



## 6 Rappels de Statique

### 6.1 Modélisation locale des actions mécaniques

#### Définition – Action mécanique de contact volumique

Localement, les actions mécaniques volumiques peuvent être modélisées par le

$$\text{torseur suivant : } \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iiint_V f(M) \overrightarrow{u(M)} dV \\ \overrightarrow{M(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_M \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M.$$

La densité volumique d'effort s'exprime en  $[\text{Nm}^{-3}]$ .

#### Définition – Action mécanique de contact surfacique

Localement, les actions mécaniques dans un contact surfacique peuvent être modélisées par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{M(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M.$$

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors  $f(M) \overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \tau_{12}(M)$ . On note :

- ▶  $p_{12}(M)$  pression de contact au point  $M$  (en  $[\text{Nm}^{-2}]$ );
- ▶  $\tau_{12}(M)$  la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en  $[\text{Nm}^{-2}]$ ).

6.1	Modélisation locale des actions mécaniques . . . . .	1
6.2	Modélisation globale des actions mécaniques . . . . .	1
6.3	Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces . . . . .	3
6.4	Modélisation locale des actions mécaniques . . . . .	4
6.5	Résolution des problèmes d'arc-boutement . . . . .	5
6.1	Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer . . . . .	5
6.2	Les types de problèmes . . . . .	6
6.3	Stratégie d'isolement . . . . .	6

B2-14

### 6.2 Modélisation globale des actions mécaniques

#### Définition – Torseur statique ou torseur sthénique ou torseur d'efforts

L'action mécanique d'un système matériel  $S_1$  (ou d'un phénomène physique) sur un système matériel  $S_2$  est représentable par un torseur au point  $M$  :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{M,\mathcal{R}}$$

**Remarque**

La norme de vecteur  $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$  est en Newton (N). La norme du vecteur  $\overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)}$  est en Newton - mètre ( $N \cdot m$ ).

**Propriété – Varignon**

Le torseur statique étant un torseur, on a donc :

$$\forall B, \overrightarrow{\mathcal{M}(B, S_2 \rightarrow S_1)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, S_2 \rightarrow S_1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$$

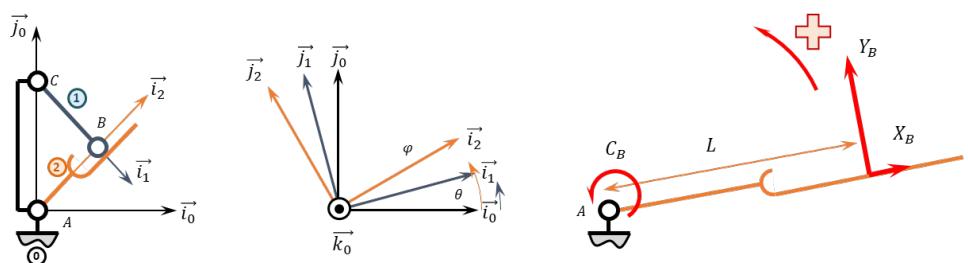
**Remarque – Moment d'une force – Interprétation graphique**

Prenons le cas du serrage d'un écrou avec un effort  $\vec{F} = -F\vec{y}$  :

Dans l'hypothèse où l'effort  $\vec{F}$  s'appliquerait au point  $O$ , il n'y aurait donc pas de serrage de l'écrou. Le moment (ou couple de serrage) serait donc nul :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, Clef \rightarrow Ecrou)} = \vec{0}$ .

Si l'effort s'applique en  $P$  :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, Clef \rightarrow Ecrou)} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = L\vec{x} \wedge -F\vec{y} = -LF\vec{z}$ . Méthode pour déterminer le moment dans un problème plan :

- ▶ norme du vecteur : effort fois bras de levier (on peut éventuellement décomposer l'effort dans le repère de travail);
- ▶ perpendiculaire au plan;
- ▶ sens : on regarde si, par rapport au point où on cherche le moment, l'effort fait tourner la pièce dans le sens direct ou indirect.



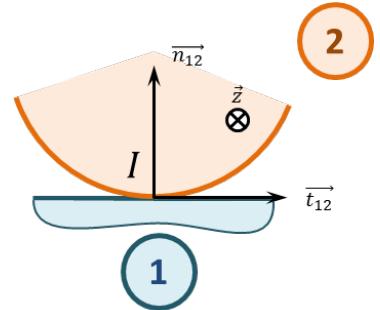
Application du TMS en  $A$  :  $C_B + Y_B L + 0 = 0$ .

B2-14

## 6.3 Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces

### 6.3.1 Torseur des actions mécaniques

Considérons le contact ponctuel ponctuel entre deux pièces 1 et 2. En considérant la liaison parfaite, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 s'écrit sous la forme suivante :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{12}\vec{n}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$  en notant  $\vec{n}_{12}$  le vecteur normal au contact orienté de 1 vers 2. En considérant que la liaison n'est pas parfaite, plusieurs situation peuvent se présenter.



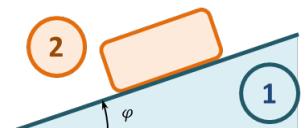
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire translater 2 suivant  $\vec{t}_{12}$ , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ .
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire rouler 2 autour de  $\vec{z}_{12}$ , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} \\ M_{r12}\vec{z} \end{array} \right\}_I$  avec  $M_{r12}$  moment de résistance au roulement.
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire pivoter 2 autour de  $\vec{n}_{12}$ , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} \\ M_{p12}\vec{n}_{12} \end{array} \right\}_I$  avec  $M_{p12}$  moment de résistance au pivotement.

#### Remarque

Il est possible de modéliser l'ensemble des composantes dues au frottement dans un même torseur.  
On fait l'hypothèse ici d'un problème plan, mais il peut aisément être adapté à un modèle 3D.

### 6.3.2 Facteur de glissement et d'adhérence

Considérons la pièce 2 sur un plan incliné 1. Notons  $\varphi_a$  l'angle à partir duquel la pièce 2 se met à glisser sur le plan. On appelle  $f_a = \tan \varphi_a$  le facteur d'adhérence.



On constate expérimentalement qu'une fois la pièce est en mouvement, si on diminue l'angle  $\varphi$ , la pièce continue à glisser, jusqu'à un angle  $\varphi_g$ . On appelle  $f_g = \tan \varphi_g$  le facteur de glissement.

Ces facteurs sont sans unité. Ils dépendent de la nature des matériaux en contact ainsi que de la nature des surfaces de contact (et d'un lubrifiant éventuel). Ils sont indépendants de l'effort de 2 sur 1. Ces deux facteurs étant relativement proches, on fera l'hypothèse que  $f = f_a = f_g$ .

### 6.3.3 Modélisation de l'adhérence et du glissement – Lois de Coulomb

**Cas 1 – Glissement** –  $\overrightarrow{V(1,2/1)} \neq \vec{0}$

- ▶ Connaissant le sens et la direction de  $\overrightarrow{V(1,2/1)}$ , alors  $\vec{t}_{12}$  s'oppose à  $\overrightarrow{V(1,2/1)}$ .
- ▶  $|T_{12}| = f|N_{12}|$ .
- ▶ La vecteur vitesse appartenant au plan tangent au contact, on dit que l'effort résultant ( $\overrightarrow{F_{12}} = N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12}$ ) est sur le cône de frottement.

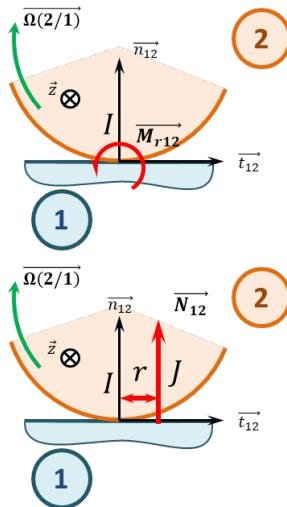
**Cas 2 – Adhérence** –  $\overrightarrow{V(1,2/1)} = \vec{0}$

- ▶ La direction de  $\vec{t}_{12}$  n'est pas connue.
- ▶  $|T_{12}| \leq f|N_{12}|$ .
- ▶ La direction  $\vec{t}_{12}$  n'étant pas connue, on dit que l'effort résultant ( $\overrightarrow{F_{12}} = N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12}$ ) appartient au cône d'adhérence.

#### Remarque

En considérant que la direction du vecteur vitesse peut décrire le plan tangent au contact, la résultante des efforts  $\overrightarrow{F_{12}}$  décrit alors un cône. On parle donc de cône d'adhérence.

### 6.3.4 Modélisation de la résistance au roulement et au pivotement



#### Modélisation de la résistance au roulement

- ▶ Le moment de résistance au roulement  $\overrightarrow{M_{r12}}$  s'oppose à  $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{z}$ .
- ▶ On note  $r$  le coefficient de résistance au roulement ([m]) et on a  $||\overrightarrow{M_{r12}}|| = r||\overrightarrow{N_{12}}||$ .

#### Modélisation de la résistance au pivotement

- ▶ Le moment de résistance au pivotement  $\overrightarrow{M_{p12}}$  s'oppose à  $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{n}_{12}$ .
- ▶ On note  $p$  le coefficient de résistance au pivotement ([m]) et on a  $||\overrightarrow{M_{p12}}|| = p||\overrightarrow{N_{12}}||$ .

Ainsi pour modéliser la résistance au roulement, on peut faire l'hypothèse que l'action normale de 1 sur 2 est « avancée » de  $r$  par rapport au point  $I$ .

## 6.4 Modélisation locale des actions mécaniques

#### Définition – Action mécanique locale

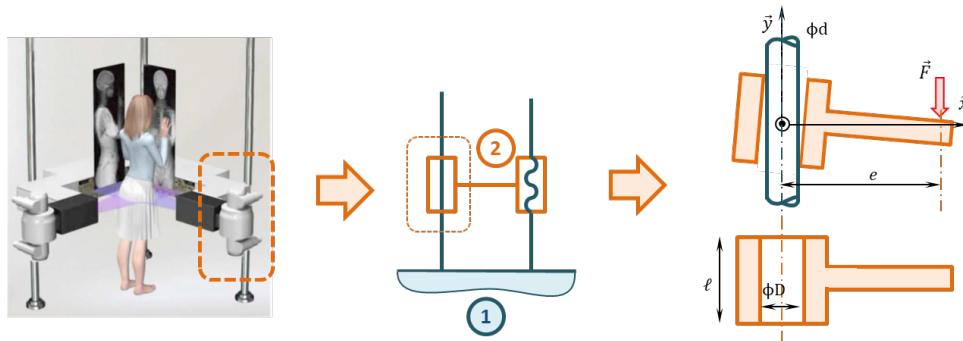
Localement, les actions mécaniques dans un contact ponctuel avec frottement peuvent être modélisées par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$ .

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors  $f(M) \overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}}(M)$ . Dans le cas du glissement :  $||\overrightarrow{\tau_{12}}(M)|| = p_{12} \cdot f$ . En notant :

- ▶  $p_{12}(M)$  pression de contact au point  $M$  (en  $\text{Nm}^{-2}$ );
- ▶  $\tau_{12}(M)$ : la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en  $\text{Nm}^{-2}$ );
- ▶  $f$  facteur de frottement.

## 6.5 Résolution des problèmes d'arc-boutement

L'arc-boutement est un phénomène de blocage d'une liaison (souvent glissière ou pivot glissant). Ce phénomène est causé d'une part par le frottement dans une liaison et d'autre part par le jeu existant entre les deux pièces en mouvement. En effet, le jeu dans la liaison autorise une légère rotation de la pièce mâle, modifiant les zones de contact. Le frottement dans ces zones de contact conduit à l'arc-boutement.



On commence donc par modéliser le contact par des liaisons ponctuelles avec frottement. L'écriture du PFS et l'utilisation du modèle de Coulomb permet de déterminer des conditions géométriques à la limite du coincement. (Pour cela, on fait l'hypothèse qu'on est à la limite du glissement en un point (égalité) et dans le cône d'adhérence à l'autre point inégalité.)

### 6.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

1. **Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.**
2. **Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et écrire le torseur associé.**
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. **Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).**
5. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
6. **Faire des produits vectoriels le plus vite possible.**
7. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
8. **Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan.**

C1-05

C2-07

## 6.2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la statique a pour objectif de calculer des actions mécaniques dans deux cas :

1. connaître toutes les actions mécaniques dans toutes les liaisons ;
2. connaître la loi entrée-sortie en effort, c'est à dire :
  - quel couple moteur faut-il pour déplacer un objet ?
  - quel effort doit fournir le vérin pour soulever cette masse ?
  - ...

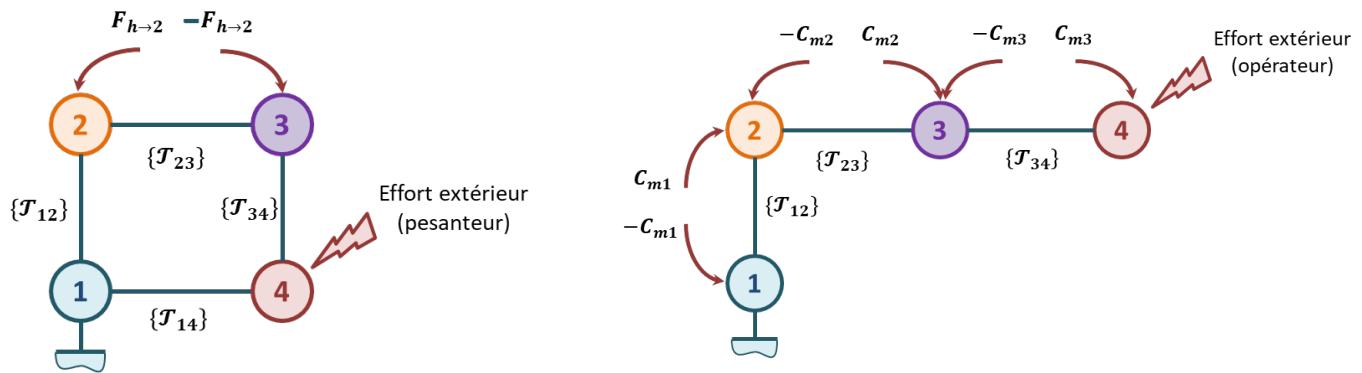
Dans le cas 1, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFS.

Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'équations à écrire. C'est cette stratégie que nous allons présenté.

## 6.3 Stratégie d'isolement

### 6.3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.



**Remarques :**

- Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on matérialise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. **C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins.** Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.

### 6.3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs

On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs. Cela permet de conclure que, d'après le PFS (et le principe des actions réciproques qui en découle) les actions mécaniques agissant

sur ce solide ont même direction, même norme et sens opposé. Ce qui supprime des inconnues.

### Mais qu'est-ce qu'un glisseur ?

Un glisseur est un torseur dont il existe un point tel que le moment est nul. Ainsi, le torseur statique d'une liaison rotule est un glisseur. Le torseur statique d'une liaison pivot n'est pas un glisseur. Lorsque le problème est plan est une liaison pivot à son axe perpendiculaire au plan, c'est un glisseur.

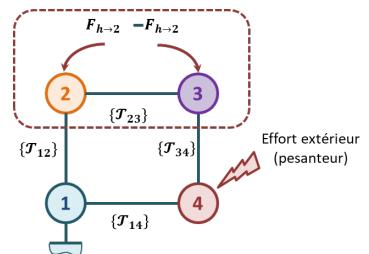
Le torseur cinématique d'une glissière est un glisseur... alors que le torseur statique d'une liaison glissière ne l'est pas...

#### Remarque

Pour démontrer qu'un torseur est un glisseur, on peut par exemple montrer que son automoment est nul. L'automoment est le produit de la résultante du moment d'un torseur. Il est identique en tout point. C'est un invariant du torseur (comme la résultante).

Dans le cas ci-dessous, si on isole 2, 3 et  $h$  (qui pourrait être une action hydraulique). Ainsi, si  $\{\mathcal{T}_{12}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{43}\}$  sont des glisseurs de « centres » respectifs A et B et qu'on note  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ . Alors on a  $\{\mathcal{T}_{12}\} = -\{\mathcal{T}_{43}\} = \left\{ \begin{array}{l} F\vec{u} \\ 0 \end{array} \right\}_A$ .

Il faut bien comprendre que  $\{\mathcal{T}_{12}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{43}\}$  pouvaient avoir chacun 2 ou 3 inconnues et que maintenant nous avons au total UNE inconnue.



### 6.3.3 Isoler les solides soumis à 3 glisseurs ou plus

La stratégie est toujours la suivante :

1. Isoler la pièce.
2. Réaliser le bilan des actions mécaniques, en écrivant les torseurs et en laissant de la place à gauche de la feuille pour les déplacer.
3. Citer L'équation du PFS qu'on va utiliser. Cela peut être le théorème de la résultante statique (TRS) suivant l'axe  $\vec{u}$  ou le théorème du moment statique (TMS) au point A en projection sur  $\vec{u}$ .
4. Effectuer la résolution. (Déplacer les torseurs, appliquer le PFS.)
5. Réitérer avec un autre isolement.

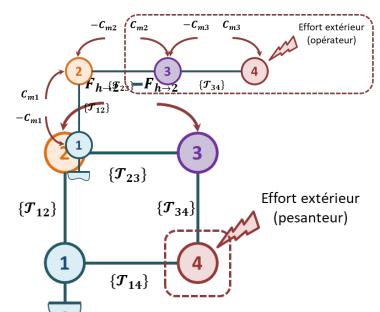
### 6.3.4 Oui, mais quel est le problème ?

Le problème est de choisir L'équation. Je dirai qu'il faut écrire le théorème qui correspond à la mobilité de la pièce isolée, mais cela a-t-il vraiment un sens ? Prenons des exemples...

Si on a isolé 4 et que  $\{\mathcal{T}_{14}\}$  est une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$ , on réalisera un théorème du moment statique en A en projection suivant  $\vec{z}$ .

Si on a isolé 4 et que  $\{\mathcal{T}_{14}\}$  est une liaison glissière de direction  $\vec{u}$ , on réalisera un théorème de la résultante statique en projection suivant  $\vec{u}$ .

... Est-ce que c'est plus clair?... J'espère...



Si on cherche une relation entre l'effort extérieur et  $C_{m2}$ , que la liaison entre 2 et 3 est une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x})$ , on isolera {3 et 4} et on réalisera un théorème du moment statique en  $B$  en projection suivant  $\vec{x}$ .

... Toujours pas clair?... Si?

### 6.3.5 Il y a plus qu'à ...

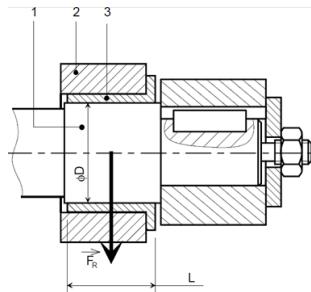
Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un TMS suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z}$ ... et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} = (\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$ .

# Application 1

## Modélisation des actions mécaniques – Sujet

### Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet

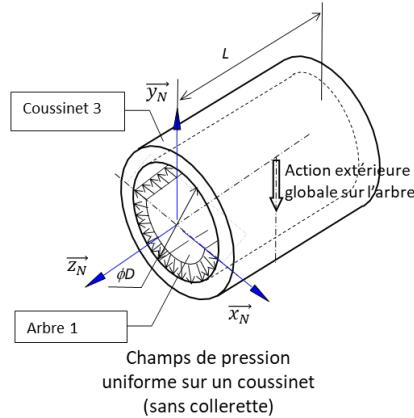
Un coussinet (ou bague) est un élément technologique permettant de réaliser des liaisons pivot. Suivant les cas d'utilisation d'un système, un chargement sur l'arbre est transmis au coussinet.



Montage d'un coussinet



Coussinet seul

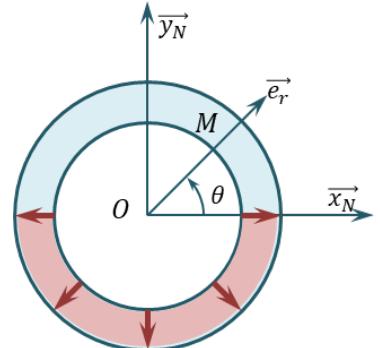


Champs de pression uniforme sur un coussinet (sans collerette)

B2-14

C1-05

C2-07



On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ . On note  $R = \frac{D}{2}$  le rayon du coussinet.

**Question 1** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)z_N}$ .

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point  $M$   $p(M) = p_0 \sin \theta$ .

**Question 3** Justifier que  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$  n'a une composante que sur  $\vec{y}$ .

**Question 4** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ . On rappelle que  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ .

Éléments de correction

$$2. \overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)x_N} = 0.$$

$$3. \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} = -LDp \vec{y}.$$

## Détermination des efforts dans une structure étayée

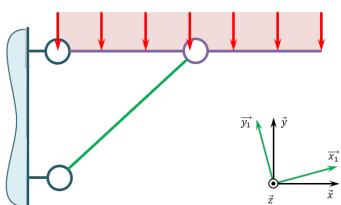


FIGURE 6.1 – Modélisation initiale

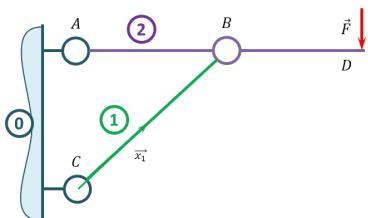


FIGURE 6.2 – Modélisation retenue

### Éléments de correction

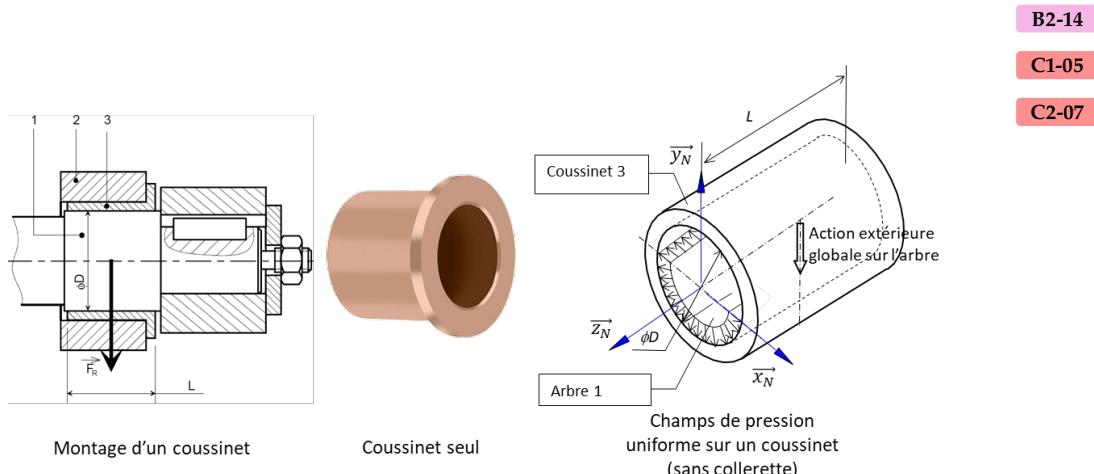
$$3. \quad X_{02} = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha}, \quad F_{01} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, \quad Y_{02} = -\frac{b}{a} F.$$



# Application 1

## Modélisation des actions mécaniques – Corrigé

### Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet



On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ . On note  $R = \frac{D}{2}$  le rayon du coussinet.

**Question 1** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ .

#### Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en  $M$  :  $d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} = p(M)dS\vec{e}_r$ .
2. La pression étant uniforme, on a  $p(M) = p$ .
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et  $dS = Rd\theta dz$ .
4.  $\theta$  varie sur  $[\pi, 2\pi]$  et  $z$  sur  $[0, L]$ .
5.  $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Au final, } \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} &= \int p \left( \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y} \right) Rd\theta dz = pR \int \left( \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y} \right) d\theta dz \\
 &= pR \left( \int \cos \theta d\theta \vec{x} + \int \sin \theta d\theta \vec{y} \right) = LpR \left( \int \cos \theta d\theta \vec{x} + \int \sin \theta d\theta \vec{y} \right) \\
 &= LpR \left( [\sin \theta]_{\pi}^{2\pi} \vec{x} - [\cos \theta]_{\pi}^{2\pi} \vec{y} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= LpR \left( -(1 - (-1)) \vec{y} \right) \\
&= LpR \left( -(1 - (-1)) \vec{y} \right) = -2LpR \vec{y} = -LDp \vec{y}.
\end{aligned}$$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)z_N}$ .

#### Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en  $M$  :  $\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} = p(M)dS\vec{e}_r$ .
2. Au point  $O$ , on a  $\overrightarrow{d\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)}$
3.  $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + z\vec{z}$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a alors, } &\overrightarrow{\mathcal{M}(0, 1 \rightarrow 3)z} = (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)}) \vec{z} \\
&= ((R\vec{e}_r + z\vec{z}) \wedge p(M)dS\vec{e}_r) \vec{z} \\
&= (z\vec{z} \wedge p(M)dS\vec{e}_r) \vec{z} = 0
\end{aligned}$$

**Rappel :** le produit mixte est invariant par permutation circulaire :  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$ .

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point  $M$   $p(M) = p_0 \sin \theta$ .

**Question 3** Justifier que  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$  n'a une composante que sur  $\vec{y}$ .

#### Correction

Pour des raisons de symétrie du champ de pression, la seule composante sera sur  $\vec{y}_N$ .

**Question 4** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ . On rappelle que  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ .

#### Correction

On cherche donc  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N$ .

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en  $M$  :  $\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} = p(M)dS\vec{e}_r$ .
2. La pression étant uniforme, on a  $p(M) = p_0 \sin \theta$ .
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et  $dS = Rd\theta dz$ .
4.  $\theta$  varie sur  $[\pi, 2\pi]$  et  $z$  sur  $[0, L]$ .

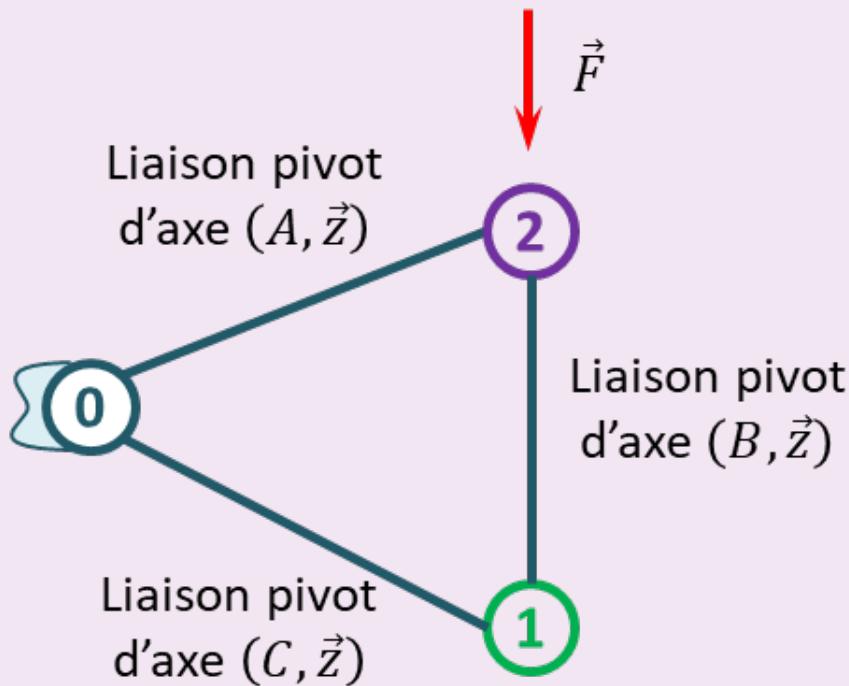
On a  $\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N = p(M)dS\vec{e}_r \cdot \vec{y}_N = p_0 dS \sin^2 \theta$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a donc } &\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N = \int p_0 \sin^2 \theta Rd\theta dz = p_0 RL \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \\
&\frac{1}{2} p_0 RL \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2} p_0 RL \pi = \frac{1}{4} p_0 DL\pi.
\end{aligned}$$

## Détermination des efforts dans une structure étayée

**Question 5** Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

### Correction



**Question 6** Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

### Correction

Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs**. En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :

- ▶ on isole 1 et on réalise le PFS.
- ▶ on isole 2 et on réalise le PFS en B.

**Question 7** Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de  $F$ .

### Correction

On isole 1. On réalise le BAME :

- ▶  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$  ;
- ▶  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$ .

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = 0$ .

$$\text{Résolution : } \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{01}\vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_A.$$

### Correction

**On isole 2. On réalise le BAME :**

$$\blacktriangleright \{T(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{02} \vec{x} + Y_{02} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_{02} \vec{x} + Y_{02} \vec{y} \\ -aY_{02} \vec{z} \end{array} \right\}_A ;$$

$$\blacktriangleright \{T(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{01} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B ;$$

$$\blacktriangleright \{T(\text{ext} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -Fb \vec{z} \end{array} \right\}_C .$$

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :

$$\{T(0 \rightarrow 2)\} + \{T(1 \rightarrow 2)\} + \{T(\text{ext} \rightarrow 2)\} = 0.$$

**Résolution :**

$$\begin{cases} X_{02} + F_{01} \cos \alpha = 0 \\ Y_{02} + F_{01} \sin \alpha - F = 0 \\ -aY_{02} - Fb = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{02} = -F_{01} \cos \alpha = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha} \\ F_{01} = \frac{F - Y_{02}}{\sin \alpha} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha} \\ Y_{02} = -\frac{b}{a} F \end{cases}$$

# Application 2

## Modélisation des actions mécaniques – Sujet

Ressources de Stéphane GENOËL.

### Exercice 1 : Assemblage par fretteage

Le fretteage consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après fretteage, il subsiste donc une pression de contact  $p$  (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

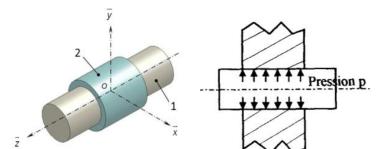
Les caractéristiques de cet assemblage par fretteage sont les suivantes :

- $R$  : rayon de l'arbre 1;
- $L$  : longueur du contact;
- $f$  : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

B2-14

C1-05

C2-07



#### Objectif

Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

### Effort axial maximal transmissible

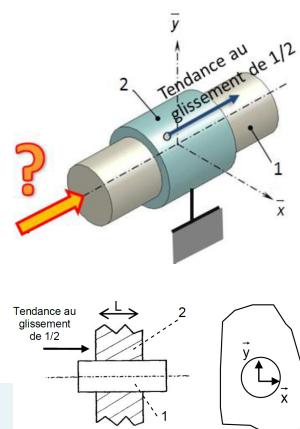
L'effort axial maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante axiale de la résultante de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante axiale de la résultante de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de  $1/2$  suivant  $-\vec{z}$ .

**Question 1** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

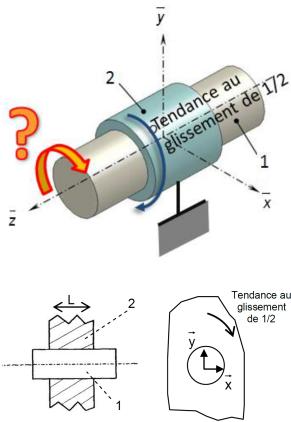
**Question 3** Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du fretteage.



## Couple maximal transmissible

Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de  $1/2$  autour de  $\vec{z}$ .



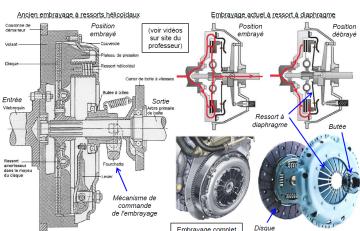
**Question 4** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

**Question 5** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 6** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du fretage.

## Exercice 2 : Embrayage à friction mono disque de véhicules automobiles (surfaces de friction plane)

Situé en amont des boîtes à vitesses, l'embrayage mono disque a pour rôle de désolidariser le moteur de la boîte afin de pouvoir changer de rapports, ou lorsque le véhicule est arrêté moteur tournant au ralenti.

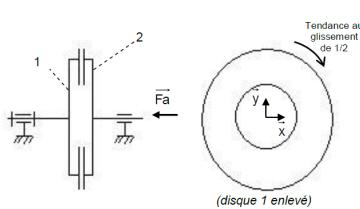


**Position embrayée :** le disque est fortement serré entre deux surfaces lisses (plateau et volant) par la pression des ressorts. Le tout tournera donc d'un bloc, sans glissement et sans pertes.

**Position débrayée :** la poussée du conducteur sur la pédale contrebalance la force des ressorts. Le disque, sous l'effet des vibrations, coulissoit alors légèrement sur ses cannelures pour se positionner entre les surfaces lisses (plateau et volant), sans les toucher. Les vitesses angulaires du volant-plateau (solidaires du vilebrequin) et du disque (solidaire des roues par l'intermédiaire de la transmission) peuvent alors différer sans que le disque ne frotte.

On modélise l'embrayage par 2 disques creux identiques (1 et 2) en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

Le rayon intérieur des 2 disques vaut :  $R_{\min}$ . Le rayon extérieur des 2 disques vaut :  $R_{\max}$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.



**Question 7** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $O$  quelconque de la surface de contact.

**Question 8** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}}(O)$ .

**Question 9** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embravage.

**Question 10** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $\vec{dN}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embravage.

**Question 11** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $n$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embravage.

### Exercice 3 : Embrayage conique des synchroniseurs de boîte de vitesses (surface de friction coniques)

Les boîtes de vitesses automobiles ont pour particularité d'avoir tous leurs engrenages en prise. Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles »

Les pignons et roues situés sur l'arbre secondaire sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Le rôle de la boîte de vitesses est de mettre en liaison encastrement un des pignons (ou roues) fous de l'arbre primaire avec l'arbre primaire. Or pour pouvoir solidariser un des pignons fous et son arbre, il faut synchroniser leurs régimes de vitesses, et c'est là le rôle des synchroniseurs.

On modélise le pignon fou et l'anneau de synchronisation par 2 cônes en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

Le rayon maximal des 2 cônes vaut :  $R_{\max}$ . Le rayon minimal des 2 cônes vaut :  $R_{\min}$ . Le demi-angle au sommet des 2 cônes vaut  $\alpha$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

**Question 12** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan ( $\vec{y}, \vec{z}$ ) et l'autre dans le plan ( $\vec{x}, \vec{y}'$ ), en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

**Question 13** Exprimer  $d\overrightarrow{F}_{2 \rightarrow 1}(Q)$ .

**Question 14** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 15** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $d\vec{N}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 16** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $p$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 17** Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous forme d'un torseur exprimé au point O.

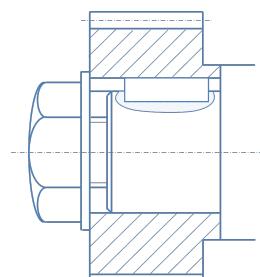
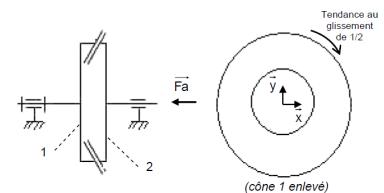
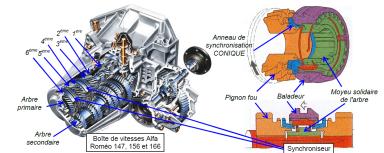
### Couple transmis par une clavette

On cherche à connaître le couple transmissible autour de  $\vec{z}$ , axe du pignon.

La clavette est de hauteur  $2h$  et de largeur  $l$ . On note  $p$  le champ de pression uniforme du pignon sur une demi-clavette.  $p$  est appelée pression de matage.

O est un point de l'axe.

**Question 18** Déterminer le couple transmissible par la clavette.





# Application 2

## Modélisation des actions mécaniques – Corrigé

Ressources de Stéphane GENOÜËL.

### Exercice 1 : Assemblage par frettage

Le frettage consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après frettage, il subsiste donc une pression de contact  $p$  (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

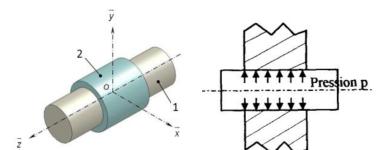
Les caractéristiques de cet assemblage par frettage sont les suivantes :

- $R$  : rayon de l'arbre 1;
- $L$  : longueur du contact;
- $f$  : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

B2-14

C1-05

C2-07



#### Objectif

Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

### Effort axial maximal transmissible

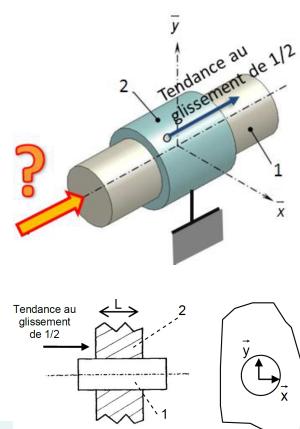
L'effort axial maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante axiale de la résultante de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante axiale de la résultante de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de 1/2 suivant  $-\vec{z}$ .

**Question 1** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 3** Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du frettage.



### Correction

Exprimons le torseur des actions mécaniques sous sa forme locale en un point  $M$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\overline{R}(2 \rightarrow 1) \\ d\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_M$$

La forme globale au point O est alors donnée par :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}(2 \rightarrow 1) = \int d\overline{R}(2 \rightarrow 1) \\ \overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int d\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\overline{R}(2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}_M$$

**Calculons**  $\overline{R}(2 \rightarrow 1)$ .

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \int d\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \iint p \overrightarrow{r} dS = -p \iint \overrightarrow{r} dS = -p \iint (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) dS$$

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = -p \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) R d\theta dz = -p RL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta$$

$$\begin{aligned} \overline{R}(2 \rightarrow 1) &= -p RL \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \overrightarrow{x} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \overrightarrow{y} d\theta \right) = -p RL \left( [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{x} + [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{y} \right) \\ &= -p RL (2\overrightarrow{x} + 0\overrightarrow{y}) = -2p RL \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

$2RL$  est appelée surface projetée du cylindre. Elle correspond au produit du diamètre par sa longueur.

**Calculons**  $\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1)$ .

$$\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int d\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\overline{R}(2 \rightarrow 1)$$

$$\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = -p \iint \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{r} dS = \overrightarrow{0}$$

Au final,

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}(2 \rightarrow 1) = -2p RL \overrightarrow{x} \\ \overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_M$$

### Correction

Dans ce cas :

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \int d\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \iint p(\theta) \overrightarrow{r} dS = -p_0 R \iint \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta dz$$

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = -p_0 LR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

Au final :

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -p_0 L R \frac{\pi}{2} \vec{x}$$

## Couple maximal transmissible

Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de 1/2 autour de  $\vec{z}$ .

**Question 4** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

**Question 5** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 6** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du frette.

## Exercice 2 : Embrayage à friction mono disque de véhicules automobiles (surfaces de friction plane)

Situé en amont des boîtes à vitesses, l'embrayage mono disque a pour rôle de désolidariser le moteur de la boîte afin de pouvoir changer de rapports, ou lorsque le véhicule est arrêté moteur tournant au ralenti.

**Position embrayée** : le disque est fortement serré entre deux surfaces lisses (plateau et volant) par la pression des ressorts. Le tout tournera donc d'un bloc, sans glissement et sans pertes.

**Position débrayée** : la poussée du conducteur sur la pédale contrebalance la force des ressorts. Le disque, sous l'effet des vibrations, coulisse alors légèrement sur ses cannelures pour se positionner entre les surfaces lisses (plateau et volant), sans les toucher. Les vitesses angulaires du volant-plateau (solidaires du vilebrequin) et du disque (solidaire des roues par l'intermédiaire de la transmission) peuvent alors différer sans que le disque ne frotte.

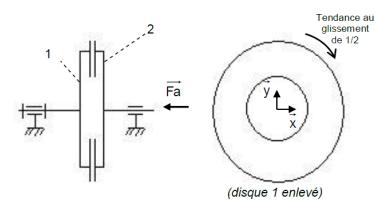
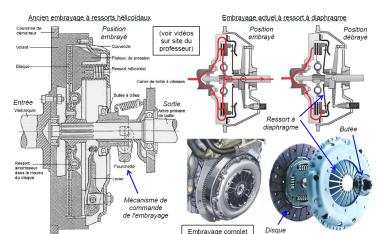
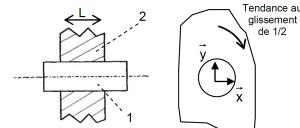
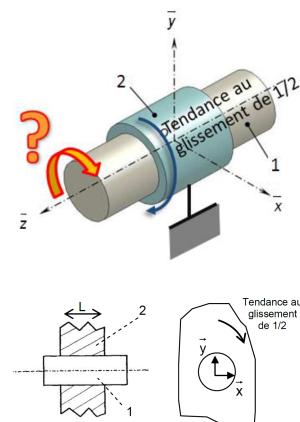
On modélise l'embrayage par 2 disques creux identiques (1 et 2) en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

Le rayon intérieur des 2 disques vaut :  $R_{\min}$ . Le rayon extérieur des 2 disques vaut :  $R_{\max}$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

**Question 7** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

**Question 8** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 9** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.



**Question 10** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $\vec{dN}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 11** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $p$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

### Correction

#### Expression du couple infinitésimal

$$\overrightarrow{dM}(\text{Plateau, Disque} \rightarrow O) = \overrightarrow{dM}(P, D \rightarrow O) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR}(P \rightarrow D)$$

#### Expression de la résultante infinitésimale

$$\overrightarrow{dR}(P \rightarrow D) = \overrightarrow{dN}(P \rightarrow D) + \overrightarrow{dT}(P \rightarrow D)$$

#### Expression de l'effort normal

$$\overrightarrow{dN}(P \rightarrow D) = p \vec{n} d\mathcal{S} = -p \vec{z} d\mathcal{S}$$

#### Expression de l'unité de surface

$$d\mathcal{S} = \rho d\theta d\rho$$

#### Expression de l'effort tangentiel

D'après le modèle de Coulomb, on commence par identifier le vecteur  $\overrightarrow{V(M, D/P)}$ . Le vecteur tangentiel est donc opposé à ce dernier. A la limite du glissement on a alors :

$$\overrightarrow{dT}(P \rightarrow D) = -f \|\overrightarrow{dN}(P \rightarrow D)\| \vec{v} = f \rho d\mathcal{S} \vec{v}$$

#### Calcul final

On note  $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(O, P \rightarrow D)} &= \overrightarrow{dM(O, P \rightarrow D)} \\ &= \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(P \rightarrow D)} \\ &= \int \rho \vec{u} \wedge (\overrightarrow{dN(P \rightarrow D)} + \overrightarrow{dT(P \rightarrow D)}) \\ &= \int \rho \vec{u} \wedge (-p \vec{z} d\mathcal{S} + f \rho d\mathcal{S} \vec{v}) \\ &= \iint p \rho \vec{v} d\mathcal{S} + \iint p f \rho \vec{z} d\mathcal{S} = \iint p \rho \vec{v} \rho d\theta d\rho + \iint p f \rho \vec{z} \rho d\theta d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint p \rho \vec{v} \rho d\theta d\rho &= \iint p \rho (\cos \theta \vec{y} - \sin \theta \vec{x}) \rho d\theta d\rho \\ &= \iint p \rho \cos \theta \vec{y} \rho d\theta d\rho - \iint p \rho \sin \theta \vec{x} \rho d\theta d\rho \\ &= p \vec{y} \int_r^R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \rho^2 d\rho - p \vec{x} \int_r^R \int_0^{2\pi} \sin \theta \rho^2 d\theta d\rho \\ &= p [\sin \theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{y} - p [-\cos \theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint p f \rho^2 \vec{z} d\theta d\rho &= p f [\theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{z} \\ &= p f 2\pi \frac{R^3 - r^3}{3} \end{aligned}$$

Enfin, en notant  $F_r$  l'effort (uniformément réparti) exercé par le ressort sur toute la couronne, on a donc :

$$p = \frac{F_r}{\pi (R^2 - r^2)}$$

Au final :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow D)} = f \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} F_r$$

### Exercice 3 : Embrayage conique des synchroniseurs de boîte de vitesses (surface de friction coniques)

Les boîtes de vitesses automobiles ont pour particularité d'avoir tous leurs engrenages en prise. Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles »

Les pignons et roues situés sur l'arbre secondaire sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Le rôle de la boîte de vitesses est de mettre en liaison encastrement un des pignons (ou roues) fous de l'arbre primaire avec l'arbre primaire. Or pour pouvoir solidariser un des pignons fous et son arbre, il faut synchroniser leurs régimes de vitesses, et c'est là le rôle des synchroniseurs.

On modélise le pignon fou et l'anneau de synchronisation par 2 cônes en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

Le rayon maximal des 2 cônes vaut :  $R_{\max}$ . Le rayon minimal des 2 cônes vaut :  $R_{\min}$ . Le demi-angle au sommet des 2 cônes vaut  $\alpha$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

**Question 12** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

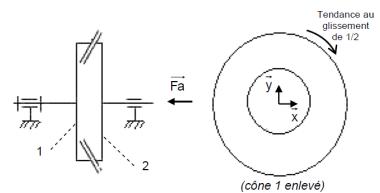
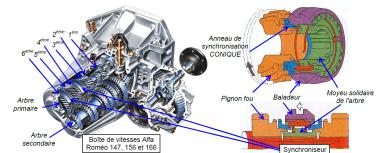
**Question 13** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 14** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

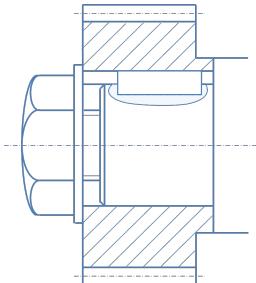
**Question 15** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $\overrightarrow{dN}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 16** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $p$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 17** Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous forme d'un torseur exprimé au point  $O$ .



## Couple transmis par une clavette



On cherche à connaître le couple transmissible autour de  $\vec{z}$ , axe du pignon.

La clavette est de hauteur  $2h$  et de largeur  $l$ . On note  $p$  le champ de pression uniforme du pignon sur une demi-clavette.  $p$  est appelée pression de matage.

$O$  est un point de l'axe.

**Question 18** Déterminer le couple transmissible par la clavette.

(A revoir, notamment les bornes d'intégrations sur la hauteur de la clavette).

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow A)} \cdot \vec{z} = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{R(P \rightarrow A)} \cdot \vec{z} = \int x \vec{x} \wedge p \vec{y} dx dz$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = \int_0^l \int_{R-h/2}^{R+h/2} px \underbrace{\left( \vec{x} \wedge \vec{y} \right) \cdot \vec{z}}_1 dx dz = pl \int_{R-h/2}^{R+h/2} x dx = \frac{1}{2} pl \left( (R + h/2)^2 - (R - h/2)^2 \right)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = hplR$$

Ce résultat peut paraître logique : la force exercée sur la clavette s'exprime par  $phl$ . Le bras de levier du glisseur correspond au rayon de l'arbre auquel on ajoute un quart de hauteur de clavette.

Attention, si on considère que le couple est transmis par l'ensemble du flanc de la clavette, le moment transmissible est de la forme :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = hLpR$$

# Application 3

## Frottement exponentiel – Poulie-courroie – Sujet

Lycée Mistral – Avignon.

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

### Objectif

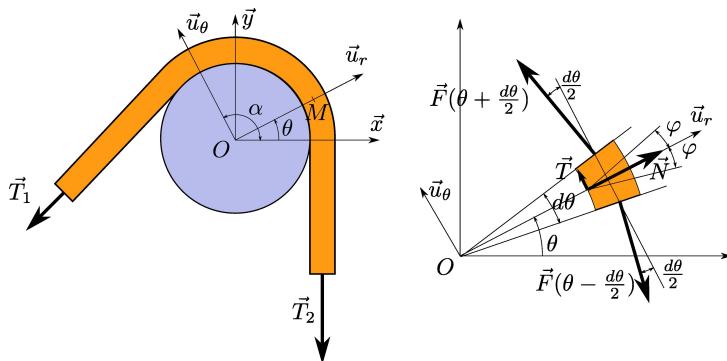
Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

B2-14

C1-05

C2-07

On note  $f$  le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.



On considère que le câble est enroulé d'un angle  $\alpha$  autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$ . Soit  $M(\theta)$  un point de l'enroulement.

**Question 1** Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en  $M(\theta)$  de largeur  $d\theta$ , réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.

**Question 2** Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

**Question 3** En considérant que l'angle  $\theta$  est petit, établir l'équation différentielle liant  $f$  et  $F(\theta)$  et  $\theta$ .

**Question 4** Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $f$  et  $\alpha$ .



# Application 3

## Frottement exponentiel – Poulie-courroie – Corrigé

Lycée Mistral – Avignon.

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

### Objectif

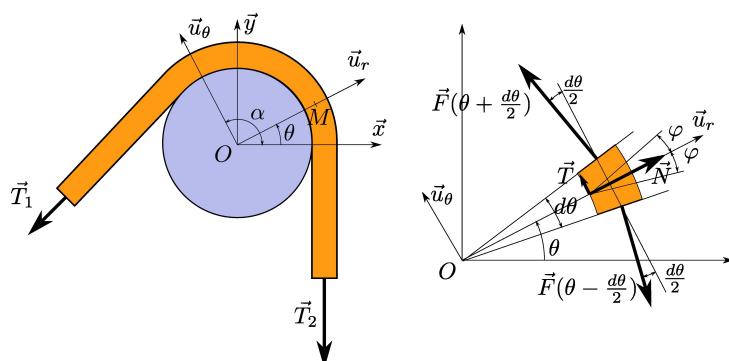
Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

B2-14

C1-05

C2-07

On note  $f$  le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.



On considère que le câble est enroulé d'un angle  $\alpha$  autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$ . Soit  $M(\theta)$  un point de l'enroulement.

**Question 1** Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en  $M(\theta)$  de largeur  $d\theta$ , réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.

### Correction

BAME :

- ▶ action de tension du câble 1  $\vec{F}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$ ;
- ▶ action de tension du câble 2  $\vec{F}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)$ ;
- ▶ action de la poulie sur le câble :  $N\vec{u}_r + T\vec{u}_\theta$  avec  $T = \pm fN$ .

**Question 2** Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

#### Correction

L'application du TRS à la tranche de câble, on a  $\vec{F}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + \vec{F}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + N\vec{u}_r + T\vec{u}_\theta = \vec{0}$ .

En projetant dans  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  on a :

$$\begin{cases} -F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}.$$

**Question 3** En considérant que l'angle  $\theta$  est petit, établir l'équation différentielle liant  $f$  et  $F(\theta)$  et  $\theta$ .

#### Correction

En utilisant  $\cos d\theta/2 \approx 1$  et  $\sin d\theta/2 \approx d\theta/2$  :

$$\begin{cases} -F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \frac{d\theta}{2} - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\right) \frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}.$$

De plus, en faisant un DL à l'ordre 2,  $F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx F(\theta) + \frac{d\theta}{2} \frac{dF(\theta)}{d\theta}$ . On a donc :

$$\begin{cases} -2F(\theta) \frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ dF(\theta) + T = 0 \end{cases}.$$

En utilisant le modèle de Coulomb,  $T = \pm fN$

$$dF(\theta) \pm f\left(2F(\theta) \frac{d\theta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow dF(\theta) \pm fF(\theta)d\theta = 0$$

**Question 4** Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $f$  et  $\alpha$ .

#### Correction

$$\text{On a : } dF(\theta) = \pm f(\theta) d\theta \Leftrightarrow \frac{dF(\theta)}{F(\theta)} = \pm d\theta$$

En intégrant l'équation précédente, on a :  $[\ln F]_{T_1}^{T_2} = \pm f [\theta]_0^\alpha$  Soit  $\ln T_2 - \ln T_1 = -f\alpha$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = \pm f\alpha \text{ et } T_2 = T_1 e^{\pm f\alpha}.$$

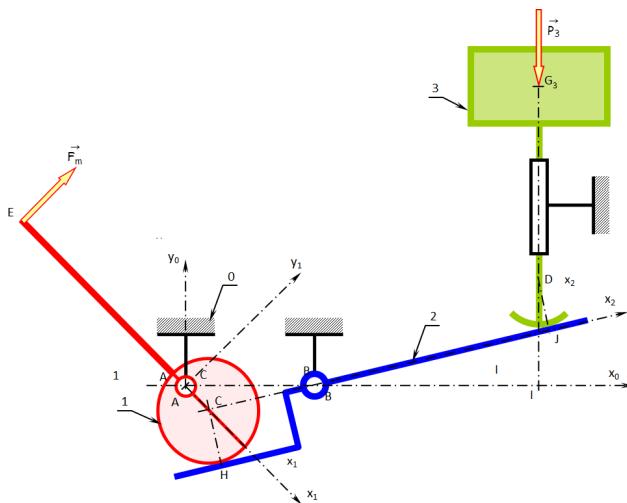
(Le signe dépend du sens de glissement.)

# Application 4

## Mécanisme de levage – Sujet

Le mécanisme représenté schématiquement ci-dessus est destiné à assurer le levage d'une charge liée au coulisseau (3) au moyen d'un levier à excentrique (1) et d'un balancier (2).

Ressources de l'équipe pédagogique La Martinière Monplaisir.



B2-14

C1-05

C2-07

### Objectif

Objectif : Dans cette étude, on va mettre en évidence l'influence du frottement sur l'équilibre d'un système.

On note  $\vec{P}_3$  le poids de la charge appliquée sur le coulisseau et  $\vec{F}_m$  l'effort appliqué en E par l'opérateur sur le levier à excentrique (1).

### Paramétrage géométrique

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= L_0 \vec{x}_0; \vec{AE} = -L_1 \vec{x}_1; \vec{BI} = d_0 \vec{x}_0; \vec{AC} = e_1 \vec{x}_1; \vec{HC} = R_1 \vec{y}_2; \vec{BJ} = \lambda_{32} \vec{x}_2; \vec{ID} = \\ &\lambda_{30} \vec{y}_0; \vec{JD} = R_3 \vec{y}_2; (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{(1/0)}; (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_{(2/0)}. \end{aligned}$$

**On suppose dans un premier temps que toutes les liaisons sont sans frottement.**

**Question 1** Justifier que le système est statiquement plan.

**Question 2** En écrivant les équations associées à l'équilibre de chacune des pièces, établir la relation liant  $F_m$  et  $P_3$  à l'équilibre. On cherchera à écrire le minimum d'équations.

**Question 3** Pour quelle(s) valeur(s) particulières de  $\theta_{1/0}$  l'équilibre est-il possible avec un effort  $F_m$  nul ?

**Question 4** Établir les équations permettant de relier la translation  $\lambda_{3/0}$  du coulisseau, la position angulaire  $\theta_{(1/0)}$  et les constantes géométriques du mécanisme.

**Question 5** En établissant un bilan de puissance, vérifier les relations obtenues.

**On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$**

**Question 6** On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$ . Reprendre la question 2 dans le cadre de cette hypothèse. On se place dans la situation de descente de la charge.

Distinguer deux situations, selon que  $J$  est situé au-dessus ou en dessous de l'axe  $(B, \vec{x}_0)$ .

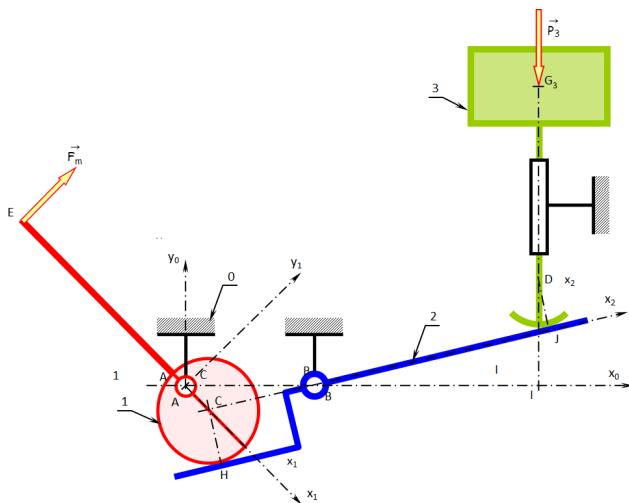
**Question 7** Définir le domaine de valeurs de  $\theta_{(1/0)}$  pour lequel l'équilibre du système est possible sans exercer d'effort sur le levier (1) ( $F_m = 0$ ).

# Application 4

## Mécanisme de levage – Corrigé

Le mécanisme représenté schématiquement ci-dessus est destiné à assurer le levage d'une charge liée au coulisseau (3) au moyen d'un levier à excentrique (1) et d'un balancier (2).

Ressources de l'équipe pédagogique La Martinière Monplaisir.



B2-14

C1-05

C2-07

### Objectif

Objectif : Dans cette étude, on va mettre en évidence l'influence du frottement sur l'équilibre d'un système.

On note  $\vec{P}_3$  le poids de la charge appliquée sur le coulisseau et  $\vec{F}_m$  l'effort appliqué en E par l'opérateur sur le levier à excentrique (1).

### Paramétrage géométrique

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= L_0 \vec{x}_0; \vec{AE} = -L_1 \vec{x}_1; \vec{BI} = d_0 \vec{x}_0; \vec{AC} = e_1 \vec{x}_1; \vec{HC} = R_1 \vec{y}_2; \vec{BJ} = \lambda_{32} \vec{x}_2; \vec{ID} = \\ &\lambda_{30} \vec{y}_0; \vec{JD} = R_3 \vec{y}_2; (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{(1/0)}; (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_{(2/0)}. \end{aligned}$$

**On suppose dans un premier temps que toutes les liaisons sont sans frottement.**

**Question 1** Justifier que le système est statiquement plan.

**Question 2** En écrivant les équations associées à l'équilibre de chacune des pièces, établir la relation liant  $F_m$  et  $P_3$  à l'équilibre. On cherchera à écrire le minimum d'équations.

**Question 3** Pour quelle(s) valeur(s) particulières de  $\theta_{1/0}$  l'équilibre est-il possible avec un effort  $F_m$  nul ?

**Question 4** Établir les équations permettant de relier la translation  $\lambda_{3/0}$  du coulisseau, la position angulaire  $\theta_{(1/0)}$  et les constantes géométriques du mécanisme.

**Question 5** En établissant un bilan de puissance, vérifier les relations obtenues.

**On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$**

**Question 6** On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$ . Reprendre la question 2 dans le cadre de cette hypothèse. On se place dans la situation de descente de la charge.

Distinguer deux situations, selon que  $J$  est situé au-dessus ou en dessous de l'axe  $(B, \vec{x}_0)$ .

**Question 7** Définir le domaine de valeurs de  $\theta_{(1/0)}$  pour lequel l'équilibre du système est possible sans exercer d'effort sur le levier (1) ( $F_m = 0$ ).

# Application 5

## Suspension automobile – Sujet

Ressources de Florestan MATHURIN.

On s'intéresse à une suspension automobile dont on donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel ainsi qu'une modélisation. L'objectif est de vérifier si la suspension satisfait le niveau du critère d'affaissement statique maximal du cahier des charges, c'est à dire vérifier si la voiture, soumise à son propre poids, s'affaisse de moins ou de plus de 12 cm, suite à l'écrasement des amortisseurs.

**Question 1** Déterminer toutes les inconnues d'effort en fonction de  $F_{06}$ .

Données :  $a = 16\text{cm}$ ,  $b = 33\text{cm}$ ,  $c = 8\text{cm}$ ,  $d = 25\text{cm}$ ,  $h = 3\text{cm}$ ,  $L = 15\text{cm}$ ,  $e = 9\text{cm}$ ,  $\mu = 18\text{cm}$ .

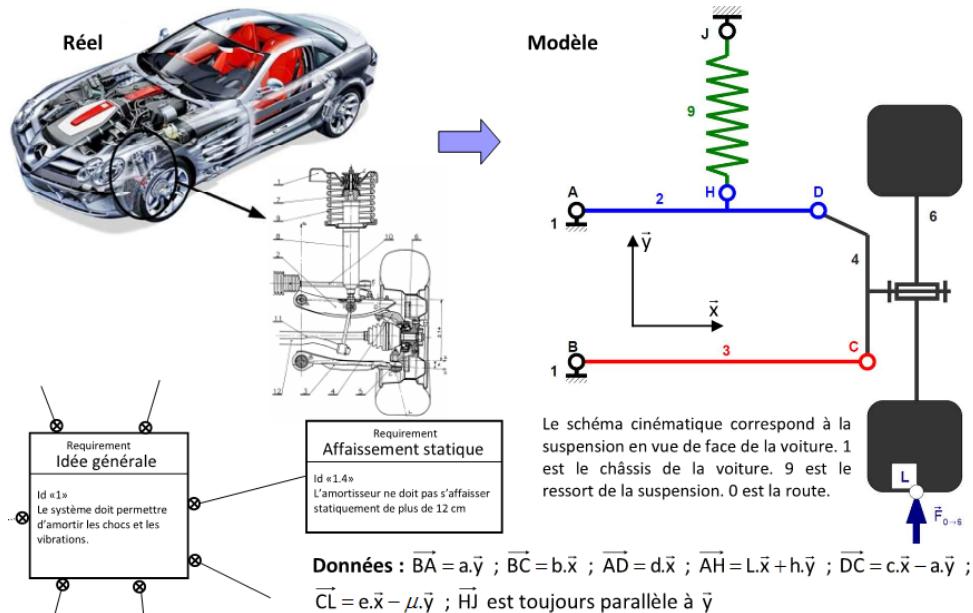
La raideur du ressort est  $k = 100\,000\text{N/m}$ . La masse de la voiture est de 2200 kg.

**Question 2** Conclure quant à la capacité de la suspension de voiture à satisfaire l'exigence Affaissement statique du cahier des charges.

B2-14

C1-05

C2-07





# Application 5

## Suspension automobile – Corrigé

Ressources de Florestan MATHURIN.

On s'intéresse à une suspension automobile dont on donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel ainsi qu'une modélisation. L'objectif est de vérifier si la suspension satisfait le niveau du critère d'affaissement statique maximal du cahier des charges, c'est à dire vérifier si la voiture, soumise à son propre poids, s'affaisse de moins ou de plus de 12 cm, suite à l'écrasement des amortisseurs.

**Question 1** Déterminer toutes les inconnues d'effort en fonction de  $F_{06}$ .

Données :  $a = 16\text{cm}$ ,  $b = 33\text{cm}$ ,  $c = 8\text{cm}$ ,  $d = 25\text{cm}$ ,  $h = 3\text{cm}$ ,  $L = 15\text{cm}$ ,  $e = 9\text{cm}$ ,  $\mu = 18\text{cm}$ .

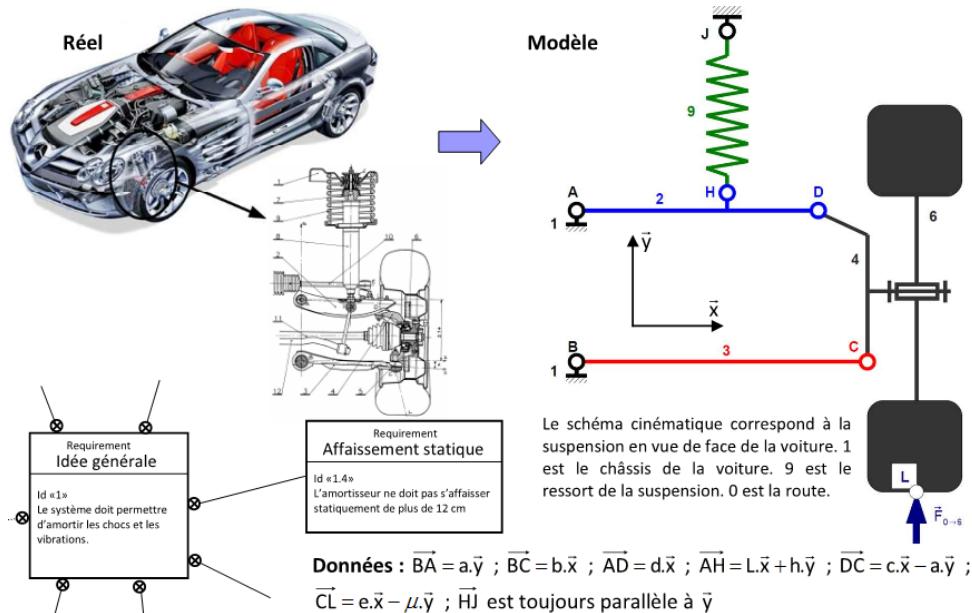
La raideur du ressort est  $k = 100\,000\text{N/m}$ . La masse de la voiture est de 2200 kg.

**Question 2** Conclure quant à la capacité de la suspension de voiture à satisfaire l'exigence Affaissement statique du cahier des charges.

B2-14

C1-05

C2-07





# Application 6

## Étude d'un robot Kuka – Sujet

D'après CCP MP 2010.

### Mise en situation

Le robot Kuka, objet de cette étude, a pour objectif la palettisation de bidons utilisés en agriculture biologique (compléments permettant d'améliorer les qualités nutritives des produits agricoles).

#### Objectif

Suite à l'appui sur le bouton d'arrêt d'urgence, le robot doit immédiatement s'immobiliser dans la position courante. On souhaite alors vérifier que les freins équipant le robot sont suffisants pour assurer sa configuration d'équilibre dans le cas d'une charge maximale de 50 daN (préhenseur + bidon de 40 litres) et qu'il ne faudra pas mettre des actionneurs en parallèle.

On se place dans la situation particulière définie figure suivante avec  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = +90^\circ$ .

On donne :

- $O_2O_3 = O_6O_7 = 1250 \text{ mm}$ ;
- $O_3O_{10} = O_8O_9 = 1350 \text{ mm}$ ;
- $O_2O_6 = O_3O_7 = O_3O_8 = O_9O_{10} = 500 \text{ mm}$ ;
- $\vec{P} = -500\vec{z}_4$ .

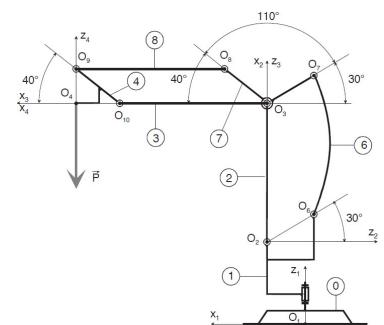
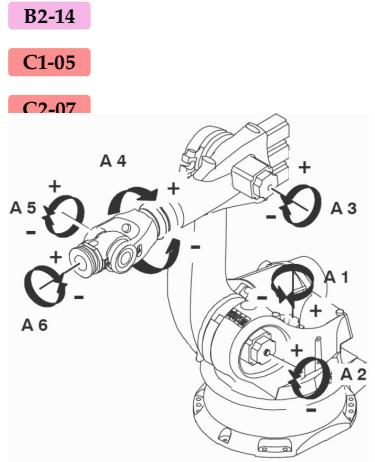
On admettra pour simplifier que le point  $O_4$  est situé sur l'axe  $\vec{x}_3$  et que l'axe  $\vec{z}_4$  passe par le point  $O_9$ . De même, les poids propres des pièces seront négligés par rapport aux autres actions.

Les liaisons pivot sont supposées parfaites (pas de frottement).

Les couples de freinage maxi  $M_f_2$  et  $M_f_3$  des freins associés aux moteurs  $M_2$  et  $M_3$  sont de 5 mN sur l'arbre moteur. On leur adjoint en série un réducteur de rapport 1/200.

**Question 1** Réaliser le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2** Déterminer les actions de la barre 8 sur le poignet 4 et du bras 3 sur le poignet 4.



**Question 3** En isolant l'ensemble 3 et 4 et en considérant les informations fournies dans le tableau suivant, déterminer l'expression du moment  $Mf_3$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 3 en  $O_3$ .

Moteur	Axe	Monté sur	Entraîne	Nmaxi (tr.min <sup>-1</sup> )	Puissance (kW)	Réducteur	Frein (Nm)
M1	A1	<b>0</b>	<b>1</b>	3500	4,5	200	5
M2	A2	<b>1</b>	<b>2</b>	3500	3,5	200	5
M3	A3	<b>2</b>	<b>3</b>	3500	2,5	200	5
M4	A4	<b>4</b>	<b>5</b>	3500	1,5	100	5

Le dispositif de freinage ne permet qu'un couple maxi de 5 mN sur l'axe moteur.

**Question 4** Quel est alors le couple de freinage disponible en sortie du réducteur ?

**Question 5** Le maintien du freinage est-il assuré ?

On veut alors vérifier que le dispositif de freinage du moteur  $M_2$  convient.

**Question 6** En isolant la pièce 7, déterminer l'action de la barre 6 sur la pièce 7.

**Question 7** En considérant l'ensemble 2, 3, 4, 7, 8, déterminer l'expression du moment  $Mf_2$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 2 en  $O_2$ . Calculer  $Mf_2$ .

**Question 8** Le dispositif de freinage étant identique à celui de l'axe 3, le maintien du freinage est-il assuré ?

# Application 6

## Étude d'un robot Kuka – Corrigé

D'après CCP MP 2010.

### Mise en situation

Le robot Kuka, objet de cette étude, a pour objectif la palettisation de bidons utilisés en agriculture biologique (compléments permettant d'améliorer les qualités nutritives des produits agricoles).

#### Objectif

Suite à l'appui sur le bouton d'arrêt d'urgence, le robot doit immédiatement s'immobiliser dans la position courante. On souhaite alors vérifier que les freins équipant le robot sont suffisants pour assurer sa configuration d'équilibre dans le cas d'une charge maximale de 50 daN (préhenseur + bidon de 40 litres) et qu'il ne faudra pas mettre des actionneurs en parallèle.

On se place dans la situation particulière définie figure suivante avec  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = +90^\circ$ .

On donne :

- $O_2O_3 = O_6O_7 = 1250 \text{ mm}$ ;
- $O_3O_{10} = O_8O_9 = 1350 \text{ mm}$ ;
- $O_2O_6 = O_3O_7 = O_3O_8 = O_9O_{10} = 500 \text{ mm}$ ;
- $\vec{P} = -500\vec{z}_4$ .

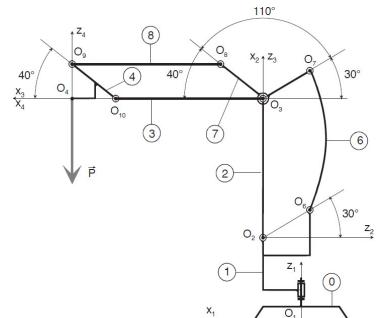
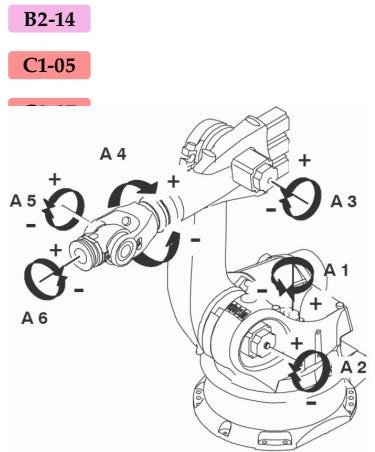
On admettra pour simplifier que le point  $O_4$  est situé sur l'axe  $\vec{x}_3$  et que l'axe  $\vec{z}_4$  passe par le point  $O_9$ . De même, les poids propres des pièces seront négligés par rapport aux autres actions.

Les liaisons pivot sont supposées parfaites (pas de frottement).

Les couples de freinage maxi  $M_{f2}$  et  $M_{f3}$  des freins associés aux moteurs  $M_2$  et  $M_3$  sont de 5 mN sur l'arbre moteur. On leur adjoint en série un réducteur de rapport 1/200.

**Question 1** Réaliser le graphe de structure du mécanisme.

#### Correction



**Question 2** Déterminer les actions de la barre 8 sur le poignet 4 et du bras 3 sur le poignet 4.

**Correction**

**Question 3** En isolant l'ensemble 3 et 4 et en considérant les informations fournies dans le tableau suivant, déterminer l'expression du moment  $M_{f_3}$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 3 en  $O_3$ .

**Correction**

Moteur	Axe	Monté sur	Entraîne	Nmaxi (tr.min <sup>-1</sup> )	Puissance (kW)	Réducteur	Frein (Nm)
M1	A1	0	1	3500	4,5	200	5
M2	A2	1	2	3500	3,5	200	5
M3	A3	2	3	3500	2,5	200	5
M4	A4	4	5	3500	1,5	100	5

Le dispositif de freinage ne permet qu'un couple maxi de 5 mN sur l'axe moteur.

**Question 4** Quel est alors le couple de freinage disponible en sortie du réducteur ?

**Correction**

**Question 5** Le maintien du freinage est-il assuré ?

**Correction**

On veut alors vérifier que le dispositif de freinage du moteur  $M_2$  convient.

**Question 6** En isolant la pièce 7, déterminer l'action de la barre 6 sur la pièce 7.

**Correction**

**Question 7** En considérant l'ensemble 2, 3, 4, 7, 8, déterminer l'expression du moment  $M_{f_2}$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 2 en  $O_2$ . Calculer  $M_{f_2}$ .

**Correction**

**Question 8** Le dispositif de freinage étant identique à celui de l'axe 3, le maintien du freinage est-il assuré ?

**Correction**

a) On isole 8, le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures donne alors :

- action de 4 sur 8 en O<sub>9</sub>
- action de 7 sur 8 en O<sub>8</sub>

Le système étant soumis à deux glisseurs, ils sont donc directement opposés suivant la ligne d'action, on pose donc :  $\overline{R_{48}} = R_{48} \overline{x_3} = -\overline{R_{78}}$

On isole alors 4, le BAME donne alors :  $(O_9, \overline{R_{84}}); (O_4, \overline{P}); (O_{10}, \overline{R_{34}})$   
 $\overline{R_{84}} + \overline{P} + \overline{R_{34}} = \vec{0}$

Le Théorème de la Résultante Statique fournit alors :  $\overline{x_3} : -R_{48} + 0 + X_{34} = 0$   
 $\overline{z_3} : 0 - P + Y_{34} = 0$

Le Théorème du Moment Statique en  $O_{10}$  fournit alors :

$$\begin{aligned}\overline{M}(\overline{R_{84}}) + \overline{M}(\overline{P}) + \overline{M}(\overline{R_{34}}) &= \vec{0} \\ \overline{O_{10}O_9} \wedge -R_{48}\vec{x}_3 + \overline{O_{10}O_4} \wedge -P\vec{z}_4 + \vec{0} &= \vec{0} \\ 500.(\cos 40.\vec{x}_3 + \sin 40.\vec{z}_3) \wedge -R_{48}\vec{x}_3 + 500.\cos 40.\vec{x}_3 \wedge -P\vec{z}_4 &= \vec{0} \\ \vec{y}_3 : -500.R_{48} \cdot \sin 40 + 500.P \cdot \cos 40 &= 0\end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned}R_{84} &= -\frac{P}{\tan 40} \\ X_{34} = R_{48} &= \frac{P}{\tan 40} \quad ; \quad Y_{34} = P\end{aligned}}$$

b) On isole l'ensemble [3+4], le BAME nous donne :

- action de 8 sur 4 en  $O_9$ ,
- action du poids en  $O_4$ ,
- action de la pivot en  $O_3$ ,
- couple de freinage

Le TMS en  $O_3$  permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}\overline{M}(\overline{R_{84}}) + \overline{M}(\overline{P}) + \overline{M}_{O_3} + M_{f_3}\vec{y}_3 &= \vec{0} \\ \overline{O_3O_9} \wedge \frac{-P}{\tan 40}\vec{x}_3 + \overline{O_3O_4} \wedge -P\vec{z}_3 + (L_{O_3}\vec{x}_3 + N_{O_3}\vec{z}_3) + M_{f_3}\vec{y}_3 &= \vec{0} \\ \vec{y}_3 : -500.\sin 40 \cdot \frac{P}{\tan 40} + P.(1350 + 500.\cos 40) + M_{f_3} &= 0\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \boxed{M_{f_3} = -1350.P = -675 \text{ N.m}}$$

### Question 3-2

Grâce au réducteur, le couple de freinage disponible en sortie est de  $5 \times 200 = 1000 \text{ N.m} > 675 \text{ N.m}$ . La fonction est donc assurée convenablement.

### Question 3-3

a) On isole 7, le BAME fournit alors :

- action de 8 sur 7 en  $O_8$ ,  $\overline{R_{87}} = \frac{P}{\tan 40}\vec{x}_3$
- action de la pivot en  $O_3$ ,
- action de 6 sur 7 en  $O_7$ ,  $\overline{R_{67}} = Z_{67}\vec{z}_3$ .

Le TMS en O<sub>3</sub> donne :

$$\overline{M(R_{87})} + \overline{M_{O_3}} + \overline{M(R_{67})} = \vec{0}$$

$$\overline{O_3O_8} \wedge \frac{P}{\tan 40} \cdot \overline{x_3} + (L_{O_3} \cdot \overline{x_3} + N_{O_3} \cdot \overline{z_3}) + \overline{O_3O_7} \wedge Z_{67} \cdot \overline{z_3} = \vec{0}$$

$$500.(\cos 40 \cdot \overline{x_3} + \sin 40 \cdot \overline{z_3}) \wedge \frac{P}{\tan 40} \cdot \overline{x_3} + (L_{O_3} \cdot \overline{x_3} + N_{O_3} \cdot \overline{z_3}) + 500.(-\cos 30 \cdot \overline{x_3} + \sin 30 \cdot \overline{z_3}) \wedge Z_{67} \cdot \overline{z_3} = \vec{0}$$

$$\overline{y_3} : 500 \cdot \cos 40 \cdot \frac{P}{\tan 40} + 500 \cdot \cos 30 \cdot Z_{67} = 0$$

Soit :  $Z_{67} = -\frac{\cos 40}{\cos 30} \cdot P$

On isole alors le système [2+3+4+7+8], le BAME donne :

-action du poids en O<sub>4</sub>,

-action de la pivot en O<sub>2</sub>,

-action de 6 sur 7 en O<sub>7</sub>,

-couple de freinage  $M_{f_2} \cdot \overline{y_2}$

Le TMS en O<sub>2</sub> donne :

$$\overline{O_2O_4} \wedge \vec{P} + (L_{O_3} \cdot \overline{x_3} + N_{O_3} \cdot \overline{z_3}) + M_{f_2} \cdot \overline{y_2} + \overline{O_2O_7} \wedge Z_{67} \cdot \overline{z_3} = \vec{0}$$

$$((1350 + 500 \cos 40) \cdot \overline{x_3} + 1250 \cdot \overline{z_3}) \wedge -P \cdot \overline{z_3} + (L_{O_3} \cdot \overline{x_3} + N_{O_3} \cdot \overline{z_3}) + M_{f_2} \cdot \overline{y_2} + (-500 \cdot \cos 30 \cdot \overline{x_3} + (1250 + 500 \cdot \sin 30) \cdot \overline{z_3}) \wedge Z_{67} \cdot \overline{z_3} = \vec{0}$$

$$\overline{y_3} : (1350 + 500 \cdot \cos 40) \cdot P + M_{f_2} + 500 \cdot \cos 30 \cdot (-\frac{\cos 40}{\cos 30} \cdot P) = 0$$

Soit :  $M_{f_2} = M_{f_3} = -1350P = -675N.m$

La fonction freinage est donc validée.



# Application 7

## Pilote automatique de voilier – Sujet

D'après Florestan MATHURIN.

Le safran d'un voilier lui permet de se diriger. Dans le cas du pilote hydraulique du laboratoire, l'angle du safran est asservi afin de pouvoir maintenir un cap, en tenant compte des aléas extérieurs (courants marins, vents violents...). Le safran est actionné par un vérin hydraulique, la pièce 2 étant relié à la tige du vérin et la pièce 3 constituant le corps du vérin. La pièce 1 représente le safran sur lequel agit la pression de l'eau  $p$ , perpendiculairement au plan du safran.

L'objectif de l'étude est de calculer les efforts dans les liaisons dans le but ultérieur de dimensionner le vérin hydraulique et les éléments mécaniques assurant les liaisons (éléments roulants ou coussinets).

On donne :

- $\overrightarrow{A_1B} = h \vec{y}$
- $\overrightarrow{CB} = \lambda \vec{x}$

**Question 1** Tracer le graphe de structure associé au système.

NB : il serait possible d'écrire la loi Entrée – Sortie liant la vitesse de déploiement du vérin à la vitesse de rotation du safran.

**Question 2** Sur le graphe d'architecture du système indiquer par des flèches les actions mécaniques agissant sur chacune des pièces.

Par la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur les pièces 2 et 3.

**Question 3** Déterminer le torseur d'action mécanique de l'eau sur le gouvernail au point  $A_2$ . On considérera que  $\overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$ . On négligera l'épaisseur du safran.

**Question 4** Déterminer l'effort à délivrer par le vérin pour supporter la pression de l'eau sur le safran.

**Question 5** Déterminer alors la pression à délivrer par le vérin en fonction d'une section  $S$ .

B2-14

C1-05

C2-07



FIGURE 6.3 – Safrans... du SAFRAN (Skipper Marc Guillemot)

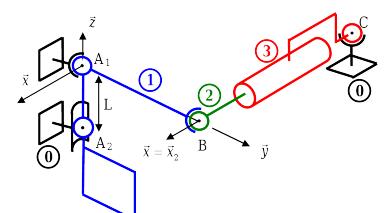
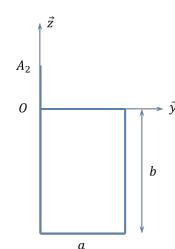


FIGURE 6.4 – Schéma d'architecture





# Application 7

## Pilote automatique de voilier – Corrigé

D'après Florestan MATHURIN.

Le safran d'un voilier lui permet de se diriger. Dans le cas du pilote hydraulique du laboratoire, l'angle du safran est asservi afin de pouvoir maintenir un cap, en tenant compte des aléas extérieurs (courants marins, vents violents...). Le safran est actionné par un vérin hydraulique, la pièce 2 étant relié à la tige du vérin et la pièce 3 constituant le corps du vérin. La pièce 1 représente le safran sur lequel agit la pression de l'eau  $p$ , perpendiculairement au plan du safran.

L'objectif de l'étude est de calculer les efforts dans les liaisons dans le but ultérieur de dimensionner le vérin hydraulique et les éléments mécaniques assurant les liaisons (éléments roulants ou coussinets).

On donne :

- $\overrightarrow{A_1B} = h \vec{y}$
- $\overrightarrow{CB} = \lambda \vec{x}$

**Question 1** Tracer le graphe de structure associé au système.

NB : il serait possible d'écrire la loi Entrée – Sortie liant la vitesse de déploiement du vérin à la vitesse de rotation du safran.

**Question 2** Sur le graphe d'architecture du système indiquer par des flèches les actions mécaniques agissant sur chacune des pièces.

Par la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur les pièces 2 et 3.

**Question 3** Déterminer le torseur d'action mécanique de l'eau sur le gouvernail au point  $A_2$ . On considérera que  $\overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$ . On négligera l'épaisseur du safran.

**Question 4** Déterminer l'effort à délivrer par le vérin pour supporter la pression de l'eau sur le safran.

**Question 5** Déterminer alors la pression à délivrer par le vérin en fonction d'une section  $S$ .

B2-14

C1-05

C2-07



FIGURE 6.5 – Safrans... du SAFRAN (Skipper Marc Guillemot)

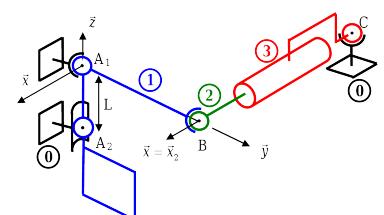
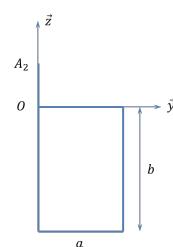


FIGURE 6.6 – Schéma d'architecture





# TD 1 :

## Modélisation d'un hayon de coffre électrique – Su-jet

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

### Mise en situation

Le PCS (Power Closure System), conçu par Valéo, est un système d'ouverture et de fermeture automatique de hayon de coffre automobile. Le système étant symétrique, les deux vérins sont ramenées dans le plan d'évolution de la porte de coffre et leur action mécanique s'exerçant sur la porte de coffre est supposée identique.

On donne un diagramme d'exigence partiel du système étudié.

#### Objectif

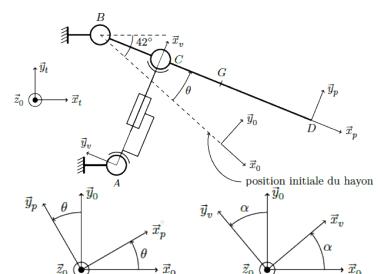
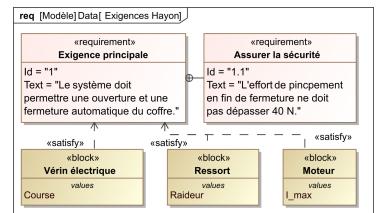
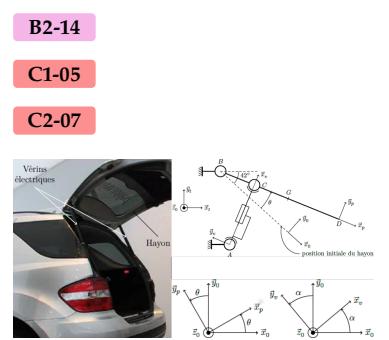
- Déterminer les caractéristiques du vérin répondant au cahier des charges : longueur du vérin en position coffre ouvert et coffre fermé, course du vérin, raideur du ressort équipant le vérin.
- Déterminer le couple moteur maximal nécessaire pour le maintien en position du hayon.
- Déterminer le courant de pincement afin que l'effort de pincement soit inférieure à 40 N pendant 10 ms.

Le repère  $(B; \vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_0)$  est lié à la Terre. L'accélération de la pesanteur s'écrit  $\vec{g} = -g \vec{y}_t$  avec  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . La structure du véhicule et la porte de coffre sont en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$ .

Le repère  $(B; \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_0)$  est lié à la porte de coffre  $S_1$  de masse  $M = 30 \text{ kg}$ . Le repère  $(B; \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_0)$  est lié au corps du vérin. La sortie de tige par rapport au corps du vérin  $S_3$  se fait dans la direction du vecteur  $\vec{x}_v$ . Les liaisons entre le corps du vérin  $S_3$  et le bâti  $S_0$  ainsi qu'entre la tige du vérin  $S_2$  et la porte de coffre  $S_1$  sont des liaisons rotules de centres respectifs  $A$  et  $C$ . Le point  $D$  représente l'extrémité de la porte du coffre. La hauteur du point  $D$  par rapport au sol suivant la verticale est de 0,7 m en position coffre fermé et de 1,8 m en position coffre ouvert.

#### Caractéristiques géométriques du vérin

Le centre d'inertie du coffre est situé en  $G$  tel que  $\vec{BG} = \lambda \vec{x}_p$  avec  $\lambda = 0,6 \text{ m}$ .



$\overrightarrow{AB} = -a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0}$ ,  $\overrightarrow{AC} = L\overrightarrow{x_v}$ ,  $\overrightarrow{BC} = c\overrightarrow{x_p}$ ,  $\overrightarrow{BD} = d\overrightarrow{x_p}$  avec  $a = 0,55 \text{ m}$ ,  $b = 0,14 \text{ m}$ ,  $c = 0,14 \text{ m}$  et  $d = 1 \text{ m}$ . L'angle formé entre  $\overrightarrow{x_0}$  et l'horizontale  $\overrightarrow{x_t}$  est  $\theta_0 = 42^\circ$ .

**Question 1** Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

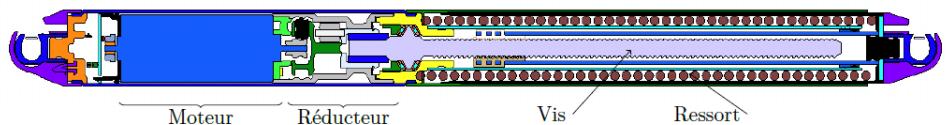
**Question 2** Déterminer la longueur du vérin  $L$  en fonction de l'angle d'ouverture du coffre  $\theta$ .

On donne la courbe donnant l'évolution de la course du vérin en fonction de l'ouverture du hayon.

**Question 3** Déterminer les valeurs extrêmes de  $L$ , ainsi que la course du vérin.

### Dimensionnement des caractéristiques du ressort

Les vérins utilisés sont constitués d'un moteur à courant continu, d'un réducteur à engrenage, d'une vis à billes et d'un ressort. Ce dernier permet d'assurer l'équilibre de la porte de coffre en cas de panne des vérins électriques.



On suppose dans un premier temps que le coffre est à l'équilibre.

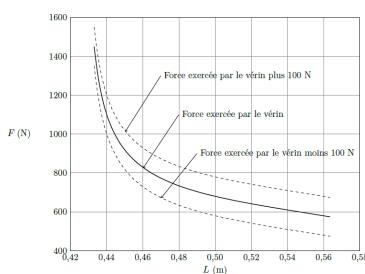
**Question 4** Déterminer l'effort  $F$  exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  et des constantes du problème.

En exploitant les équations obtenues à partir de l'écriture de la fermeture géométrique obtenue précédemment, on montre que la relation entre  $\theta$  et  $\alpha$  s'écrit :  $\tan \alpha = \frac{b + c \sin \theta}{-a + c \cos \theta}$ .

On déduit de la question précédente le tracé de l'évolution de l'effort  $F$  nécessaire au maintien en équilibre du coffre en fonction de la longueur  $L$  du vérin.

On choisit d'utiliser un ressort précontraint au sein du vérin de manière à assister l'ouverture du coffre et à assurer l'équilibre du coffre sur une plage de fonctionnement maximale. On estime que les forces de frottement maximales au sein du vérin (essentiellement dues à la friction dans la vis) sont de l'ordre de  $F_{\text{frot}} = 100 \text{ N}$ .

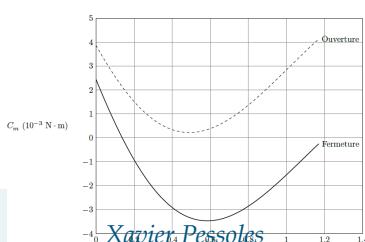
La figure précédente représente la force que doit exercer le vérin sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre de cette dernière en fonction de la longueur du vérin. Les courbes en pointillés représentent la force du vérin  $\pm 100 \text{ N}$ .



**Question 5** Déterminer la raideur  $k$  du ressort et sa longueur à vide  $L_0$  de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

La figure suivante représente l'évolution du couple moteur dans un vérin lors des phases d'ouverture et de fermeture du coffre.

**Question 6** Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.



## Réglage de la fonction sécurité des personnes

Pour limiter le risque d'accident lié au pincement d'un utilisateur, il est nécessaire de limiter le couple du moteur à courant continu durant la phase de fermeture du hayon.

On envisage la présence d'un obstacle empêchant la fermeture du coffre. On modélise l'action de l'obstacle sur la porte de coffre par un glisseur s'appliquant en  $D$  et s'exprimant  $\overrightarrow{F_{\text{pinc}}} = F_{\text{pinc}} \vec{y}_p$ .

On cherche à déterminer l'accroissement de couple moteur en cas de présence d'obstacle. On suppose ainsi que la porte de coffre est en équilibre sous l'effet du poids et de l'action des vérins. On ajoute ainsi l'effort de pincement  $F_{\text{pinc}}$  en  $D$  et on cherche l'accroissement d'effort  $\Delta F \vec{x}_v$  qu'exercent chacun des vérins en  $C$  sur la porte en la supposant en équilibre.

On donne la relation entre le couple moteur et la force fournie par le vérin en régime quasi-statique :  $C_m = \rho F$  avec  $\rho = 7,89 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

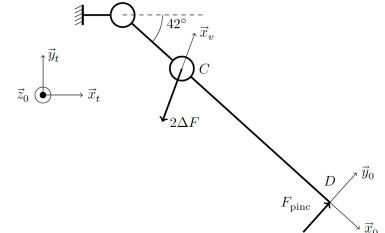
**Question 7** Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de  $\Delta F$  l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

La constante de couple du moteur est donnée par  $K_t = 9,5 \times 10^{-3} \text{ Nm A}^{-1}$ .

**Question 8** En déduire la valeur numérique de l'accroissement  $\Delta C_m$  de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

## Synthèse

**Question 9** Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminés.



### Éléments de correction

1. Angle d'ouverture :  $67,5^\circ$ .
2.  $L^2 = (-a + c \cos \theta)^2 + (b + c \sin \theta)^2$ .
3. Course de 13,2 cm.
4.  $F_v = \frac{\lambda M g \cos \theta}{c \sin(\alpha - \theta)} (F_v/2)$ .
5.  $k = 1667 \text{ N m}^{-1}$ , écrasement de 300 mm.
6. .
7.  $\Delta F = \pm 443 \text{ N}$ .
8.  $I_{\max} = 3,95 \text{ A}$ .



## TD 1 :

# Modélisation d'un hayon de coffre électrique – Corrigé

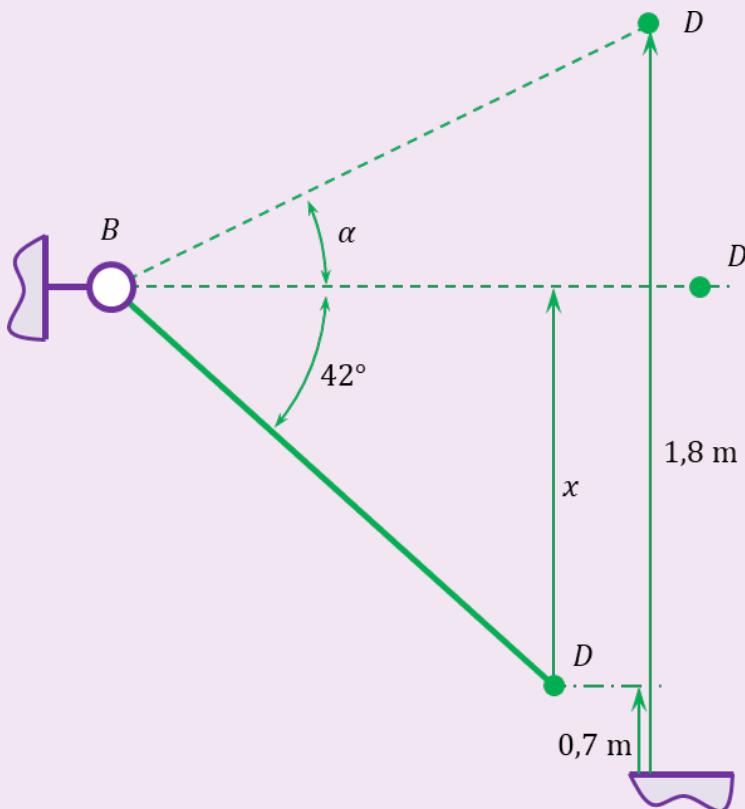
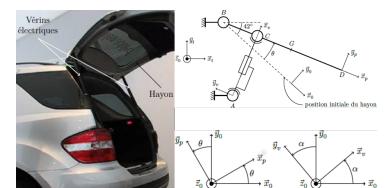
Concours Centrale Supelec TSI 2013.

### Mise en situation

#### Caractéristiques géométriques du vérin

Question 1 Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

Correction



D'une part,  $x = d \sin 42 \approx 0,67 \text{ m}$ . D'autre part,  $\sin \alpha = \frac{1,8 - 0,7 - x}{d} = 0,43$ . Au final  $\alpha = 25,5^\circ$ .

L'angle d'ouverture est donc de  $67,5^\circ$ .

**Question 2** Déterminer la longueur du vérin  $L$  en fonction de l'angle d'ouverture du coffre  $\theta$ .

#### Correction

La longueur du vérin est donnée par la valeur de  $L$ . En réalisant la fermeture géométrique, on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow -a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0 + c\vec{x}_p - L\vec{x}_v = \vec{0}$ . En projetant l'équation vectorielle dans  $\mathcal{R}_0$ , on a :

$$\begin{cases} -a + c \cos \theta - L \cos \alpha = 0 \\ b + c \sin \theta - L \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

On a donc  $L^2 = (-a + c \cos \theta)^2 + (b + c \sin \theta)^2$ .

**Question 3** Déterminer les valeurs extrêmes de  $L$ , ainsi que la course du vérin.

#### Correction

La longueur du vérin varie de 43,3 cm à 56,5 cm soit une course de 13,2 cm.

## Dimensionnement des caractéristiques du ressort

**Question 4** Déterminer l'effort  $F$  exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  et des constantes du problème.

#### Correction

On isole le corps et le piston du vérin. L'ensemble est soumis à deux actions mécaniques (liaisons sphériques en  $A$  et  $C$ ). D'après le PFS, cette action mécanique est donc suivant Ces deux actions mécaniques sont donc de même direction (le vecteur  $\vec{x}_v$ ), de même norme et de sens opposé.

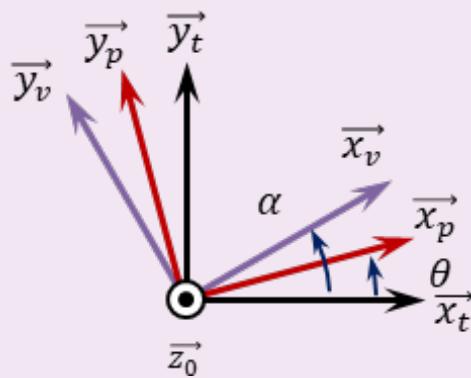
On isole le hayon  $h$ .

On réalise le BAME :

- ▶ action mécanique du vérin  $v$  :  $\{\mathcal{T}(v \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{x}_v \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$  ;
- ▶ action de la pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Mg \vec{y}_t \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$  ;
- ▶ action de la pivot en  $B$  :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow h)\}$ .

On cherche à connaître l'action du vérin en fonction des actions de pesanteur. On réalise donc le théorème du moment statique en  $B$  en projection sur  $\vec{z}_0$  :

$$(\vec{0} + \overrightarrow{BC} \wedge F_v \vec{x}_v + \vec{0} + \overrightarrow{BG} \wedge -Mg \vec{y}_t) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow (c \vec{x}_p \wedge F_v \vec{x}_v + \lambda \vec{x}_p \wedge -Mg \vec{y}_t) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0}$$



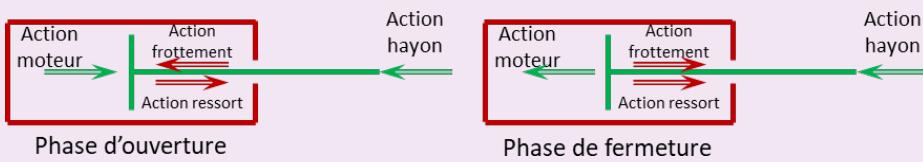
$$\Leftrightarrow cF_v \sin(\alpha - \theta) - \lambda M g \cos \theta = 0$$

$$F_v = \frac{\lambda M g \cos \theta}{c \sin(\alpha - \theta)}.$$

Dans le cas où on considère les deux vérins, on aura  $F_1 = F_2 = F_v/2$ .

**Question 5** Déterminer la raideur  $k$  du ressort et sa longueur à vide  $L_0$  de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

### Correction

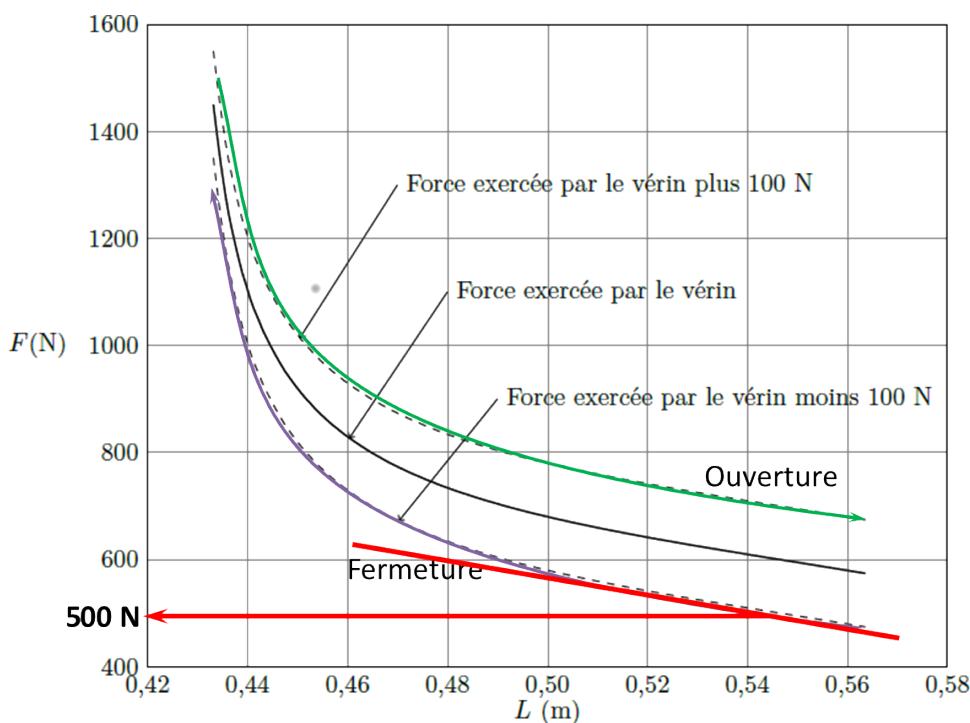


Si on isole la tige du vérin :

- en phase d'ouverture, le TRS s'exprime par :  $F_m + F_r - F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = F_f + F_h - F_m$ ;
- en phase de fermeture, le TRS s'exprime par :  $-F_m + F_r + F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = -F_f + F_h + F_m$ ;

La plage de fonctionnement la plus large est située entre 0,5 m et 0,56 m. La pente est la même pour les 3 courbes. Elle est d'environ  $k = \frac{100}{0,06} \simeq 1667 \text{ N m}^{-1}$ .

En phase de fermeture, lorsque le vérin est déployé, la précharge permettant d'assurer l'équilibre est d'environ 500 N. L'écrasement est donc de 300 mm environ.



**Question 6** Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.

**Correction**

En phase d'ouverture, le couple maximal est de  $4 \times 10^{-3}$  Nm. En phase de fermeture il est de  $3,5 \times 10^{-3}$  Nm.

**Réglage de la fonction sécurité des personnes**

**Question 7** Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de  $\Delta F$  l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

**Correction**

On isole le hayon et on réalise le BAME. Le théorème du moment statique en  $B$  en projection sur  $\vec{z_0}$  :

$$\left( \vec{0} + \vec{BC} \wedge -2\Delta F \vec{x_v} + \vec{0} + \vec{BD} \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y_0} \right) \cdot \vec{z_0} = \vec{0} \Rightarrow \left( c \vec{x_0} \wedge -2\Delta F \vec{x_v} + d \vec{x_0} \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y_0} \right) \cdot$$

$$\vec{z_0} = \vec{0} \Rightarrow -c2\Delta F \sin \alpha + dF_{\text{pinc}} = 0 \Rightarrow \Delta F = \frac{dF_{\text{pinc}}}{c2 \sin \alpha}.$$

$$AN : \text{Pour } \theta = 0, \tan \alpha = \frac{b}{-a + c} = \frac{0,14}{-0,55 + 0,14} = -0,34 \Rightarrow \alpha \approx -18,8^\circ. \Rightarrow \Delta F = \frac{40}{2 \cdot 0,14 \sin \alpha} = -443 \text{ N.}$$

La constante de couple du moteur est donnée par  $K_t = 9,5 \times 10^{-3}$  NmA $^{-1}$ .

**Question 8** En déduire la valeur numérique de l'accroissement  $\Delta C_m$  de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

**Correction**

On a  $|\Delta C_m| = \rho |\Delta F|$  avec  $\rho = 7,89 \times 10^{-5}$  m. En conséquence :  $|\Delta C_m| = 443 \cdot 7,89 \cdot 10^{-5} = 35 \text{ mNm}$ .

$$\text{En fin de fermeture, } C_m = 2,5 \times 10^{-3} \text{ Nm. En conséquence } I_{\max} = \frac{C_{\max}}{K_t} = \frac{C_m + \Delta C_m}{K_t} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} + 35 \cdot 10^{-3}}{9,5 \cdot 10^{-3}} = 3,95 \text{ A.}$$

**Synthèse**

**Question 9** Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminées.

# TD 2 :

## Modélisation d'un hayon de coffre électrique – Su-jet

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

### Mise en situation

Le PCS (Power Closure System), conçu par Valéo, est un système d'ouverture et de fermeture automatique de hayon de coffre automobile. Le système étant symétrique, les deux vérins sont ramenées dans le plan d'évolution de la porte de coffre et leur action mécanique s'exerçant sur la porte de coffre est supposée identique.

On donne un diagramme d'exigence partiel du système étudié.

#### Objectif

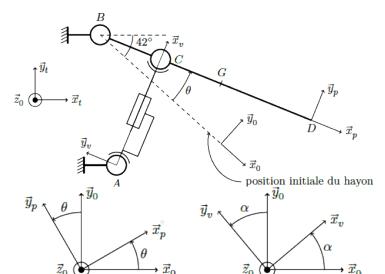
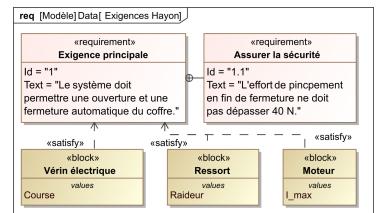
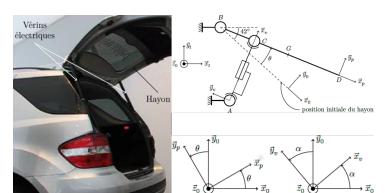
- Déterminer les caractéristiques du vérin répondant au cahier des charges : longueur du vérin en position coffre ouvert et coffre fermé, course du vérin, raideur du ressort équipant le vérin.
- Déterminer le couple moteur maximal nécessaire pour le maintien en position du hayon.
- Déterminer le courant de pincement afin que l'effort de pincement soit inférieure à 40 N pendant 10 ms.

Le repère  $(B; \vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_0)$  est lié à la Terre. L'accélération de la pesanteur s'écrit  $\vec{g} = -g \vec{y}_t$  avec  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . La structure du véhicule et la porte de coffre sont en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$ .

Le repère  $(B; \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_0)$  est lié à la porte de coffre  $S_1$  de masse  $M = 30 \text{ kg}$ . Le repère  $(B; \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_0)$  est lié au corps du vérin. La sortie de tige par rapport au corps du vérin  $S_3$  se fait dans la direction du vecteur  $\vec{x}_v$ . Les liaisons entre le corps du vérin  $S_3$  et le bâti  $S_0$  ainsi qu'entre la tige du vérin  $S_2$  et la porte de coffre  $S_1$  sont des liaisons rotules de centres respectifs  $A$  et  $C$ . Le point  $D$  représente l'extrémité de la porte du coffre. La hauteur du point  $D$  par rapport au sol suivant la verticale est de 0,7 m en position coffre fermé et de 1,8 m en position coffre ouvert.

#### Caractéristiques géométriques du vérin

Le centre d'inertie du coffre est situé en  $G$  tel que  $\vec{BG} = \lambda \vec{x}_p$  avec  $\lambda = 0,6 \text{ m}$ .



$\overrightarrow{AB} = -a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0}$ ,  $\overrightarrow{AC} = L\overrightarrow{x_v}$ ,  $\overrightarrow{BC} = c\overrightarrow{x_p}$ ,  $\overrightarrow{BD} = d\overrightarrow{x_p}$  avec  $a = 0,55 \text{ m}$ ,  $b = 0,14 \text{ m}$ ,  $c = 0,14 \text{ m}$  et  $d = 1 \text{ m}$ . L'angle formé entre  $\overrightarrow{x_0}$  et l'horizontale  $\overrightarrow{x_t}$  est  $\theta_0 = 42^\circ$ .

**Question 1** Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

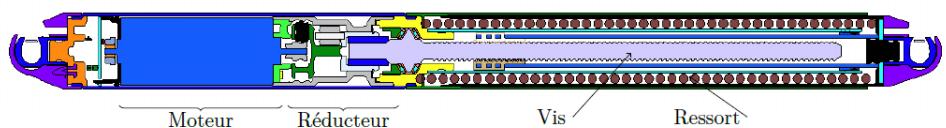
**Question 2** Déterminer la longueur du vérin  $L$  en fonction de l'angle d'ouverture du coffre  $\theta$ .

On donne la courbe donnant l'évolution de la course du vérin en fonction de l'ouverture du hayon.

**Question 3** Déterminer les valeurs extrêmes de  $L$ , ainsi que la course du vérin.

### Dimensionnement des caractéristiques du ressort

Les vérins utilisés sont constitués d'un moteur à courant continu, d'un réducteur à engrenage, d'une vis à billes et d'un ressort. Ce dernier permet d'assurer l'équilibre de la porte de coffre en cas de panne des vérins électriques.



On suppose dans un premier temps que le coffre est à l'équilibre.

**Question 4** Déterminer l'effort  $F$  exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  et des constantes du problème.

En exploitant les équations obtenues à partir de l'écriture de la fermeture géométrique obtenue précédemment, on montre que la relation entre  $\theta$  et  $\alpha$  s'écrit :  $\tan \alpha = \frac{b + c \sin \theta}{-a + c \cos \theta}$ .

On déduit de la question précédente le tracé de l'évolution de l'effort  $F$  nécessaire au maintien en équilibre du coffre en fonction de la longueur  $L$  du vérin.

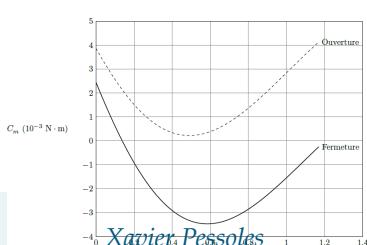
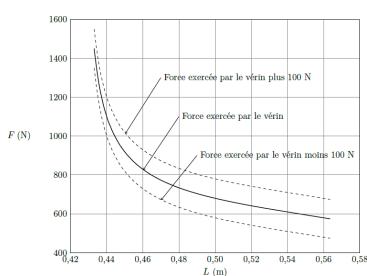
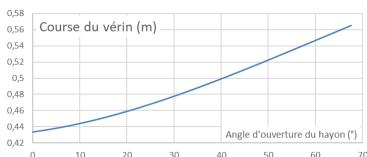
On choisit d'utiliser un ressort précontraint au sein du vérin de manière à assister l'ouverture du coffre et à assurer l'équilibre du coffre sur une plage de fonctionnement maximale. On estime que les forces de frottement maximales au sein du vérin (essentiellement dues à la friction dans la vis) sont de l'ordre de  $F_{\text{frot}} = 100 \text{ N}$ .

La figure précédente représente la force que doit exercer le vérin sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre de cette dernière en fonction de la longueur du vérin. Les courbes en pointillés représentent la force du vérin  $\pm 100 \text{ N}$ .

**Question 5** Déterminer la raideur  $k$  du ressort et sa longueur à vide  $L_0$  de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

La figure suivante représente l'évolution du couple moteur dans un vérin lors des phases d'ouverture et de fermeture du coffre.

**Question 6** Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.



## Réglage de la fonction sécurité des personnes

Pour limiter le risque d'accident lié au pincement d'un utilisateur, il est nécessaire de limiter le couple du moteur à courant continu durant la phase de fermeture du hayon.

On envisage la présence d'un obstacle empêchant la fermeture du coffre. On modélise l'action de l'obstacle sur la porte de coffre par un glisseur s'appliquant en  $D$  et s'exprimant  $\overrightarrow{F_{\text{pinc}}} = F_{\text{pinc}} \vec{y}_p$ .

On cherche à déterminer l'accroissement de couple moteur en cas de présence d'obstacle. On suppose ainsi que la porte de coffre est en équilibre sous l'effet du poids et de l'action des vérins. On ajoute ainsi l'effort de pincement  $F_{\text{pinc}}$  en  $D$  et on cherche l'accroissement d'effort  $\Delta F \vec{x}_v$  qu'exercent chacun des vérins en  $C$  sur la porte en la supposant en équilibre.

On donne la relation entre le couple moteur et la force fournie par le vérin en régime quasi-statique :  $C_m = \rho F$  avec  $\rho = 7,89 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

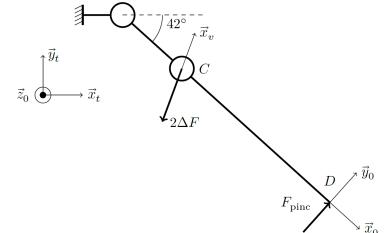
**Question 7** Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de  $\Delta F$  l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

La constante de couple du moteur est donnée par  $K_t = 9,5 \times 10^{-3} \text{ NmA}^{-1}$ .

**Question 8** En déduire la valeur numérique de l'accroissement  $\Delta C_m$  de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

## Synthèse

**Question 9** Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminés.



### Éléments de correction

1. Angle d'ouverture :  $67,5^\circ$ .
2.  $L^2 = (-a + c \cos \theta)^2 + (b + c \sin \theta)^2$ .
3. Course de 13,2 cm.
4.  $F_v = \frac{\lambda M g \cos \theta}{c \sin(\alpha - \theta)} (F_v/2)$ .
5.  $k = 1667 \text{ Nm}^{-1}$ , écrasement de 300 mm.
6. .
7.  $\Delta F = \pm 443 \text{ N}$ .
8.  $I_{\max} = 3,95 \text{ A}$ .



## TD 2 :

# Modélisation d'un hayon de coffre électrique – Corrigé

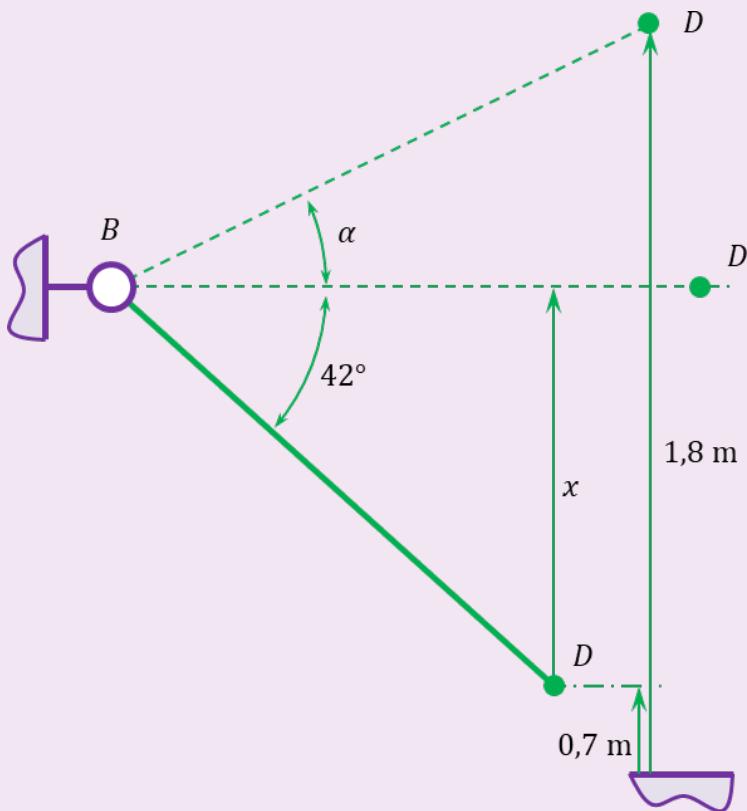
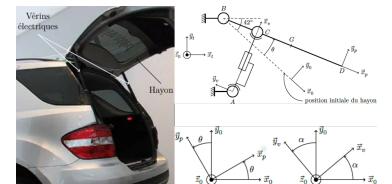
Concours Centrale Supelec TSI 2013.

### Mise en situation

#### Caractéristiques géométriques du vérin

**Question 1** Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

**Correction**



D'une part,  $x = d \sin 42 \approx 0,67 \text{ m}$ . D'autre part,  $\sin \alpha = \frac{1,8 - 0,7 - x}{d} = 0,43$ . Au final  $\alpha = 25,5^\circ$ .

L'angle d'ouverture est donc de  $67,5^\circ$ .

**Question 2** Déterminer la longueur du vérin  $L$  en fonction de l'angle d'ouverture du coffre  $\theta$ .

#### Correction

La longueur du vérin est donnée par la valeur de  $L$ . En réalisant la fermeture géométrique, on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow -a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0 + c\vec{x}_p - L\vec{x}_v = \vec{0}$ . En projetant l'équation vectorielle dans  $\mathcal{R}_0$ , on a :

$$\begin{cases} -a + c \cos \theta - L \cos \alpha = 0 \\ b + c \sin \theta - L \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

On a donc  $L^2 = (-a + c \cos \theta)^2 + (b + c \sin \theta)^2$ .

**Question 3** Déterminer les valeurs extrêmes de  $L$ , ainsi que la course du vérin.

#### Correction

La longueur du vérin varie de 43,3 cm à 56,5 cm soit une course de 13,2 cm.

## Dimensionnement des caractéristiques du ressort

**Question 4** Déterminer l'effort  $F$  exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  et des constantes du problème.

#### Correction

On isole le corps et le piston du vérin. L'ensemble est soumis à deux actions mécaniques (liaisons sphériques en  $A$  et  $C$ ). D'après le PFS, cette action mécanique est donc suivant Ces deux actions mécaniques sont donc de même direction (le vecteur  $\vec{x}_v$ ), de même norme et de sens opposé.

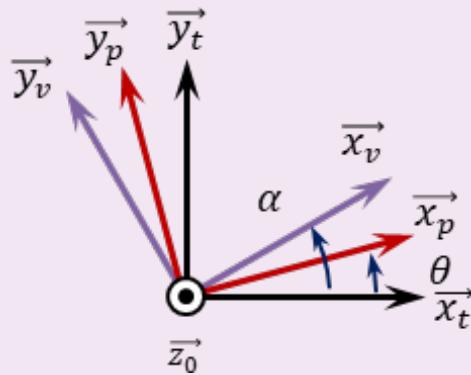
On isole le hayon  $h$ .

On réalise le BAME :

- ▶ action mécanique du vérin  $v$  :  $\{\mathcal{T}(v \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{x}_v \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$  ;
- ▶ action de la pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Mg \vec{y}_t \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$  ;
- ▶ action de la pivot en  $B$  :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow h)\}$ .

On cherche à connaître l'action du vérin en fonction des actions de pesanteur. On réalise donc le théorème du moment statique en  $B$  en projection sur  $\vec{z}_0$  :

$$(\vec{0} + \overrightarrow{BC} \wedge F_v \vec{x}_v + \vec{0} + \overrightarrow{BG} \wedge -Mg \vec{y}_t) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow (c \vec{x}_p \wedge F_v \vec{x}_v + \lambda \vec{x}_p \wedge -Mg \vec{y}_t) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0}$$



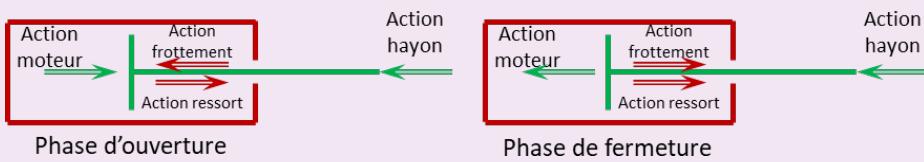
$$\Leftrightarrow cF_v \sin(\alpha - \theta) - \lambda M g \cos \theta = 0$$

$$F_v = \frac{\lambda M g \cos \theta}{c \sin(\alpha - \theta)}.$$

Dans le cas où on considère les deux vérins, on aura  $F_1 = F_2 = F_v/2$ .

**Question 5** Déterminer la raideur  $k$  du ressort et sa longueur à vide  $L_0$  de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

#### Correction

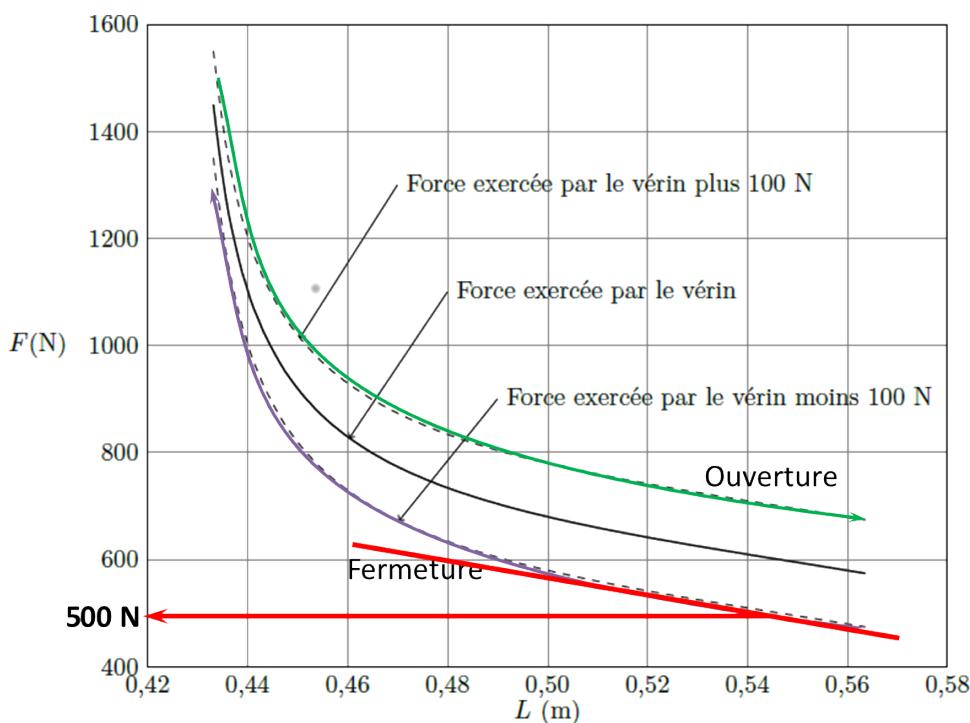


Si on isole la tige du vérin :

- en phase d'ouverture, le TRS s'exprime par :  $F_m + F_r - F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = F_f + F_h - F_m$  ;
- en phase de fermeture, le TRS s'exprime par :  $-F_m + F_r + F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = -F_f + F_h + F_m$  ;

La plage de fonctionnement la plus large est située entre 0,5 m et 0,56 m. La pente est la même pour les 3 courbes. Elle est d'environ  $k = \frac{100}{0,06} \simeq 1667 \text{ N m}^{-1}$ .

En phase de fermeture, lorsque le vérin est déployé, la précharge permettant d'assurer l'équilibre est d'environ 500 N. L'écrasement est donc de 300 mm environ.



**Question 6** Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.

**Correction**

En phase d'ouverture, le couple maximal est de  $4 \times 10^{-3}$  Nm. En phase de fermeture il est de  $3,5 \times 10^{-3}$  Nm.

**Réglage de la fonction sécurité des personnes**

**Question 7** Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de  $\Delta F$  l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

**Correction**

On isole le hayon et on réalise le BAME. Le théorème du moment statique en  $B$  en projection sur  $\vec{z}_0$  :

$$\left( \vec{0} + \vec{BC} \wedge -2\Delta F \vec{x}_v + \vec{0} + \vec{BD} \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow \left( c \vec{x}_0 \wedge -2\Delta F \vec{x}_v + d \vec{x}_0 \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y}_0 \right) \cdot$$

$$\vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow -c2\Delta F \sin \alpha + dF_{\text{pinc}} = 0 \Rightarrow \Delta F = \frac{dF_{\text{pinc}}}{c2 \sin \alpha}.$$

$$AN : \text{Pour } \theta = 0, \tan \alpha = \frac{b}{-a + c} = \frac{0,14}{-0,55 + 0,14} = -0,34 \Rightarrow \alpha \approx -18,8^\circ. \Rightarrow \Delta F = \frac{40}{2 \cdot 0,14 \sin \alpha} = -443 \text{ N.}$$

La constante de couple du moteur est donnée par  $K_t = 9,5 \times 10^{-3}$  NmA $^{-1}$ .

**Question 8** En déduire la valeur numérique de l'accroissement  $\Delta C_m$  de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

**Correction**

On a  $|\Delta C_m| = \rho |\Delta F|$  avec  $\rho = 7,89 \times 10^{-5}$  m. En conséquence :  $|\Delta C_m| = 443 \cdot 7,89 \cdot 10^{-5} = 35 \text{ mNm}$ .

$$\text{En fin de fermeture, } C_m = 2,5 \times 10^{-3} \text{ Nm. En conséquence } I_{\max} = \frac{C_{\max}}{K_t} = \frac{C_m + \Delta C_m}{K_t} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} + 35 \cdot 10^{-3}}{9,5 \cdot 10^{-3}} = 3,95 \text{ A.}$$

**Synthèse**

**Question 9** Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminées.

## TD 3 :

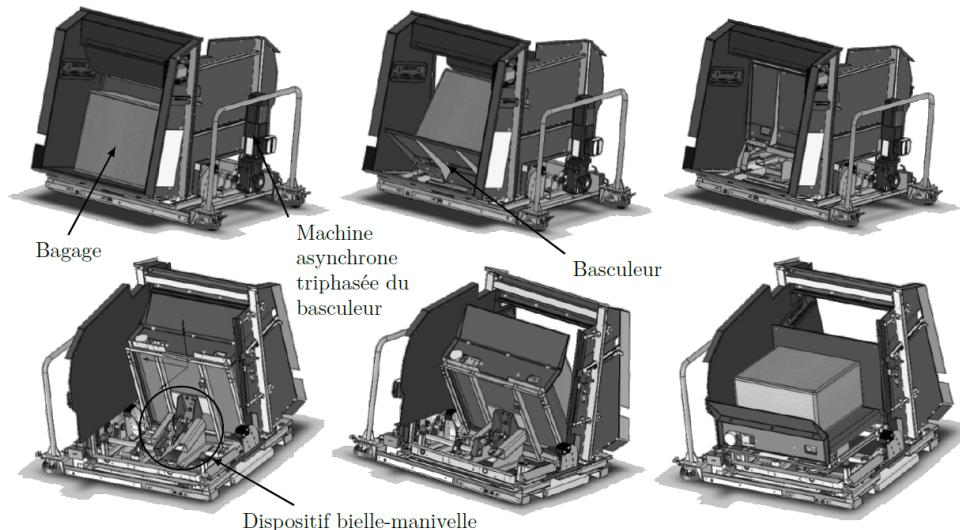
# Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

## Mise en situation

Le processus d'enregistrement des passagers dans les aéroports est en train de vivre une mutation en évoluant de la « banque d'enregistrement » classique vers une idée de « dépose bagages » automatisée. Cette évolution a été justifiée pour fluidifier le trafic passager notamment sur les destinations avec des fréquences très importantes, par exemple certains vols Paris-Province.

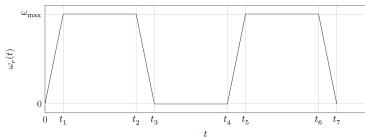
Le système DBA est constitué par un basculeur actionné par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone.



## Recherche de la vitesse de rotation maximale

### Objectif

Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).



Pour dimensionner correctement la machine asynchrone, la première étape est le calcul de la vitesse maximale de l'arbre moteur. On choisit comme loi de mouvement de rotation du moteur une loi en trapèze. On donne ainsi le profil de vitesse de rotation  $\omega_r$  de l'arbre de sortie du réducteur par rapport au bâti.

Le rapport de réduction entre l'arbre moteur de vitesse de rotation et l'arbre de sortie de réducteur est noté  $k = \frac{\omega_r}{\omega_{\text{mot}}} = \frac{1}{107,7}$ . Compte tenu du temps de basculement du bagage de 8 s, les valeurs des temps sont les suivantes :  $t_1 = 0,5$  s,  $t_2 = 2,5$  s,  $t_3 = 3$  s,  $t_4 = 5$  s,  $t_5 = 5,5$  s,  $t_6 = 7,5$  s,  $t_7 = 8$  s. L'arbre de sortie du motoréducteur doit faire un demi-tour entre 0 et  $t_3$ , puis un demi-tour entre  $t_4$  et  $t_7$ .

**Question 1** Déterminer  $\omega_{\text{max}}$  en fonction des différents  $t_i$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale  $\omega_{\text{mot max}}$ . Faire l'application numérique et donner le résultat en  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

### Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

#### Objectif

La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

Pour calculer le couple moteur maximal, on se place dans un cas quasi-statique et on néglige tous les effets dynamiques. Compte tenu de la construction du mécanisme (non linéaire), le couple moteur est variable et on le calcule dans une position particulière correspondant au couple maximal.

On note :

- ▶  $S_0$  le bâti;
- ▶  $S_1$  l'ensemble constitué par le chariot, le bagage et les galets, dont le centre de gravité est noté  $G$  et la masse est notée  $m = 80$  kg;
- ▶  $S_2$  la bielle  $DB$  de direction  $\vec{x}_2$ ;
- ▶  $S_3$  l'arbre de sortie de réducteur et la manivelle  $\overrightarrow{ED} = R\vec{x}_3$  avec  $R = 86$  mm.

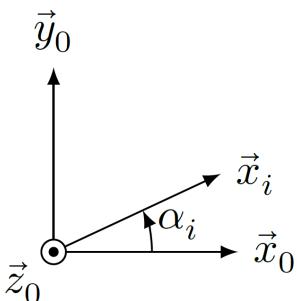
Le mouvement est considéré comme plan. On néglige toutes les masses sauf celle de l'ensemble  $S_1$ . Toutes les liaisons sont parfaites. Le référentiel lié au solide  $S_0$  est considéré galiléen. On note l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{y}_0$  avec  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

Les liaisons entre  $S_0$  et  $S_1$  sont des liaisons sphère-plan de normales  $(A_1, \vec{x}_{11})$  et  $(A_2, \vec{x}_{12})$ . On note  $I$  le point d'intersection des normales  $(A_1, \vec{x}_{11})$  et  $(A_2, \vec{x}_{12})$ . On note  $\overrightarrow{IB} = L_2\vec{x}_{12}$  et  $\overrightarrow{IG} = x_G\vec{x}_0 + y_G\vec{y}_0$ .

On note les angles  $\alpha_i$  formés entre les vecteurs  $\vec{x}_0$  et  $\vec{x}_i$  :  $\alpha_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i)$  avec  $i \in \{2; 3; 11; 12\}$ .

La liaison entre  $S_1$  et  $S_2$  est une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$ .

La liaison entre  $S_2$  et  $S_3$  est une liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$ .



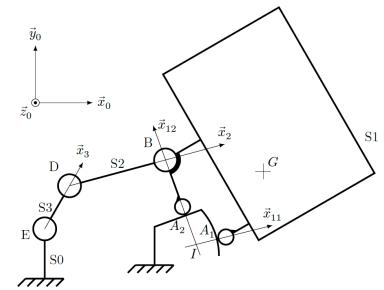
La liaison entre  $S_0$  et  $S_3$  est une liaison pivot d'axe  $(E_s, \vec{z}_0)$ .

On note  $F_B$  la norme de la résultante du torseur  $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\}$ .

**Question 3** On note  $C_{\text{red}}$  le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle  $S_3$ . Montrer que  $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .

Dans la configuration choisie, on a  $x_G = 506 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 140 \text{ mm}$ ,  $\alpha_3 = 91^\circ$ ,  $\alpha_{12} = 108^\circ$  et  $\alpha_2 = 3^\circ$  (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

**Question 4** En déduire la valeur numérique  $C_m$  du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).



#### Éléments de correction

1.  $1,26 \text{ rad s}^{-1}$ .
2.  $1292 \text{ tr min}^{-1}$ .
3. Oui.
4.  $I$ .
5.  $\left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\} .$
6.  $F_B = \frac{mgx_G}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}$ .
7.  $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .
8. 252 Nm.
9. 2,34 Nm.



## TD 3 :

# Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

B2-14

C1-05

C2-07

## Mise en situation



### Recherche de la vitesse de rotation maximale

#### Objectif

Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).

**Question 1** Déterminer  $\omega_{\max}$  en fonction des différents  $t_i$ . Faire l'application numérique.

#### Correction

En calculant l'aire sous la courbe (l'intégrale de la vitesse est la position) et sachant que le réducteur doit faire un demi-tour ( $\pi$  rad), on a :  $\pi = \frac{1}{2}t_1\omega_{\max} + \frac{1}{2}(t_3 - t_2)\omega_{\max} + (t_2 - t_1)\omega_{\max} = \left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}(t_3 - t_2) + (t_2 - t_1)\right)\omega_{\max}$ . On a donc  $\omega_{\max} = \frac{\pi}{-\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3} = \frac{\pi}{-\frac{1}{2}0,5 + \frac{1}{2}2,5 + \frac{1}{2}3} = \frac{\pi}{2,5} = 1,26 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 2** En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale  $\omega_{\text{mot max}}$ . Faire l'application numérique et donner le résultat en  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

#### Correction

$$\omega_{\text{mot max}} = 107,7 \times 1,26 = 135 \text{ rad s}^{-1} = 1292 \text{ tr min}^{-1}$$

## Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

### Objectif

La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

### Correction

$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1 = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{x}_{11} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_1}$  et  $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} F_2 \vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_2}$ . Ces torseurs sont des glisseurs (il existe un point où le moment est nul, ici les droites  $(A_i, I)$ ).

### Correction

On a  $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1 + \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{x}_{11} + F_2 \vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ . Ce torseur est un glisseur dont le point  $I$  appartient au support.

### Correction

On prendra  $F_B$  comme valeur algébrique et pas comme norme de la résultante. On isole la bielle  $S_2$ , elle est soumise à deux glisseurs. D'après le PFS, ces glisseurs sont de même norme, de même direction (la droite  $(DB)$ ) et de sens opposés. On a  $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .

### Correction

On isole  $S_1$ .

On réalise le BAME :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \\ &= \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) \vec{z} \end{array} \right\}_I (\vec{IB} \wedge F_B \vec{x}_2 = L_2 \vec{x}_{12} \wedge F_B \vec{x}_2 = L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) \vec{z}); \\ \blacktriangleright \quad & \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{x}_{11} + F_2 \vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I; \\ \blacktriangleright \quad & \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \\ &= \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{y}_0 \\ -mg x_G \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I (\vec{IG} \wedge -mg \vec{y}_0 = (x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0) \wedge -mg \vec{y}_0 = -mg x_G \vec{z}_0). \end{aligned}$$

En appliquant le TMS en  $I$  en projection sur  $\vec{z}_0$ , on a :  $L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) - mg x_G = 0$  soit  $F_B = \frac{mg x_G}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}$ .

**Question 3** On note  $C_{\text{red}}$  le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle  $S_3$ . Montrer que  $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .

**Correction**

En isolant 2, on montre que  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$ .

On isole 3.

On fait le BAME :

- $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$  et on a  $\overline{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} = \overline{\mathcal{M}(D, 2 \rightarrow 3)} + \vec{ED} \wedge -F_B \vec{x}_2 = R \vec{x}_3 \wedge -F_B \vec{x}_2 = -RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2);$
- $\{\mathcal{T}(\text{rédu} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{\text{red}} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_E;$
- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\}$  avec  $\overline{\mathcal{M}(E, 0 \rightarrow 3)} \cdot \vec{z}_0 = 0$ .

On applique le TMS en  $E$  en projection sur  $\vec{z}_0 : C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .

Dans la configuration choisie, on a  $x_G = 506 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 140 \text{ mm}$ ,  $\alpha_3 = 91^\circ$ ,  $\alpha_{12} = 108^\circ$  et  $\alpha_2 = 3^\circ$  (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

**Correction**

$$\text{On a } C_{\text{red}} = RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{Rmgx_G \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)} \simeq 252 \text{ Nm.}$$

**Question 4** En déduire la valeur numérique  $C_m$  du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

**Correction**

Le couple moteur est alors de 2,34 Nm.



# TD 4 :

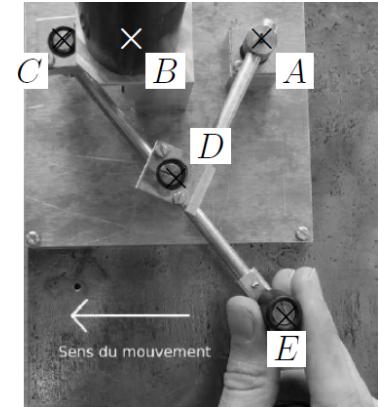
## Interface maître et esclave d'un robot – Sujet

CCP PSI 2015.

B2-14

C1-05

C2-07



### Mise en situation

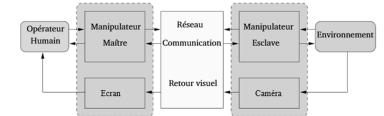
La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

### Modélisation de l'interface maître

Ce mécanisme est constitué de 4 barres reliées par des liaisons pivots.

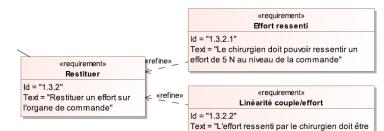
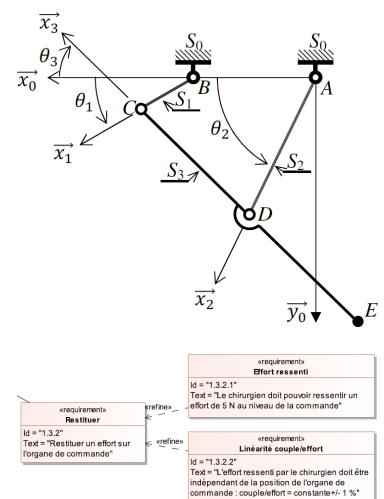
#### Objectif

Vérifier que l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) peut être satisfaite par le mécanisme de HOEKEN.



- Solide  $S_0$ , repère  $\mathcal{R}_0(A; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{AB} = L_0 \vec{x}_0$  avec  $L_0 = 50$  mm.
- Solide  $S_1$ , repère  $\mathcal{R}_1(B; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,  $\overrightarrow{BC} = L_1 \vec{x}_1$  avec  $L_1 = 25$  mm,  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- Solide  $S_2$ , repère  $\mathcal{R}_2(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = L_2 \vec{x}_2$  avec  $L_2 = 62,5$  mm,  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .
- Solide  $S_3$ , repère  $\mathcal{R}_3(C; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC} = L_3 \vec{x}_3$  avec  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .

- On notera  $\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_j)\} = \begin{pmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{pmatrix}_{P, \mathcal{B}_0}$  l'expression l'expression au point  $P$ , en projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ , du torseur de l'action mécanique exercée



par le solide  $S_i$  sur le solide  $S_j$ ; toutes les inconnues seront exprimées dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

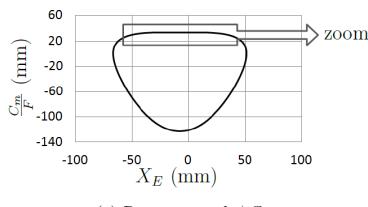
- ▶ L'action mécanique exercée par le moteur sur  $S_1$  sera modélisée par un couple  $C_m(t)\vec{z}_0$ .
- ▶ L'action mécanique exercée par l'opérateur sur  $S_3$  sera modélisée par une force  $F(t)\vec{x}_0$  appliquée au point  $E$ .
- ▶ L'accélération de la pesanteur sera négligée.
- ▶ Les inerties des solides en mouvement et les frottements dans les guidages seront négligés.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).

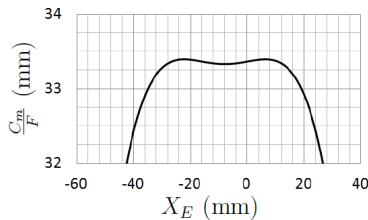
Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point  $E$

**Question 2** Retrouver ces graphes en utilisant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le premier devoir de vacances.

**Question 3** Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse  $X_E$  l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. (On ajoute que la course sur  $X_E$  doit être supérieure à 50 mm.)



(a) Rapport couple/effort



(b)  $X_E \in [-60 \text{ mm}, 40 \text{ mm}]$

# TD 4 :

## Interface maître et esclave d'un robot – Corrigé

CCP PSI 2015.

B2-14

C1-05

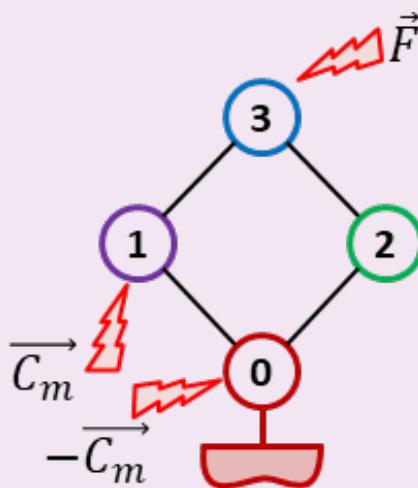
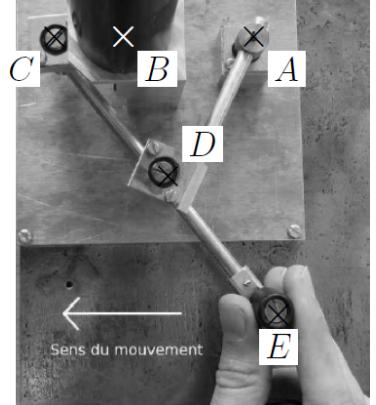
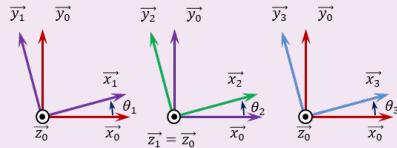
C2-07

### Mise en situation

#### Modélisation de l'interface maître

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).

Correction



Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point  $E$

**Question 2** Retrouver ces graphes en utilisant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le premier devoir de vacances.

**Correction**

**Question 3** Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse  $X_E$  l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. (On ajoute que la course sur  $X_E$  doit être supérieure à 50 mm.)

**Correction**

Pour un rapport  $C_m/F$  de 33,25 mm, la fourchette de 1 % est comprise entre 32,9175 mm et 33,5825 mm. La course de  $X_E$  est donc de  $20 - (-36) = 56$  mm. L'exigence est vérifiée.