

# Application 1

## Pompe à plateau – Sujet

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

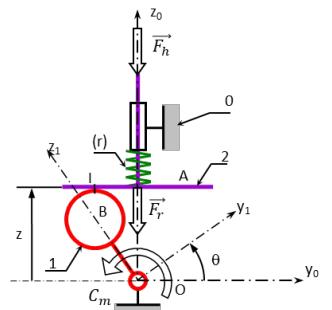
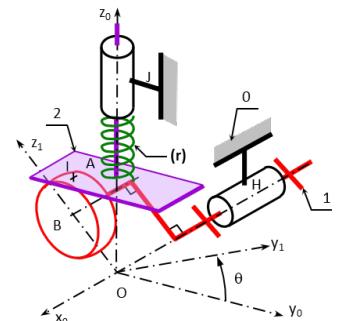
### Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$ ;
- $\overrightarrow{OB} = e\vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{BI} = R\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{OA} = z\vec{z}_0$ .

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (r), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0\vec{z}_0$ .

Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m\vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h\vec{z}_0$ .



### Résolution cinématique

**Question 1** En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer  $z$  en fonction de  $\theta$  et de constantes du problème. Déterminer alors  $\overline{V}(A, 2/0)$  et  $\overline{\Gamma}(A, 2/0)$ .

### Résolution dynamique

**Question 2** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le PFD.

**Question 3** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

### Résolution énergétique – Pour plus tard...

**Question 4** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

**Question 5** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

**Pour aller plus loin...**

**Question 6** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

# Application 1

## Pompe à plateau – Corrigé

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

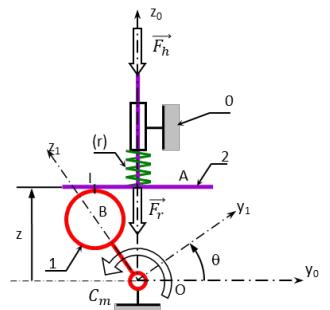
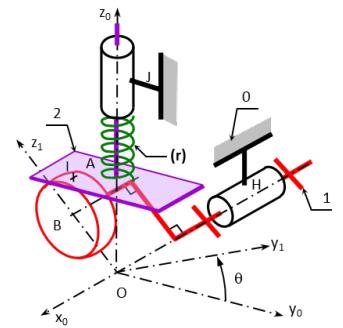
### Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$ ;
- $\overrightarrow{OB} = e\vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{BI} = R\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{OA} = z\vec{z}_0$ .

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (r), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0\vec{z}_0$ .

Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m\vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h\vec{z}_0$ .



### Résolution cinématique

**Question 1** En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer  $z$  en fonction de  $\theta$  et de constantes du problème. Déterminer alors  $\overline{V}(A, 2/0)$  et  $\overline{\Gamma}(A, 2/0)$ .

### Résolution dynamique

**Question 2** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le PFD.

**Question 3** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

### Résolution énergétique – Pour plus tard...

**Question 4** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

**Question 5** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

C1-05

C2-08

C2-09

### Pour aller plus loin...

**Question 6** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

**Fermeture géométrique.**

On a :  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$ .

En projection sur  $\overrightarrow{z_0}$  :  $e \cos \theta + R = z$ . Par dérivation successive, on a :  $-e\dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$  et  $-e\ddot{\theta} \sin \theta - e\dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$ .

**On isole le solide (1).**

**On réalise le bilan des actions mécaniques.**

- Liaison pivot:  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ M_{01}\vec{y}_0 + N_{01}\vec{z}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01}\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$ .
- Liaison ponctuelle :  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{21}\vec{y}_0 + Z_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ . On a  $Z_{21} < 0$ ,  $Y_{21} > 0$  et à la limite du glissement,  $Y_{21} = -fZ_{21}$ .
- Couple moteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m\vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$ .

**Calcul de  $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0$ .**

$O$  est un point fixe et  $I_1$  moment d'inertie par rapport à  $(O, \vec{x}_0)$  on a donc :  $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot$

$$\vec{x}_0 = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(O, 1/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \quad \vec{x}_0 = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dI_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dI_1\dot{\theta}\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = I_1\ddot{\theta}.$$

**Application du théorème du moment dynamique en projection sur  $\vec{x}_0$ .**

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

**On isole le solide (2).**

**On réalise le bilan des actions mécaniques.**

- Liaison pivot glissant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{02}\vec{y}_0 \\ L_{02}\vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$ .
- Liaison ponctuelle :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Y_{21}\vec{y}_0 - Z_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ .
- Ressort :  $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_0 - kz\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ .
- Pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ .
- Fluide :  $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_h \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ .

**Calcul de  $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0$ .**

$$\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0 = m_2 \ddot{z}$$

**Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z}_0$ .**

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - kz - m_2 g = m_2 \ddot{z}.$$

**Bilan :**

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - kz - m_2 g - m_2 \ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2 g - em_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

**Bilan sans frottement :**

$$C_m + e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2 g - em_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$



# TD 1

## Véhicule TIM – Sujet

Florestan Mathurin.

C1-05

C2-08

C2-09



L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertIELS étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

### Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues lestées peut être assimilé au solide **1** représenté sur la figure 1, de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de masse  $G$ .

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  tel que  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .

L'action de contact entre l'ensemble des roues **1** et le plan **0**, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide **1** réduit au point  $G$  en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\lim}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide **1** sur le plan **0**.

Pour une masse du solide **1**  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\lim}$  tel que  $\tan \alpha_{\lim} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

### Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle  $\alpha$ , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

Le modèle est donné figure suivante.

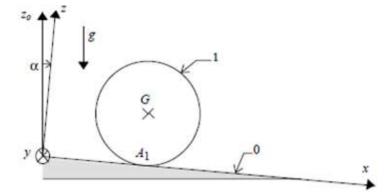
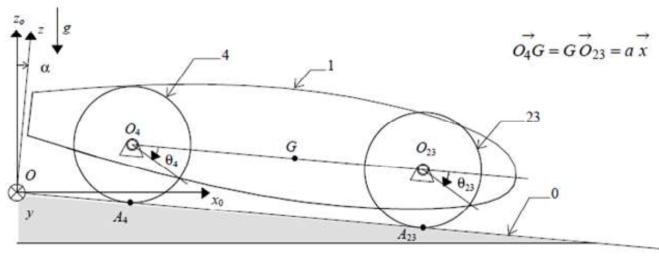


Figure 1

1: Cette action de contact peut s'écrire :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{cases} -T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{cases}_{A_1}$  où  $C_r$  représente le couple de résistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que :  $|C_r| = r|N_{01}|$  à la limite de l'équilibre et  $|C_r| < r|N_{01}|$  à l'équilibre.

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  telle que  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .



Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\} = \begin{cases} -T_{0i}\vec{x}' + N_{0i}\vec{z} \\ -N_{0i}r\vec{y}' \end{cases}$  avec  $i = 4$  ou  $23$ .

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aérodynamique qui peut être modélisée par le torseur  $\begin{cases} -\frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2\vec{x} \\ 0 \end{cases}$  avec  $\rho$  masse volumique du véhicule,  $S$  surface alaire,  $C_x$  coefficient de traînée du véhicule,  $\dot{x}$  vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.

On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

- ▶ d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie  $G$ , de masse  $M$  en translation par rapport au repère galiléen  $R$  avec  $\overrightarrow{OG} = x\vec{x} + R\vec{z}$  ;
- ▶ de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie  $O_{23}$ , de masse  $2m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  sera noté  $2I$ . Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_{23}$  ;
- ▶ d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie  $O_4$ , de masse  $m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_4, \vec{y})$  sera noté  $I$ . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_4, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_4$  ;
- ▶ un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté  $C_m\vec{y}$ .

**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :  $C_m = (M + 3m)g \cos \alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2}R\rho S C_x \dot{x}^2$ .

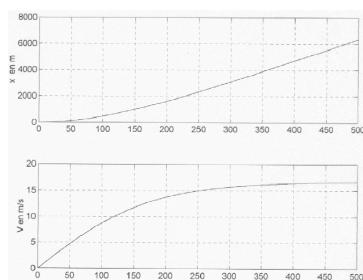
**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple  $C_m$  constant. L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-contre.

**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2}\rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).



Les données véhicules sont :  $M = 70 \text{ kg}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $r = 2.10^{-3} \text{ m}$ ,  $R = 0.25 \text{ m}$ ,  $C_m = 3,245 \text{ m N}$ ,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ .

# TD 1

## Véhicule TIM – Corrigé

Florestan Mathurin.

C1-05

C2-08

C2-09

### Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

#### Correction

- ▶ On isole le solide 1.
- ▶ Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- ▶ On applique le PFS :
  - TRS :  $-T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} = -mg\vec{z}_0 = -mg(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x})$ ;
  - TMS en G en projection sur  $\vec{y}$  :  $-C_r + RT_{01} = 0$ .
- ▶ On résout :
  - $-T_{01} + mg \sin\alpha = 0$ ;
  - $N_{01} - mg \cos\alpha = 0$ ;
  - $C_r = RT_{01}$ .



**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\lim}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

#### Correction

À la limite du roulement, on a  $C_r = rN_{01} \Leftrightarrow RT_{01} = rN_{01} \Leftrightarrow Rmg \sin\alpha_{\lim} = rm \cos\alpha_{\lim}$  et  $\tan\alpha_{\lim} = \frac{r}{R}$ .

Pour une masse du solide 1  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\lim}$  tel que  $\tan\alpha_{\lim} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

#### Correction

$$r = 0,002 \text{ m.}$$

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

#### Correction

À la limite du glissement, on a  $T_{01} = fN_{01}$  et  $\frac{T_{01}}{N_{01}} = \tan\alpha$ . Pour  $\tan\alpha_{\lim} < f$  il y a donc roulement sans glissement.

### Modélisation du véhicule

**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

### Correction

En  $A_{23}$ , on a :  $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \vec{0}$ . On a alors  $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \overrightarrow{V(A_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)}$  et  $\vec{0} = \overrightarrow{V(O_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{A_{23}O_{23}} \wedge \overrightarrow{\Omega(23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} + R\vec{z} \wedge \dot{\theta}_{23}\vec{y} + \dot{x}\vec{x}$   
 $\Rightarrow 0 = -R\dot{\theta}_{23} + \dot{x}$ .

De même en  $A_4$ ,  $0 = -R\dot{\theta}_4 + \dot{x}$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

### Correction

- On isole  $E$ .
- BAME :

- Pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x}) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E}$
- Résistance au roulement :  $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_i = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$
- Traînée :  $\{\mathcal{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{23}}$

- La résultante dynamique est donnée par  $(M+3m)\overrightarrow{\Gamma(G, E/0)} = (M+3m)\vec{x}\vec{x}$ .
- On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  :

- $(M+3m)g\sin\alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$
- $-(M+3m)g\cos\alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

### Correction

- On isole 23.
- BAME :

- 23 est soumis à la pesanteur;
- action de la pivot sans frottement avec le solide 1;
- résistance au roulement :  $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ -N_{023}r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_{23}} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ (-rN_{023} + RT_{023})\vec{y} \end{array} \right\}_{O_{23}}$

- Le moment dynamique de  $O_{23}$  centre d'inertie des roues en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit  $\overrightarrow{\delta(O_{23}, 23/0)y_0} = 2I\ddot{\theta}_{23}$ .
- TMD en  $O_{23}$  en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit donc  $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$ .

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur :  $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :  $C_m = (M+3m)g\cos\alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M+3m) \right] \ddot{x} - R(M+3m)g\sin\alpha +$

$$\frac{1}{2}R\rho SC_x\dot{x}^2.$$

### Correction

On a :  $C_m = I\ddot{\theta}_4 + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - rN_{023} + r(M+3m)g\cos\alpha - RT_{04}$   
 $= \frac{I}{R}\ddot{x} - RT_{023} + 2I\ddot{\theta}_{23} + r(M+3m)g\cos\alpha - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + \frac{2I}{R}\ddot{x} + r(M+3m)g\cos\alpha -$   
 $R\left((M+3m)g\sin\alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2 - (M+3m)\ddot{x}\right).$   
 $C_m = r(M+3m)g\cos\alpha + \left(\frac{3I}{R} + R(M+3m)\right)\ddot{x} + \left(-R(M+3m)g\sin\alpha + R\frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2\right).$

CQFD.

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

### Correction

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr\cos\alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M+3m)gR\sin\alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left(\frac{3I}{R} + R(M+3m)\right)\ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

### Correction

À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2}\rho SC_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

### Correction

La vitesse constante atteinte sur les graphes est de  $17\text{ m s}^{-1}$ . Par ailleurs  $\frac{1}{2}\rho SC_x = \frac{C_m - (M+3m)gr}{R\dot{x}^2} = \frac{3,245 - (70 + 3 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 0,002}{0,25 \cdot 17^2} = 0,025\text{ kg m}^{-1}$ .

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5\text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

### Correction



## Application 2

### Barrière sur la Tamise – Sujet

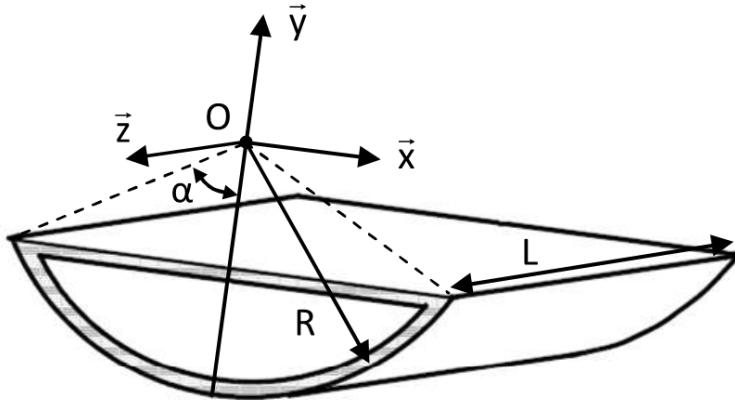
Florestan Mathurin.

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58 \text{ m}$  la longueur de la porte;
- $R = 12,4 \text{ m}$  le rayon de la porte;
- $e = 0,05 \text{ m}$  l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant  $R$ ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ ;
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .



**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_P$  de la plaque;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_C$  de la portion cylindrique;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de la porte.

**Question 2** Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque  $P$  en  $G_P$ ;
2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre  $C$  en  $G_C$ ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte  $P$  en  $G$ .

**Question 3** Déterminer le moment d'inertie de la porte par rapport à  $(O, \vec{z})$ .



## Application 2

### Barrière sur la Tamise – Corrigé

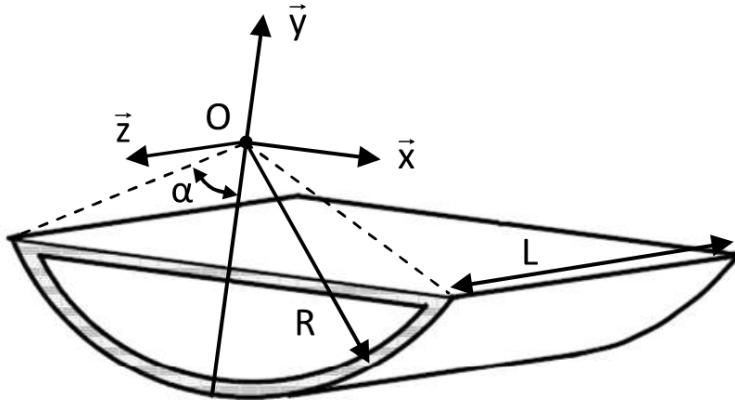
Florestan Mathurin.

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58 \text{ m}$  la longueur de la porte;
- $R = 12,4 \text{ m}$  le rayon de la porte;
- $e = 0,05 \text{ m}$  l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant  $R$ ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ ;
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .



**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

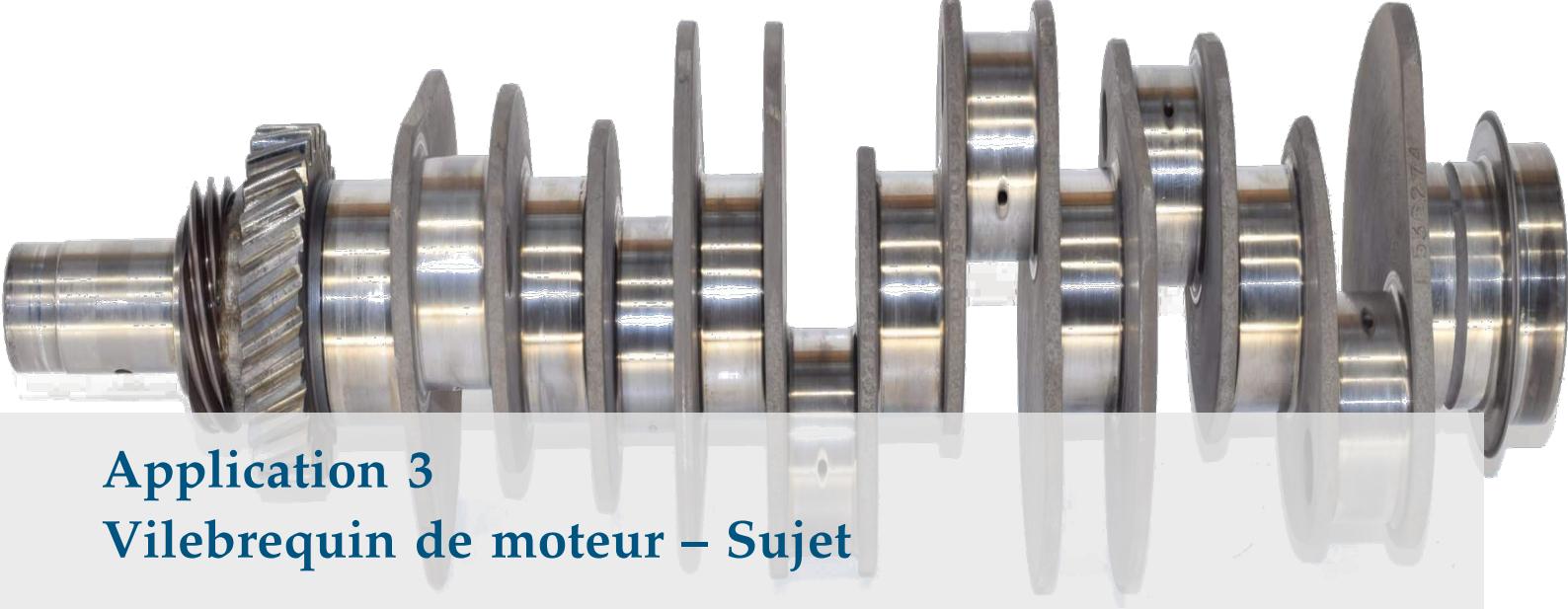
1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_P$  de la plaque;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_C$  de la portion cylindrique;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de la porte.

**Question 2** Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque  $P$  en  $G_P$ ;
2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre  $C$  en  $G_C$ ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte  $P$  en  $G$ .

**Question 3** Déterminer le moment d'inertie de la porte par rapport à  $(O, \vec{z})$ .



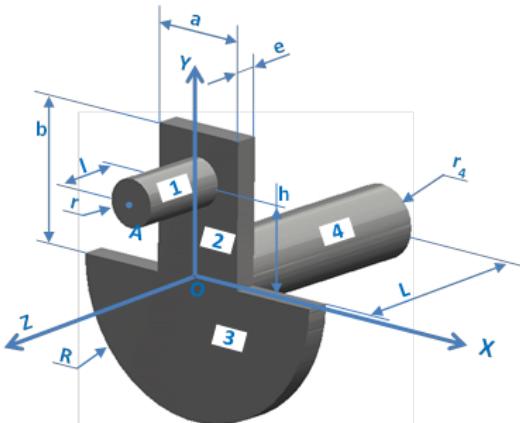


## Application 3

### Vilebrequin de moteur – Sujet

C. Gamelon & P. Dubois.

Un vilebrequin est réalisé en mécanosoudage pour faire fonctionner un prototype de moteur. Les géométries sont par conséquent simples : assemblage de tôles ou cylindres en acier.



On note :

- $\rho = 7200 \text{ kg m}^3$  la masse volumique du matériau;
- $a = 20 \text{ mm}$ ;
- $b = 30 \text{ mm}$ ;
- $e = 5 \text{ mm}$ ;
- $l = 20 \text{ mm}$ ;
- $r = 5 \text{ mm}$ ;
- $L = 50 \text{ mm}$ ;
- $r_4 = 7,5 \text{ mm}$ ;
- $h = 20 \text{ mm}$ .

L'origine  $O$  repère  $\mathcal{R}$  est située dans le plan de contact du cylindre 1 et du parallélépipède 2.

**Question 1** Calculer les masses des différentes pièces :  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  et  $m_4$ .

**Question 2** Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

**Question 3** Déterminer la valeur de  $R$  afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

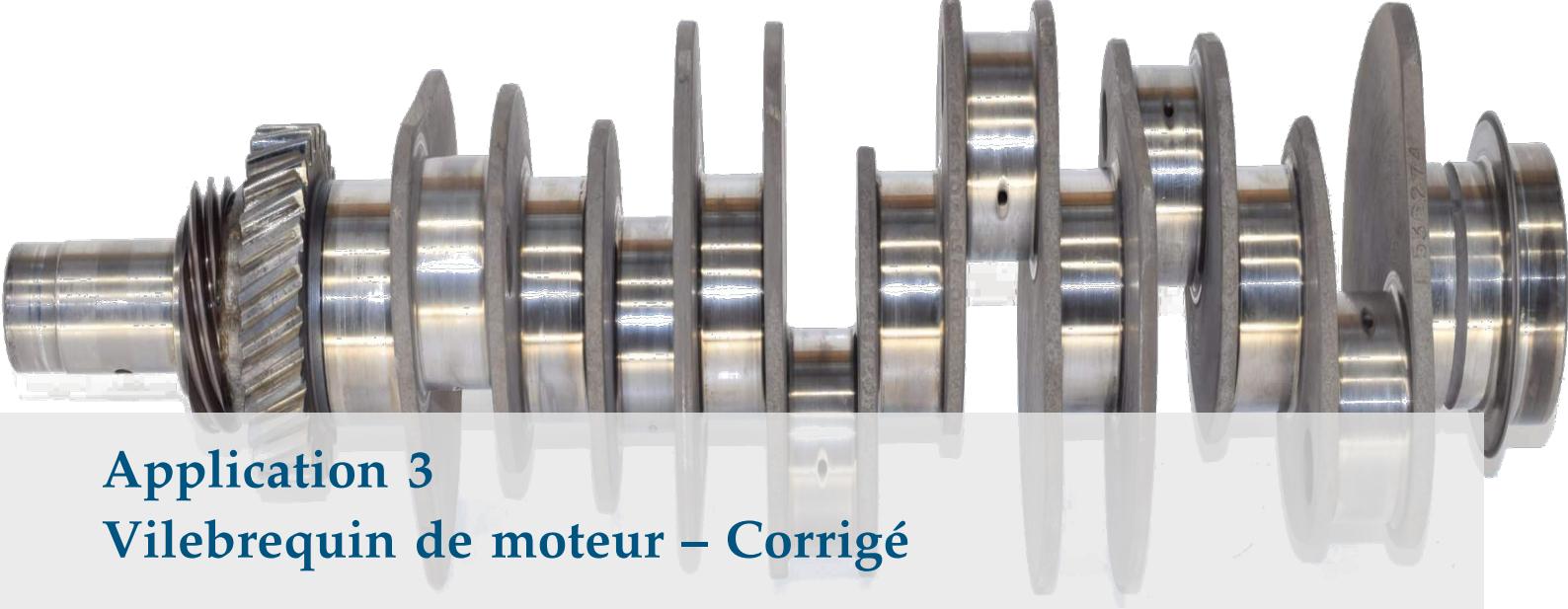
**Question 4** Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 5** Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en  $O$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

**Question 6** Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe  $\overrightarrow{OA}$ .





## Application 3 Vilebrequin de moteur – Corrigé

C. Gamelon & P. Dubois.



**Question 1** Calculer les masses des différentes pièces :  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  et  $m_4$ .

### Correction

On a :

- $m_1 = \mu\pi r_1^2 l_1$ ;
- $m_2 = \mu abe$
- $m_3 = \mu \frac{1}{2}\pi R^2 e$ ;
- $m_4 = \mu\pi r_3^2 L$ .

**Question 2** Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

### Correction

On a :

- $\overrightarrow{OG_1} = h\vec{y} + \frac{l_1}{2}\vec{z}$ ;
- $\overrightarrow{OG_2} = \frac{b}{2}\vec{y} - \frac{e}{2}\vec{z}$ ;
- $\overrightarrow{OG_4} = -\left(e + \frac{L}{2}\right)\vec{z}$ .

Le solide 3 a deux plans de symétrie :  $(\vec{x}, \vec{y})$  et  $(\vec{y}, \vec{z})$ . On ne cherche donc la composante du centre d'inertie que dans la direction  $\vec{y}$ .

$m_3 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = \int \overrightarrow{OP} \vec{y} dm$  avec  $dm = \mu\rho d\rho d\theta e$  ( $\rho$  variant de 0 à  $R$  et  $\theta$  variant de  $-\pi$  à  $0$ ) et  $\overrightarrow{OP} = \rho (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y})$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \mu \frac{1}{2}\pi R^2 e \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} &= \int \rho (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \vec{y} \mu e \rho d\rho d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} &= \int \rho^2 \sin \theta \vec{y} \rho d\rho d\theta \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = -\frac{R^3}{3} [\cos \theta]_{-\pi}^0 \vec{y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} &= -2\frac{R}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = -4\frac{R}{3\pi} \vec{y} \\ \text{Au final : } \overrightarrow{OG_3} &= -\frac{4R}{3\pi} \vec{y} - \frac{e}{2} \vec{z} \end{aligned}$$

**Question 3** Déterminer la valeur de  $R$  afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

**Correction**

$$\begin{aligned}
& \text{On a } (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\
& \Leftrightarrow m_1 \overrightarrow{OG}_1 \cdot \overrightarrow{y} + m_2 \overrightarrow{OG}_2 \cdot \overrightarrow{y} + m_3 \overrightarrow{OG}_3 \cdot \overrightarrow{y} + m_4 \overrightarrow{OG}_4 \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left( \mu \pi r_1^2 l_1 \right) h + (\mu a b e) \frac{b}{2} - \left( \mu \frac{1}{2} \pi R^2 e \right) \frac{4R}{3\pi} + \left( \mu \pi r_3^2 L \right) \cdot 0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h + a b e \frac{b}{2} - \frac{1}{2} R^2 e \frac{4R}{3} = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2} + a b^2 e \frac{3}{4} = R^3 e \Leftrightarrow R^3 = \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2e} + a b^2 \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

**Question 4** Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base  $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ .

**Correction**

$$\begin{aligned}
I_{G_1}(S_1) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R \quad I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R \quad I_{G_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R \\
I_{G_4}(S_4) &= \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R
\end{aligned}$$

**Question 5** Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en  $O$  dans la base  $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ .

**Correction**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG}_1 &= h \overrightarrow{y} + \frac{l_1}{2} \overrightarrow{z} \\
I_O(S_1) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R + m_1 \begin{pmatrix} h^2 + \frac{l_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_1^2}{4} & -\frac{hl_1}{2} \\ 0 & -\frac{hl_1}{2} & h^2 \end{pmatrix}_R \\
\overrightarrow{OG}_2 &= \frac{b}{2} \overrightarrow{y} - \frac{e}{2} \overrightarrow{z} \\
I_O(S_2) &= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R + m_2 \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{be}{4} \\ 0 & -\frac{be}{4} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_R \\
\overrightarrow{OG}_3 &= -\frac{4R}{3\pi} \overrightarrow{y} - \frac{e}{2} \overrightarrow{z} \\
I_O(S_3) &= \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R + m_3 \begin{pmatrix} \frac{16R^2}{9\pi^2} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{4R}{3\pi} \frac{e}{2} \\ 0 & -\frac{4R}{3\pi} \frac{e}{2} & \frac{16R^2}{9\pi^2} \end{pmatrix}_R \\
\overrightarrow{OG}_4 &= -\left( e + \frac{L}{2} \right) \overrightarrow{z}.
\end{aligned}$$

$$I_O(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R + m_4 \begin{pmatrix} \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_R$$

On a :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R$$

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

**Question 6** Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe  $\overrightarrow{OA}$ .

#### Correction

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{L_1 \vec{z} + h \vec{y}}{\sqrt{L_1^2 + h^2}}$$

$$J_\Delta = (0 \quad u_y \quad u_z) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = (0 \quad u_y \quad u_z) \begin{pmatrix} 0 \\ Bb - Dc \\ -Db + Cc \end{pmatrix}$$

$$J_\Delta = (Bb - Dc) u_y + (-Db + Cc) u_z$$