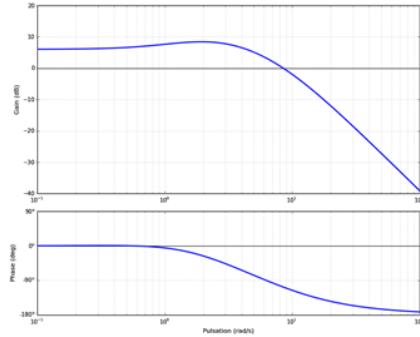
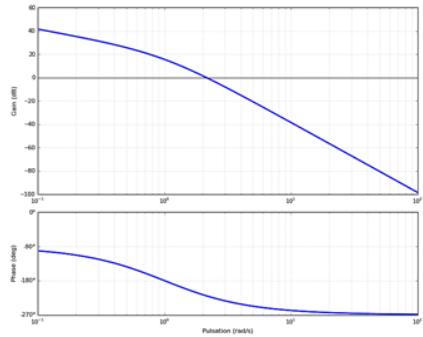
## Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

C2-03

P. Dupas?

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.





## Application 2

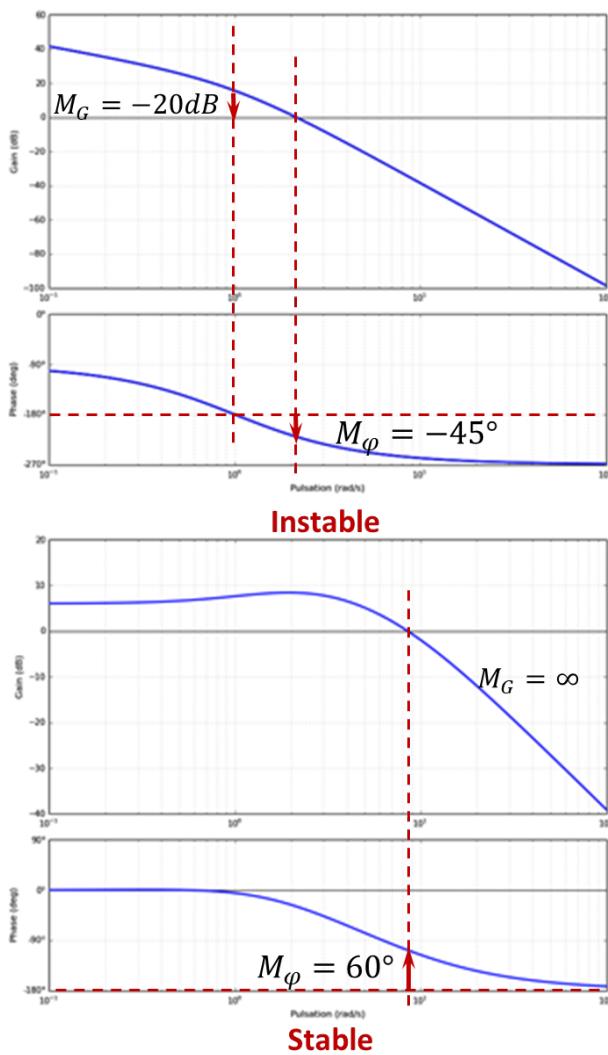
### Stabilité des systèmes – Corrigé

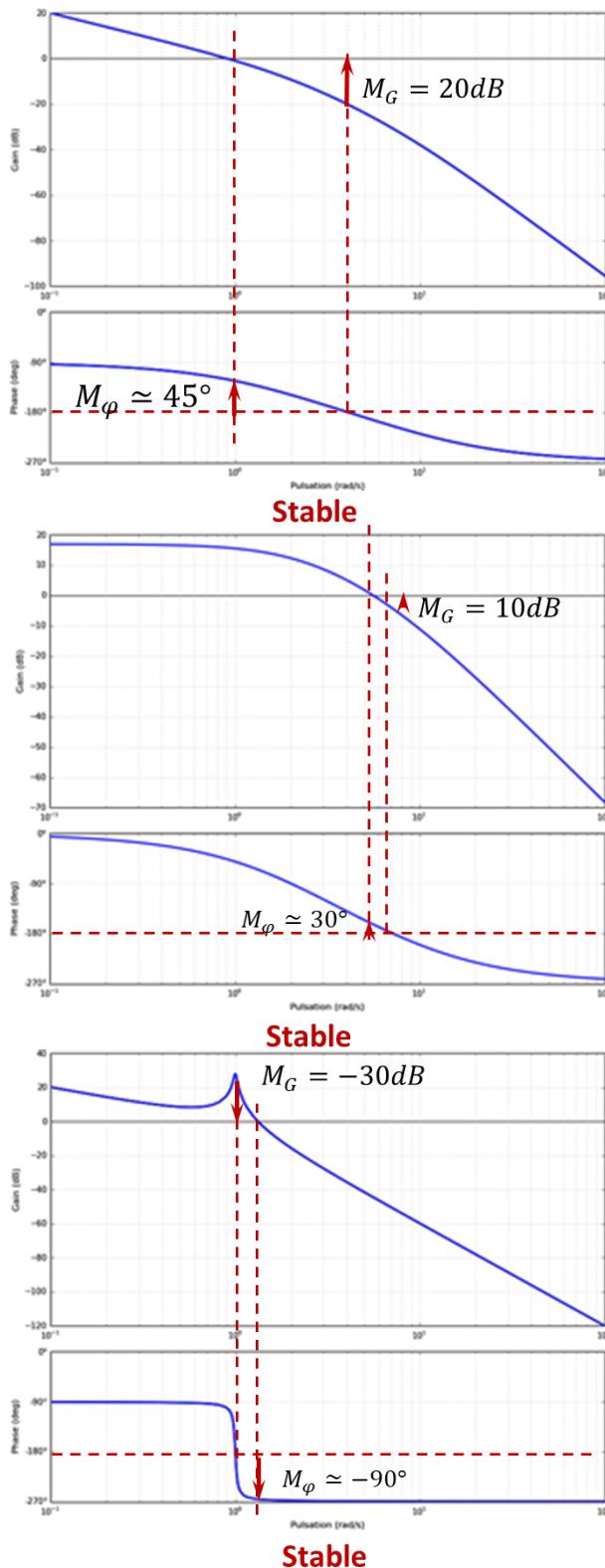
C1-01

C2-03

P. Dupas?

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

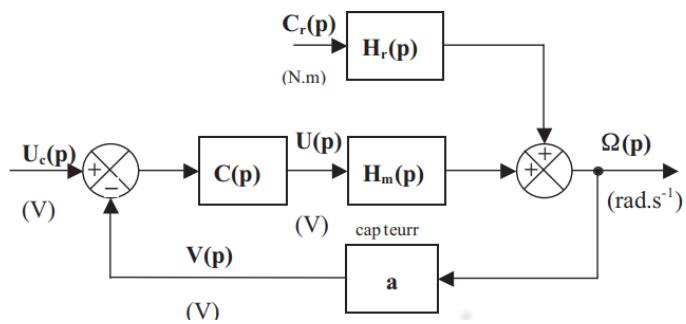




## Application 3

### Précision des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs suivant.



On a  $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$  et  $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .  $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$ .

Le gain du capteur est de  $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ .

On considère que  $C(p) = K_p$  et que  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p$  et que  $C_r(p)$  est une perturbation de type échelon.

**Question 2** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$  et que  $C_r(p) = 0$ .

**Question 3** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$  et que  $C_r(p)$  est une perturbation de type échelon.

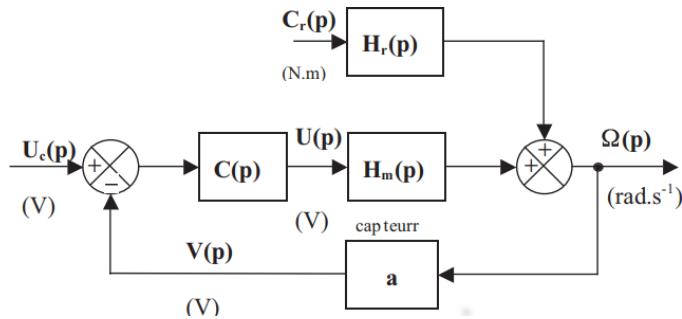
**Question 4** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



# Application 3

## Précision des systèmes – Corrigé

On considère le schéma-blocs suivant.



On a  $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$  et  $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .  $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$ .  
Le gain du convertisseur est de  $g = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ .

Le gain du capteur est de  $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ .

On considère que  $C(p) = Kp$  et que  $C_r(p) = 0$ .

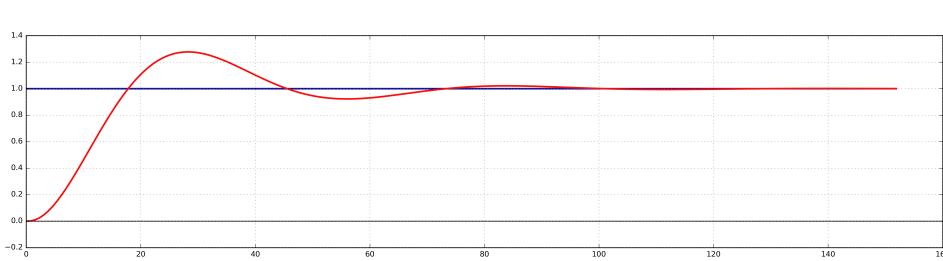
**Question 1** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = Kp$  et que  $C_r(p)$  est une perturbation

**Question 2** Déterminer l'écart statique et l'écart de tension pour la structure ci-dessous. On considère que  $C(n) = K_n + \frac{1}{n}$  et que  $C_0(n) = 0$ .

On considère que  $C(n) \equiv K_n + \frac{1}{n}$  et que  $C_r(n)$  est une perturbation de type échelon.

## Section 4: Data visualization techniques and their applications





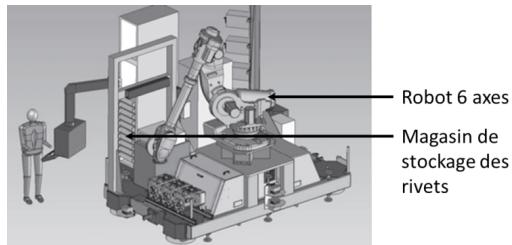
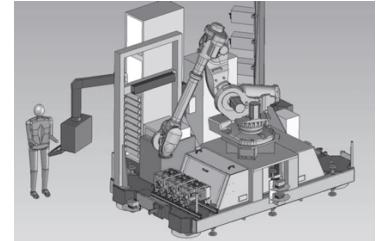
# Application 4

## Cellule d'assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.

### Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

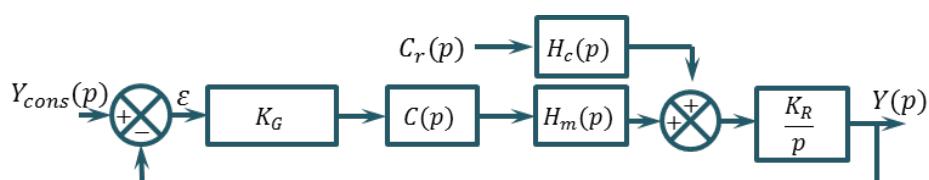


### Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

### Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant  $C_r$  dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



$$H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} \quad \text{et}$$

$$\frac{(R + Lp) K_M}{K_C} \\ H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}.$$

### Etude du modèle sans perturbation

**Question 1** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Question 2** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

### Etude du modèle avec perturbation

**Question 3** Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$ .

**Question 4** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Question 5** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Question 6** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Question 7** On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

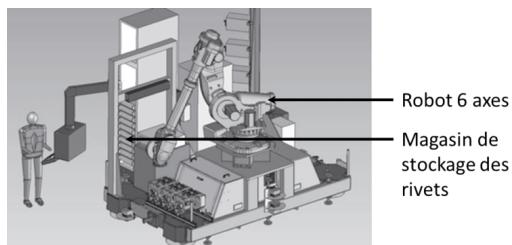
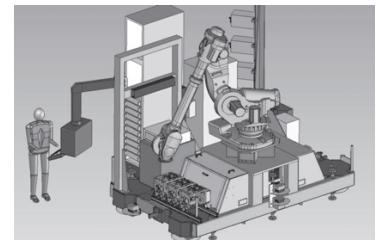
# Application 4

## Cellule d'assemblage pour avion Falcon Corrigé

E3A – PSI 2015.

### Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



### Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

### Étude du modèle simplifié

#### Etude du modèle sans perturbation

**Question 1** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

#### Correction

**Question 2** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

#### Correction

## Etude du modèle avec perturbation

**Question 3** Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$ .

### Correction

On raisonne par superposition :

Si  $C_r(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \\ &\quad . \end{aligned}$$

### Correction

Si  $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C (1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \end{aligned}$$

On a donc :  $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$ .

**Question 4** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

### Correction

**Question 5** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

### Correction

**Question 6** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

### Correction

**Question 7** On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Correction**

===== TD =====





# TD 1

## Drone quadri-rotor – Sujet

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

### Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ ) et en tangage (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{y})$ ) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

### Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

### Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 %
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s



de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ . On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

## Recherche du point de fonctionnement $\omega_0$

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{Z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240$  g. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ . La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.

**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

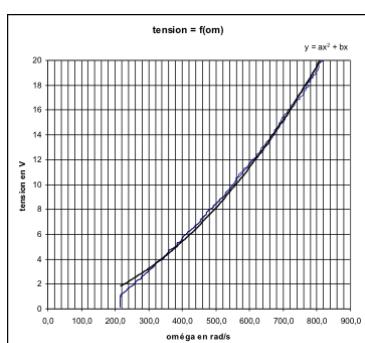
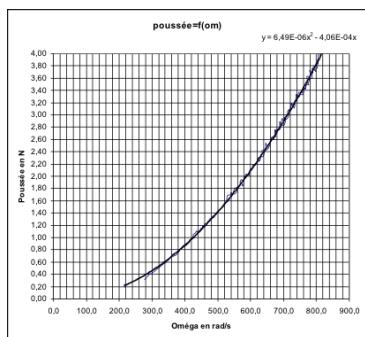
Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$  et la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s en régime permanent lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125$  ms.

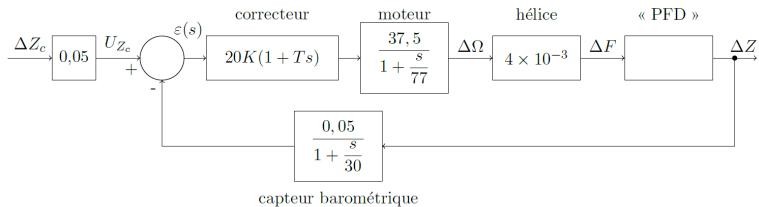
**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :





Le gain du capteur barométrique est de  $0,05 \text{ V m}^{-1}$ . On pose  $z(t) = z_0 + \delta z(t)$ ,  $\Delta Z(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta z(t)$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :  $m\ddot{z} = 4F - mg$ .

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 2.3, en gras avec un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2s$ ).

**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2s$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et  $1000 \text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120 \text{ dB}$  et  $10 \text{ dB}$ .

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega_{c0dB} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure 2.4 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.

**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

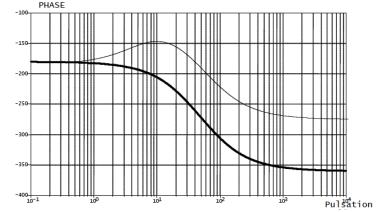


FIGURE 2.3 – Courbe de phase

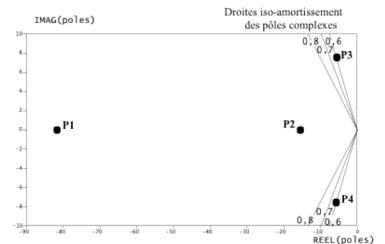
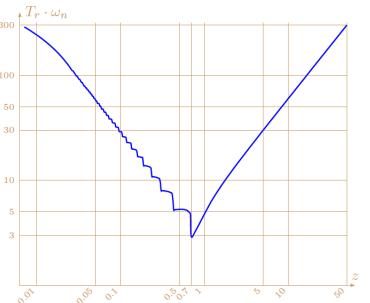


FIGURE 2.4 – Carte des pôles



### Éléments de correction

1.  $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0;$
2.  $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}.$
3.  $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}.$
4.  $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}.$
5.  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}.$
6.  $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$  et  $k_b = \frac{a}{b\tau}.$
7.  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}.$
- 8.
- 9.
10.  $K = 17,9.$
11. FTBO de classe 2,  $\varepsilon_s$  nul.
12.  $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j.$
13.  $\xi = 0,6$
- 14.
15.  $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}.$   $\omega_n \simeq 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16.  $t_{5\%} \simeq 0,61 \text{ s}.$



## TD 1

# Drone quadri-rotor – Corrigé

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

### Présentation

C1-01

C2-03

### Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

### Linéarisation du modèle de moteur

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

#### Correction

En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence,  $\delta u = 0$  et  $\delta\omega = 0$ .

On a donc  $\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$ . En notant  $\omega_0$  et  $u_0$  les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a  $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

#### Correction

On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$$

$$\Rightarrow \frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(\omega_0 + \delta\omega) - k_q(\omega_0 + \delta\omega)^2 + \frac{k_v}{\tau}(u_0 + \delta u)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega_0 - \frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}u_0 + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{Or } \frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0 \text{ (question précédente)}; \text{ donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

Au final,  $A = \frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}$ .

On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

#### Correction

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient  $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$  et donc

$$\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}. \text{ En conséquence, } K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \frac{k_v}{1 + \tau k_q 2\omega_0}.$$

$$\tau_m = \frac{\tau}{1 + \tau k_q 2\omega_0}$$

## Recherche du point de fonctionnement $\omega_0$

**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ .

#### Correction

On a  $4F_0 = mg$ . Le poids du drone est de  $0,240 \times 9,81 = 2,3544$  N. Chaque moteur doit donc exercer  $\frac{2,3544}{4} = 0,59$  N.

**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

#### Correction

En lisant le graphe, on obtient  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

#### Correction

Lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ , on a  $u = a\omega^2 + b\omega_0$ . Par ailleurs en régime stationnaire, on a

$$\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0. \text{ Il en résulte que } u_0 = \frac{1}{k_v}\omega_0 + \frac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2.$$

On a donc  $a = \frac{k_q\tau}{k_v}$  et  $b = \frac{1}{k_v}$ . On a donc  $b$  tel que  $[V] = [B][s^{-1}]$  et  $[B] = [V][s]$ . On a donc  $k_v$  en  $[V^{-1}s^{-1}]$ .

Par ailleurs,  $[V] = [k_q][s][Vs][s^{-2}]$  et  $k_q$  n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de

fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

### Correction

On a vu que  $4_0 F = mg$ .

Par ailleurs,  $m\ddot{z} = 4F - mg$  et donc,  $m \frac{d(z_0 + \delta z(t))}{dt} = 4(F_0 + \delta F(t)) - mg$  et  $m \frac{d(\delta z(t))}{dt} = 4\delta F(t)$ . Dans le domaine de Laplace, on a  $mp^2 \Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$ . En conséquences,  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}$ .

La FTBO s'exprime alors par  $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$ .

**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2\text{ s}$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et  $1000\text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120\text{ dB}$  et  $10\text{ dB}$ .

### Correction

On a  $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$ . Les pulsations de cassure sont alors :  $5\text{ rad s}^{-1}$ ,  $30\text{ rad s}^{-1}$  et  $77\text{ rad s}^{-1}$ . Les pentes sont alors :

- ▶ pour  $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$  :  $-40\text{ dB/décade}$ ;
- ▶ pour  $5\text{ rad s}^{-1} < \omega < 30\text{ rad s}^{-1}$  :  $-20\text{ dB/décade}$ ;
- ▶ pour  $30\text{ rad s}^{-1} < \omega < 77\text{ rad s}^{-1}$  :  $-40\text{ dB/décade}$
- ▶ pour  $\omega > 77\text{ rad s}^{-1}$  :  $-60\text{ dB/décade}$ .

Pour une pulsation de  $10 \times 10^{-2}\text{ rad s}^{-1}$ , on a  $FTBO(p) \approx \frac{2,5}{p^2}$ . On a donc un gain  $\approx 20\log\left(\frac{2,5}{0,01^2}\right) \approx 88\text{ dB}$ . Reste à tracer...

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega_{c0\text{dB}} = 1,5\text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

### Correction

Si on considère que pour  $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$ , on a  $H_{BO}(p) \approx \frac{2,5K}{p^2}$ . Dans ces conditions, pour  $K = 1$ , on a  $\left|\frac{2,5}{-\omega^2}\right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \approx 1,58\text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

### Correction

En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation  $\omega_{-145}$  pour laquelle la phase est de  $-180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$ , soit  $\arg FTBO(j\omega) = -145^\circ$ . (Résolution à faire à la calculatrice, sur

Python ou autre. Il y a surement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite  $K$  tel que  $|FTBO(j\omega_{-145})| = 1$ . (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

#### Correction

La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.

**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

#### Correction

Les pôles dominants sont  $P_2 \approx -15$ ,  $P_3 \approx -5 + 8i$ ,  $P_4 \approx -5 - 8i$ .

**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

#### Correction

Dans ce cas, on ne prend que  $P_3$  et  $P_4$ .  $\xi = 0,6$ .

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié ?

#### Correction

Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

#### Correction

**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

#### Correction

## TD 2

# Stabilisateur actif d'image – Sujet

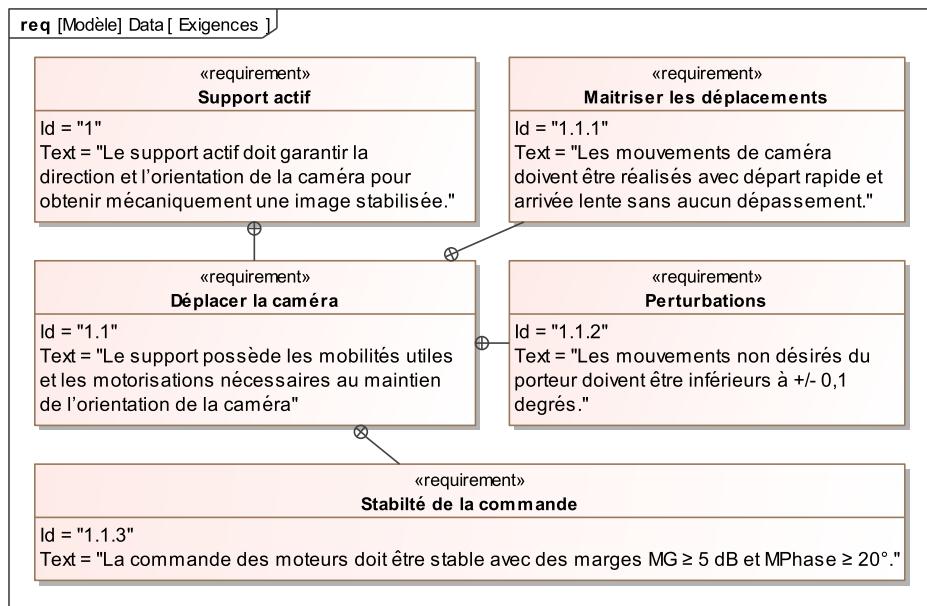
Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

### Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



### Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

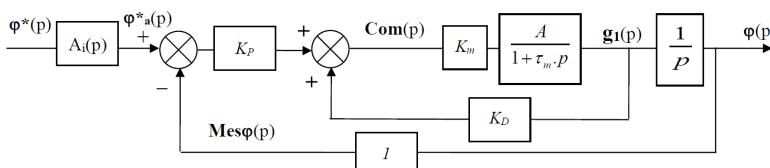
### Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne

présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur  $K_m$ ;
  - une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur  $com(t)$  et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Le réglage retenu est tel que  $K_m A = 1$ . **Le retour  $K_D$  agit par un sommateur.** Dans cette étude,  $A_i(p) = 1$ .



**FIGURE 2.5 – Modèle 1 de l'axe de tangage.**

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

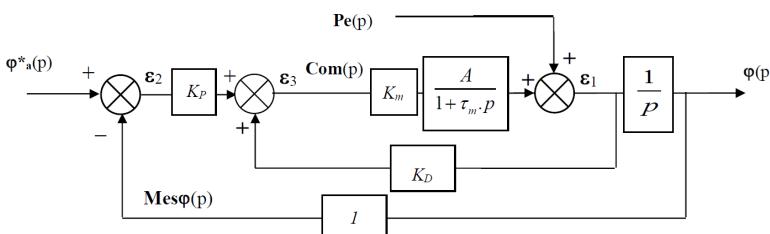
Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

En accord avec les résultats précédents, on fixe  $K_D = 0,5$  et  $\tau_m = 0,2\text{s}$ . Dans un premier temps on impose  $K_P = 10\text{s}^{-1}$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ( $A_1(p) = 1$ ). On considère ici que la consigne est constante donc  $\varphi_a^*(t) = 0$ . Une perturbation  $Pe(p)$  agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle  $Com(p)$  la transformée de Laplace de la commande du moteur  $com(t)$ .



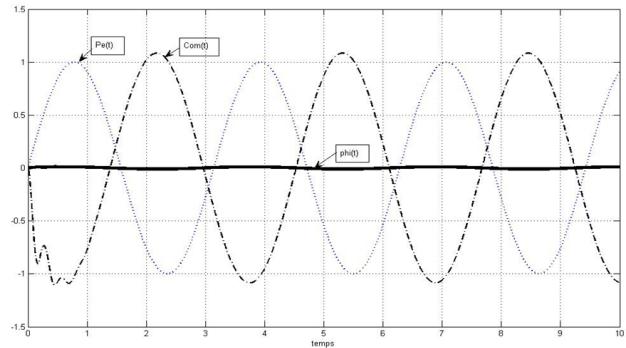
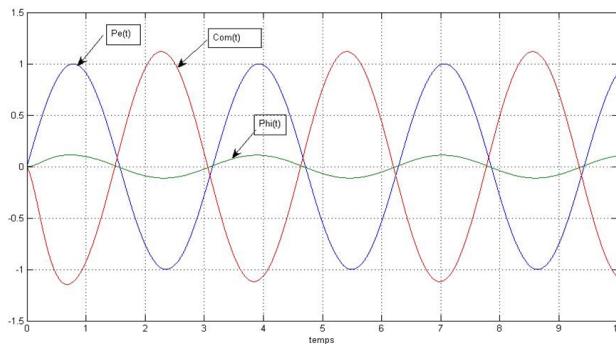
**FIGURE 2.6** – Modèle 2 de l'axe de tangage.

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $\text{Pe}(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $\text{com}(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer

la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$ .



**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5$  dB et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

$\omega$ (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	$-112^\circ$	$-135^\circ$	$-153^\circ$	$-160^\circ$	$-166^\circ$
$20 \log  F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

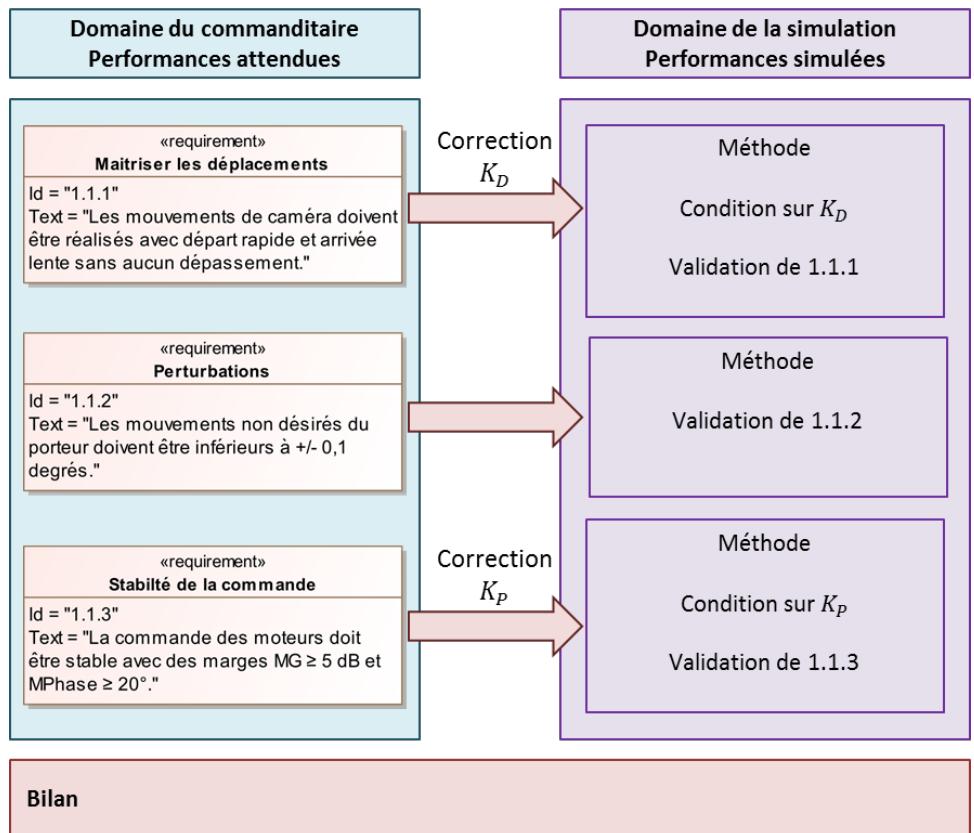
Le figure suivante (droite) présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).

**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $\text{Com}(t)$  relativement à  $\text{Pe}(t)$  en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure précédente – droite).

**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

## Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



#### Éléments de correction

1.  $\frac{FTBO(p)}{K_P} = \frac{p(1 + \tau_m p - K_D)}{FTBF(p)}$  et  $\frac{FTBF(p)}{K_P} = A_i(p) \frac{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}$ .
2.  $K_D < 1$ .
- 3.
4.  $\frac{Stab(p)}{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)} = \frac{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}$ .
5.  $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = -1$ .
6.  $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$  et  $\frac{Pert(p)}{1 + \tau_m p} = \frac{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D) A K_m}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D) A K_m}$ .
7.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ$ .
8.  $K_P < 1,41$ .
9. .
10. .

## TD 2

# Stabilisateur actif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

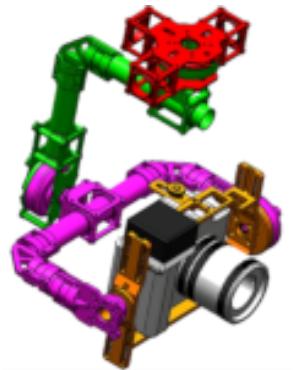
### Mise en situation

#### Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

### Travail demandé

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).



#### Correction

**Attention au signe du comparateur de la boucle imbriquée !**

On définit la FTBO par  $FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{Mes\varphi(p)}$  avec  $\varepsilon(p)$  la sortie du premier comparateur.

On a d'une part  $G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}$ . On a alors  $FTBO(p) = \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$ .

Si on définit la FTBF par  $FTBF(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}$ , on a  $FTBF(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$

$= A_i(p) \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_p}$ .

Au final,  $FTBO(p) = \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$  et  $FTBF(p) = A_i(p) \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_p}$ .

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

**Correction**

Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur  $D(p)$  de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a  $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$  et donc nécessairement,  $1 - K_D > 0$  et  $K_D < 1$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

**Correction**

$$\text{On a : FTBF}(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}.$$

$$\text{On a alors } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}} \text{ et } \xi = \frac{1 - K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1 - K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1. \text{ Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.}$$

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Correction**

$$\text{On a } \varepsilon_2(p) = -\text{Mes}(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p) \frac{1}{p}. \text{ Par ailleurs, } \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left( K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}.$$

$$\text{On a donc } \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left( \frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \right) =$$

$$\text{Pe}(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)} = \text{Pe}(p).$$

$$\text{On a donc } \text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}.$$

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $\text{Pe}(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $\text{com}(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Correction**

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Com}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Stab}(p) \text{Pe}(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1 \text{ si } AK_m = 1.$$

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer

la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$ .

**Correction**

On a  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$  (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que  $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$ ,  $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$  et  $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)$ .

En conséquences,  $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p} \iff \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) +$

$$\varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p) \Leftrightarrow p\varphi(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p)$$

$$\text{et donc } \text{Pert}(p) = \frac{1}{p\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} = \frac{1}{p\left(1 + \frac{K_P - pK_D}{p}\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} =$$

$$\frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}.$$

**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Correction**

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\text{Pert}(p)\text{Pe}(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_P A K_m} = \frac{1}{K_P} = 0,1^\circ. \end{aligned}$$

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5 \text{ dB}$  et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

**Correction**

Pour une marge de phase de  $20^\circ$ , la phase doit être de  $-160^\circ$  lorsque le gain est nul. Or en  $-160^\circ$  le gain est de  $-3 \text{ dB}$ . Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer  $K_P$  tel que  $20 \log K_P = 3$  soit  $K_P < 10^{\frac{3}{20}} \approx 1,41$ .

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $\text{Com}(t)$  relativement à  $\text{Pe}(t)$  en utilisant le résultat de la question 5.

**Correction**

La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question 5). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de  $0,1^\circ$  et  $-0,1^\circ$ .

**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

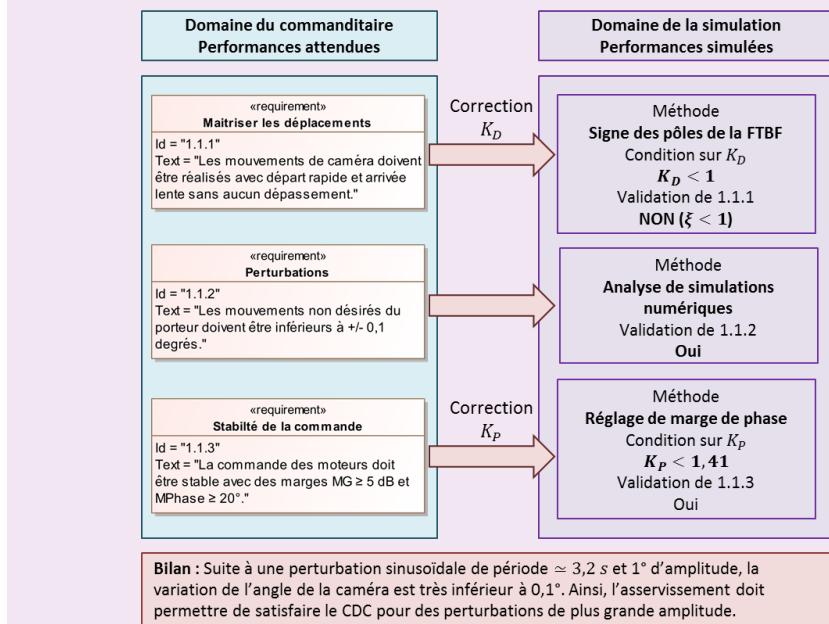
### Correction

Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à 0,1 degrés (en valeur absolue).

### Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

### Correction



## TD 3

# Direction automobile découplée – Sujet

Banque PT – SIA 2017.

**Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!**

### Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.16).

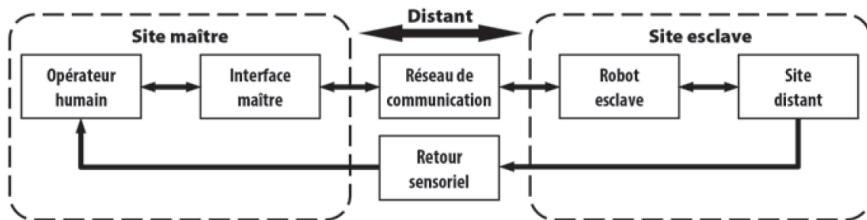


FIGURE 2.7 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.23) précise les principales exigences.

### Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.17.

Notations :

- arbre-volant  $v$  : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- $G_v$  : centre d'inertie de l'arbre-volant  $v$ ;
- $I_v(G_v)$  : opérateur d'inertie de  $v$  au point  $G_v$ ;
- $J_v$  : le moment d'inertie de  $v$  autour de l'axe  $(G_v, \vec{x}_v)$ ;
- $f_v$  : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$  : l'angle de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\theta_v(p)$  dans le domaine de Laplace);

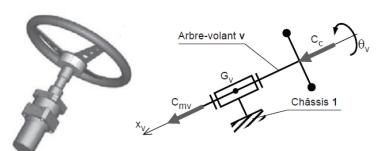


FIGURE 2.8 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

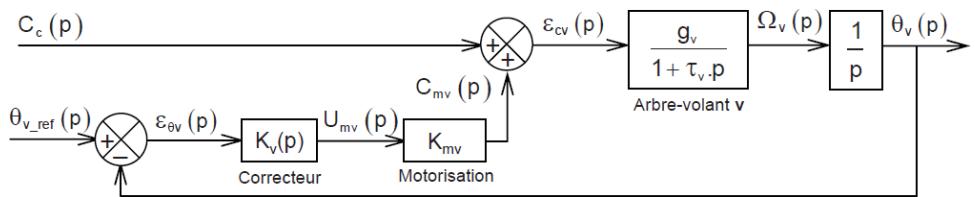
- $\omega_v(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\Omega_v(p)$  dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- $G_v$  est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux  $C_f \vec{x}_v$ ;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant  $v$  se réduisent respectivement aux couples  $C_c \vec{x}_v$  et  $C_{mv} \vec{x}_v$ .

## Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.18 où le retour est unitaire. On note  $\varepsilon_{\theta_v}(t)$  l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et  $\varepsilon_{cv}(t)$  le couple résultant des couples  $C_c$  et  $C_{mv}$ .



**FIGURE 2.9 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage**

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :  $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ;  $\tau_v = 0,1 \text{ s}$  et  $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$ .

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain  $K_{mv}$ .

## Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que  $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$  avec  $\tau_i = \alpha \tau_v$ .

**Question 1** Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité?

**Question 2** Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $\text{FTBO}_{v1}(p)$  du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que  $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p) \varepsilon_{\theta_v}(p)$  sous la forme  $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$  pour laquelle on précisera les expressions de  $K_{BOv1}$  et de  $H(p)$  avec  $H(p)$  de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si  $\alpha$  doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de  $\alpha$ ).

On commence par choisir  $\tau_i$  en prenant  $\alpha = 10$  et on cherche à optimiser  $K_i$ .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta_v}(p) = \frac{\theta_{v\_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

**Question 3** Quelle doit être la valeur minimale de  $K_i$  pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$ .

**Question 4** Tracer sur le lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

**Question 5** Donner, par lecture du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

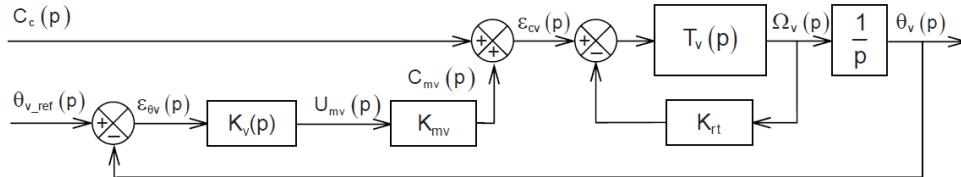
On donne (Figure 2.19) l'évolution de cette pulsation  $\omega_\ell$  en fonction de  $\alpha$  et un abaque qui représente la valeur maximale  $\varphi_m$  de  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\alpha$ .

**Question 6** Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte,  $\omega_0$ , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de  $\alpha$  et/ou  $K_i$ ? On pourra s'aider des abaques fournis (Figure 2.19) pour justifier la réponse.

On donne (Figure 2.20), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1<sup>er</sup> dépassement en % de la valeur finale, en fonction de  $K_i$  et pour  $\alpha = 10$ .

**Question 7** Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi  $\alpha = 10$ .

## Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique



**Question 8** Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

**Question 9** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée  $T_{\text{vrt}}(p)$  définie par  $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$  en fonction de  $T_v(p)$  et  $K_{\text{rt}}$ . Mettre alors  $T_{\text{vrt}}(p)$  sous la forme  $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle, on précisera l'expression de  $\beta$  en fonction de  $K_{\text{rt}}$  et du gain statique  $g_v$ .

**Question 10** Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte  $\text{FTBO}_{v2}(p)$ , telle que,  $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$ , peut ainsi se mettre sous la forme  $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle on donnera l'expression de  $K_{\text{BOv2}}$  en fonction de  $K_{\text{mv}}$ ,  $g_v$ ,  $\tau_v$ ,  $K_i$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

On donne sur la Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v2}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$  (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec  $\beta = 1/6$  (non justifié) et pour  $\alpha = 10$  (valeur choisie précédemment).

**Question 11** Justifier que  $\beta$  doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (Figure 2.22), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement

On note :

- ▶  $\varphi(\omega)$  la phase de  $H(p)$ , soit  $\text{Arg}[H(j\omega)]$ ;
- ▶  $\omega_\ell$  la plus grande pulsation qui vérifie  $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$ .

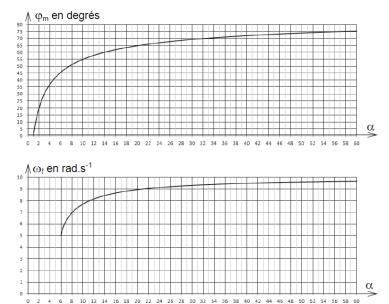


FIGURE 2.10 – Aboques de réglage de  $H(p)$  en fréquentiel

FIGURE 2.12 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

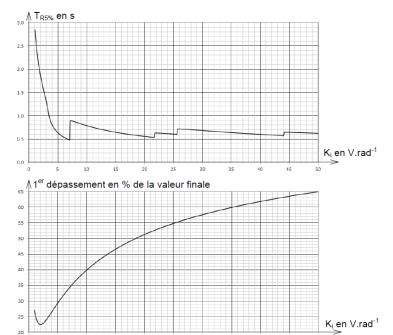
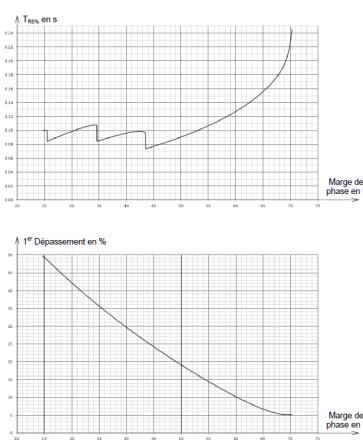


FIGURE 2.11 – Aboques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée



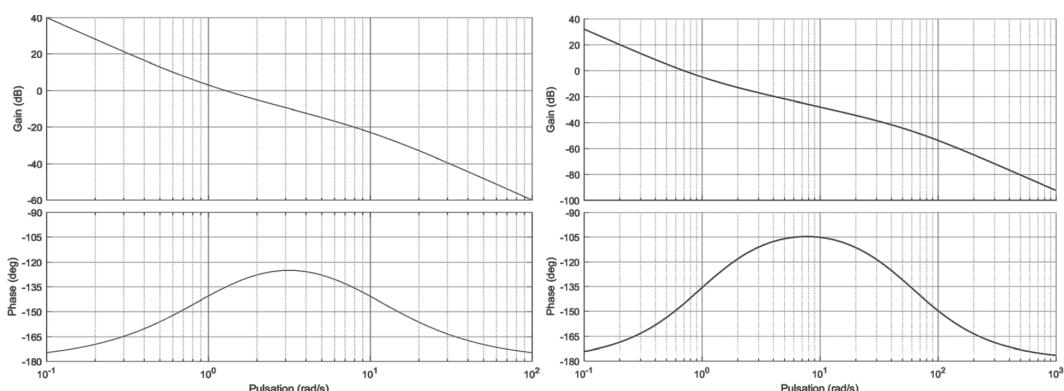
**FIGURE 2.13 – Abaques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique**

#### Éléments de correction

1. .
2.  $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v}$  et  $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}$ ,  $\alpha > 1$ .
3.  $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$  et  $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$ .
4. .
5.  $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$ .
6. .
7. .
8. .
9.  $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g v}$
10.  $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g v}{\alpha \tau_v}$ .
11. .
12.  $M_\varphi = 58^\circ$ .
13.  $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$ .
14. .
15. .

**FIGURE 2.14 – Exigences**

Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
<b>Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte <math>\omega_0</math> 30 rad/s (<math>\approx 5</math> Hz)</li> <li>2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 0,1 s</li> <li>3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle nulle <math>\leq 0,5\%</math> de <math>\Omega_{v0}</math></li> <li>4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple nulle <math>\leq 10\%</math> de <math>C_{s0}</math></li> <li>5- Stabilité 45°</li> <li>6- Marge de phase 20 dB</li> <li>7- Marge de gain 0%</li> <li>8- Amortissement aucune <math>\pm 5\%</math></li> <li>9- 1<sup>er</sup> dépassement en réponse indicielle (boucle fermée) mini mini</li> </ul>		



**FIGURE 2.15 – Lieux de transfert de  $FTBOv1(p)$  et  $FTBOv2(p)$**

## TD 3

# Direction automobile découplée – Corrigé

Banque PT – SIA 2017.

**Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!**

### Mise en situation

Le principe de la direction découplée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.16).

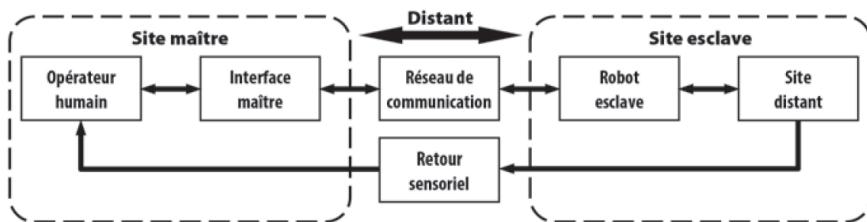


FIGURE 2.16 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découplée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.23) précise les principales exigences.

### Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.17.

Notations :

- arbre-volant  $v$  : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- $G_v$  : centre d'inertie de l'arbre-volant  $v$ ;
- $I_v(G_v)$  : opérateur d'inertie de  $v$  au point  $G_v$ ;
- $J_v$  : le moment d'inertie de  $v$  autour de l'axe  $(G_v, \vec{x}_v)$ ;
- $f_v$  : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$  : l'angle de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\theta_v(p)$  dans le domaine de Laplace);

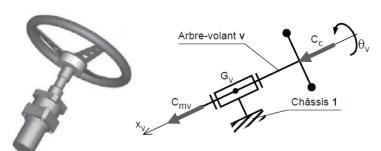


FIGURE 2.17 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\Omega_v(p)$  dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- $G_v$  est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux  $C_f \vec{x}_v$ ;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant  $v$  se réduisent respectivement aux couples  $C_c \vec{x}_v$  et  $C_{mv} \vec{x}_v$ .

## Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.18 où le retour est unitaire. On note  $\varepsilon_{\theta_v}(t)$  l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et  $\varepsilon_{cv}(t)$  le couple résultant des couples  $C_c$  et  $C_{mv}$ .

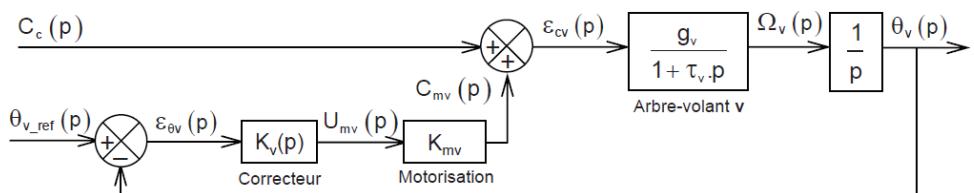


FIGURE 2.18 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :  $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ;  $\tau_v = 0,1 \text{ s}$  et  $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$ .

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain  $K_{mv}$ .

## Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que  $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$  avec  $\tau_i = \alpha \tau_v$ .

**Question 1** Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

### Correction

**Question 2** Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_{v1}(p)$  du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que  $\theta_v(p) = FTBO_{v1}(p)\varepsilon_{\theta_v}(p)$  sous la forme  $FTBO_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$  pour laquelle on précisera les expressions de  $K_{BOv1}$  et de  $H(p)$  avec  $H(p)$  de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si  $\alpha$  doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de  $\alpha$ ).

### Correction

On commence par choisir  $\tau_i$  en prenant  $\alpha = 10$  et on cherche à optimiser  $K_i$ .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta v}(p) = \frac{\theta_{v\_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

**Question 3** Quelle doit être la valeur minimale de  $K_i$  pour que les critères de précision soient satisfaits ?

#### Correction

On donne [Figure 2.24](#) le tracé du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$ .

**Question 4** Tracer sur le lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

#### Correction

**Question 5** Donner, par lecture du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

#### Correction

On donne ([Figure 2.19](#)) l'évolution de cette pulsation  $\omega_\ell$  en fonction de  $\alpha$  et un abaque qui représente la valeur maximale  $\varphi_m$  de  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\alpha$ .

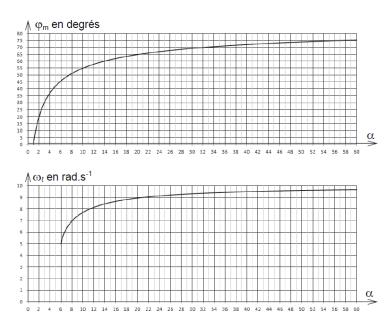
**Question 6** Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte,  $\omega_0$ , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de  $\alpha$  et/ou  $K_i$ ? On pourra s'aider des abaques fournis ([Figure 2.19](#)) pour justifier la réponse.

#### Correction

On donne ([Figure 2.20](#)), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1<sup>er</sup> dépassement en % de la valeur finale, en fonction de  $K_i$  et pour  $\alpha = 10$ .

On note :

- ▶  $\varphi(\omega)$  la phase de  $H(p)$ , soit  $\text{Arg}[H(j\omega)]$ ;
- ▶  $\omega_\ell$  la plus grande pulsation qui vérifie  $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$ .



**FIGURE 2.19 – ABAQUES DE RÉGLAGE DE  $H(p)$  EN FRÉQUENTIEL**

**Question 7** Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi  $\alpha = 10$ .

#### Correction

## Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

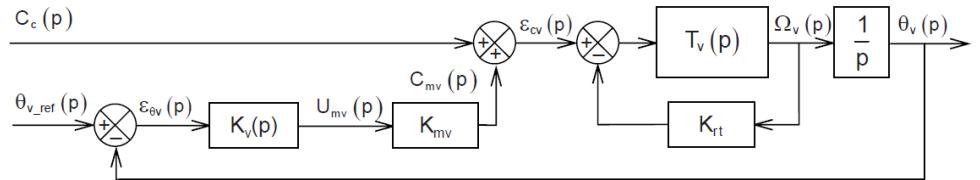


FIGURE 2.21 – Schéma-blocs de l’unité de pilotage avec retour tachymétrique

**Question 8** Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l’objectif poursuivi par la mise en œuvre d’une telle correction.

### Correction

**Question 9** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée  $T_{\text{vrt}}(p)$  définie par  $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{\text{cv}}(p)$  en fonction de  $T_v(p)$  et  $K_{\text{rt}}$ . Mettre alors  $T_{\text{vrt}}(p)$  sous la forme  $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle, on précisera l’expression de  $\beta$  en fonction de  $K_{\text{rt}}$  et du gain statique  $g_v$ .

### Correction

**Question 10** Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte  $\text{FTBO}_{v2}(p)$ , telle que,  $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$ , peut ainsi se mettre sous la forme  $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2} \frac{1 + \beta \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle on donnera l’expression de  $K_{\text{BOv2}}$  en fonction de  $K_{\text{mv}}$ ,  $g_v$ ,  $\tau_v$ ,  $K_i$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

### Correction

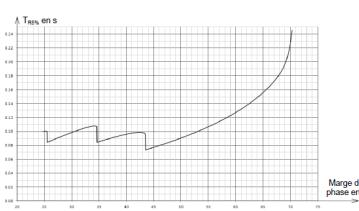
On donne sur la Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v2}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$  (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec  $\beta = 1/6$  (non justifié) et pour  $\alpha = 10$  (valeur choisie précédemment).

**Question 11** Justifier que  $\beta$  doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

### Correction

On donne (Figure 2.22), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d’angle  $\theta_{v\_ref}$ , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec  $\beta = 1/6$ .

**Question 12** Donner par lecture des abaques (Figure 2.22), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.



**Correction**

**Question 13** Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de  $\text{FTBO}_{v2}(p)$ , tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de  $K_i$  permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

**Correction**

**Question 14** Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

**Correction**

**Question 15** Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système ?

**Correction**

Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.	1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte $\omega_0$ 2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle - pour une consigne en échelon - pour une consigne en rampe de pente $\Omega_{v0}$ 4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple - pour une perturbation en échelon - pour une perturbation en rampe de pente $C_{e0}$ 5- Stabilité - Marge de phase - Marge de gain 6- Amortissement - 1 <sup>er</sup> dépassement en réponse indicielle (boucle fermée)	30 rad/s ( $\approx 5$ Hz) 0,1 s nulle $\leq 0,5\%$ de $\Omega_{v0}$ nulle $\leq 10\%$ de $C_{e0}$ 45° 20 dB 0%	mini $\pm 20$ ms aucune $\pm 0,2\%$ aucune $\pm 5\%$ mini mini 15% maxi

**Éléments de correction**

1. .
2.  $K_{\text{BOv1}} = \frac{K_i K_{\text{Mnv}} g v}{\alpha \tau_v} \text{ et } H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}, \alpha > 1.$
3.  $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{\text{Mnv}}} \text{ et } K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}.$
4. .
5.  $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}.$
6. .
7. .
8. .
9.  $\beta = \frac{1}{1 + K_{\text{rtg}} v} \frac{K_i K_{\text{Mnv}} \beta g v}{K_i K_{\text{Mnv}} \beta g v}.$
10.  $K_{\text{BOv2}} = \frac{1}{\alpha \tau_v}.$
11. .
12.  $M_Q = 58^\circ.$
13.  $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}.$
14. .
15. .

**FIGURE 2.23 – Exigences**

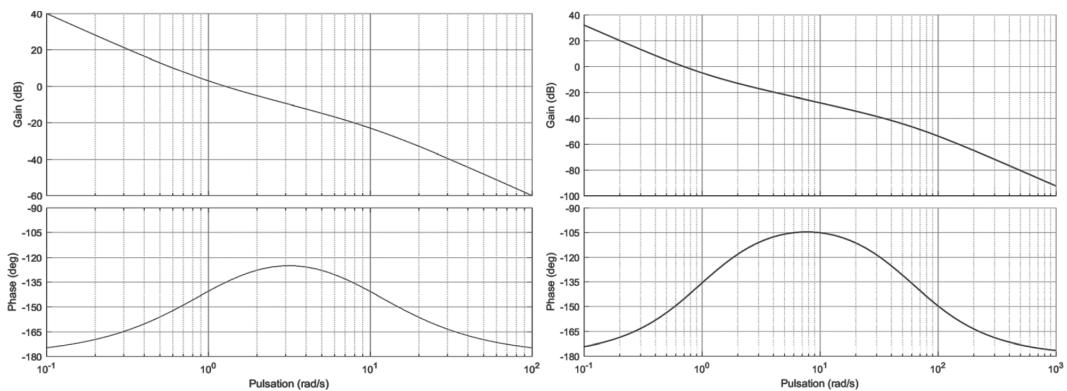


FIGURE 2.24 – Lieux de transfert de  $\text{FTBO}_{v1}(p)$  et  $\text{FTBO}_{v2}(p)$



## TD 4

# Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Sujet

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

### Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension  $u$  par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

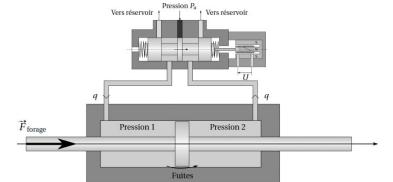
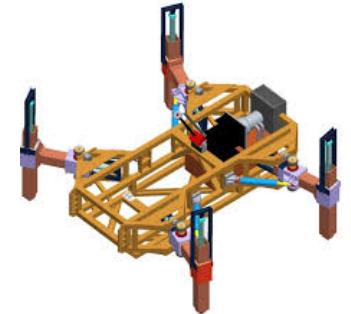
Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement :  $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$ ;
- ▶ stabilité : marge de phase de  $45^\circ$ , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

### Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶  $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , surface utile des pistons;
- ▶  $b = 10^9 \text{ Pa}$  : module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶  $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$  : pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶  $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$  : constante de débit de la servovalve;
- ▶  $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$  : facteur de fuite dans le vérin;
- ▶  $q(t)$  : débit entrant et sortant du vérin;
- ▶  $V_1$  et  $V_2$  : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse :  $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ );
- ▶  $p(t) = p_1 - p_2$  : différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶  $z(t)$  : déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶  $M = 700 \text{ kg}$  : masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶  $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$  : raideur équivalente de la structure du robot;



- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$  : coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$  : effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$  : position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur  $k$ .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe  $\vec{z}$  du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

**Question 1** Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>► l'inertie du robot;</li> <li>► à la raideur du robot;</li> <li>► au frottement visqueux;</li> <li>► à la pression dans la chambre;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>► à la compressibilité de l'huile;</li> <li>► au déplacement de la tige de vérin;</li> <li>► aux fuites entre les chambres.</li> </ul> |
|--|---|

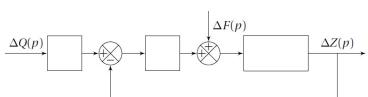
**Question 2** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $F_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

**Question 3** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $F_{\text{forage}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$  et  $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Question 4** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $Q_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation de bilan des débits.

**Question 5** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Question 6** À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.



### Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'une tension de commande  $u(t)$  appliquée en entrée : la tension  $u(t)$  est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante  $p_a$  et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension  $u(t)$ , mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire :  $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$ .

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

**Question 7** Déterminer la relation liant  $Q_0$ ,  $U_0$  et  $P_0$  au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$  et  $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$ .

**Question 8** Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servovalve et vérin, admettant en entrée la tension  $\Delta U(p)$  et la force  $\Delta F(p)$ , et en sortie la position  $\Delta Z(p)$ .

## Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

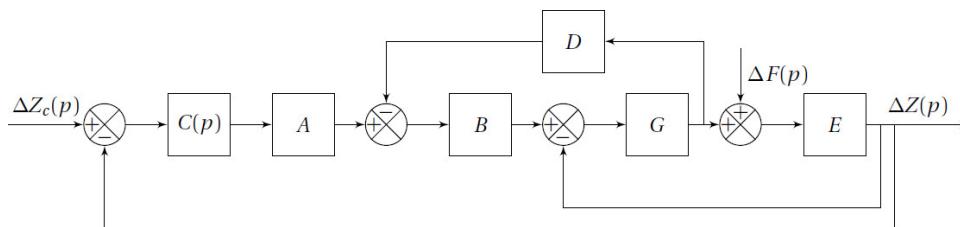
- ▶ la servovalve, qui fournit le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'un signal de commande  $u(t)$ ;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert  $k_c$ , qui fournit une tension  $\text{Im}(z(t))$  image de la position réelle  $z(t)$ ;
- ▶ un correcteur  $C(p)$  qui élabore la commande  $u(t)$  de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre  $\text{Im}(z_c(t))$ , image de la consigne de position, et  $\text{Im}(z(t))$ .  $\text{Im}(z_c(t))$  est obtenue grâce à un adaptateur  $K_a$  situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

**Question 9** Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

**Question 10** Préciser l'expression de l'adaptateur  $K_a$  pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $G$  sont utilisés pour simplifier les calculs.

**Question 11** À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.



## Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert  $0,975$  en boucle fermée,  $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$  et  $p_3 = -30,4$  (en rad/s).

**Question 12** Le système est-il stable ? Est-il précis ?

**Question 13** À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

**Question 14** À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte,  $\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -18 \pm 81,6j$  et  $p_3 = -0,75$  (rad/s)

**Question 15** Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

### Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

#### Éléments de correction

1. ...
2.  $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$  et  $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p)$ .
3. ...
4.  $\Delta q = K\Delta U\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig.}$
5. ...
6. ...
7.  $K_a = k_c$ .
8.  $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$  et  $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$ .
9. ...
10. ...
11. ...
12.  $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\xi = 0,21$ ,  $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$ .
13. ...
14. ...

**Question 16** Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

On choisit de prendre  $\omega_0$  égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et  $\xi_2 = 0,7$ .

**Question 17** Proposer une valeur pour le paramètre  $\xi_1$ . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).



## TD 4

# Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Corrigé

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

### Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servo valve, elle-même commandée en tension  $u$  par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servo valve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

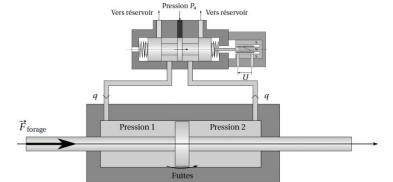
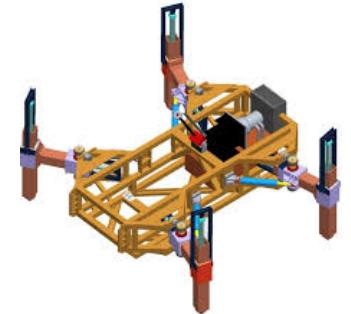
Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement :  $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$ ;
- ▶ stabilité : marge de phase de  $45^\circ$ , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

### Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶  $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , surface utile des pistons;
- ▶  $b = 10^9 \text{ Pa}$  : module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶  $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$  : pression d'alimentation de la servo valve;
- ▶  $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$  : constante de débit de la servo valve;
- ▶  $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$  : facteur de fuite dans le vérin;
- ▶  $q(t)$  : débit entrant et sortant du vérin;
- ▶  $V_1$  et  $V_2$  : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse :  $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ );
- ▶  $p(t) = p_1 - p_2$  : différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶  $z(t)$  : déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶  $M = 700 \text{ kg}$  : masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶  $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$  : raideur équivalente de la structure du robot;



- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$  : coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$  : effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$  : position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur  $k$ .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe  $\overrightarrow{z}$  du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

**Question 1** Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>► l'inertie du robot ;</li> <li>► à la raideur du robot ;</li> <li>► au frottement visqueux ;</li> <li>► à la pression dans la chambre ;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>► à la compressibilité de l'huile ;</li> <li>► au déplacement de la tige de vérin ;</li> <li>► aux fuites entre les chambres.</li> </ul> |
|--|---|

#### Correction

Termes correspondant :

- l'inertie du robot :  $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$  ;
- à la raideur du robot :  $-k(z(t) - Z_0)$  ;
- au frottement visqueux :  $-\mu \frac{dz(t)}{dt}$  ;
- à la pression dans la chambre :  $Sp(t)$  ;
- à la compressibilité de l'huile :  $\frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$  ;
- au déplacement de la tige de vérin :  $S \frac{dz(t)}{dt}$  ;
- aux fuites entre les chambres :  $\varphi p(t)$ .

**Question 2** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $F_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

#### Correction

On a :  $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t)$ . Au point de fonctionnement, on a donc  $0 = SP_0 - F_0$  et donc  $SP_0 = F_0$ .

**Question 3** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $F_{\text{forage}}(t) = F_0 + \Delta F(t)$  et  $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Correction**

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc :  $M \frac{d^2 \Delta z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{d \Delta z(t)}{dt} - k \Delta z(t) + S(P_0 + \Delta p(t)) - F_0 - \Delta F(t)$ . De plus, à l'équilibre,  $SP_0 = F_0$ . Dans le domaine de Laplace, on a alors  $\Delta Z(p) (Mp^2 + \mu p + k) = S \Delta P(p) - \Delta F(p)$ .

**Question 4** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $Q_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation de bilan des débits.

**Correction**

On a  $q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$ . Au point de fonctionnement, on a donc  $Q_0 = \varphi P_0$ .

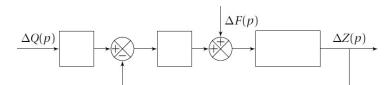
**Question 5** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Correction**

$$\begin{aligned} \text{Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc} \\ Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d(Z_0 + \Delta z(t))}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d(P_0 + \Delta p(t))}{dt} \\ \Leftrightarrow Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d \Delta z(t)}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d \Delta p(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \Delta q(t) &= S \frac{d \Delta z(t)}{dt} + \varphi \Delta p(t) + \frac{V}{2b} \frac{d \Delta p(t)}{dt} \text{ (en utilisant la question précédente).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans le domaine de Laplace, on a donc } \Delta Q(p) &= Sp \Delta Z(p) + \varphi \Delta P(p) + \frac{V}{2b} p \Delta P(p) \text{ soit} \\ \Delta Q(p) &= Sp \Delta Z(p) + \Delta P(p) \left( \varphi + \frac{V}{2b} p \right) \end{aligned}$$

**Question 6** À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.

**Correction****Modélisation du comportement de la servovalve**

La servovalve permet de fournir le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'une tension de commande  $u(t)$  appliquée en entrée : la tension  $u(t)$  est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante  $p_a$  et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension  $u(t)$ , mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire :  $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$ .

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

**Question 7** Déterminer la relation liant  $Q_0$ ,  $U_0$  et  $P_0$  au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$  et  $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$ .

### Correction

Au point de fonctionnement,  $Q_0 = KU_0\sqrt{p_a - P_0}$ .

Par ailleurs, on a

$$Q_0 + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)}$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)}$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{(p_a - P_0)\left(1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)}$$

$$\text{et } \sqrt{1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}.$$

$$\text{Soit } KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0}\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0} - \frac{K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0} -$$

$$\underbrace{\frac{K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}$$

on néglige

$$\Leftrightarrow \Delta q(t) = K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2} \frac{\Delta p(t)}{\sqrt{p_a - P_0}}$$

**Question 8** Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servo-valve et vérin, admettant en entrée la tension  $\Delta U(p)$  et la force  $\Delta F(p)$ , et en sortie la position  $\Delta Z(p)$ .

### Correction

## Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

- ▶ la servovalve, qui fournit le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'un signal de commande  $u(t)$ ;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert  $k_c$ , qui fournit une tension  $\text{Im}(z(t))$  image de la position réelle  $z(t)$ ;
- ▶ un correcteur  $C(p)$  qui élabore la commande  $u(t)$  de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre  $\text{Im}(z_c(t))$ , image de la consigne de position, et  $\text{Im}(z(t))$ .  $\text{Im}(z_c(t))$  est obtenue grâce à un adaptateur  $K_a$  situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

**Question 9** Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

### Correction

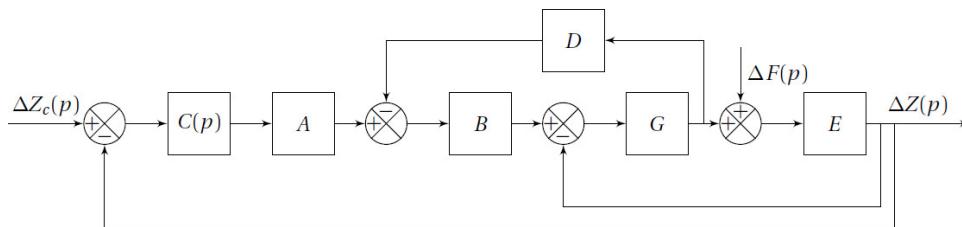
**Question 10** Préciser l'expression de l'adaptateur  $K_a$  pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

### Correction

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $G$  sont utilisés pour simplifier les calculs.

**Question 11** À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.

#### Correction



**Validation des performances pour une correction unitaire  $C(p) = 1$**

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée,  $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$  et  $p_3 = -30,4$  (en rad/s).

**Question 12** Le système est-il stable ? Est-il précis ?

#### Correction

**Question 13** À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

#### Correction

**Question 14** À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassemens.

#### Correction

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte,  $\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -18 \pm 81,6j$  et  $p_3 = -0,75$  (rad/s)

**Question 15** Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

### Correction

## Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Question 16** Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

### Correction

### Éléments de correction

1. ...
2.  $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$  et  
 $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p).$
3. ...
4.  $\Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig..}$
5. ...
6. ...
7.  $K_a = k_c.$
8.  $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$   
et  $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$
9. ...
10. ...
11. ...
12.  $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\xi = 0,21$ ,  $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$ .
13. ...
14. ...

On choisit de prendre  $\omega_0$  égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et  $\xi_2 = 0,7$ .

**Question 17** Proposer une valeur pour le paramètre  $\xi_1$ . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

### Correction

# TD 5

## Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est  $\theta_c(t)$ , l'angle réel du radar est  $\theta_r(t)$ . La différence des deux angles est transformée en une tension  $u_m(t)$ , selon la loi  $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$ . La tension  $u_m(t)$  engendre, via un moteur de fonction de transfert  $H_m(t)$ , une vitesse angulaire  $\omega_m(t)$ . Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation  $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$  ( $B < 1$ ),  $\omega_r(t)$  étant la vitesse angulaire du radar.

**Question 1** Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$  et  $c_m(t) = k_m i(t)$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $H_m(p)$  peut se mettre sous la forme canonique  $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  et déterminer les valeurs littérales de  $K_m$  et  $T_m$ .

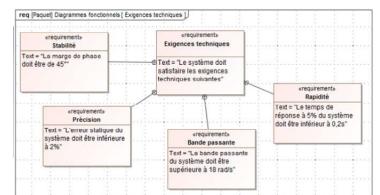
**Question 4** En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de  $\omega_m(t)$  à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de  $\omega_m(t)$  et la valeur finale atteinte par  $\omega_m(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$ . Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de  $H(p)$  à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

**Question 6** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite :  $K = 1$ ,  $z = 0,5$  et  $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$ .



Avec :

- ▶  $u(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶  $e(t)$  : force contre-électromotrice (en V);
- ▶  $i(t)$  : intensité (en A);
- ▶  $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶  $C_m(t)$  : couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶  $J$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m<sup>2</sup>) ;
- ▶  $R$  : résistance électrique du moteur;
- ▶  $k_e$  : constante de force contre-électromotrice;
- ▶  $k_m$  : constante de couple.



**Question 7** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

**Question 8** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

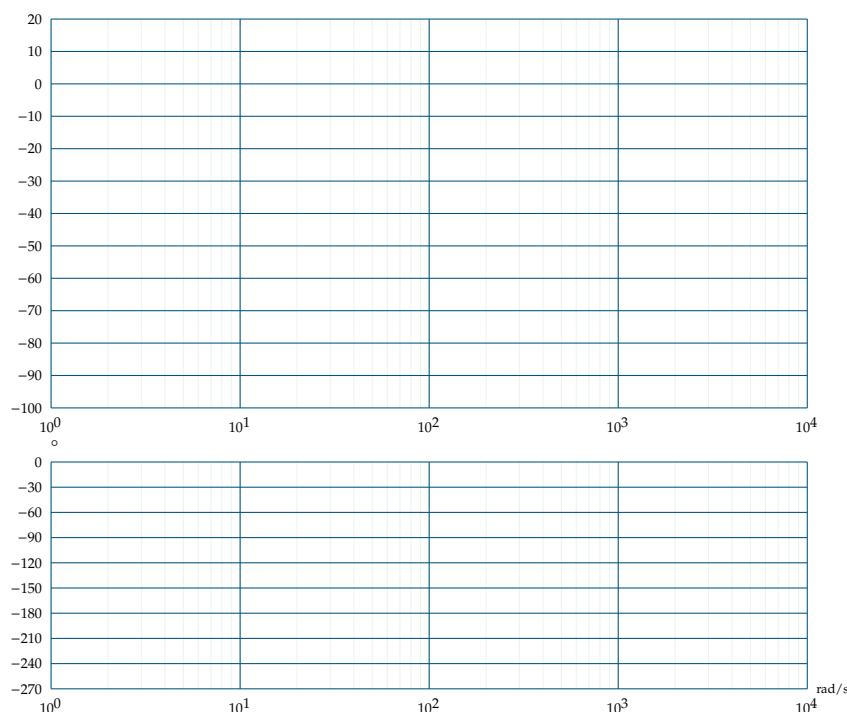
**Question 9** Déterminer  $G$  et  $\varphi$  pour  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

**Question 10** Déterminer, en régime permanent,  $\theta_r(t)$  pour une entrée  $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$ .

Pour  $\omega < 20 \text{ rad/s}$ , on a  $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

**Question 11** Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à  $-3 \text{ dB}$ . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

**Question 12** Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



# TD 5

## Radar d'avion – Corrigé

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est  $\theta_c(t)$ , l'angle réel du radar est  $\theta_r(t)$ . La différence des deux angles est transformée en une tension  $u_m(t)$ , selon la loi  $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$ . La tension  $u_m(t)$  engendre, via un moteur de fonction de transfert  $H_m(t)$ , une vitesse angulaire  $\omega_m(t)$ . Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation  $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$  ( $B < 1$ ),  $\omega_r(t)$  étant la vitesse angulaire du radar.

**Question 1** Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$  et  $c_m(t) = k_m i(t)$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $H_m(p)$  peut se mettre sous la forme canonique  $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  et déterminer les valeurs littérales de  $K_m$  et  $T_m$ .

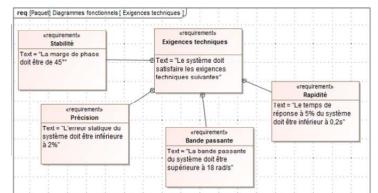
**Question 4** En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de  $\omega_m(t)$  à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de  $\omega_m(t)$  et la valeur finale atteinte par  $\omega_m(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$ . Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de  $H(p)$  à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

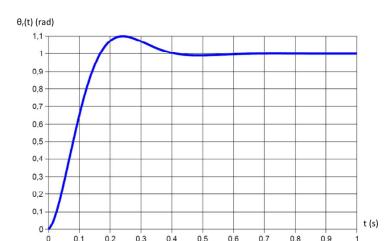
**Question 6** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite :  $K = 1$ ,  $z = 0,5$  et  $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$ .



Avec :

- ▶  $u(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶  $e(t)$  : force contre-électromotrice (en V);
- ▶  $i(t)$  : intensité (en A);
- ▶  $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶  $C_m(t)$  : couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶  $J$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m<sup>2</sup>) ;
- ▶  $R$  : résistance électrique du moteur;
- ▶  $k_e$  : constante de force contre-électromotrice;
- ▶  $k_m$  : constante de couple.



**Question 7** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

**Question 8** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

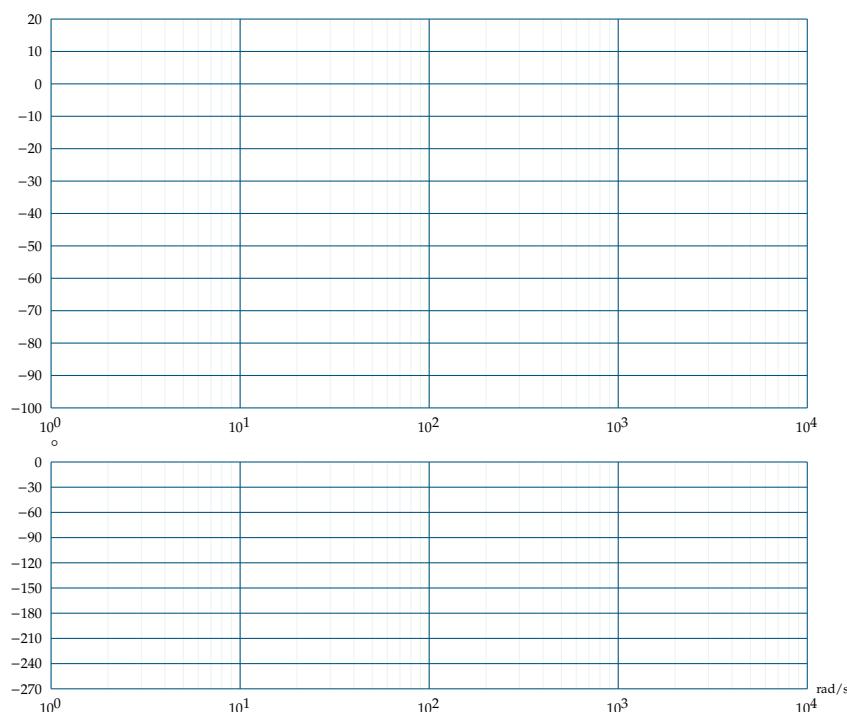
**Question 9** Déterminer  $G$  et  $\varphi$  pour  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

**Question 10** Déterminer, en régime permanent,  $\theta_r(t)$  pour une entrée  $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$ .

Pour  $\omega < 20 \text{ rad/s}$ , on a  $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

**Question 11** Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à  $-3 \text{ dB}$ . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

**Question 12** Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



# TD 6

## Base TC200 Tecdron – Sujet

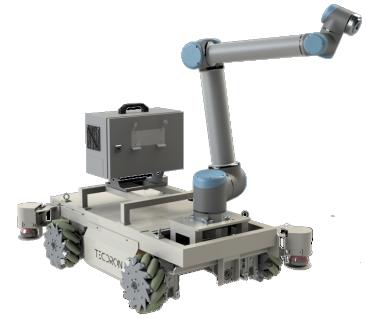
Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

### Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



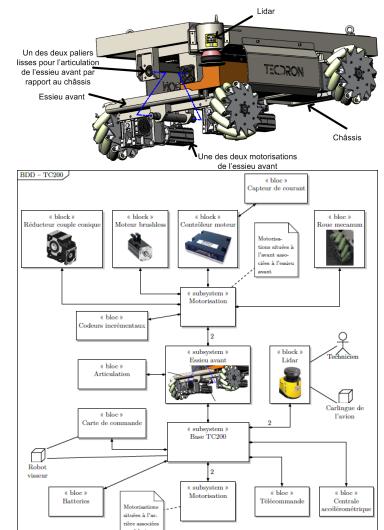
### Validation de l'asservissement du moteur

#### Objectif

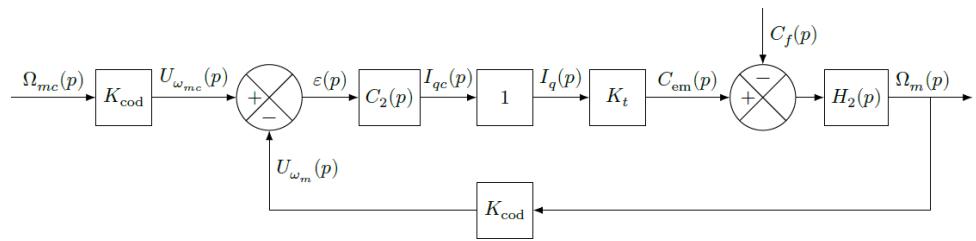
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire  $C_f(p) = 0$ .



Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude $\omega_{mc0}$	$\mu_{v\infty} < 1\%$
Rapidité	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une pente de $1800 \text{ rad s}^{-1}$
Stabilité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$
	Dépassement maximal	$\leq 10\%$
	Marge de phase	$\geq 60^\circ$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	$K_{\text{cod}}$	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	$K_t$	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Corrètore de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}} p}$	$J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

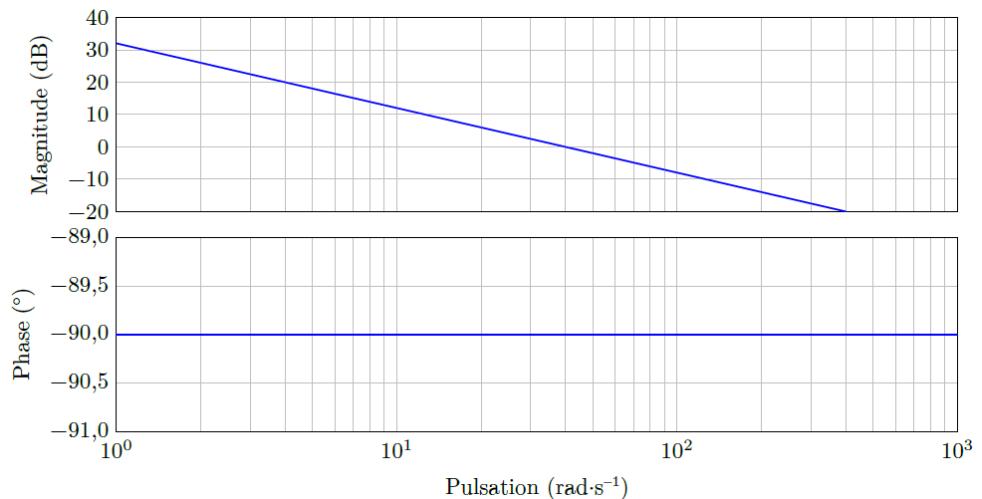
**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$  pour  $C_f(p) = 0$ .

**Question 2** Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

**Question 3** Déterminer la condition sur  $K_2$  afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

**Question 4** Calculer l'erreur relative en régime permanent  $\mu_{v\infty}$  pour une consigne de vitesse en échelon de valeur  $\omega_{mc0}$ .

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



**Question 5** Identifier la valeur de  $K_2$  qui a été réellement choisie par le constructeur.

**Question 6** À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent  $\Delta\omega_\infty$  pour une consigne de vitesse en rampe de pente  $a$  et valider le critère de précision des exigences.

# TD 6

## Base TC200 Tecdron – Corrigé

Centrale Supélec TSI 2021.

C2-03

### Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



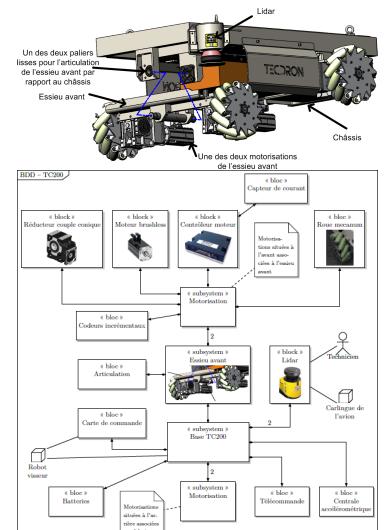
### Validation de l'asservissement du moteur

#### Objectif

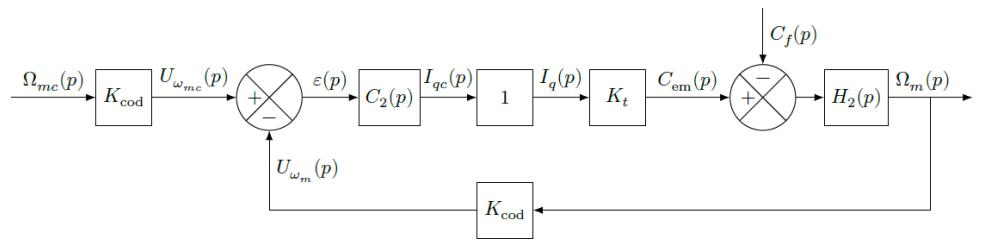
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire  $C_f(p) = 0$ .



Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude $\omega_{mc0}$	$\mu_{v\infty} < 1\%$
Rapidité	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une pente de $1800 \text{ rad s}^{-1}$
Stabilité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$
	Dépassement maximal	$\leq 10\%$
	Marge de phase	$\geq 60^\circ$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	$K_{\text{cod}}$	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	$K_t$	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Corrètement de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}} p}$	$J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$  pour  $C_f(p) = 0$ .

Correction

**Question 2** Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Correction

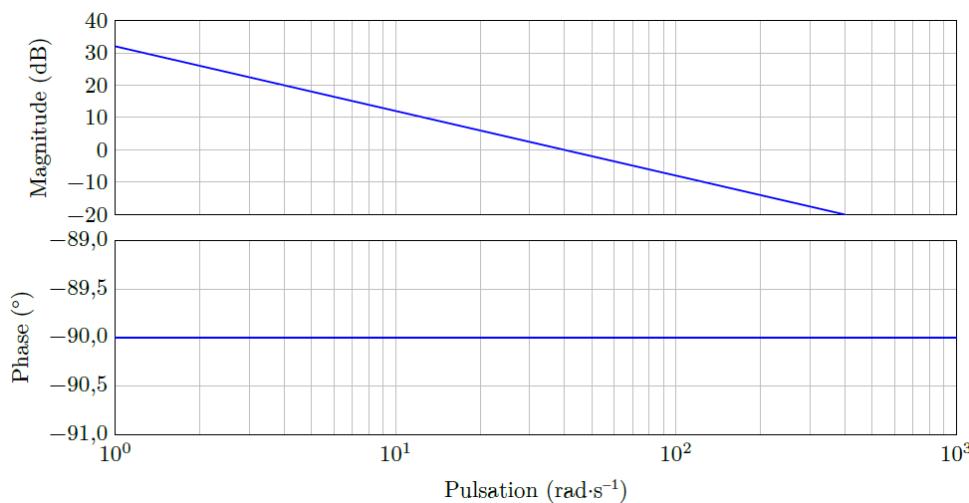
**Question 3** Déterminer la condition sur  $K_2$  afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Correction

**Question 4** Calculer l'erreur relative en régime permanent  $\mu_{v\infty}$  pour une consigne de vitesse en échelon de valeur  $\omega_{mc0}$ .

Correction

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



**Question 5** Identifier la valeur de  $K_2$  qui a été réellement choisie par le constructeur.

**Correction**

**Question 6** À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent  $\Delta\omega_\infty$  pour une consigne de vitesse en rampe de pente  $a$  et valider le critère de précision des exigences.

**Correction**



# Colle 1

## Stabilité – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$ .

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

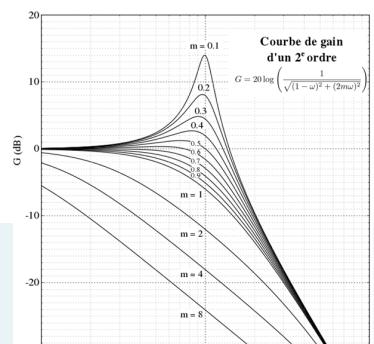
**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

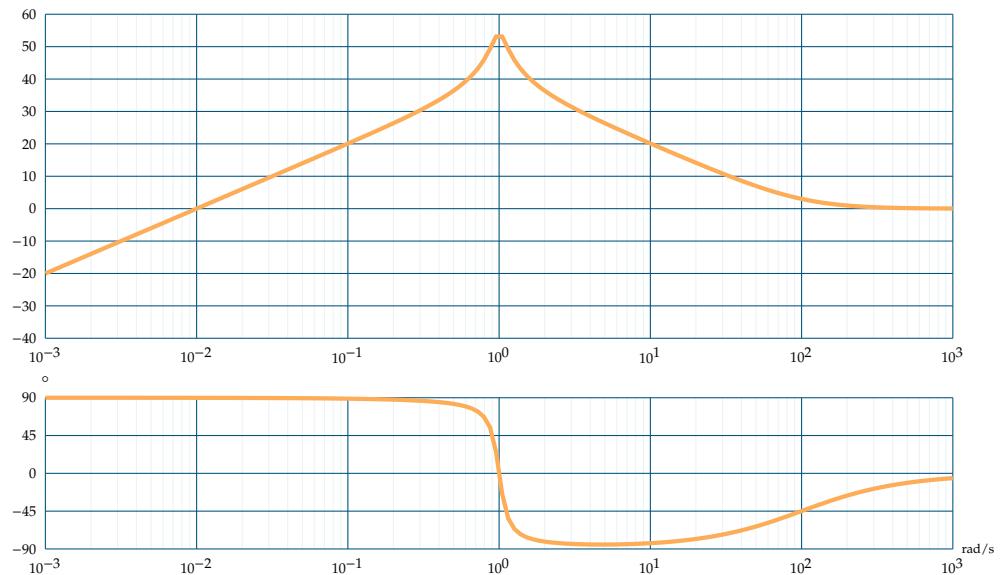
**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





# Colle 1

## Stabilité – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$ .

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

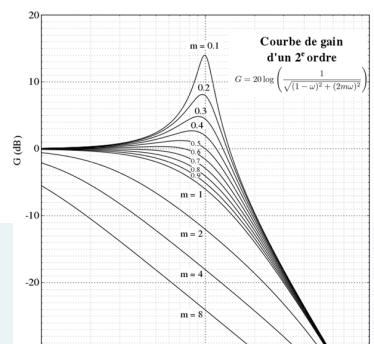
**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

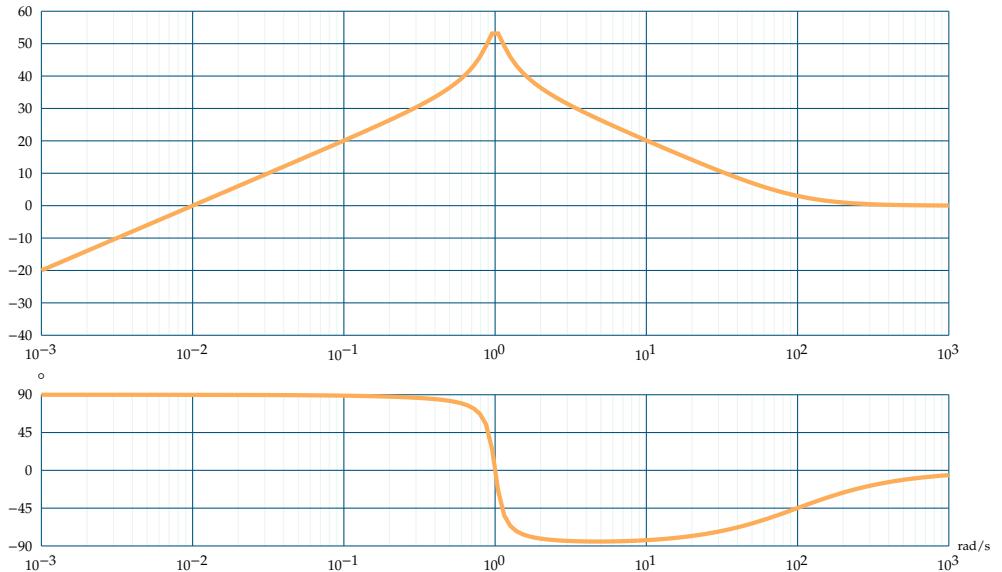
**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





**7.7** Pour obtenir une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) > \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \frac{K}{(10j\omega_{c0} + 1)^3} > \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\varphi = \pi - 3 \arctan 10\omega_{c0} > \frac{\pi}{4}$$

d'où :  $\omega_{c0} < \frac{1}{10} \tan \frac{3\pi}{12} = 0,1 \text{ rad/s}$

Calculons la valeur de  $K$  correspondant à cette pulsation de coupure à 0 dB.

On a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3} = 1$$

$$\text{d'où : } K = \left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3 = 2,8$$

La condition sur  $\omega_{c0}$  nous imposant une limite supérieure, il en est de même pour la condition sur  $K$ .

En conclusion :  $\Delta\varphi > 45^\circ \Rightarrow K < 2,8$

Par ailleurs, comme :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

on a :

$$t_m > \frac{3}{0,1} = 30 \text{ s}$$

Le temps de montée minimal (autrement dit la meilleure rapidité possible) est donc égal à 30 s.

Calculons à présent l'erreur statique. La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(10p + 1)^3 + K}$$

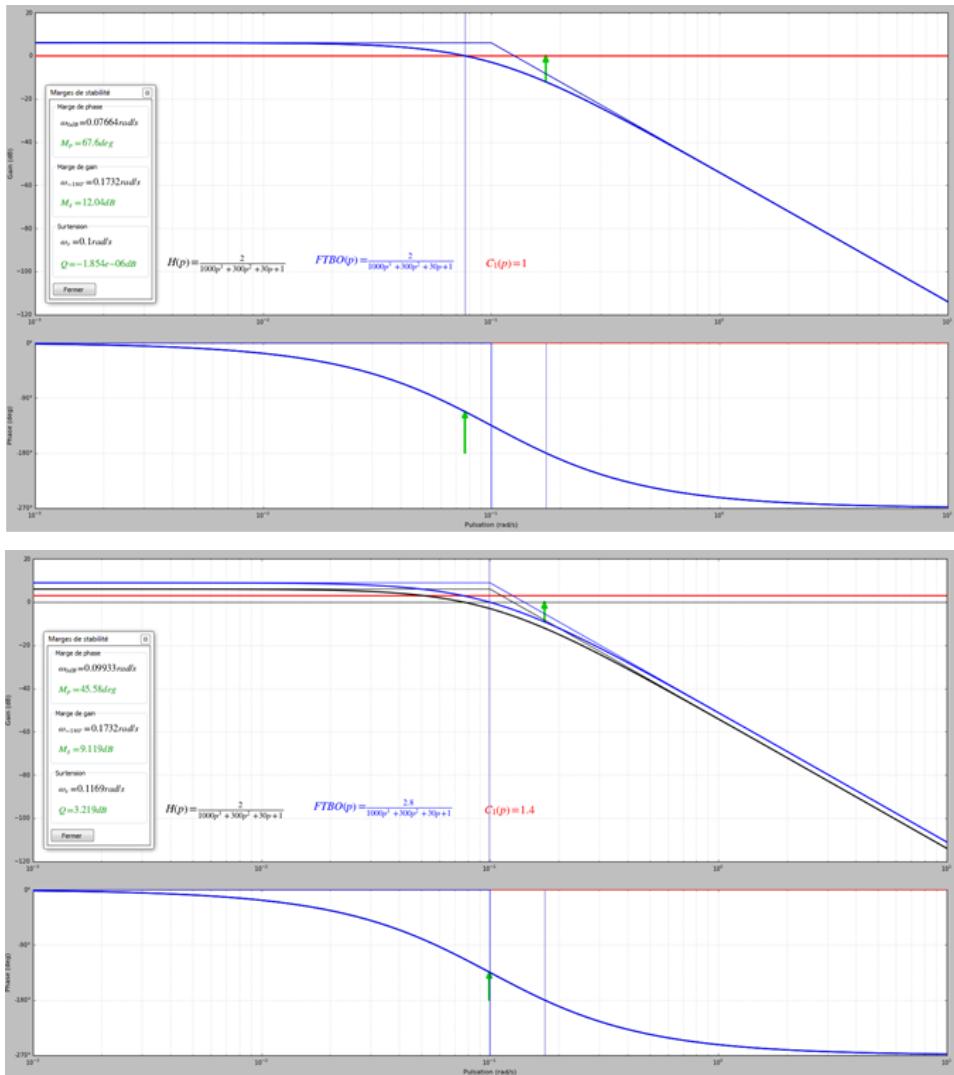
Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{1 + K}$$

On a donc :

$$K < 2,8 \Rightarrow \varepsilon_p > \frac{1}{1 + 2,8} = 0,26$$

L'erreur statique est donc obligatoirement supérieure à 26 % si on souhaite avoir une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ .





# Colle 2

## Stabilité – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

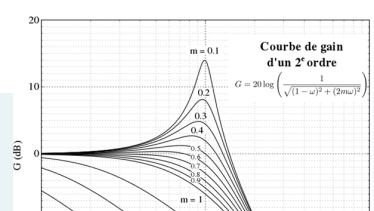
**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

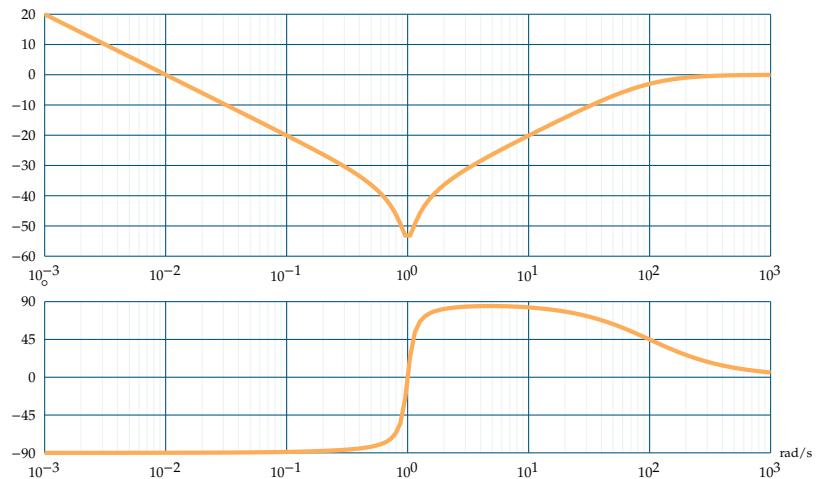
**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





# Colle 2

## Stabilité – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

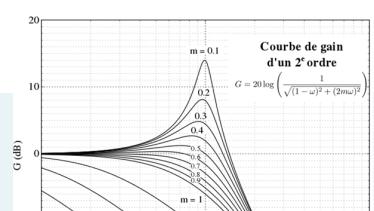
**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

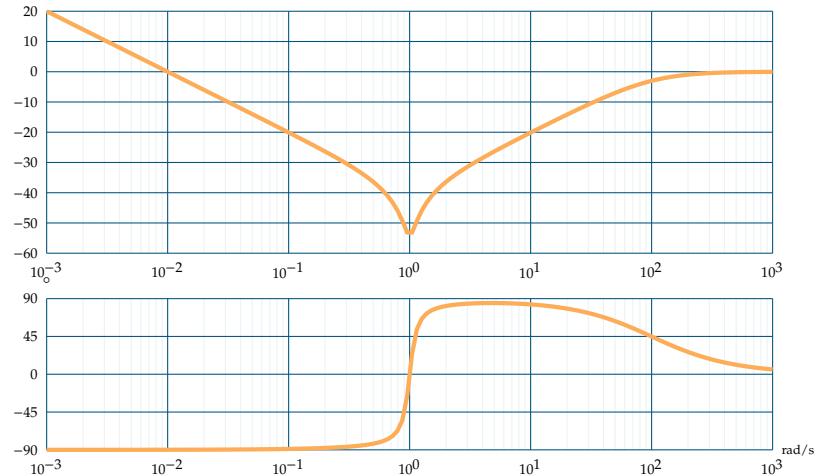
**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





**8.2** La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit :  $KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

Pour obtenir une marge de phase égale à  $45^\circ$ , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit :  $\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[ \arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

Le gain  $K$  étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de  $45^\circ$  et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de  $K$  :

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

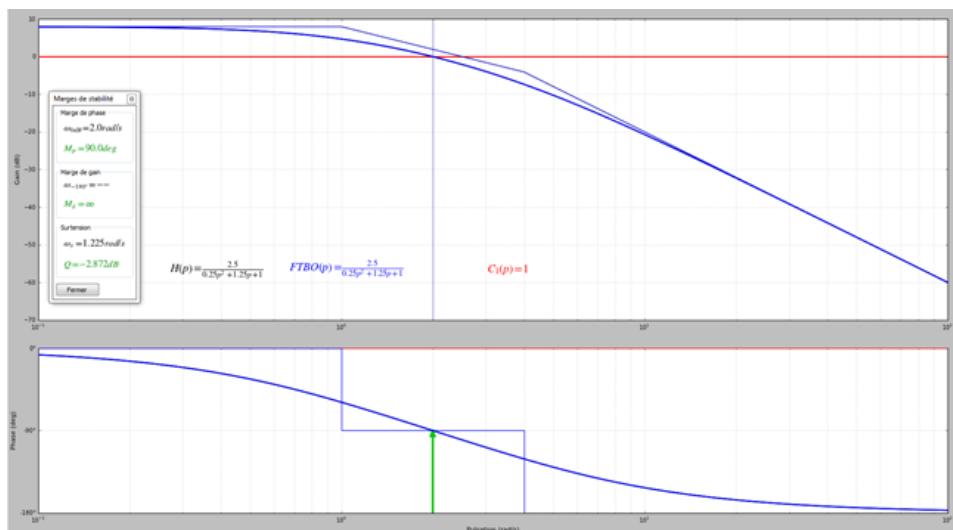
Par conséquent :

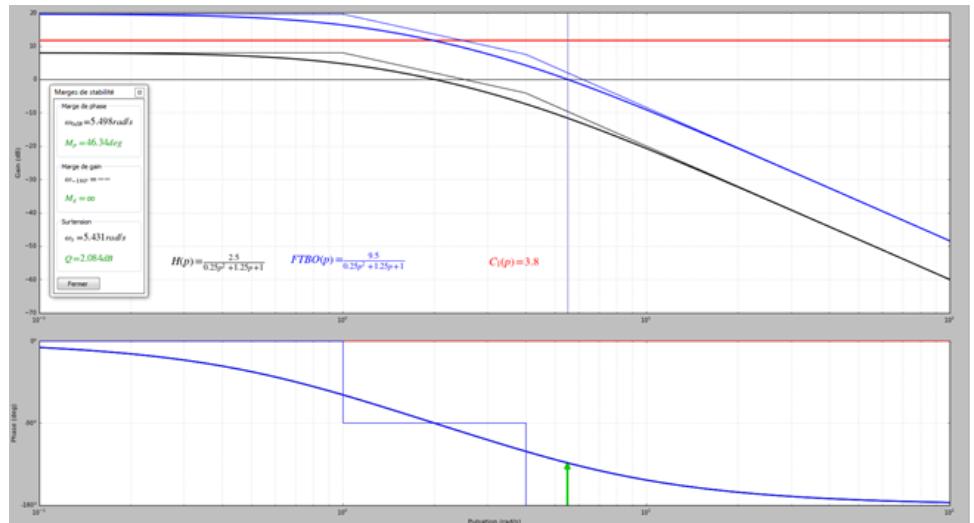
$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.





# Colle 3

## Performances – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$ .

**Question 1** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 2** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ . La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert  $B(p) = 3$ .

**Question 3** Tracer le schéma-blocs.

**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = Ki/p$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.



# Colle 3

## Performances – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$ .

**Question 1** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Correction**

**Question 2** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

**Correction**

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ . La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert  $B(p) = 3$ .

**Question 3** Tracer le schéma-blocs.

**Correction**

**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

**Correction**

**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Correction**

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = Ki/p$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

### Correction

**8.2** La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

$$\text{soit : } KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à  $45^\circ$ , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{soit : } \arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[ \arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\varepsilon = 0,123$$

$$\text{d'où : } \frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

$$\text{La seule solution positive est : } \omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

$$\text{Par définition : } KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

$$\text{Par conséquent : } K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

Le gain  $K$  étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de  $45^\circ$  et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de  $K$  :

$$\text{Par définition : } KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

$$\text{Par conséquent : } K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.

