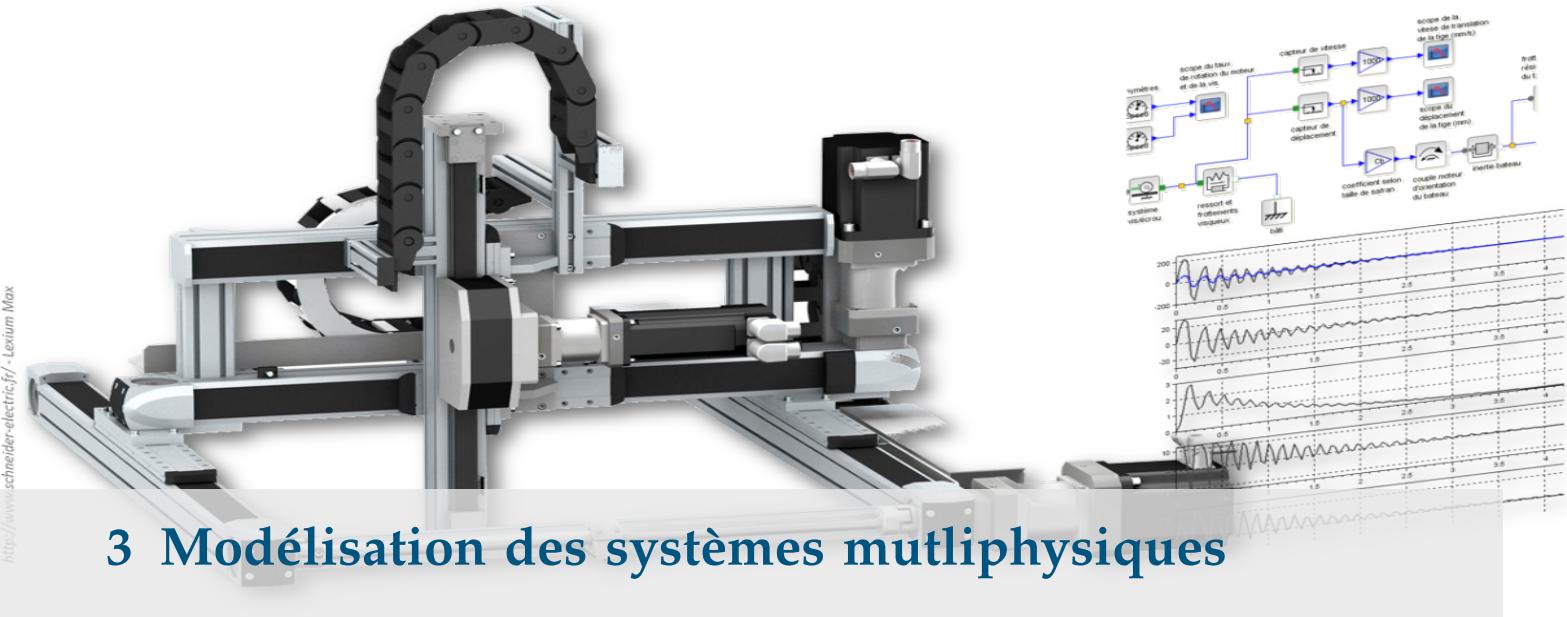


Table des matières

| | |
|--|----|
| Table des matières | i |
| 3 Modélisation des systèmes mutiphysiques | 1 |
| 3.1 Introduction | 1 |
| 3.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ? | 1 |
| 3.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ? | 1 |
| 3.2 Modélisation des systèmes multiphysiques | 2 |
| 3.2.1 Modélisation causale et acausale | 2 |
| 3.2.2 Les différents modèles et outils | 3 |
| 3.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients | 3 |
| 3.3 Modélisation des systèmes physiques | 4 |
| 3.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques | 4 |
| 3.3.2 Modélisation des systèmes électriques | 5 |
| 3.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques | 5 |
| 3.4 Modélisation des non-linéarités | 5 |
| 3.4.1 Linéarisation | 6 |
| 3.4.2 Saturation | 6 |
| 3.4.3 Seuil | 7 |
| 3.4.4 Hystérésis | 7 |
| 3.5 Modélisation des systèmes numériques | 7 |
| Application 1 : Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet | 9 |
| Application 1 : Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Corrigé | 11 |
| Application 2 : La Seine Musicale – Sujet | 13 |
| Application 2 : La Seine Musicale – Corrigé | 15 |
| Application 3 : Direction automatique découpée – Sujet | 17 |
| Application 3 : Direction automatique découpée – Corrigé | 19 |
| 4 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis | 21 |
| 4.1 Définitions préliminaires et détermination des performances | 21 |
| 4.1.1 Définitions | 21 |
| 4.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques | 22 |
| 4.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace | 23 |
| 4.2.1 Définitions | 23 |
| 4.2.2 Théorèmes | 23 |
| 4.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs | 24 |
| 4.3.1 Définitions | 24 |
| 4.3.2 Algèbre de blocs | 25 |
| 4.3.3 Fonctions usuelles | 25 |
| 4.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre | 26 |
| 4.4.1 Systèmes d'ordre 1 | 26 |
| 4.4.2 Systèmes d'ordre 2 | 27 |
| 4.5 Réponse fréquentielle des SLCI | 28 |
| 4.5.1 Définitions | 28 |
| 4.5.2 Gain | 28 |
| 4.5.3 Intégrateur | 29 |
| 4.5.4 Dérivateur | 29 |
| 4.5.5 Systèmes d'ordre 1 | 29 |
| 4.5.6 Systèmes d'ordre 2 | 29 |
| 4.5.7 Retard | 30 |

| | | |
|---|---|-----------|
| 4.5.8 | Tracé du diagramme de Bode | 30 |
| Application 1 : Réponses fréquentielles – Sujet | | 31 |
| Application 1 : Réponses fréquentielles – Corrigé | | 35 |
| TD 1 : Tête de découpe de tissus – Sujet | | 39 |
| TD 1 : Tête de découpe de tissus – Corrigé | | 41 |
| TD 2 : Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet | | 45 |
| TD 2 : Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé | | 49 |
| TD 3 : Bateau support de ROV – Sujet | | 53 |
| TD 3 : Bateau support de ROV – Corrigé | | 57 |
| TD 4 : Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Sujet | | 63 |
| TD 4 : Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Corrigé | | 67 |
| 2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis | | 71 |
| 2.1 | Stabilité des systèmes asservis | 71 |
| 2.1.1 | Notion de stabilité | 71 |
| 2.1.2 | Marges de stabilité | 73 |
| 2.2 | Rapidité des systèmes asservis | 76 |
| 2.2.1 | Rappel : critère de rapidité dans le domaine temporel | 76 |
| 2.2.2 | Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2 | 77 |
| 2.2.3 | Résultats dans le diagramme de Bode | 77 |
| 2.3 | Précision des systèmes asservis | 78 |
| 2.3.1 | Système non perturbé | 78 |
| 2.3.2 | Système perturbé | 80 |
| Application 1 : Stabilité des systèmes – Sujet | | 81 |
| Application 1 : Stabilité des systèmes – Corrigé | | 85 |
| Application 2 : Stabilité des systèmes – Sujet | | 89 |
| Application 2 : Stabilité des systèmes – Corrigé | | 91 |
| Application 3 – Sujet | | 93 |
| Application 3 – Corrigé | | 95 |
| Application 4 : Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet | | 97 |
| Application 4 : Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé | | 99 |
| TD 1 : Drone quadri-rotor – Sujet | | 103 |
| TD 1 : Drone quadri-rotor – Corrigé | | 107 |
| TD 2 : Stabilisateur actif d'image – Sujet | | 111 |
| TD 2 : Stabilisateur actif d'image – Corrigé | | 115 |
| TD 3 : Direction automobile découpée – Sujet | | 119 |
| TD 3 : Direction automobile découpée – Corrigé | | 123 |
| TD 4 : Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Sujet | | 129 |
| TD 4 : Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Corrigé | | 133 |
| TD 5 : Radar d'avion – Sujet | | 139 |
| TD 5 : Radar d'avion – Corrigé | | 141 |
| TD 6 : Base TC200 Tecloron – Sujet | | 143 |
| TD 6 : Base TC200 Tecloron – Corrigé | | 145 |
| Colle 7 : Performances – Sujet | | 149 |
| Colle 7 : Performances – Corrigé | | 151 |
| Colle 7 : Performances – Sujet | | 155 |
| Colle 7 : Performances – Corrigé | | 157 |
| Colle 7 : Performances – Sujet | | 161 |
| Colle 7 : Performances – Corrigé | | 163 |



3 Modélisation des systèmes mutliphyiques

B2-02

3.1 Introduction

3.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphyisque ?

Pour comprendre le fonctionnement des systèmes qui nous entourent, il est souvent nécessaire de maîtriser un voire plusieurs domaines de la physique. En effet, le winch utilisé dans le laboratoire a un fonctionnement essentiellement mécanique. En revanche, le simulateur de drone D^2C est composé d'une partie mécanique (rotation du banc et des hélices) une partie électrotechnique (moteurs) une partie électronique (commande des moteurs) une partie informatique (gestion de la commande et des informations).

Pour modéliser un système, plusieurs outils peuvent être nécessaires. Lorsqu'un outil est associé à un champ de la physique, on peut parler de modèle « mono physique » :

- ▶ pour modéliser la géométrie d'un système ou le comportement d'un mécanisme, on peut faire appel à SolidWorks par exemple;
- ▶ pour modéliser la partie électrique d'un système il est possible d'utiliser un logiciel comme PSpice;
- ▶ pour programmer une interface graphique d'un logiciel, il est possible d'utiliser Python...

En revanche, lorsqu'on veut que tous ces domaines communiquent, il faut une plate forme commune permettant l'échange entre les modèles. On parle alors de modélisation multiphyisque. Il est possible d'utiliser des logiciels comme Scilab (Xcos – Modelica) ou Matlab (Simulink – Simscape).

3.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ?

Dans l'industrie, les modèles sont indispensables. Ils permettent d'avoir un modèle numérique, image du produit que l'on cherche à réaliser ou que l'on a déjà. L'image doit être aussi fidèle à la réalité que possible. On a vu que ce modèle peut-être « monophysique » ou « multiphyisque ».

L'objectif du modèle est de se substituer au produit réel. Les simulations réalisées sur le modèle ont pour objectif de remplacer des expérimentations sur le produits, considérées comme coûteuse en temps et en argent.

Il est possible de recenser les avantages et inconvénients liés à la simulation des modèles [Crevits2015].

| | | |
|------------|---|----------|
| 3.1 | Introduction | 1 |
| 3.2 | Systèmes multiphyiques | 2 |
| 3.3 | Modélisation mono-physique | 4 |
| 3.4 | Non-linéarités | 5 |
| 3.5 | Numérique | 7 |

- ✓ Pouvoir prévoir le comportement du système réel alors qu'il n'existe pas encore lors de la phase de conception ;
 - ✓ permettre la prévision de phénomènes (en météorologie par exemple) ;
 - ✓ éviter ou limiter le recours aux expérimentations réelles qui peuvent être très coûteuses ou très dangereuses, voire proscribes (essais nucléaires militaires) ou impossibles dans l'état actuel des connaissances et des moyens (projet ITER) ;
 - ✓ quand l'échelle de temps des phénomènes dans le système réel ne permet pas une expérience « en une durée raisonnable » pour effectuer des observations ou des mesures. (premiers instants de l'univers ($t < 10^{-6}$ s) ou l'évolution des galaxies ($t > 10^6$ années)) ;
 - ✓ « observer » ou représenter des variables inaccessibles à l'expérience ou la mesure ;
 - ✓ les manipulations sont faciles sur un modèle. Elles peuvent être répétées, voire itérées automatiquement pour apprécier de très nombreuses situations ;
 - ✓ le droit à l'erreur, sans risque ;
 - ✓ la possibilité de supprimer des phénomènes perturbateurs ou des effets secondaires.
-
- ✗ Avoir une confiance aveugle dans les simulations et ses résultats : des erreurs liées aux modèles ou aux calculs peuvent ne pas être perçues immédiatement ;
 - ✗ « oublier » les conditions de la simulation et les hypothèses formulées pour établir le modèle et surtout dans le cas des systèmes complexes ;
 - ✗ « inverser » la réalité et « forcer » le réel à intégrer les contraintes du modèle ;
 - ✗ oublier le niveau de précision des résultats provenant du modèle.

3.2 Modélisation des systèmes multiphysiques

3.2.1 Modélisation causale et acausale

Lorsque le fonctionnement d'un système est régit par une équation différentielle, dont l'ordre de dérivation de la sortie est supérieur à l'ordre de dérivation de l'entrée, la sortie est une conséquence de l'entrée. En passant l'équation dans le domaine de Laplace puis en la traduisant sous forme de schéma bloc, on obtient alors un bloc **orienté** traduisant ainsi la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie.

On parle ici de modélisation **causale**.

Les liens entre les blocs représentent une grandeur physique (courant, tension, position, vitesse *etc.*).

En modélisation acausale, les entrées et sorties ne sont pas spécifiées. Les liens entre entrées et sorties sont définies de manière implicite. Lorsqu'on visualise la traduction graphique d'un modèle acausal, les liens ne sont pas orientés (les blocs sont « réversibles »). Les blocs sont traversés par des flux d'énergie d'un même domaine physique.

Dans Matlab – Simulink, on parle de grandeurs potentielles (across) et de grandeur traversante (through) :

- ▶ une variable potentielle est mesurée par un instrument en parallèle avec la chaîne d'énergie ;
- ▶ une variable traversante est mesurée par un instrument en série avec la chaîne d'énergie.

Dans Scilab – Coselica, (langage Modelica), on parle de variables potentielles et flux.

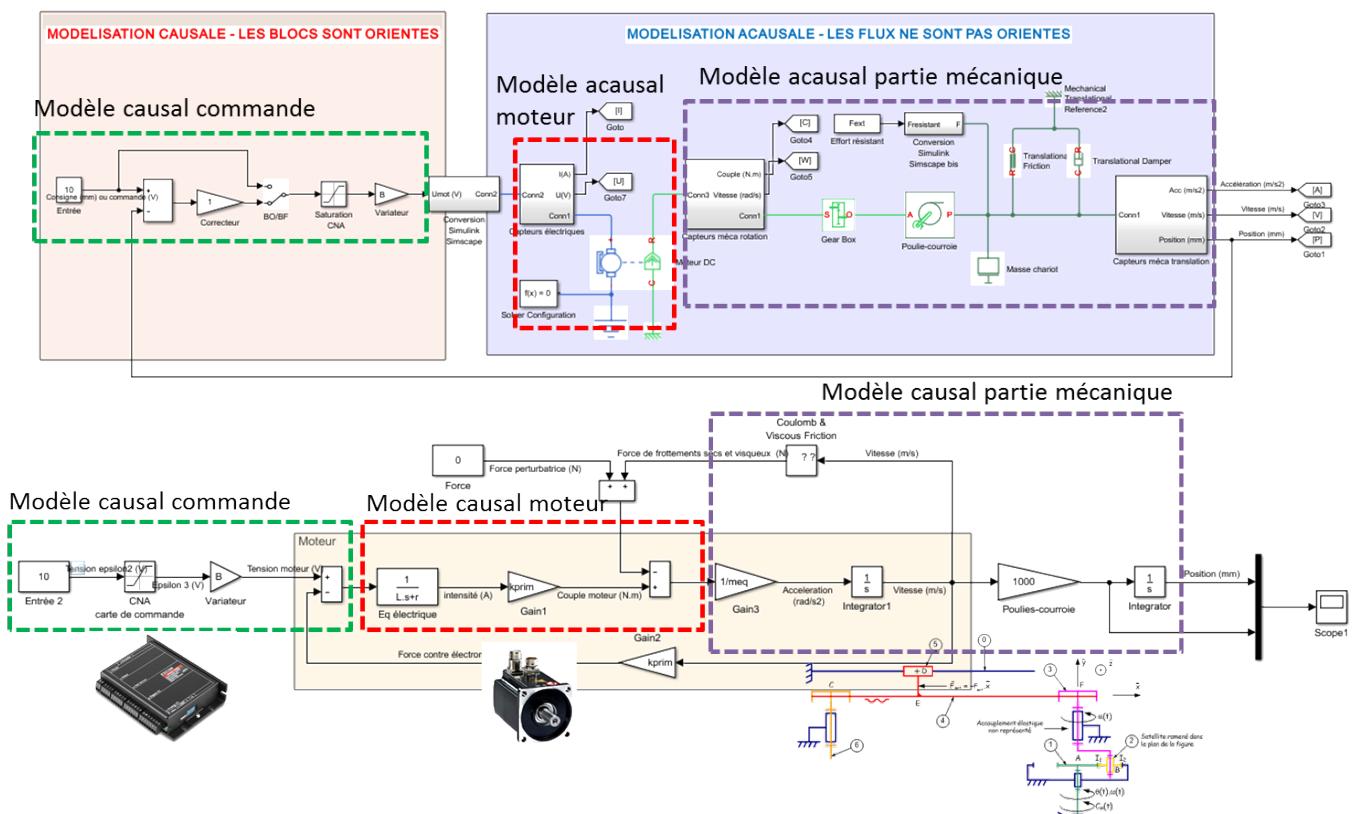
- ▶ variables potentielles : les variables qui sont reliées au même port sont égales ;
- ▶ variables flux : les variables qui aboutissent au même port ont pour somme 0.

TABLE 3.1 – Modélisation acausale dans Matlab – Simulink – Simscape : variables « across » et « through ».

| Domaine physique | Variables « across » | Variables « through » |
|--------------------------|--|--------------------------------------|
| Électrique | Tension (V) | Courant (A) |
| Hydraulique | Pression (Pa) | Débit ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) |
| Mécanique de translation | Vitesse linéaire (m s^{-1}) | Force (N) |
| Mécanique de rotation | Vitesse angulaire(rad s^{-1}) | Moment (Nm) |
| Thermique | Température (K) | Flux thermique et flux d'entropie |

3.2.2 Les différents modèles et outils

La figure ci-dessous présente un modèle causal et un modèle acausal du système de laboratoire « Control'X » en utilisant le logiciel Matlab-Simulink.



Visuellement on constate que sur le modèle causal, les composants du système apparaissent. Ainsi, sans connaître les lois de comportements des composants, il est possible de réaliser le modèle multiphysique d'un système.

En modélisation acausal, on utilise une représentation par schéma-blocs. Il est ici indispensable de connaître les modèles de connaissance ou de comportement des composants pour réaliser le modèle.

3.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients

Que ce soient des modèles causaux ou acausal, Matlab a recours à des solveurs pour simuler le comportement des systèmes. En effet, des équations différentielles, linéaires ou non, sont « cachées » derrière les blocs.

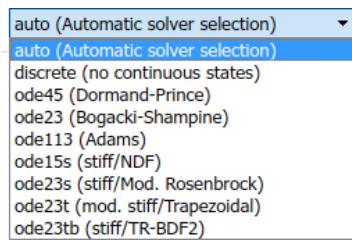


FIGURE 3.1 – Solveurs Matlab

Par défaut, nous laisserons un choix automatique du solveur. Cependant, certains modèles imposeront (via un message d'erreur) le changement de ce solveur. Par ailleurs le pas de simulation devra être changé dans certain cas, dans le but d'améliorer la précision des résultats.

Attention, il est à noter qu'il peut être difficile de réaliser de diagramme de Bode en utilisant un modèle acausal. Ceci peut être un handicap en phase de conception d'un système car il devient plus délicat de déterminer les résonances du système.

3.3 Modélisation des systèmes physiques

On utilisera ici Matlab – Simulink. Certains modèles sont aussi transposables avec Scilab – Xcos.

3.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques

Introduction

Deux modes de modélisation des systèmes mécanique est disponible : une modélisation 1D (mouvement de translation suivant une seule direction, mouvement de rotation autour d'un axe fixe) ou une modélisation 3D. La modélisation 1D est possible directement dans Matlab. Pour la modélisation 3D, il est plus aisé d'utiliser SolidWorks.

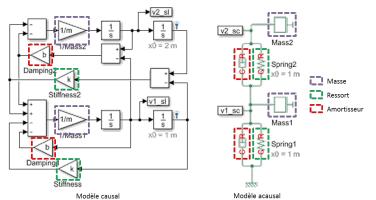


FIGURE 3.2 – Modélisation causale et acausele d'un système avec deux systèmes « masse – ressort – amortisseur » en série.

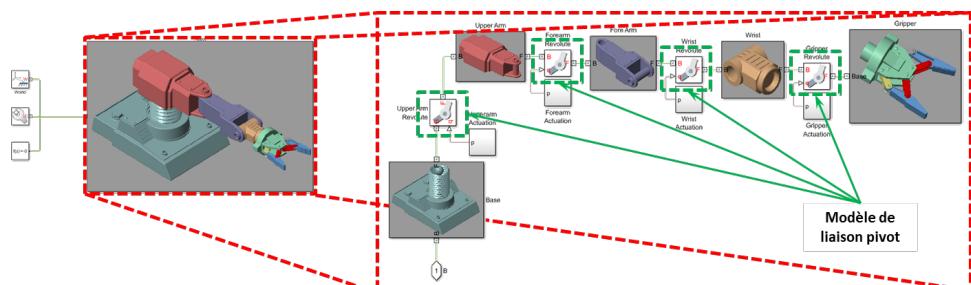
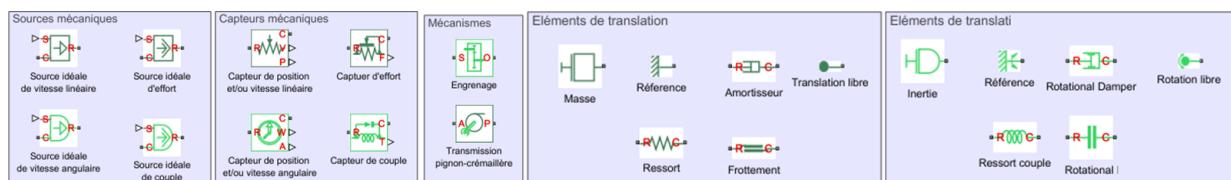


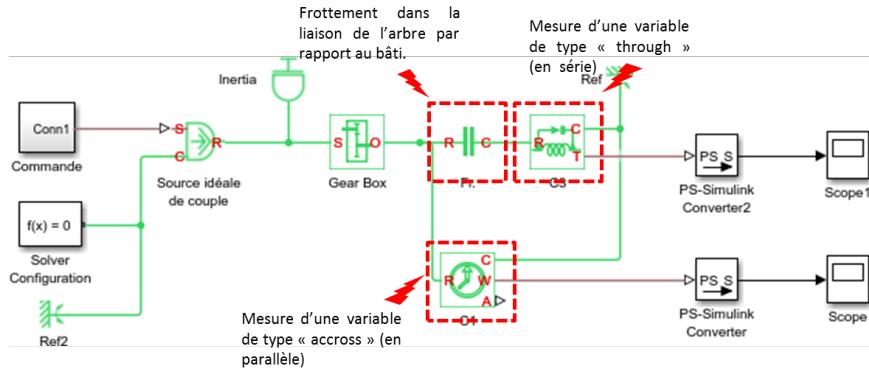
FIGURE 3.3 – Modélisation acausele 3D d'un bras robotisé.

Blocs communément utilisés en modélisation multiphylique.

Les éléments communément utilisés sont donnés dans la figure suivante.



La figure suivante illustre une transmission mécanique modélisée en utilisant Simulink. On notera le positionnement des capteurs pour mesurer des variables accross ou through, ainsi que le positionnement du bloc permettant de modéliser les frottements.



3.3.2 Modélisation des systèmes électriques

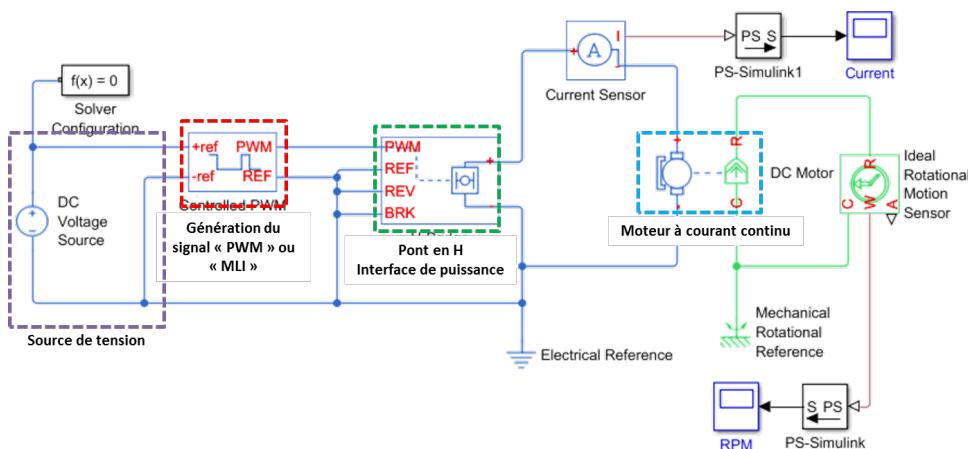


FIGURE 3.4 – Modélisation acausale de la commande d'un moteur à courant continu.

3.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques

En cas de besoin, des exemples complémentaires sont disponibles en utilisant Matlab – Simulink.

3.4 Modélisation des non-linéarités

Même si on cherche à modéliser les blocs d'un système par des équations linéaires (à coefficients constants), il est très fréquent de rencontrer des systèmes (notamment mécaniques) qui n'obéissent pas des lois linéaires (par exemple, le comportement du Maxpid est non linéaire : suivant la plage de fonctionnement – entre 0 et 5° ou entre 85 et 90° – un tour de moteur ne correspond pas au même mouvement angulaire du bras).

Deux solutions s'offrent alors à nous : linéariser le fonctionnement ou modéliser la non linéarité. Les modèles causaux sont par essence linéaire. Cependant, il est possible d'intégrer des non-linéarités modélisables relativement simplement (seuil, saturation, hystérésis). Il est en revanche plus délicat de modéliser les non linéarités géométriques des mécanismes. En revanche dans les modèles acausal, la passerelle entre SolidWorks et Matlab, permet par exemple de modéliser des systèmes mécaniques non linéaires.

Attention : l'analyse fréquentielle d'un système non linéaire n'a pas (peu ?) de sens, même s'il est possible d'effectuer un diagramme de Bode, notamment avec Matlab...

3.4.1 Linéarisation

Lorsqu'un système est non linéaire, il peut être possible de le linéariser. Cela signifie que **localement** (sur un certain intervalle) on approche le comportement du système par une droite. On conséquence, on conserve la validité de notre modélisation de type SLCI. Cependant, il faut faire attention à la zone de validité du modèle : si le comportement du système est fortement linéaire la linéarisation ne sera valable que dans une certaine zone.

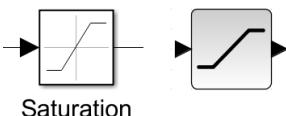
Exemple – Loi entrée sortie du Maxpid



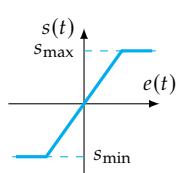
Le comportement mécanique du Maxpid n'est pas linéaire. Si on désire modéliser ce comportement sur un système causal, il est impératif d'utiliser une loi linéaire. Dans le premier cas, on modélise le comportement en utilisant une régression linéaire. Ce modèle génère des erreurs, mais il est « utilisable » sur toute la plage de fonctionnement.

Il est aussi possible, dans un second cas, de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Ainsi, le modèle sera plus fidèle à la réalité autour de ce point de fonctionnement. Par contre, les écarts s'accroissent en s'éloignant du point de fonctionnement.

3.4.2 Saturation



Paramètres : s_{\max} et s_{\min}

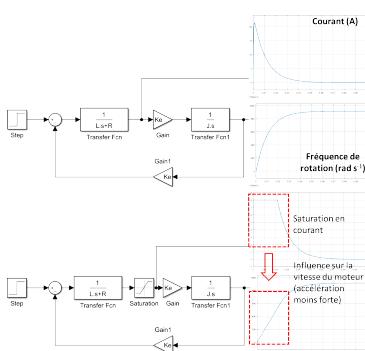


Même si vous l'avez peut-être peu remarqué, les saturations sont omniprésentes sur les systèmes réels. Les principales sources de saturation sont des saturations en tension ou des saturations en courant.

En régime saturé, au delà d'une certaine valeur d'entrée, le signal de sortie du bloc reste identique et égal à la valeur de saturation.

Tout d'abord, dans les systèmes asservis et corrigés, le correcteur permet souvent une amplification de la consigne. Par exemple, un correcteur proportionnel de valeur 5 dans la boucle ouverte permet de multiplier par 5 la tension de commande. Celle-ci peut alors être supérieure à la tension que la source peut fournir.

De même, suivant la charge agissant sur un système (charge électrique ou mécanique), le courant nécessaire à un déplacement peut devenir très important, notamment en phase transitoire. Un pic de courant peut avoir pour effet de détériorer des composants.



Exemple –

Prenons par exemple le cas du moteur à continu du Maxpid dont la modélisation est (ou devrait être) bien connue. Sollicitons le moteur par un échelon de tension et observons les signaux que nous ne regardons peut être pas toujours, par exemple le courant. Au démarrage du moteur, si on néglige la bobine et qu'on néglige l'existence d'une tension dans la boucle de retour, le courant initial est de l'ordre de $\frac{U}{R} \approx \frac{48}{2} = 24 \text{ A}$. Pour certains systèmes ce courant peut détériorer des composants. Afin de limiter le courant, des saturateurs permettant d'éviter de dépasser certaines intensités.

La conséquence peut ici être un ralentissement du système. En effet, le courant «

plaftonnant », l'accélération n'est pas aussi forte qu'on l'attendrait. En conséquence, le système est moins rapide.

3.4.3 Seuil

Les seuils (ou bandes mortes – dead band) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie reste nulle quand l'entrée varie dans un certain intervalle.

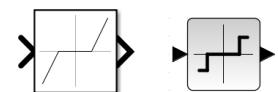
Dans le cas d'une modélisation causale, on peut utiliser le seuil pour modéliser le frottement sec. En effet, dans le cas d'un système piloté par un moteur à courant continu, une petite tension ne suffit pas à actionner le système. Il faut vaincre les frottements secs. Le seuil permet de modéliser ce comportement.

3.4.4 Hystérésis

Les hystérésis (Relay) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie est différente quand l'entrée croît ou lorsqu'elle décroît.

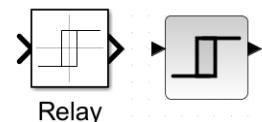
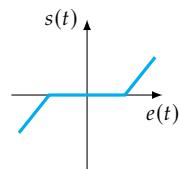
3.5 Modélisation des systèmes numériques

On verra dans un chapitre ultérieur que les systèmes que nous manipulons sont souvent numériques. En effet, que ce soit sur le Maxpid, le Control'X, le D2C, la cheville NAO etc. les grandeurs analogiques mesurées sont converties en grandeurs numériques grâce à un CAN (convertisseur analogique numérique). La fréquence d'échantillonnage ou la quantification du signal peuvent avoir un impact non négligeable sur les performances du système.

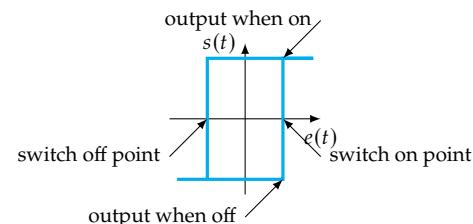


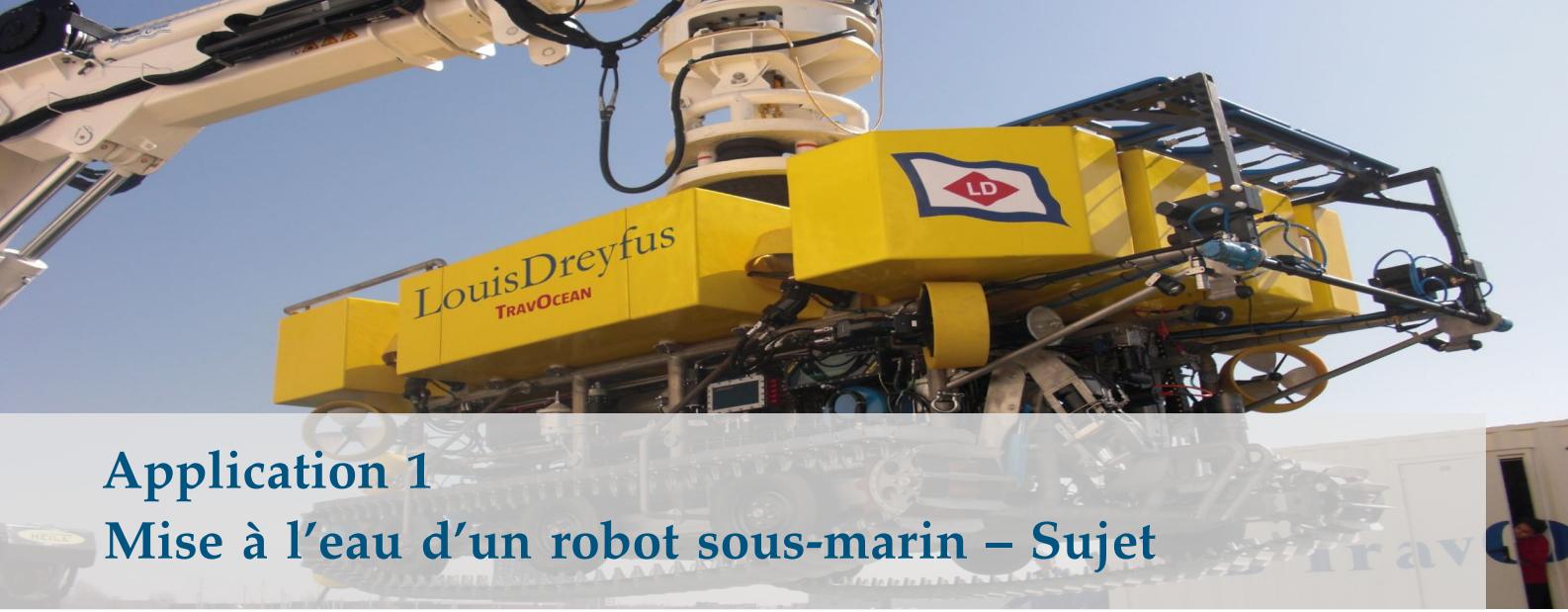
Dead Zone

Paramètres : valeur mini et valeur maxi



Paramètres : switch on point, switch off point, output when on, output when off





Application 1 Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet

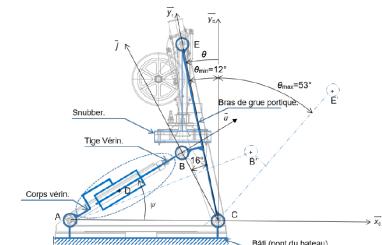
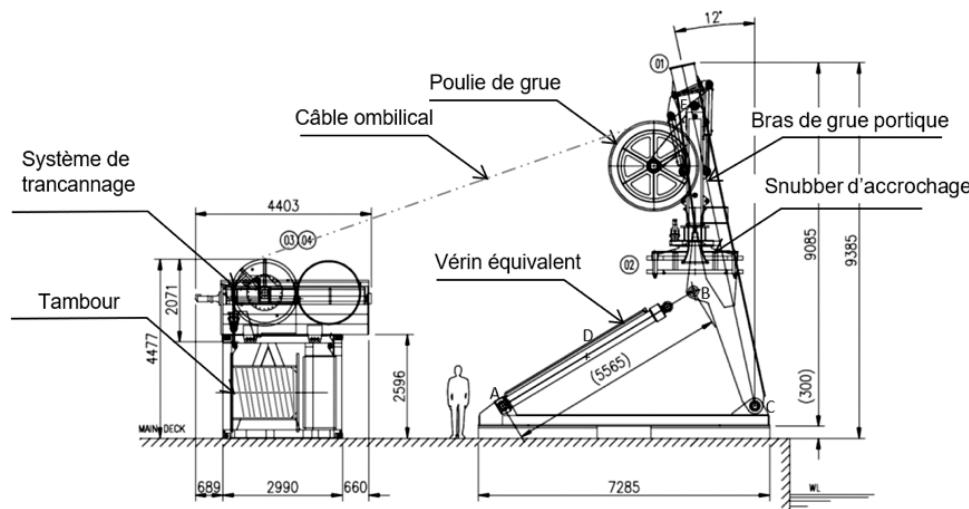
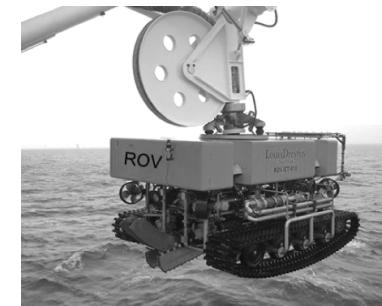
Concours Centrale – MP 2019

B2-02

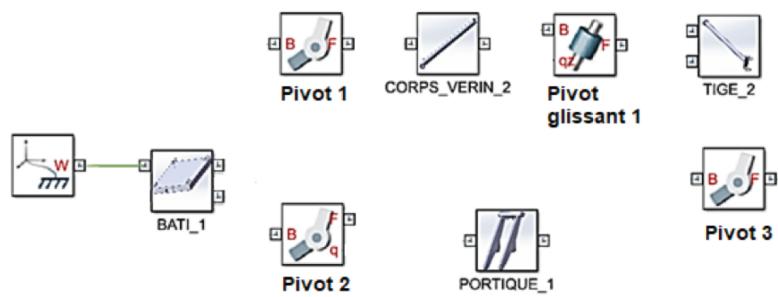
Pour réaliser l'ensouillage sous-marin de câbles, ceux-ci sont déposés sur le fond marin par un navire câblier. Le robot sous-marin ROV (Remotely Operated Vehicle) est déposé sur le fond marin par un bateau support et ensouille le câble provenant du navire câblier après l'avoir détecté et s'être aligné dans l'axe de celui-ci.

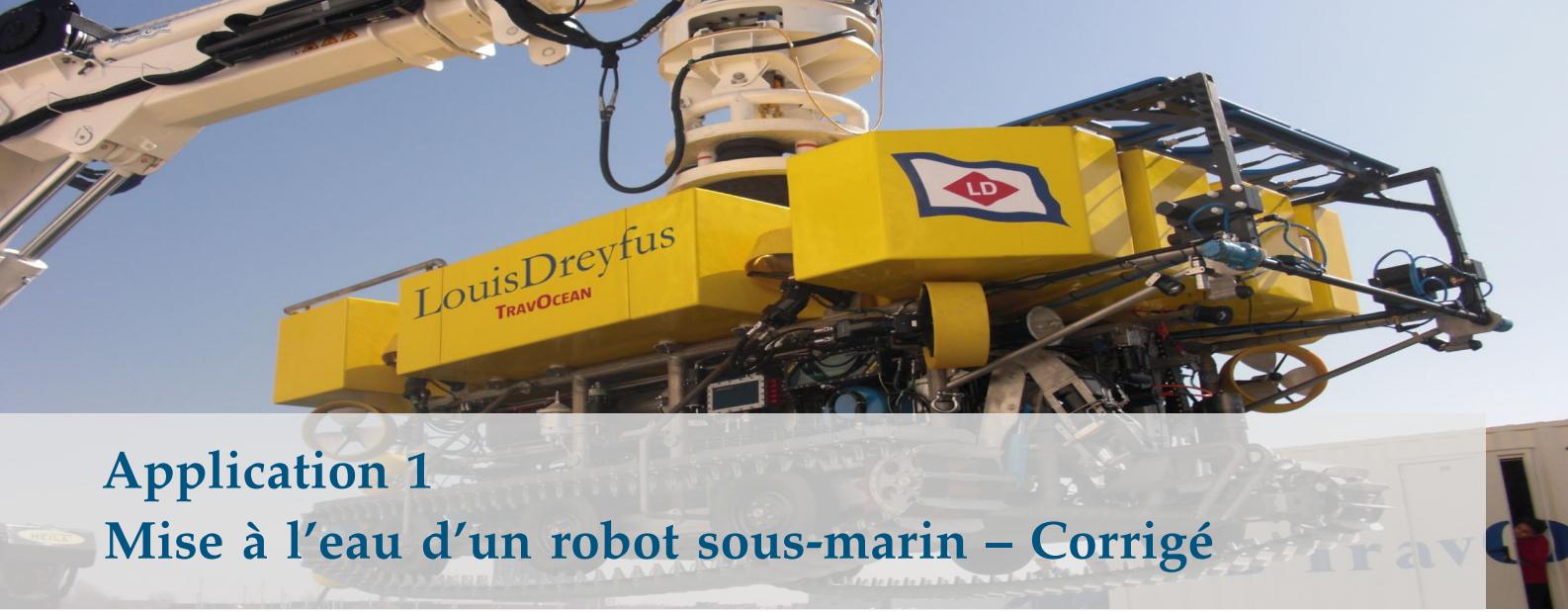
Pour transférer le ROV du pont du bateau support jusqu'à l'aplomb de la surface d'immersion une grue portique est utilisée. La grue portique est actionnée par un ensemble de deux vérins hydrauliques modélisés en un seul vérin équivalent pour cette étude.

Lors de la descente du ROV dans la mer, il est suspendu à un câble ombilical. Un bon équilibrage hydrostatique est nécessaire pour assurer l'horizontalité du ROV pendant la descente.



Question 1 À partir des figures précédentes, relier les composants du modèle de simulation multiphysique de la grue portique. Quel(s) ensemble(s) n'ont pas été modélisés?

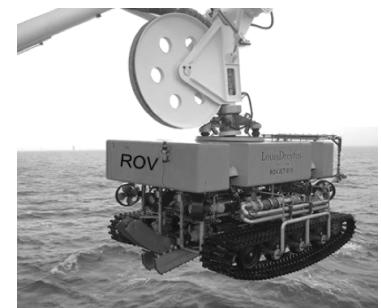




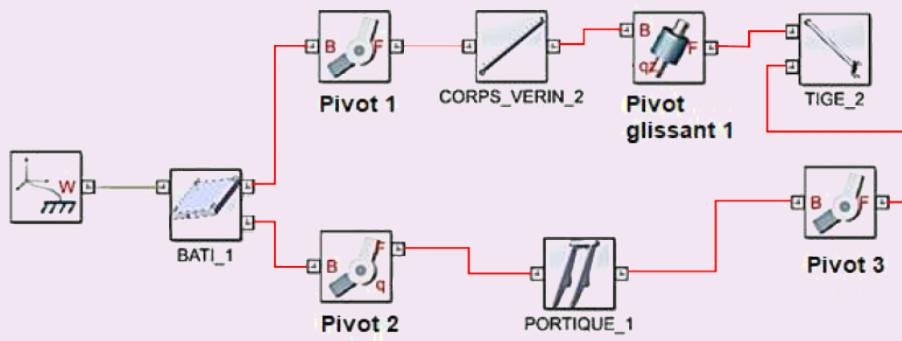
Application 1 Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Corrigé

Concours Centrale – MP 2019

B2-02



Correction





Application 2 La Seine Musicale – Sujet

La Seine Musicale est un équipement à vocation musicale à fort rayonnement culturel, dont l'objet est de créer ou d'aménager des espaces pour des concerts, des expositions, des installations permanentes ou provisoires.

L'un des défis architecturaux de ce projet consiste à mettre en mouvement la voile, équipée de 470 panneaux photovoltaïques, autour de l'auditorium, tout en garantissant une acoustique exceptionnelle.

Les deux demi-voiles sont mises en mouvement de manière indépendante par des chariots motorisés, ainsi qu'une couronne motorisée déplaçant chacun des sommets des demi-voiles par l'intermédiaire de bielles.

Chaque chariot (central et latéral) se déplace grâce à quatre galets, appelés galets de roulement, qui roulent sur les deux rails circulaires concentriques de la voie médiane de roulement et grâce à quatre autres galets de guidage qui roulent sur les côtés des deux rails. Chacun des deux chariots centraux est motorisé à l'aide de deux motoréducteurs qui entraînent chacun en rotation deux des quatre galets de roulement. Afin d'optimiser son rendement énergétique, cette voile se déplace chaque jour toutes les 15 minutes pour suivre le soleil du garage Est au garage Ouest.

Afin d'effectuer un premier dimensionnement en phase d'avant-projet des solutions techniques choisies, un modèle multiphysique simple de la chaîne de traction d'un chariot motorisé est réalisé (Figure 2.4). On se place dans le cas le plus défavorable avec un seul motoréducteur fonctionnel qui entraîne deux galets de roulement (roue).

Concours Centrale – MP 2020

B2-02

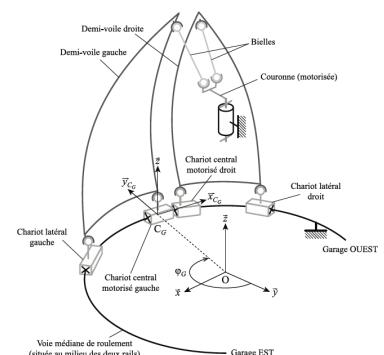
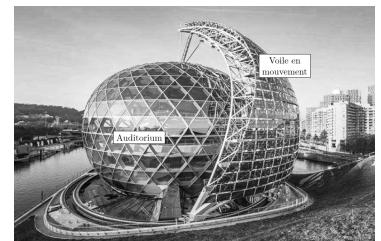


FIGURE 3.5 – Schéma d'architecture de la voile solaire

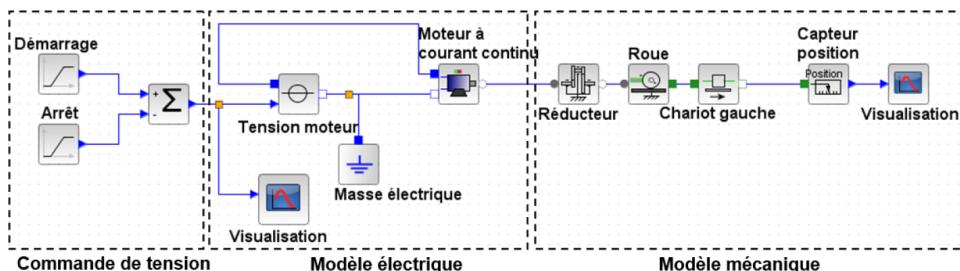


FIGURE 3.6 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voie

Le modèle multiphysique est constitué de trois parties :

- ▶ commande en tension qui résulte de la superposition de deux rampes pour générer la loi de vitesse trapézoïdale;
- ▶ modèle électrique constitué d'un moteur à courant continu alimenté;

- modèle mécanique constitué d'un réducteur, d'une roue de chariot, d'une masse mobile de la demi-voile et d'un capteur de position.

Lors de son déplacement, il peut arriver que la voile soit soumise à l'effet du vent. Il est donc important de le prendre en compte dans le modèle pour évaluer son impact sur le déplacement. Par ailleurs, afin d'assurer une durée de vie du moteur conforme à son mode de fonctionnement, il est important de pouvoir estimer la consommation électrique du moteur en fonctionnement.

Le modèle Figure 2.4 a donc été enrichi de nouveaux blocs, à savoir : un capteur de courant, un capteur de tension et l'effort extérieur lié au vent (échelon).

Question 1 Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

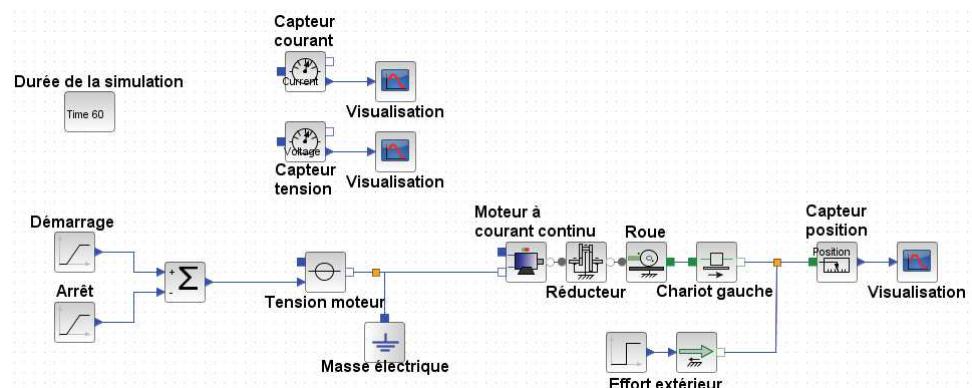


FIGURE 3.7 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voie



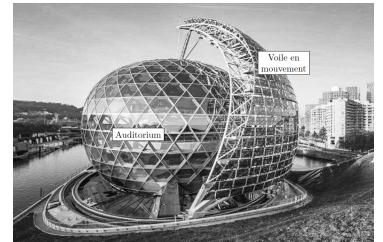
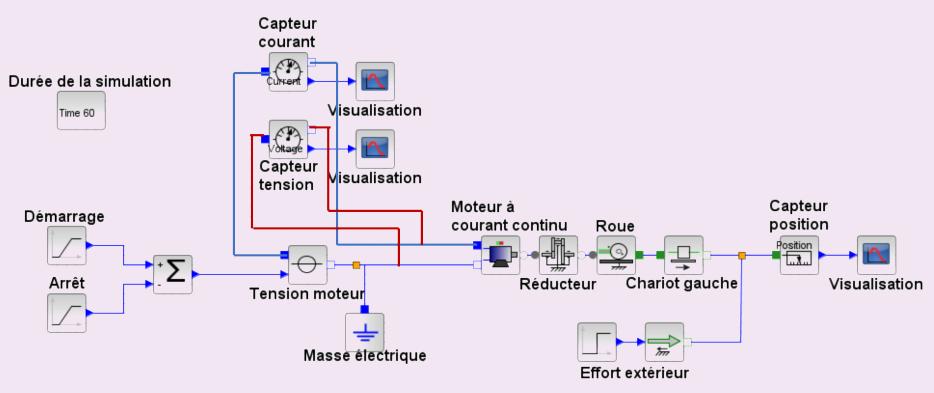
Application 2 La Seine Musicale – Corrigé

Concours Centrale – MP 2020

B2-02

Question 1 Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

Correction





Application 3

Direction automatique découplée – Sujet

Banque PT – SI A 2017

B2-02



Depuis maintenant de nombreuses années, les commandes de vol d'avions sont passées d'une technologie purement mécanique à la technologie par fil (Fly by Wire). Le secteur automobile suit cette tendance qui présente de nombreux avantages. C'est le système de direction par fil (Steer by Wire), encore nommé direction découpée, qui fait l'objet de l'étude proposée.

La Figure 2.17 donne une vue de cette unité sous la forme d'une maquette numérique à laquelle est associé le schéma cinématique qui servira de base à l'étude mécanique.

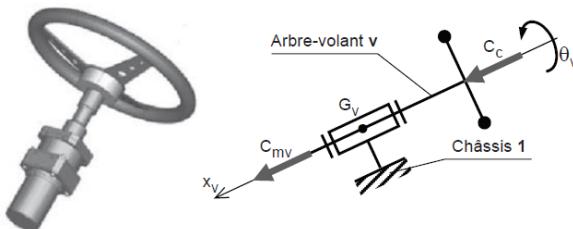


FIGURE 3.8 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

L'unité de pilotage est constituée d'une chaîne d'énergie chargée de solliciter le volant par un couple $C_{mv}\vec{x}_v$ qui résiste à l'action du conducteur $C_c\vec{x}_v$ quand celui-ci cherche à tourner le volant.

En effet, la simple dynamique du système mécanique de l'unité de pilotage ne donnerait pas au conducteur la sensation de manier la direction d'une automobile. La composante C_{mv} est donc élaborée pour que la dynamique du volant en termes d'inertie et de raideur soit équivalente à celle d'une direction conventionnelle optimisée selon le type de conduite visée.

La composante C_{mv} est élaborée à partir de la consigne d'angle du volant C_{v_ref} , transmise par le générateur de consigne intégré au contrôleur de modèles, et de la composante C_c du couple conducteur.

Le modèle de la structure sous la forme d'un schéma bloc décrivant le comportement asservi de cette unité est donné Figure 4.14. On précise que la variable d'entrée est $\theta_{v_ref}(p)$, que la variable de sortie est $\theta_v(p)$ et que la variable $C_c(p)$ est considérée comme une perturbation. Un signal de commande $U_{mv}(p)$ pilote la motorisation.

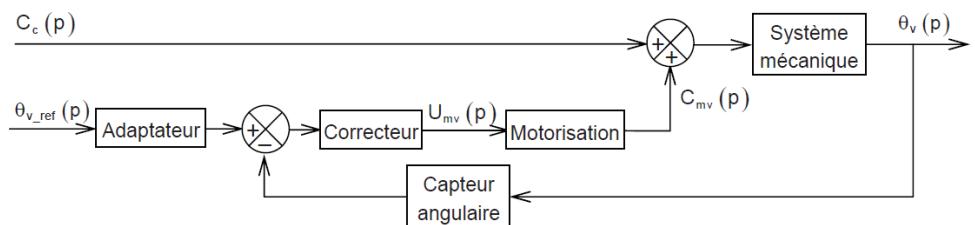
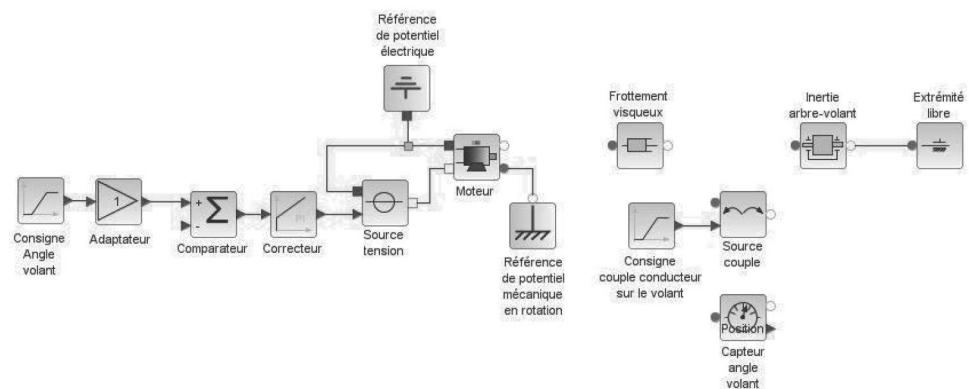


FIGURE 3.9 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

Un modèle acausal de cette structure dont certains composants ne sont pas reliés aux autres, est donné sur le cahier réponses.

Question 1 Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 4.14.





Application 3

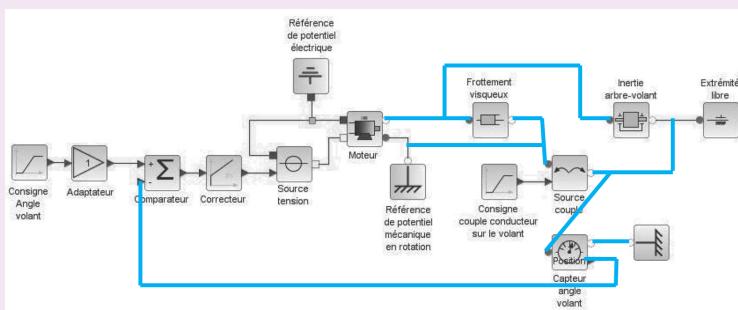
Direction automatique découpée – Corrigé

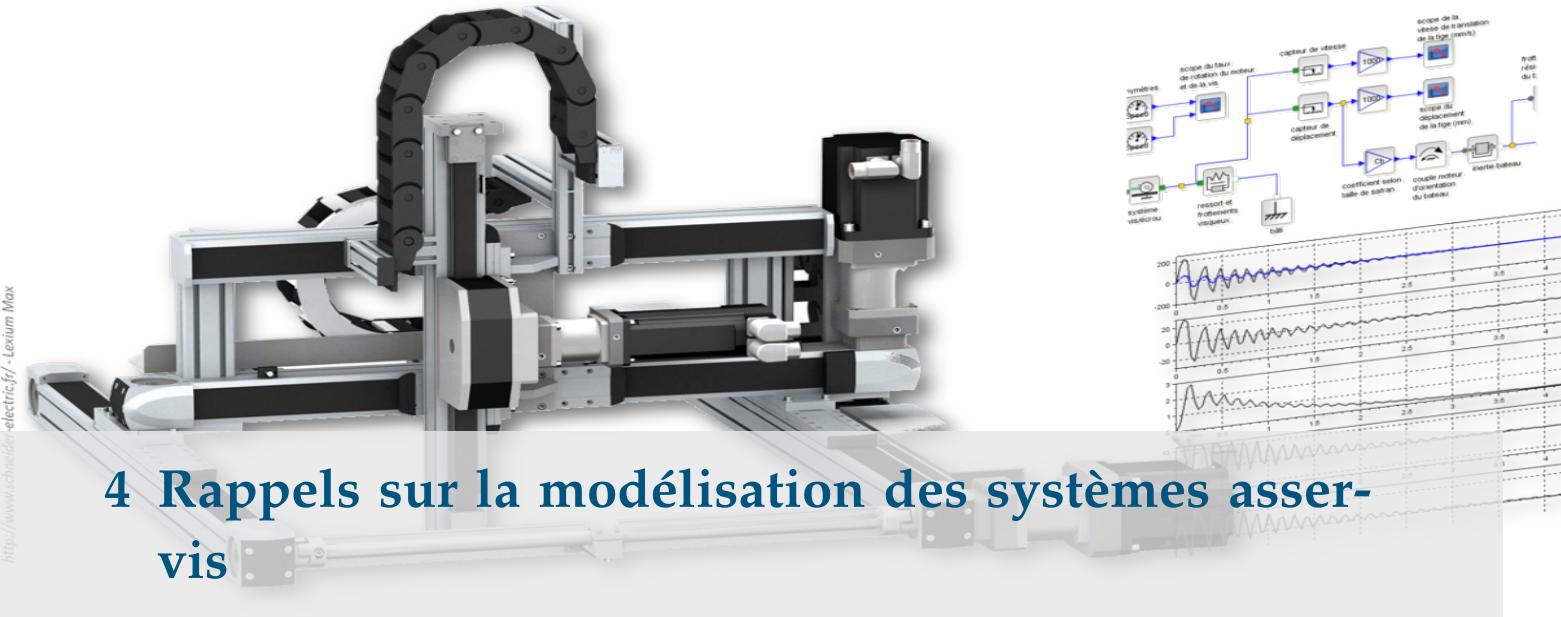
Banque PT – SI A 2017

Question 1 Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la Figure 4.14.

B2-02

Correction





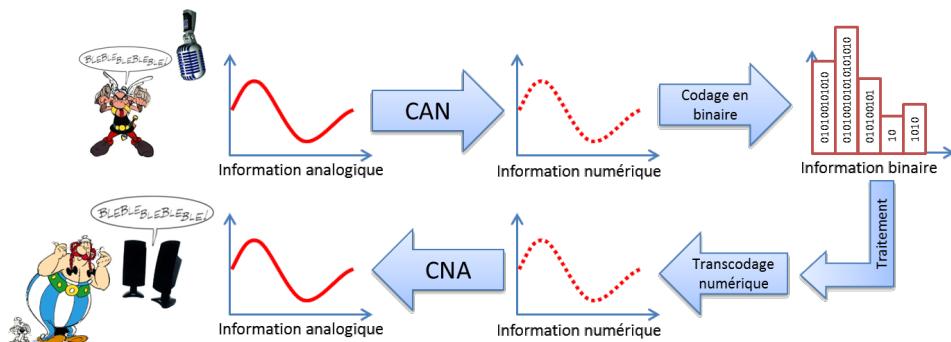
4 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

4.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

4.1.1 Définitions

Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).



| | |
|--|----|
| 4.1 Premières définitions | 21 |
| 4.2 Transformée de Laplace | 23 |
| 4.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs | 24 |
| 4.4 Systèmes d'ordre 1 & 2 | 26 |
| 4.5 Réponse fréquentielle des SLCI | 28 |

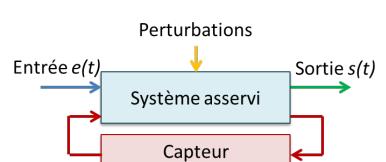
- B2-04
- B2-05
- B2-06
- B2-07
- C1-01
- C2-01
- C2-02
- C2-03

Définition – Systèmes automatiques ou asservis

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger



de la qualité de la tâche accomplie.

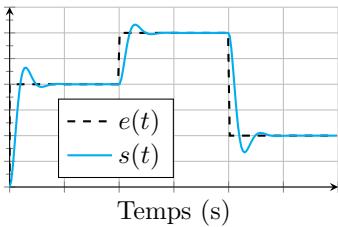


FIGURE 4.1 – Système suiveur.

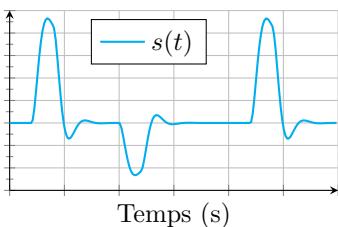


FIGURE 4.2 – Système régulateur.

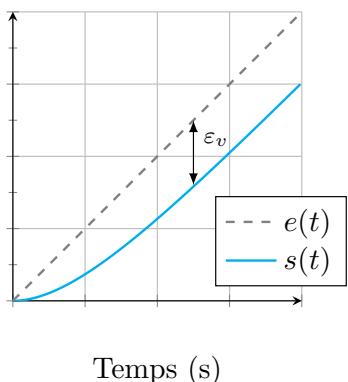


FIGURE 4.3 – Erreur de trainage.

Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

4.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

Définition – Précision en position – Écart statique ε_s

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique ε_s comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

Définition – Précision en vitesse ε_v

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

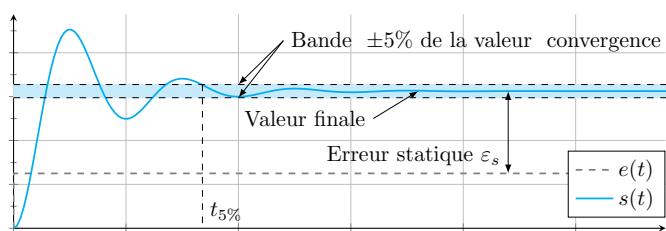


FIGURE 4.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

4.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

4.2.1 Définitions

Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$, $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$, $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$, $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p)$...

Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^nF(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

4.2.2 Théorèmes

Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

Théorème – Retard

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

Théorème – Amortissement

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

4.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

4.3.1 Définitions

Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

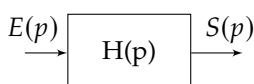
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition – Classe – ordre – pôles – zéros

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p . En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

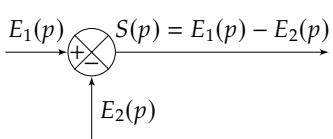
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- ▶ Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Le degré de $D(p)$ est appelé **ordre n du système** ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).
- ▶ L'équation $D(p) = 0$ est appelée équation caractéristique.
- ▶ S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. α est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

**Définition – Modélisation d'un bloc**

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition – Modélisation d'un comparateur**

Soit l'équation $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

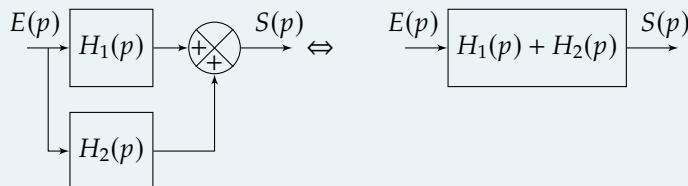
4.3.2 Algèbre de blocs

Résultat – Blocs en série

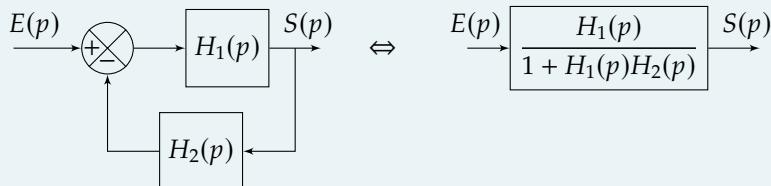


Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

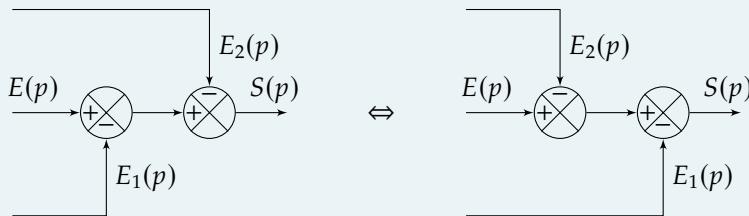
Résultat – Blocs en parallèle



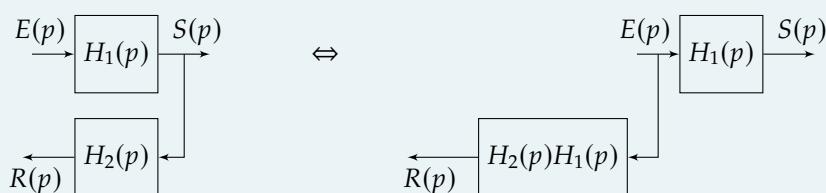
Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



Résultat – Comparateurs en série



Résultat – Point de prélèvement

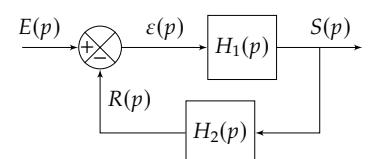


4.3.3 Fonctions usuelles

Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

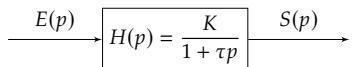
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S . On note $H_1 = \frac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \frac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1E_1 + H_2E_2$.

4.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

4.4.1 Systèmes d'ordre 1

**Définition – Système d'ordre 1**

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

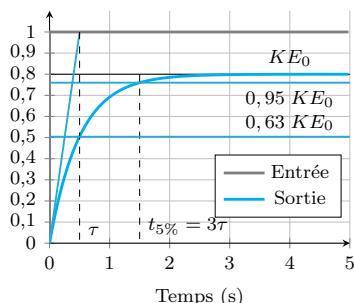
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶ τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$);
- ▶ K le gain statique du système ($K > 0$).

**Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre**

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0 . Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote KE_0 ;
- ▶ la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale $s_\infty = KE_0$;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;

- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63 s_\infty$.

Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

On note :

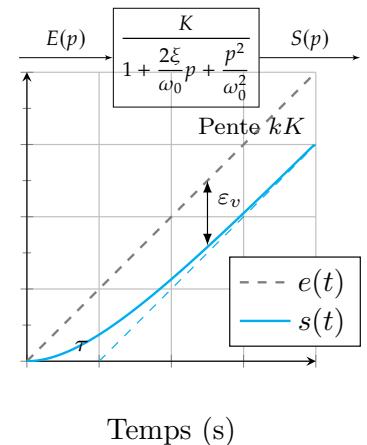
- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E);
- ξ (lire χi) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

Analytiquement, on montre que $s(t) = Kk \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

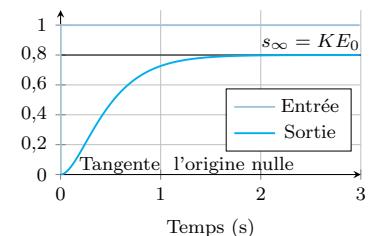
- pente de l'asymptote Kk ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$.



Temps (s)

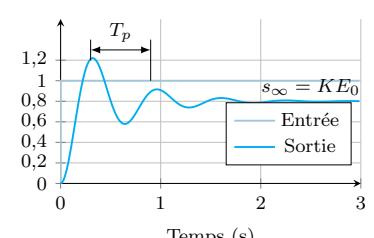
Résultat – $\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti (apériodique)

- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.



Résultat – $\xi < 1$: système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.



- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.

Résultat –

- Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude KE_0 ($2KE_0$ crête à crête).
- Pour $\xi \approx 0,69$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

4.5 Réponse fréquentielle des SLCI

4.5.1 Définitions

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s;
- $f = \frac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

- A : l'amplitude de la sinusoïde;
- ω : la pulsation en rad/s;
- φ : la phase à l'origine en rad.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

Définition – Gain & Phase

Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :

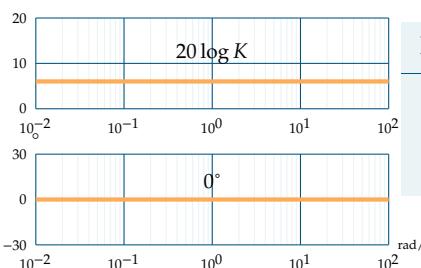
- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$.

Résultat –

On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$.

4.5.2 Gain



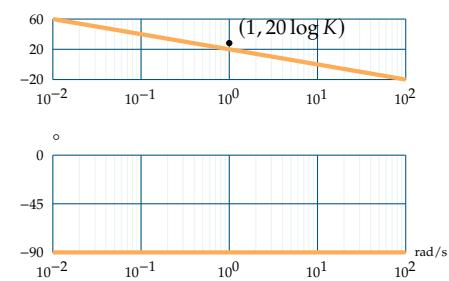
Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée 0° .

4.5.3 Intégrateur

Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

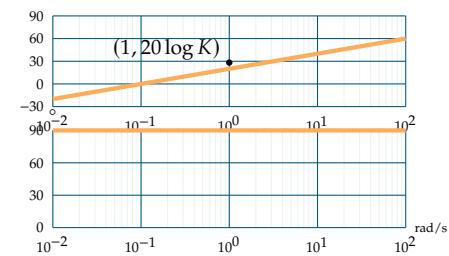
- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{p}$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente -20dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée -90° .



4.5.4 Dérivateur

Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

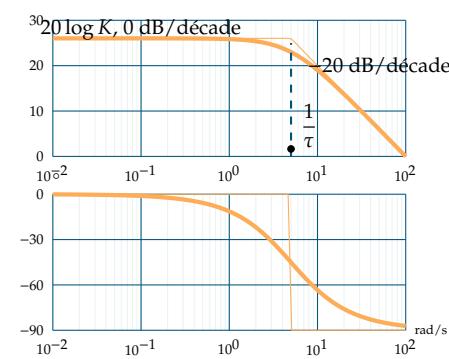
- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $+90^\circ$.



4.5.5 Systèmes d'ordre 1

Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

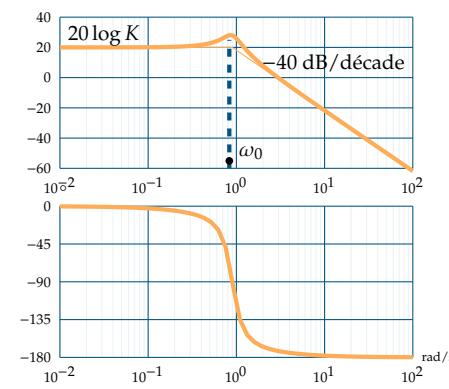
- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite de pente -20dB/decade .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée -90° .



4.5.6 Systèmes d'ordre 2

Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$.
- ▶ Cas où $\xi < 1$.
 - ▶ Diagramme de gain asymptotique :
 - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
 - pour $\omega > \omega_0$: droite de pente -40dB/decade .
 - ▶ Diagramme de phase asymptotique :
 - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;



- pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée -180° .

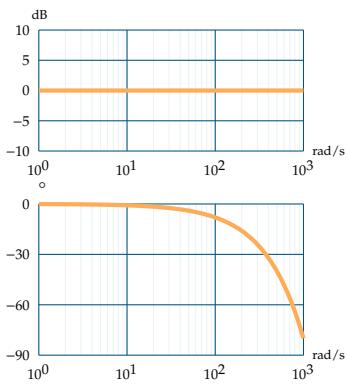
Dans le cas où $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20 \log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

4.5.7 Retard



Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = e^{-Tp}$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : $\arg(H(p)) = -\tau\omega$.

4.5.8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

Application 1

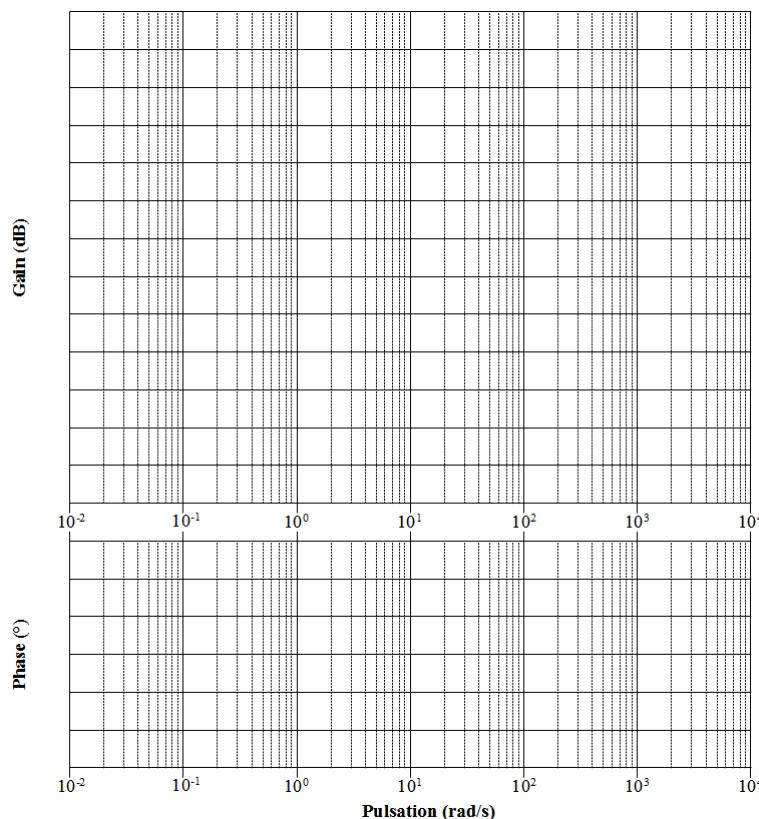
Réponses fréquentielles – Sujet

D'après Sébastien Grange.

Diagramme de Bode

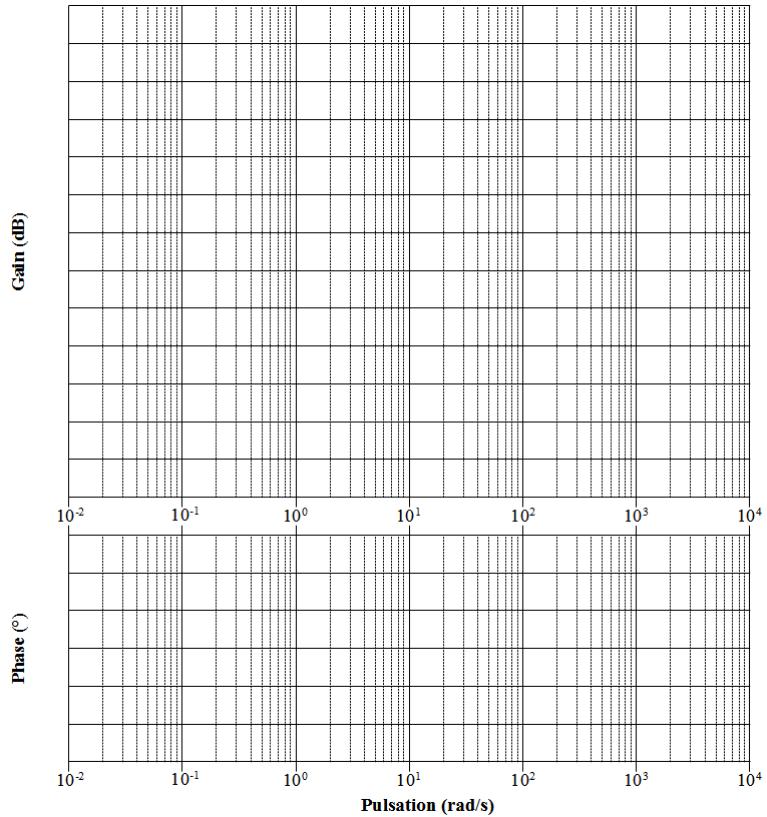
Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

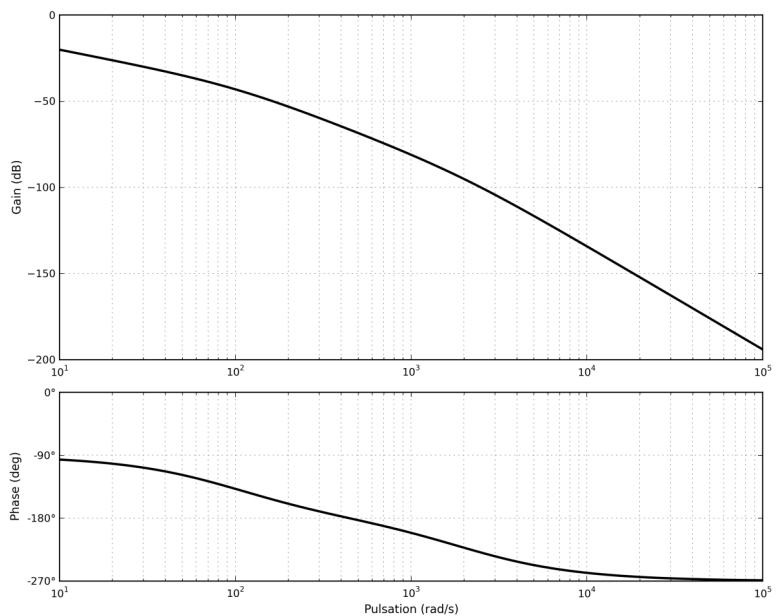


Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

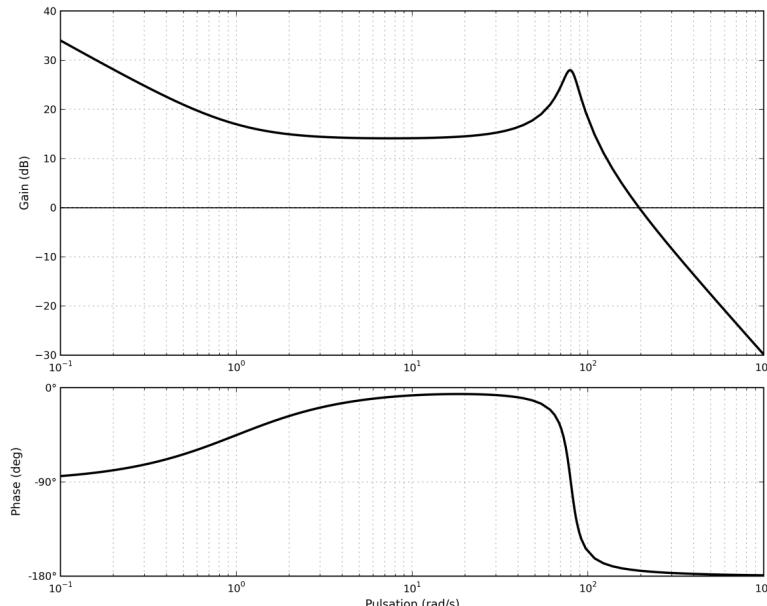


Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.



Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.



Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

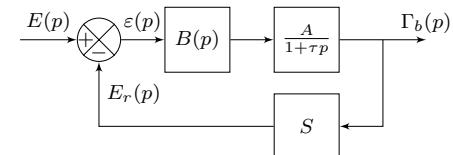
Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



On a $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$, $\tau = 0,2 \text{ s}$ et $S = 10 \cdot 10^{-3} / g \text{ V} / (\text{m/s}^2)$ où g est l'accélération de pesanteur. $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement et $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.

Application 1

Réponses fréquentielles – Corrigé

D'après Sébastien Grange.

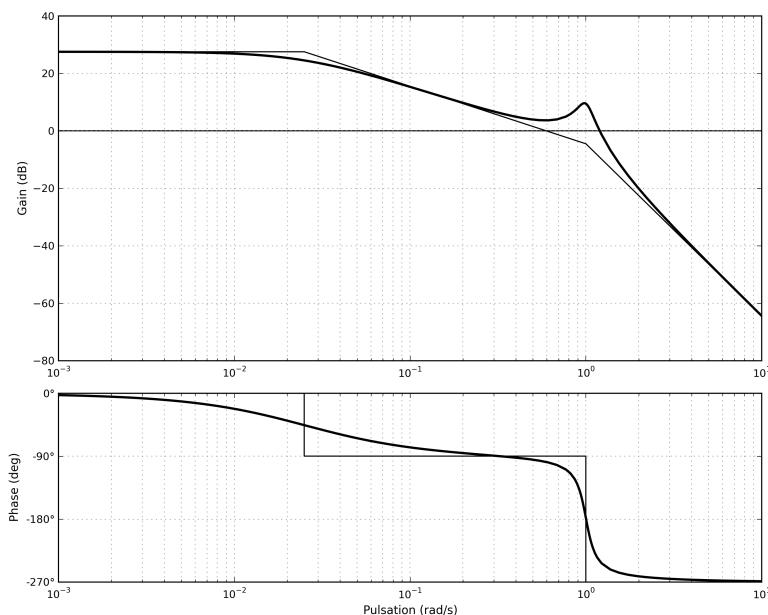
Diagramme de Bode

Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1 + 40p) \left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1} p + \frac{p^2}{1^2} \right)}$$



Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

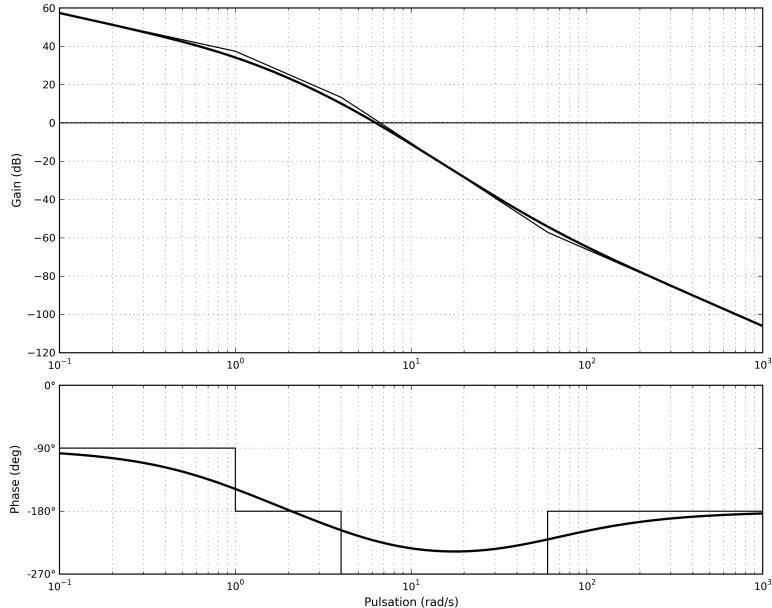
$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + (2 \cdot 1,25)/2)p + p^2/2^2} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + p)(1 + 0,25p)}$$

| | 1 rad/s | $\frac{1}{0,25} = 4$ rad/s | $\frac{1}{0,0167} = 60$ rad/s |
|-----------------------|-----------------------|----------------------------|-------------------------------|
| $1 + 0,0167p$ | 0 dB/décade 0° | 0 dB/décade 0° | 0 dB/décade 0° |
| $\frac{1}{1 + p}$ | 0 dB/décade | -20 dB/décade -90° | -20 dB/décade -90° |
| $\frac{1}{1 + 0,25p}$ | 0 dB/décade 0° | 0 dB/décade 0° | -20 dB/décade -90° |
| $1/p$ | -20 dB/décade -90° | -20 dB/décade -90° | -20 dB/décade -90° |
| $H(p)$ | -20 dB/décade -90° | -40 dB/décade -180° | -60 dB/décade -270° |

Poistionnement du diagramme asymptotique de gain : en $\omega = << 1 \text{ rad s}^{-1}$, $H(p) \approx \frac{75}{p}$. Ainsi pour $\omega \approx 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, $H_{dB}(0,1) = 20 \log(75/0,1) = 57 \text{ dB}$.



Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1^{er} ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $\frac{1}{\tau}$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a : $1/T_1 \approx 100$ et $1/T_2 \approx 2000$ donc $T_1 = 0,01 \text{ s}$ et $T_2 = 0,0005 \text{ s}$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1^{er} ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$: $20 \log(K/0,1) \approx -20 \text{ K} \approx 1$

On a donc : $H(p) = \frac{1}{p(1 + 0.01p)(1 + 0.0005p)}$.

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc : $H(p) \simeq \frac{1}{p(1 + 0.01p)}$.

Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Correction

On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente : $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$.

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que : $G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) \simeq -60 \text{ dB}$ et donc $S_0 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$. D'après la courbe de phase, on peut lire : $\varphi(\omega = 300\text{rad/s}) = -175 \text{ degrés}$. On a donc : $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$. L'angle est à mettre en radians.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que $1/\sqrt{2}$.

$$H(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + 2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $1/\tau$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a : $1/T \simeq 1$ et $T = 1 \text{ s}$.

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut ω_0 . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a : $\omega_0 \simeq 80 \text{ rad/s}$.

Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a : $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$ et $\xi \simeq 0,11$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$: $20 \log(K/0,1) \simeq 33$ et $K \simeq 4,5$

Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

On a $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$, $\tau = 0,2 \text{ s}$ et $S = 10 \cdot 10^{-3} / \text{g V} / (\text{m/s}^2)$ où g est l'accélération de pesanteur. $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement et $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

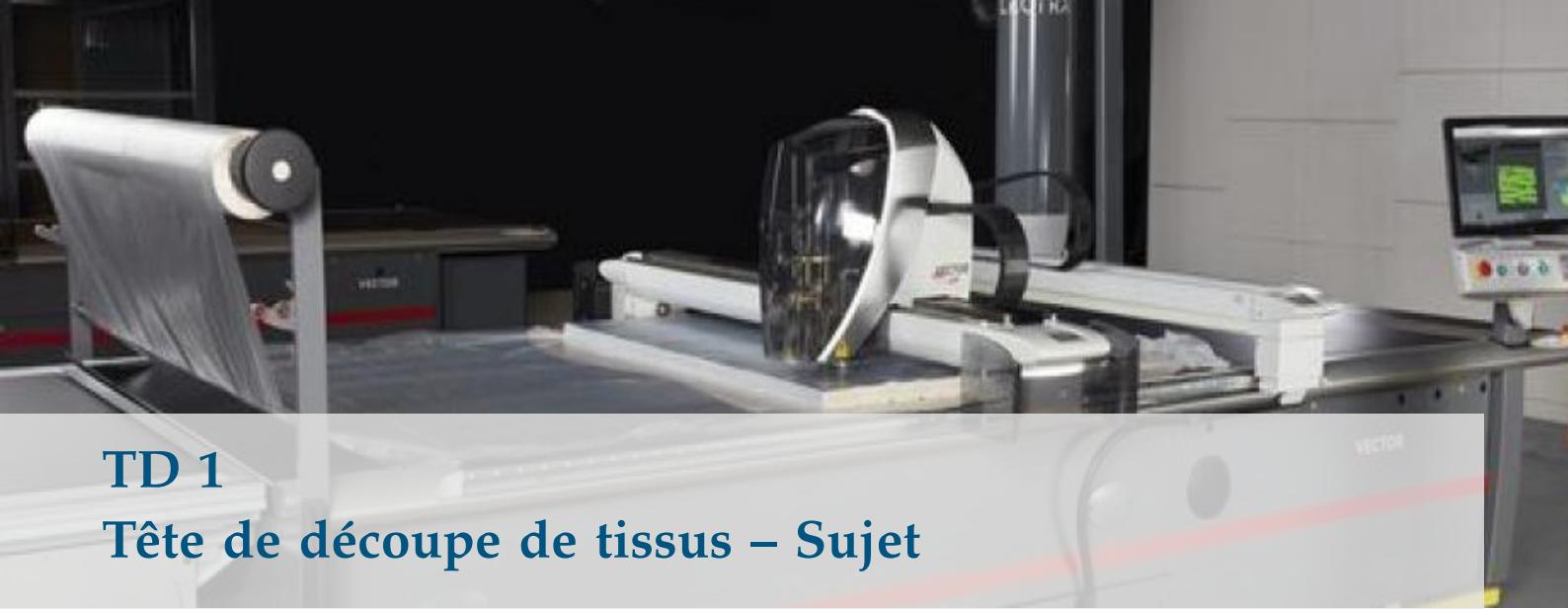
Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



TD 1

Tête de découpe de tissus – Sujet

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 4.5) :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration ;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction \vec{y}_0 par rapport à la table ;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction \vec{x}_0 par rapport au bras transversal ;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

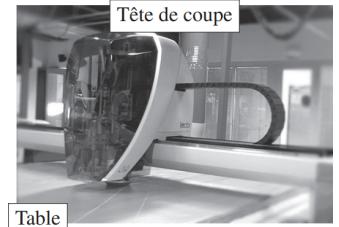
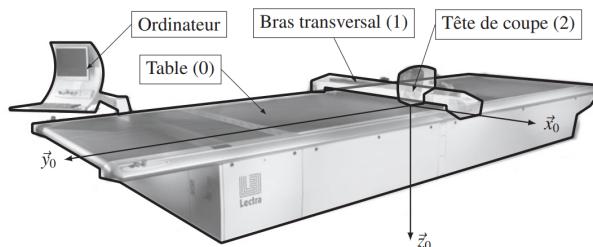


FIGURE 4.5 – Structure d'une table de découpe de tissus

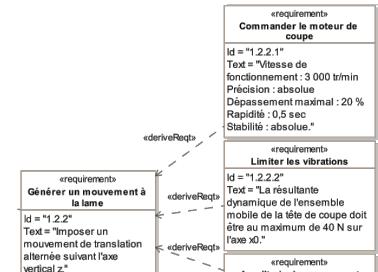


FIGURE 4.6 – Exigence 1.2.2.1

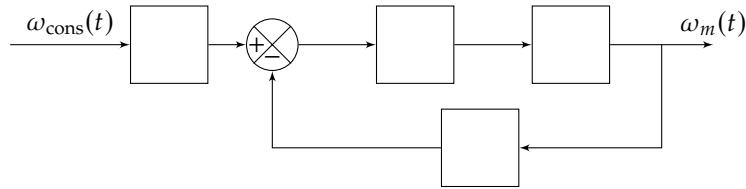
Modélisation du comportement du moteur de coupe

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 4.8).

Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée $\omega_m(t)$, est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension $u_{mes}(t)$, image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne $u_{cons}(t)$, image de la vitesse de rotation de consigne $\omega_{cons}(t)$; un adaptateur fournit $u_{cons}(t)$ à partir de $\omega_{cons}(t)$. La tension écart $\varepsilon(t) = u_{cons}(t) - u_{mes}(t)$ est alors transformée en tension d'alimentation du moteur $u_m(t)$ par l'ensemble correcteur-variateur.

Question 1 Compléter le schéma-bloc fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont sont :

- ▶ R , résistance de l'induit;
- ▶ L , inductance de l'induit;
- ▶ k_e , constante de vitesse;
- ▶ k_c , constante de couple;
- ▶ $u_m(t)$ est la tension d'alimentation du moteur;
- ▶ $i(t)$ est l'intensité traversant l'induit;
- ▶ $e(t)$ est la force contre-électromotrice;
- ▶ $\omega_m(t)$ est la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶ $c_m(t)$ est le couple moteur;
- ▶ $c_r(t)$ est le couple résistant;
- ▶ J est le moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ramené à l'arbre moteur, supposé constant dans cette partie.

Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu : $u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t)$, $c_m(t) = k_c i(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$. La fonction de transfert du moteur est notée $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R , L , k_e , k_c et J .

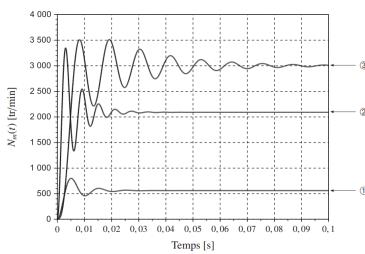


FIGURE 4.7 – Évolutions simulées de $\omega_m(t)$.

Éléments de correction

1. .
2. $K_a = K_c$.
3. .
4. $K = \frac{1}{k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$ et $\xi = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_ck_e}}$.
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de K_p .
6. $K_i \neq 0$ pour la courbe 3 uniquement.
7. .

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

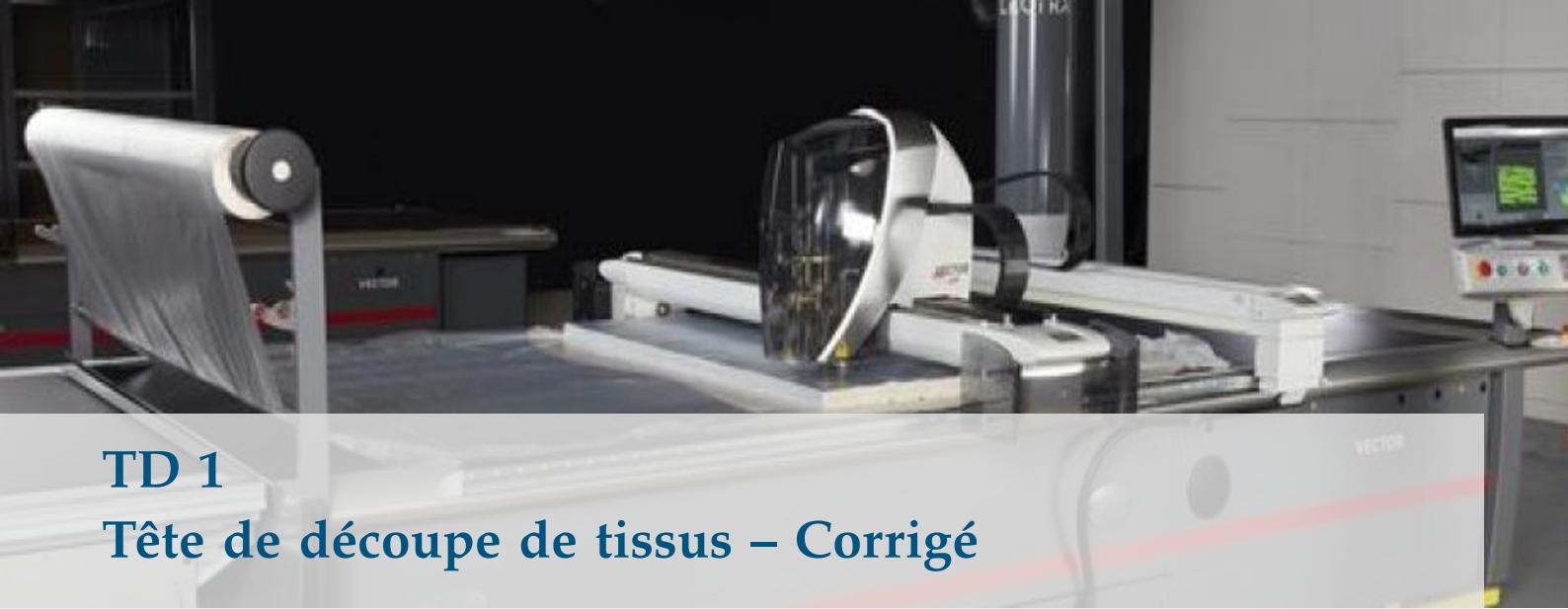
Le correcteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur de fonction de transfert $H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$.

Les résultats de simulation de la réponse du moteur $N_m(t)$, en boucle fermée, pour une entrée échelon d'amplitude $N_0 = 3000 \text{ tr min}^{-1}$ pour différentes valeurs de K_p et de K_i sont donnés sur la figure 4.9.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 4.9, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

Question 6 Pour chaque courbe de la figure 4.9, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

Question 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.



TD 1

Tête de découpe de tissus – Corrigé

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

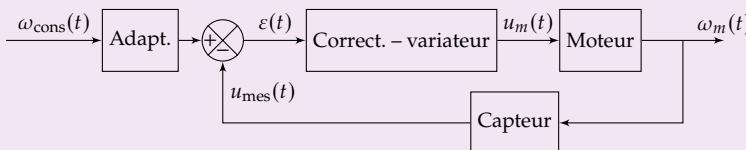
Modélisation du comportement du moteur de coupe

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 4.8).

Question 1 Compléter le schéma-bloc fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

Correction



Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

Correction

On a $\varepsilon(t) = K_a \omega_{\text{cons}}(t) - K_c \omega_m(t)$.

Pour que $\varepsilon(t)$ soit nul lorsque $\omega_{\text{cons}}(t) = \omega_m(t)$, il faut que $K_a = K_c$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) + Cr(p)$, $C_m(p) = k_c I(p)$, $E(p) = k_e \Omega_m(p)$.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique

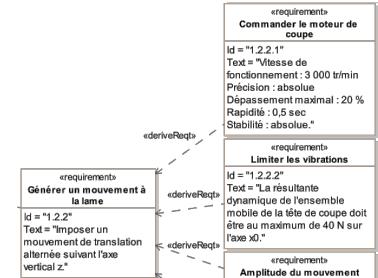
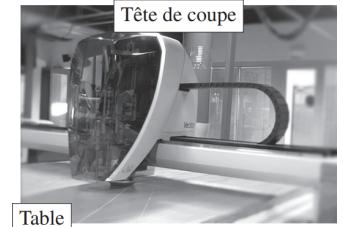


FIGURE 4.8 – Exigence 1.2.2.1

de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R, L, k_e, k_c et J .

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) = \frac{C_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p) = Jp\frac{\Omega_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p)$.

On a donc $U_m(p) = \Omega_m(p)\left(\frac{Jp}{k_c}(R + Lp) + k_e\right)$ et $H_m(p) = \frac{1}{\frac{JL}{k_c}p^2 + \frac{JR}{k_c}p + k_e}$
 $\frac{1}{\frac{JL}{k_c k_e}p^2 + \frac{JR}{k_c k_e}p + 1}$.

Par identification, on a donc $K = \frac{1}{k_e}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{JR}{k_c k_e}$ soit $\xi = \frac{JR}{2k_c k_e} \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}} = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$.

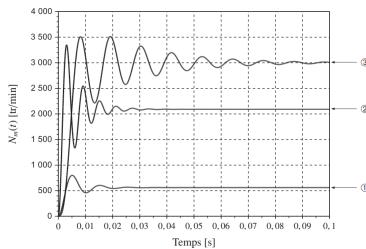


FIGURE 4.9 – Évolutions simulées de $\omega_m(t)$.

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 4.9, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

Correction

Méthode 1 – Coefficient d'amortissement

On note $H_{BF}(p) = \frac{\omega_m(t)}{\omega_{cons}(t)}$.

$$\text{On a alors, } H_{BF}(p) = K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K_c K_p K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_p K_c}.$$

On a donc $\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{2\xi}{\omega_0(1 + K_p K_c)}$ et $\omega_{BF}^2 = \omega_0^2(1 + K_p K_c)$.

$$\text{Soit } \xi_{BF} = \frac{\xi \omega_{BF}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi \omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi}{\omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}.$$

En conclusion, plus K_p augmente, plus le coefficient d'amortissement diminue et donc plus les pseudo oscillations deviennent grandes. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p .

Méthode 2 – Calcul de l'écart statique

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_a}{1 + K_p K_c K}.$$

Lorsque K_p augmente, ε_S diminue. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p .

Question 6 Pour chaque courbe de la figure 4.9, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

Correction

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{p}\right) K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$

$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$. Ainsi, si K_i non nul, $\varepsilon_S = 0$ (courbe 3 uniquement).

Question 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

Correction

| | Stabilité | 1 ^{er} Dépassemement | Erreur statique | $T_{5\%}$ |
|-----------|-----------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|
| Exigences | Absolue | < 20 % | Nulle | 0,5 s |
| Courbe 1 | Stable OK | $D_1 = 45\%$ Pas OK | 2450 tr/min Pas OK | $T_{5\%} = 0,015\text{ s}$ OK |
| Courbe 2 | Stable OK | $D_1 = 59\%$ Pas OK | 900 tr/min Pas OK | $T_{5\%} = 0,018\text{ s}$ OK |
| Courbe 3 | Stable OK | $D_1 = 15\%$ OK | 0 tr/min OK | $T_{5\%} = 0,048\text{ s}$ OK |



TD 2

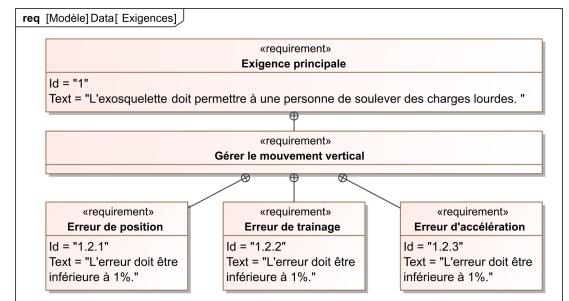
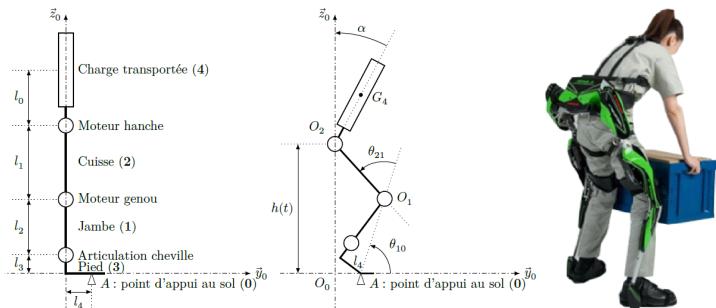
Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.

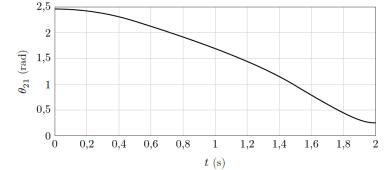


Gestion du mouvement vertical

Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

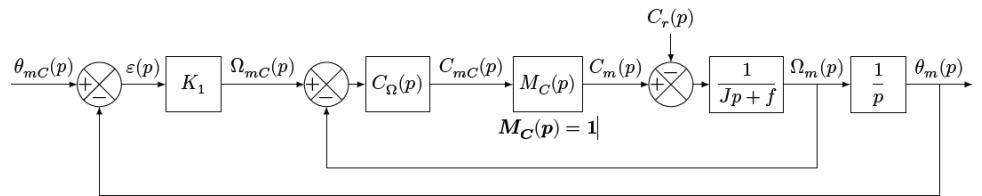
La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.

Notations :

- ▶ $\theta_{mC}(p)$ consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad);
- ▶ $\theta_m(p)$ position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad);
- ▶ $C_{mC}(p)$ consigne de couple moteur (variable temporelle : $c_{mC}(t)$ en Nm);
- ▶ $C_m(p)$ couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en Nm);
- ▶ $C_r(p)$ couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en Nm);
- ▶ K_1 gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en s^{-1});
- ▶ $\Omega_{mC}(p)$ consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en rad s^{-1});
- ▶ $\Omega_m(p)$ vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en rad s^{-1});
- ▶ $C_\Omega(p)$ correcteur de l'asservissement de vitesse;
- ▶ $M_C(p)$ modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_C(p) = 1$;
- ▶ J moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- ▶ f coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.



Le correcteur est de la forme : $C_\Omega(p) = K_2 \left(\frac{Jp + f}{Jp} \right)$.

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- ▶ l'écart est défini par la variable $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$;
- ▶ l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$.

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart $\varepsilon(t)$ est égal à l'erreur $\mu(t)$.

Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

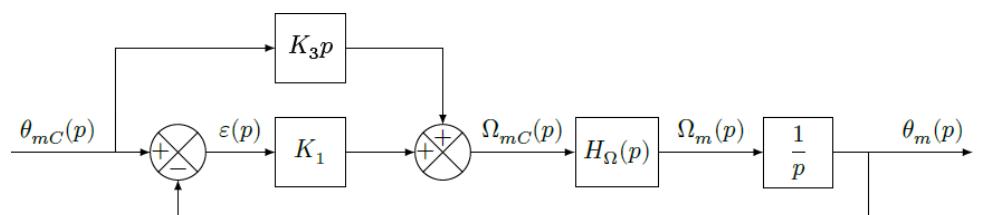
Méthode –

On peut définir l'erreur de position ε_p par $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$ avec $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$ (entrée échelon).

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$ et $T = 33$ ms.



Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

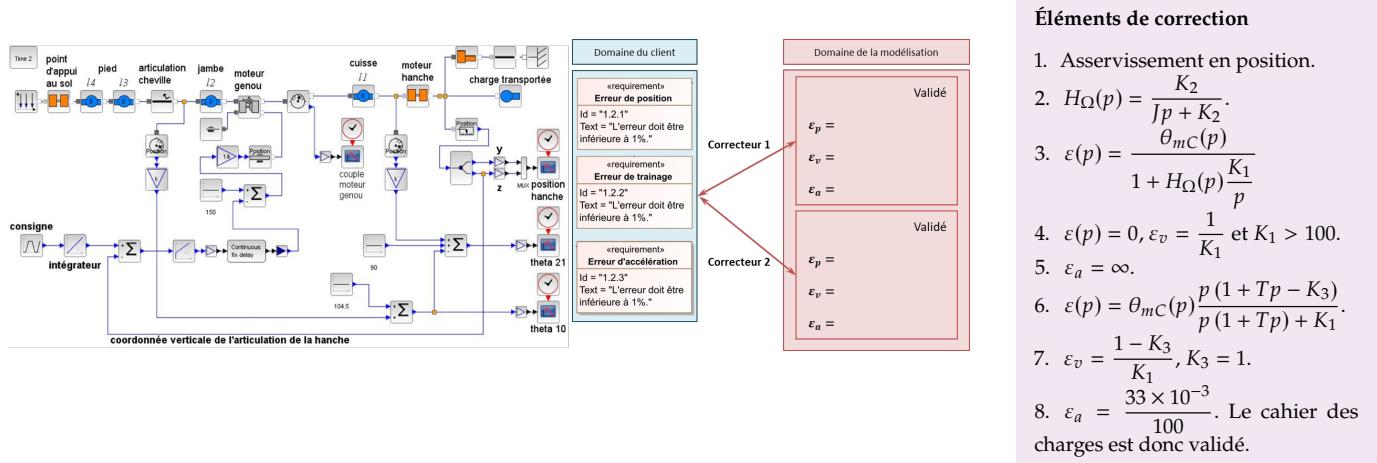
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





TD 2

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

Mise en situation

Gestion du mouvement vertical

Objectif

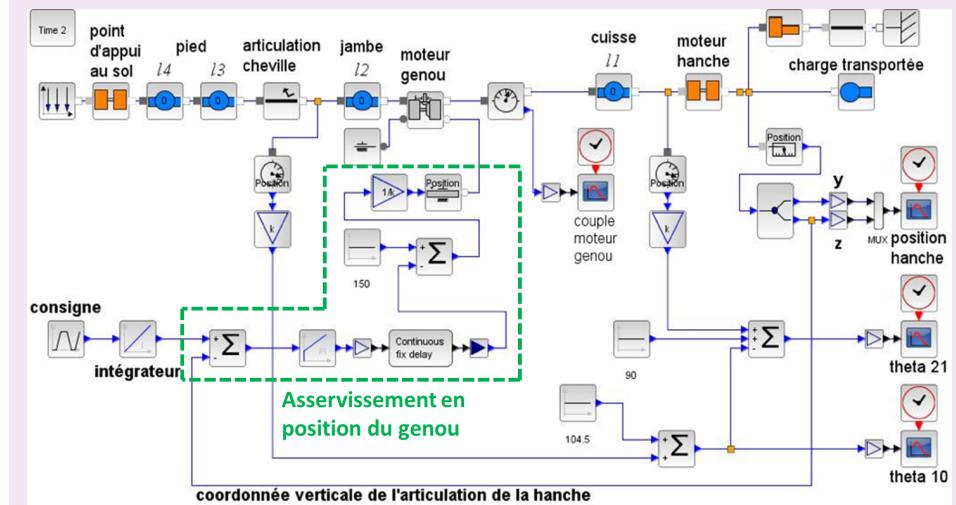
Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.



Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Correction

En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}$. En conséquences : $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp+K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$.

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Correction

D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}}$.

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Correction

On a :

$$\blacktriangleright \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} = 0$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1);

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et} \\ &\text{de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\frac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{p}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).}$$

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Correction

En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p);$
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p);$
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}.$

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)}$$

$$= \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)}\right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}.$$

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Correction

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3 = 1$.

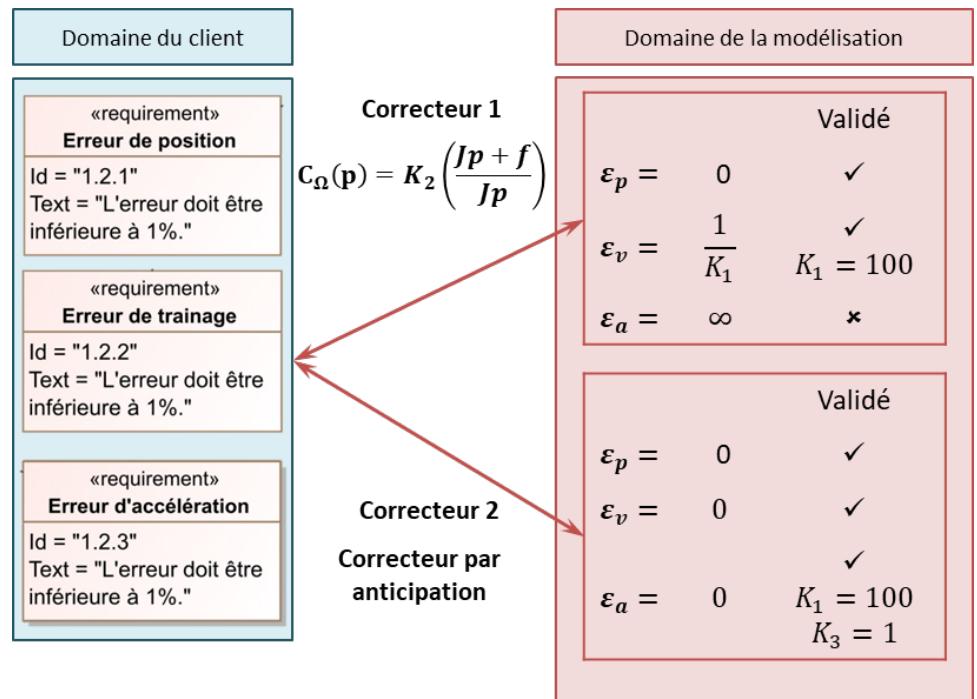
Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

On a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p}$. En prenant $K_3 = 1$ et $K_1 = 100$, on obtient : $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1 + Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$. L'erreur est donc de 33×10^{-5} . Le cahier des charges est donc validé.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





TD 3

Bateau support de ROV – Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.

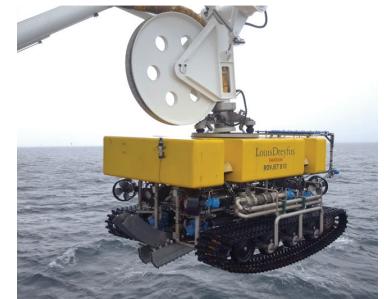
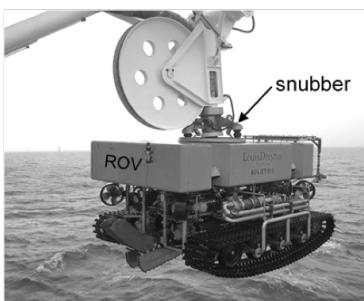


FIGURE 4.10 – ROV suspendu à la grue portique

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

TABLE 4.1 – Extrait du cahier des charges

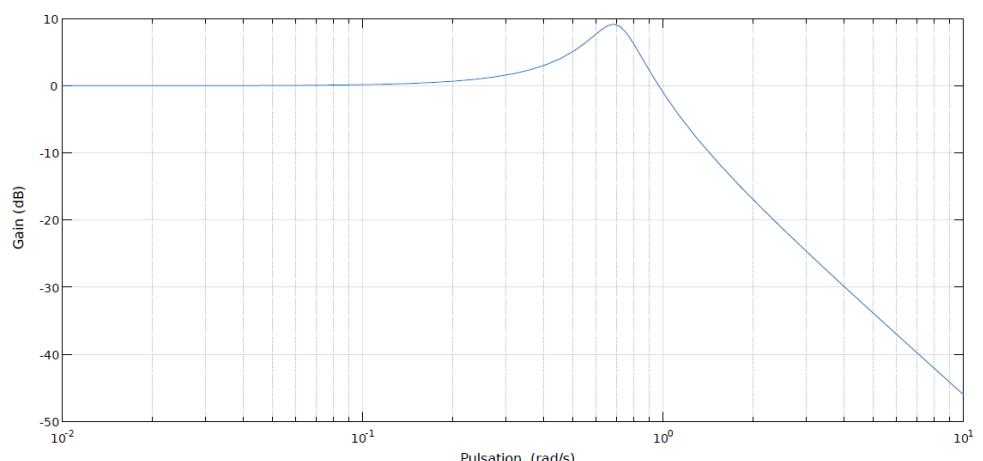
| Exigence | Critère | Niveau |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Id 1.1 : Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre $0,5 \text{ rad s}^{-1}$ à $1,7 \text{ rad s}^{-1}$ | Amplitude verticale du ROV maximale | < 1 m pour 5 m d'amplitude de houle |
| Id 1.2 : Mise en tension du câble | Temps de réponse, $t_{r5\%}$ | < 3 s |

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$ suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble S est $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ avec $Y_S(p)$ la transformée de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et $Y_{\text{vague}}(p)$ la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de $B(p)$ dans la figure suivante.



Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (Figure 4.11).

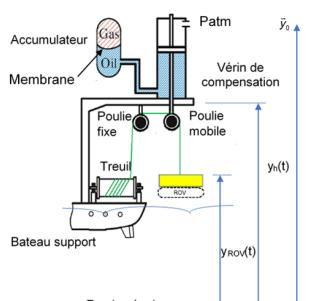


FIGURE 4.11 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression $\Delta p_E(t)$ et $\Delta p_G(t)$ autour du point d'équilibre peuvent être définies par $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$ et $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$. Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left(\frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{\text{ROV}}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ se traduit par $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{\text{ROV}}(t) + c(\dot{y}_{\text{ROV}}(t) - \dot{y}_h(t))$ (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliquée les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$ (4). Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation $\tau\omega_0 = 2\zeta$.

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle ω_c et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.

La Figure 4.12 donne les diagrammes du gain de la fonction $G(p)$ de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz V_{G0} correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

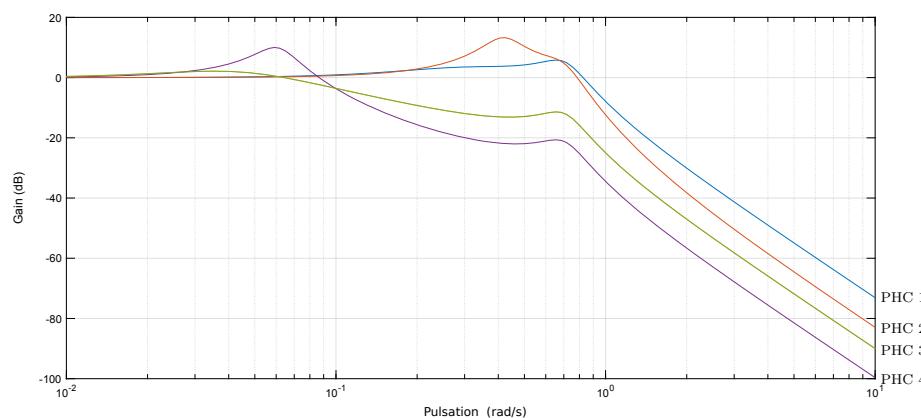


FIGURE 4.12 – Courbes de gain $G(p)$ pour différents réglages du PHC

| Réglage | PHC 1 | PHC 2 | PHC 3 | PHC 4 |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|
| V_{G0} (m^3) | 96 | 1 | 52 | 2 |

TABLE 4.2 – Volumes V_{G0} pour différents réglages du PHC

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à -14 dB.

Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Éléments de correction

1. $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$ et

$$G_{dB(\omega)} < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$$

2. ...

$$3. K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

$$4. \tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}, \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}; \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

5. .

6. .

7. PHC4.



TD 3

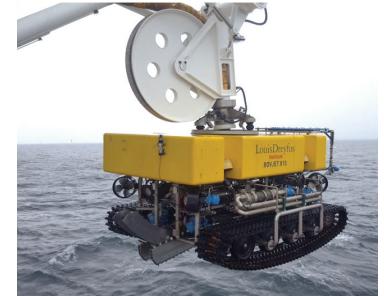
Bateau support de ROV – Corrigé

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

Introduction

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.



Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Correction

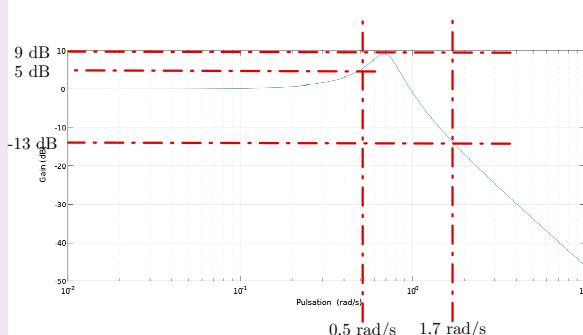
La définition du gain en décibel de la fonction de transfert $B(j\omega)$ est $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$. L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$G_{dB}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1,7] \text{ rad/s.}$$

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Correction

On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$ (4). Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Correction

On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (4.2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left(p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR} \left(\frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) = C_{qR} \left(1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Par identification :

$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}}$ et $\tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}$.

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions

initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes}$$

définies précédemment.

Correction

La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta)p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1)p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} ; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

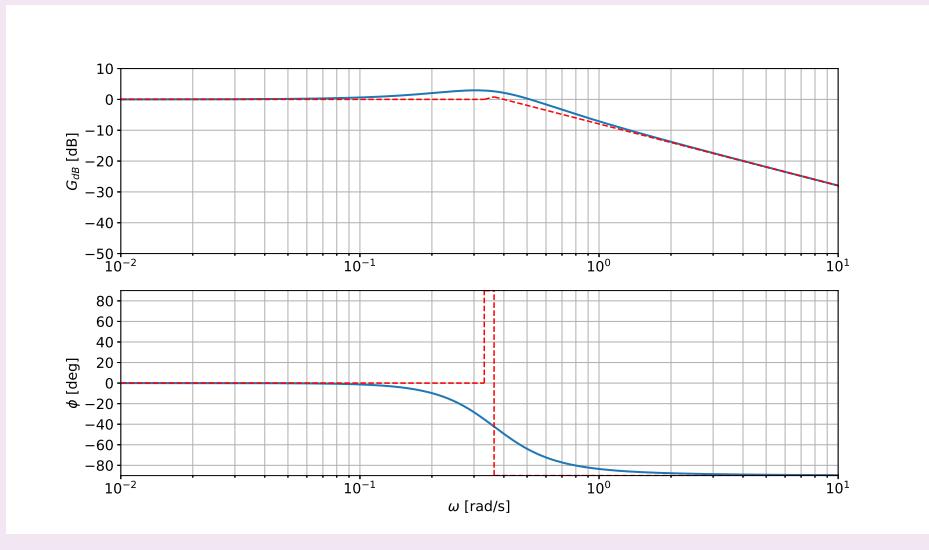
Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques.

Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Correction

Diagrammes de Bode de $H(p)$. On identifie 2 pulsations caractéristiques : $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$ rad/s et $\omega_n = 0,364$ rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ car $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$. La résonance sera toutefois faible.

| ω | BF $\omega \ll \omega_1$ | MF $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$ | HF $\omega_n \ll \omega$ |
|-----------------|--------------------------|---------------------------------------|--|
| $H(j\omega)$ | 1 | $\tau j\omega$ | $\frac{\tau\omega_n^2}{j\omega}$ |
| G_{dB} | 0 | $20 \log \tau + 20 \log \omega$ | $20 \log(\tau\omega_n^2) - 20 \log \omega$ |
| ϕ | 0 | 90° | -90° |

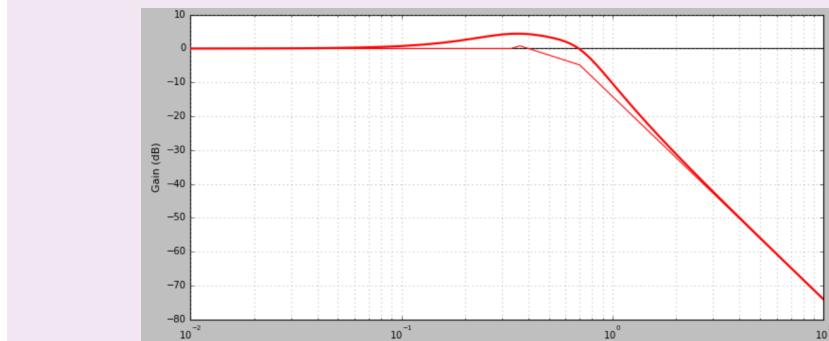


La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Correction

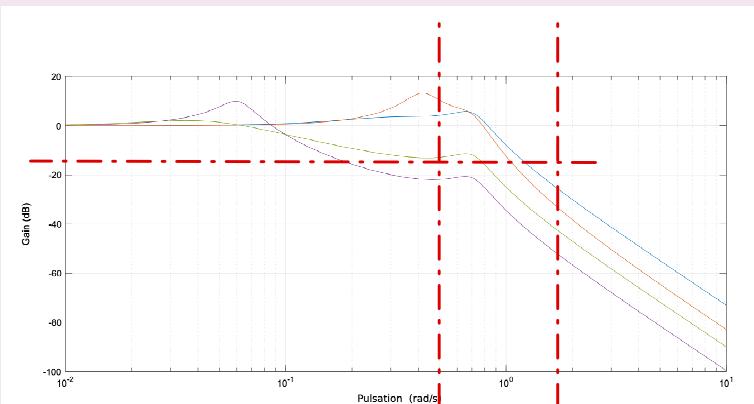
On a la relation $G(p) = B(p)H(p)$.



Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Correction

Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.



TD 4

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Sujet

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

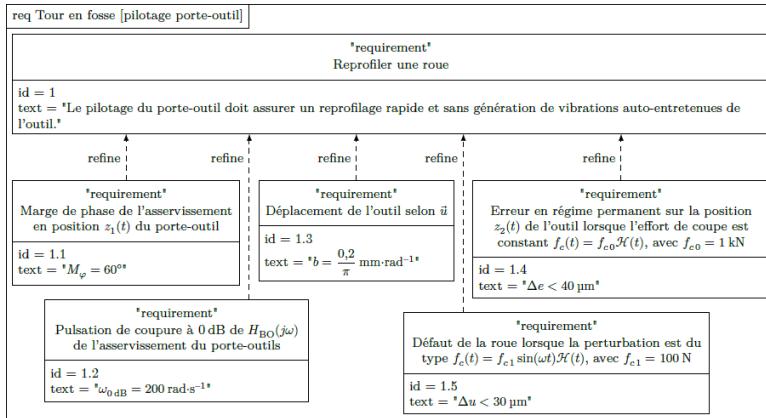
Modélisation du mouvement pour la commande

Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position $z_1(t)$ comprenant un correcteur proportionnel.

Le système composé de l'outil et du porte-outil est modélisé sur la Figure 4.14. Le porte-outil, de masse $m_1 = 5522 \text{ kg}$, est considéré indéformable et en liaison glissière de direction \vec{z}_0 avec le bâti. Une chaîne de motorisation électrique permet de déplacer le porte-outil et une structure de commande associée permet d'asservir la position $z_1(t)$ par rapport à une position de référence. La chaîne de motorisation exerce une force motrice $\vec{f}_m(t) = f_m(t)\vec{z}_0$ sur le porte-outil.

La cahier des charges est donné sur la figure suivante.



Les positions du porte-outil et du point C par rapport à leur position de référence sont respectivement paramétrées par $z_1(t)\vec{z}_0$ et $z_2(t)\vec{z}_0$, avec $z_1(t)\vec{z}_0$ et $z_2(t)\vec{z}_0$ des grandeurs algébriques (Figure 4.14). Les conditions initiales sont toujours supposées nulles.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée au porte-outil puis à l'outil permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$m_1 \ddot{z}_1(t) + \lambda \dot{z}_1(t) + K z_1(t) = \lambda \dot{z}_2(t) + K z_2(t) + f_m(t)$$

$$m_2 \ddot{z}_2(t) + \lambda \dot{z}_2(t) + K z_2(t) = \lambda \dot{z}_1(t) + K z_1(t) + f_c(t)$$

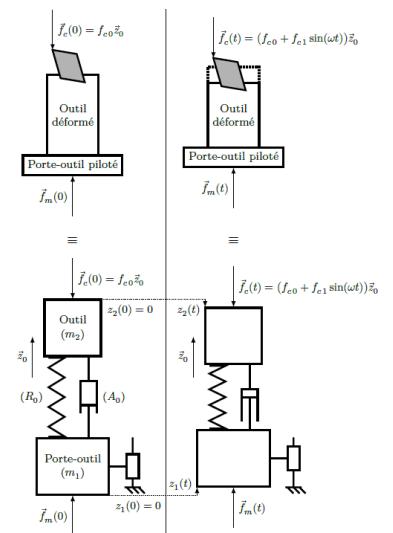


FIGURE 4.14 – Modèle de déformation de l'outil avec le porte-outil

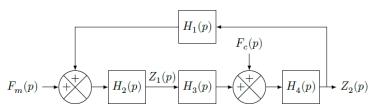


FIGURE 4.15 – Modèle de l'outil et du porte-outil

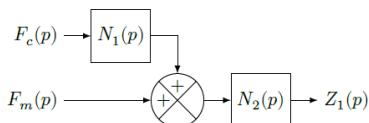


FIGURE 4.16 – Modèle équivalent

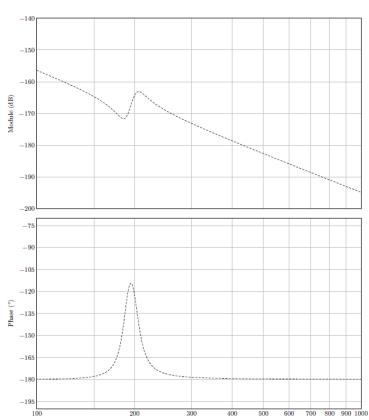


FIGURE 4.17 – Modèle de synthèse de la régulation en position $z_1(t)$ du porte-outil

D'un point de vue numérique, $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$ et $\tau = 1 \text{ s}$.

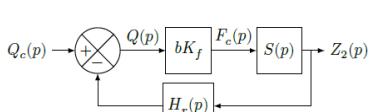


FIGURE 4.18 – Modèle équivalent de la chaîne d'asservissement complète

Le modèle correspondant est représenté par le schéma bloc de la [Figure 2.18](#).

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Le modèle de la [Figure 2.18](#) est réduit au modèle équivalent de la figure [Figure 2.21](#).

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2 (p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$. Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_2(p)$ est représenté ci-contre.

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2\text{app}}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Le modèle approché ($N_{2\text{app}}(p)$) est retenu pour la suite de l'étude. Le schéma bloc modélisant la régulation de la position $z_1(t)$ est donné en figure [Figure 4.17](#), en considérant un correcteur proportionnel de gain K_p .

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la [Figure 2.4](#).

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

La [Figure 4.19](#) représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système modélisé [Figure 4.18](#), avec $b = \frac{5 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ mm rad}^{-1}$

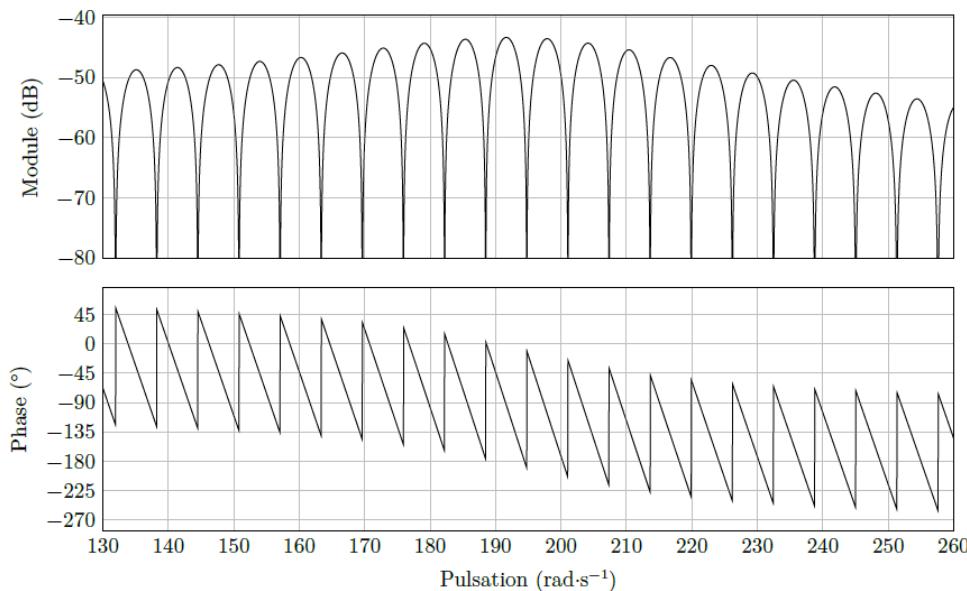


FIGURE 4.19 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte du schéma-blocs

Les « zéros de transmission » d'une fonction de transfert $H(p)$ correspondent aux pulsations ω pour lesquelles $H(j\omega)$ est nul.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la [Figure 4.19](#) en analysant les « zéros de transmission ».

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

TD 4

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Corrigé

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

Modélisation du mouvement pour la commande

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Correction

D'après le schéma-blocs $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$. D'après la première équation différentielle, on a : $m_1p^2Z_1(p) + \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) = \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1p^2 + \lambda p + K}$. On

a donc par identification $H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$ et $H_1(p) = \lambda p + K$.

D'après le schéma-blocs $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$. D'après la seconde équation différentielle, $m_2p^2Z_2(p) + \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) = \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p)}{m_2p^2 + \lambda p + K}$. On

a donc par identification $H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$ et $H_3(p) = \lambda p + K$.

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$$

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Correction

En utilisant le premier modèle, on avait :
$$\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$$
.

Ainsi, $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))))$
 $= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p)$
 $\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p)).$

En utilisant le schéma-blocs, $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$. Par identification, on obtient $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$ et $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$.

Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .



Correction

$$\begin{aligned}
N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\
&= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))} \\
&= \frac{m_2 \left(p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left(p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}. \\
\text{Par identification, on a : } A &= \frac{1}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, 2\xi_1\omega_1 = \frac{\lambda}{m_2} \text{ et } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} =, \\
\omega_2^2 &= K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, 2\xi_2\omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \\
\text{On a donc } \xi_1 &= \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.
\end{aligned}$$

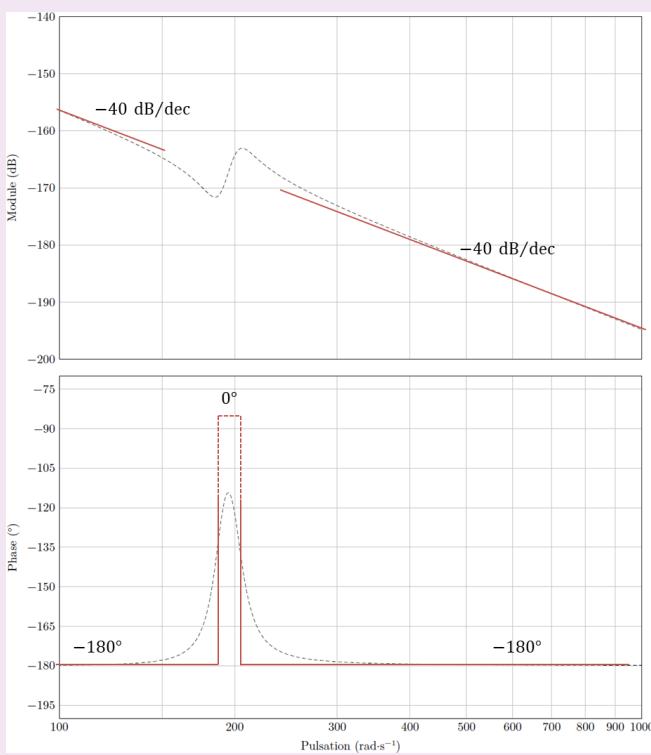
Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_2(p)$ est représenté ci-contre.

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Correction

D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement $\omega_1 < \omega_2$. On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert $N_2(p)$.

| | ω_1 | | |
|---|--------------|------------|--------------|
| | ω_1 | ω_1 | ω_1 |
| $\frac{A}{p^2}$ | -40 dB/dec | -40 dB/dec | -40 dB/dec |
| $p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2$ | 0 dB/dec | 40 dB/dec | 40 dB/dec |
| $\frac{1}{p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2}$ | 0 dB/dec | 0 dB/dec | -40 dB/dec |
| $20 \log N_2(p) $ | -40 dB/dec | 0 dB/dec | -40 dB/dec |
| $\text{Arg}(N_2(p))$ | -180° | 0° | -180° |



Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2\text{app}}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Correction

Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s⁻¹, on peut modéliser $N_2(p)$ par un double intégrateur. Le gain dB est donc $20 \log A - 20 \log \omega^2$.

Pour $\omega = 500$ rad s⁻¹ on a $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$ et $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$.

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la Figure 2.4.

Correction

Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1 :** $M\varphi = 60^\circ$: impossible à respecter la phase sera toujours de -180° .
- **req 1.2 :** $\omega_{0\text{dB}} = 200$ rad s⁻¹ : critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4 :** erreur en régime permanent : $\Delta c < 40 \mu\text{m}$ pour un échelon d'amplitude $f_{c0} = 1 \text{kN}$: critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5 :** défaut de la roue $\Delta u < 30 \mu\text{m}$ lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'un point de vue numérique, $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$ et $\tau = 1 \text{ s}$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Correction

D'après le schéma-blocs, $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$. D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$. En conséquence, $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$.

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la Figure 4.19 en analysant les « zéros de transmission ».

Correction

$$\text{FTBO}(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p).$$

On a $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$.

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

- ▶ pour $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty$;
- ▶ pour $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2$.

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$.

Pour la phase, $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j \sin(-\tau\omega))$. Or $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$. On a donc $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$.

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal $\frac{2\pi}{\tau}$ périodique.

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

Correction

Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire b' tel que $20 \log b' = 45$ soit $b' = 10^{45/20} = 177$. Au bilan, on aurait donc $b_{lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$.

Il faudrait déterminer si une augmentation de b réduit l'amortissement de l'asservissement.



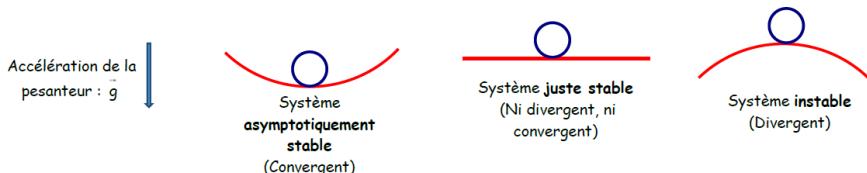
2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

2.1 Stabilité des systèmes asservis

2.1.1 Notion de stabilité

Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



Premières définitions

Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- ▶ abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- ▶ son régime transitoire finit par disparaître;
- ▶ sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- ▶ sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

Remarque

La stabilité d'un système est indépendante de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

| | |
|---|----|
| 2.1 Stabilité des systèmes asservis | 71 |
| 2.2 Rapidité des systèmes asservis | 76 |
| 2.3 Précision des systèmes asservis | 78 |

C1-01

C2-03

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.
Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionale.

Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionale tend vers zéro au cours du temps.

Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles p_i de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle

- les pôles réels (de type $p = -a$) induisent des modes du type e^{-at} ;
- les pôles complexes conjugués (de type $p = -a \pm j\omega$) induisent des modes du type $e^{-at} \sin \omega t$.

On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

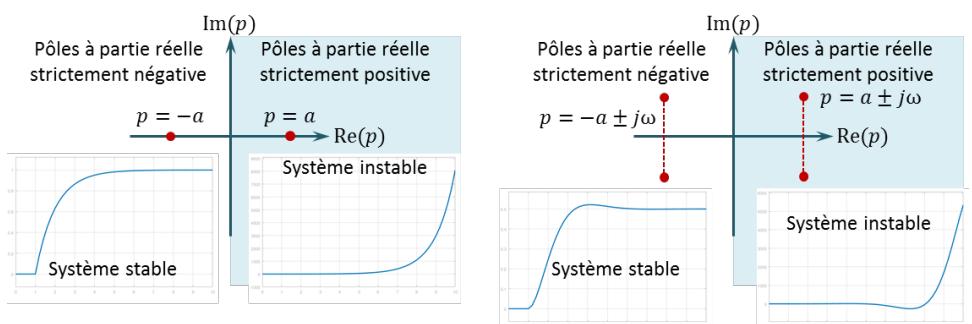


FIGURE 2.1 – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.

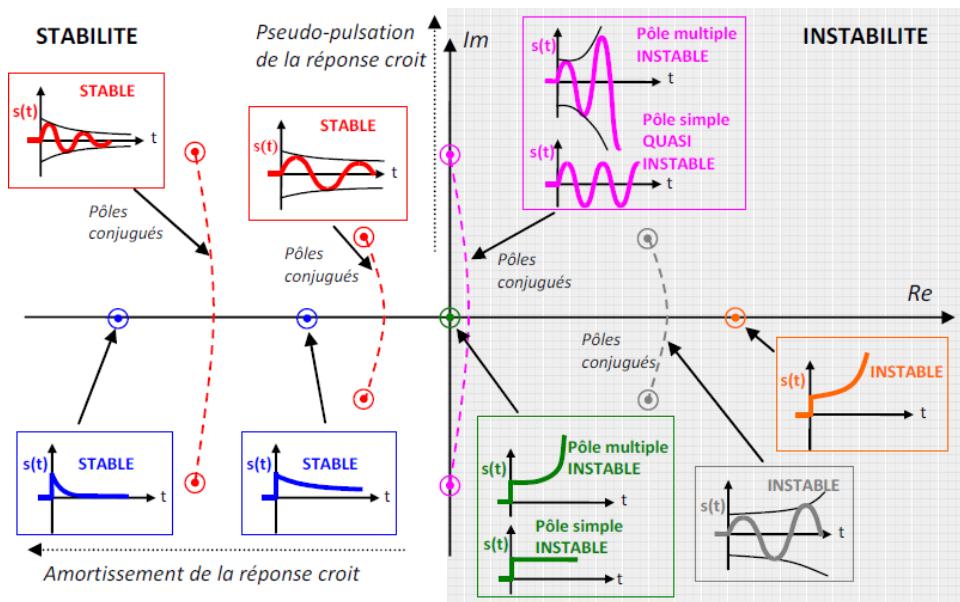


FIGURE 2.2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [mathurin_stabilite].

Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

Remarque

On peut montrer que :

- ▶ **pour les systèmes d'ordre 1 et 2** : le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- ▶ **pour les systèmes d'ordre 3** : de la forme $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2a_1 > a_3a_0$.

Pôles dominants [1]

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

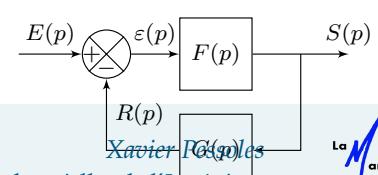
Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

2.1.2 Marges de stabilité

Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$.



La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}.$

Définition – Équation caractéristique

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p) = 0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1 + H_{BO}(p) = 0$.

Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1 + H_{BO}(p) = 0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p) = -1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1; 0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de -180° .

Résultat –

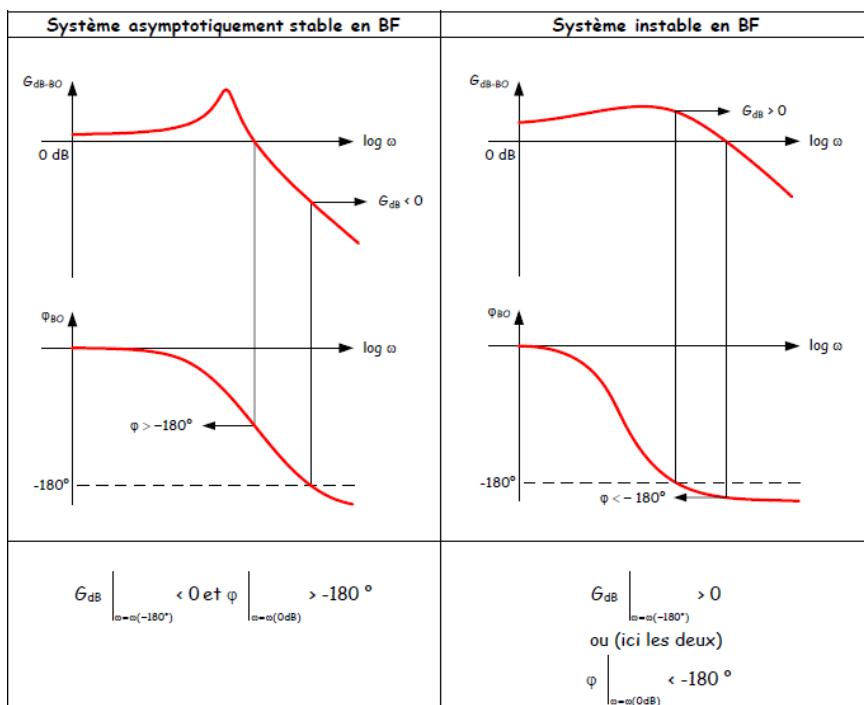
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

$$G_{dB}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0dB}} > -180^\circ.$$

En notant ω_{-180° la pulsation pour laquelle la phase vaut -180° et ω_{0dB} la pulsation pour laquelle le gain est nul.

Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

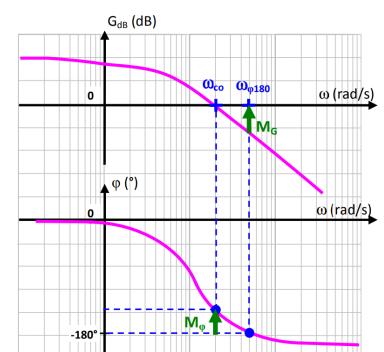
- ▶ la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- ▶ la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$.

Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$ où $\omega_{\varphi180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180^\circ$.



La marge de gain permet de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

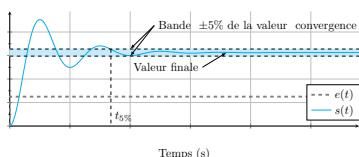
La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

- ▶ la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- ▶ le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- ▶ le système n'est pas invariant au cours du temps;
- ▶ on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- ▶ certaines non linéarités sont ignorées.

2.2 Rapidité des systèmes asservis

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.



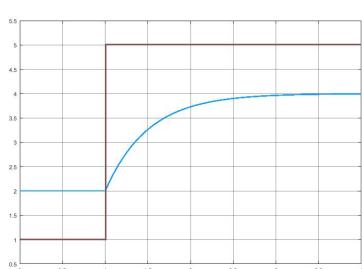
Méthode – Détermination du temps de réponse

En pratique, on détermine le temps de réponse à 5%.

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

Résultat –

Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.



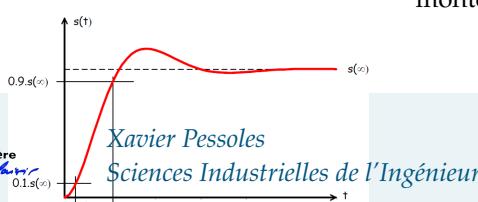
Exemple – Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

Les pièges du temps de réponse à 5% :

- ▶ le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini**;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractérise la « vivacité » d'un système.



Xavier Pessoles
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

2.2.2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par 3τ .

Résultat –

Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par $\text{FTBF}(p) = \frac{K}{1 + \tau p + K}$. La constante de temps est alors $\tau_{\text{BF}} = \frac{\tau}{1 + K}$.

Résultat –

Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

Systèmes d'ordre 2

Résultat –

Pour un système du second, à ξ constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient $K_{\text{BF}} = \frac{K}{1 + K}$, $\omega_{\text{BF}} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$, $\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$.

Résultat –

- ▶ L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de ξ_{BF} le système peut devenir plus ou moins rapide.

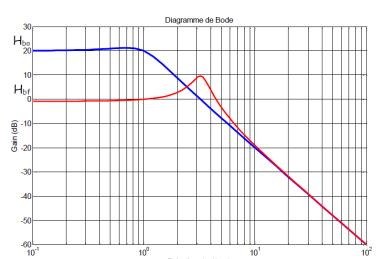
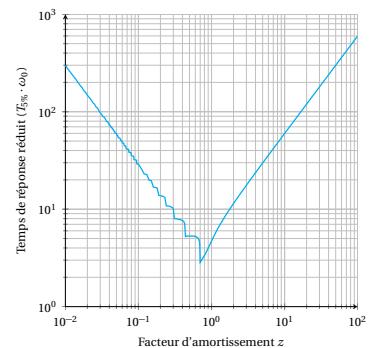
2.2.3 Résultats dans le diagramme de Bode

Résultat –

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.

Résultat –

Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.



2.3 Précision des systèmes asservis

2.3.1 Système non perturbé

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

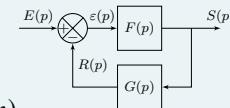
Définition –

La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.

Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :

$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \iff \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$



Définition –

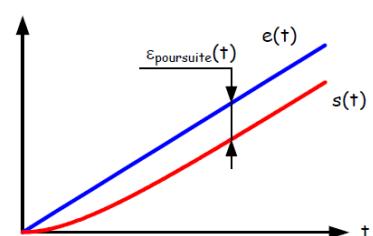
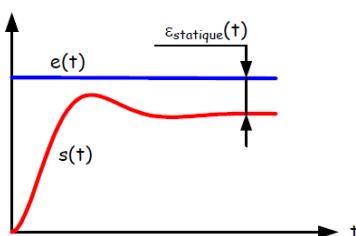
Un système est précis pour une entrée lorsque $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$.

Définition –

~

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

- ▶ écart statique, système sollicité par une entrée échelon : $e(t) = E_0$ et $E(p) = \frac{E_0}{p}$;
- ▶ écart en vitesse ou en poursuite, système sollicité par une rampe : $e(t) = Vt$ et $E(p) = \frac{V}{p^2}$;
- ▶ écart en accélération : système sollicité par une parabole, $e(t) = At^2$ et $E(p) = \frac{A}{p^3}$.



Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p) \iff \varepsilon(p)(1 + F(p)G(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)G(p)}$.

Résultat –

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

Poursuivons ...

On a $\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}$ avec $m < n$.

FTBO de classe nulle

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.

FTBO de classe 1

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{V}{K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = +\infty$.

FTBO de classe 2

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{A}{K_{BO}}$.

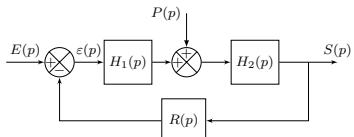
Résultat –

| Classe | Consigne échelon $e(t) = E_0$ $E(p) = \frac{E_0}{p}$ | Consigne en rampe $e(t) = Vt$ $E(p) = \frac{V}{p^2}$ | Consigne parabolique $e(t) = At^2$ $E(p) = \frac{A}{p^3}$ |
|--------|--|--|---|
| 0 | $\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$ | $\varepsilon_V = +\infty$ | $\varepsilon_A = +\infty$ |
| 1 | $\varepsilon_S = 0$ | $\varepsilon_V = \frac{V}{K_{BO}}$ | $\varepsilon_A = +\infty$ |
| 2 | $\varepsilon_S = 0$ | $\varepsilon_V = 0$ | $\varepsilon_A = \frac{A}{K_{BO}}$ |

Remarque

L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

2.3.2 Système perturbé

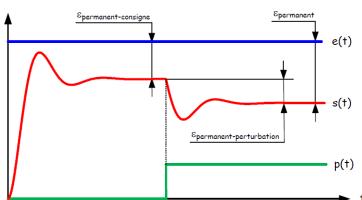


Soit le schéma-blocs ci-contre.

L'écart est caractérisé par le soustracteur principal, c'est-à-dire celui situé le plus à gauche du schéma-blocs.

Par lecture directe, on a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)(H_2(p)(P(p) + \varepsilon(p)H_1(p)))$
 $\iff \varepsilon(p) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \iff \varepsilon(p)(1 + R(p)H_1(p)H_2(p)) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)} - \frac{R(p)H_2(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p).$

On a donc : $\varepsilon(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + FTBO(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\frac{R(p)H_2(p)}{1 + FTBO(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$



Résultat -

Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain K_1 important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.

Application 1

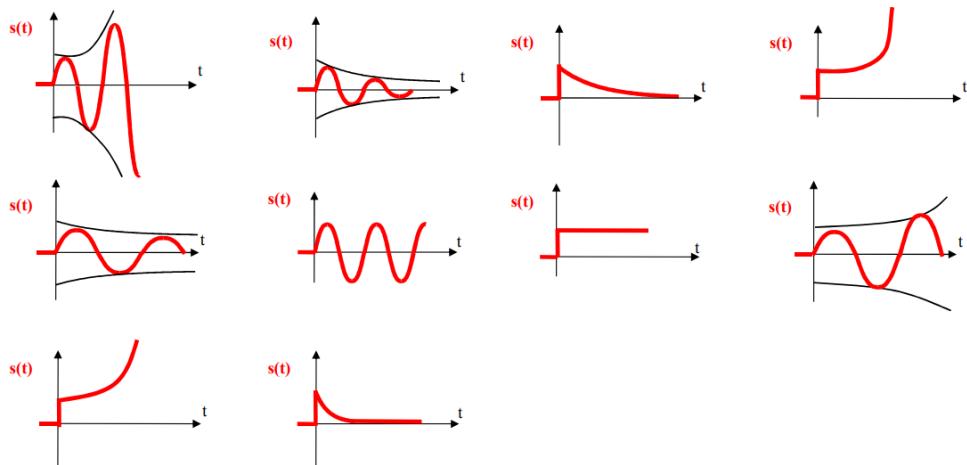
Stabilité des systèmes – Sujet

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03



Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

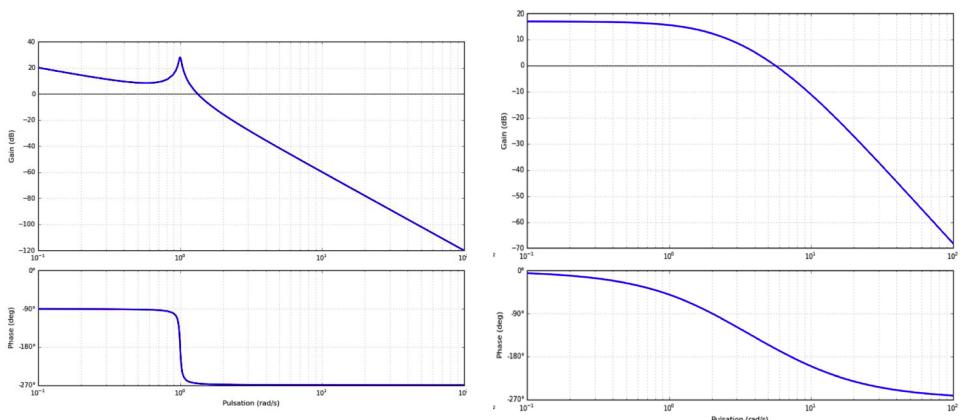
- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$ | 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 2. $-3, -2, 0;$ | 5. $-j, j, -1, 1;$ | 8. $2, -1, -3;$ |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 6. $-1, +1;$ | 9. $-6, -4, 7.$ |

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

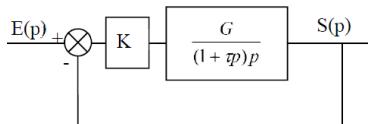


Exercice 4 – Étude de la stabilité

Objectif

- ▶ Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- ▶ La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45 °.

On donne le schéma ci-contre.



On a $K = 1$, $\tau = 0,1$ et $G = 20$.

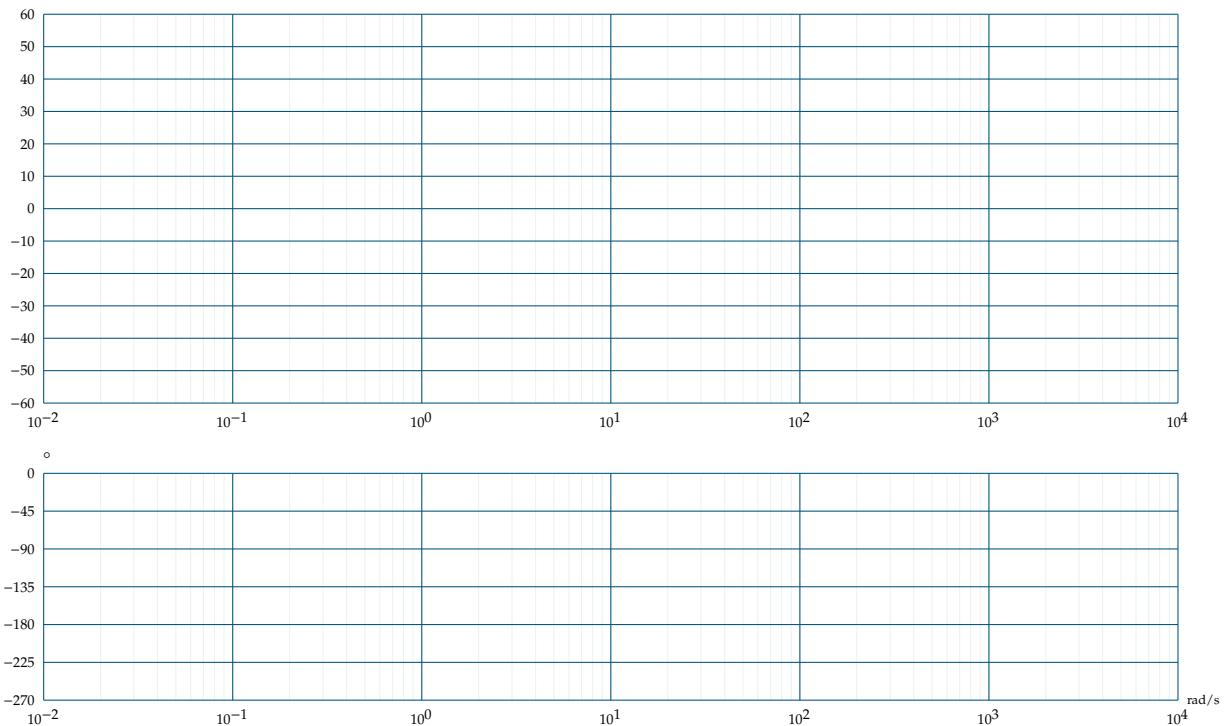
Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.



Application 1

Stabilité des systèmes – Corrigé

Exercice 1 – Réponse impulsionale (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

Exercice 4 – Étude de la stabilité

Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

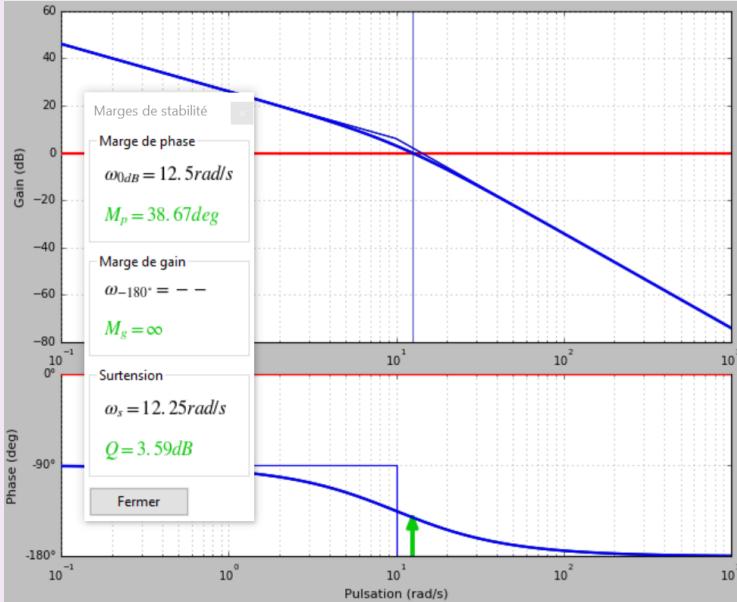
Correction

$$\text{Ici on a } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$$

$$\text{Erreur statique (entrée échelon)} : \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe)} : \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = \frac{1}{20}$$

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Correction

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Correction

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Correction

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c) - (-180)$.

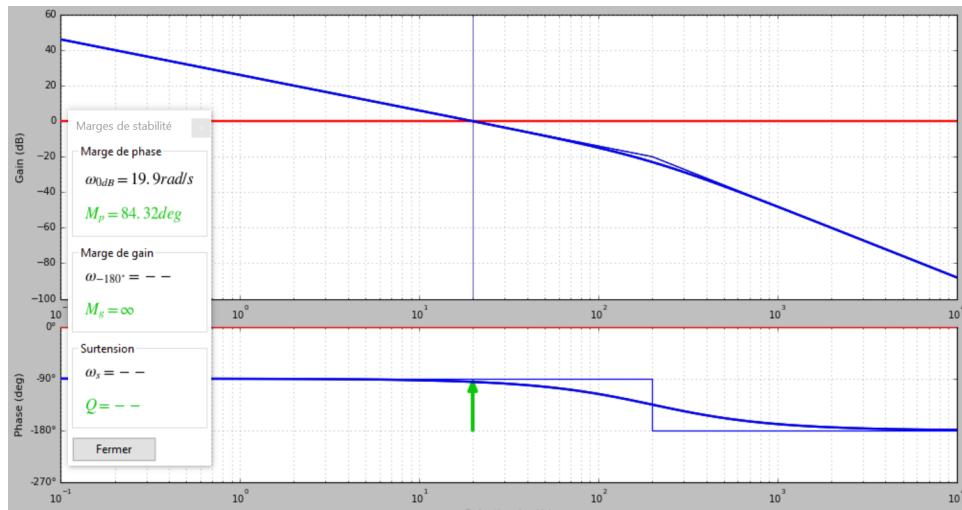
Cherchons ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$. On a $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$.
 $20 \log |FTBO(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20 \log 20 - 20 \log \omega \sqrt{1 + 0,01\omega^2}$.
 $G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1 + 0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1 + 0,01\omega_c^2)$ On pose $x = \omega_c^2$ et on a :
 $400 = x (1 + 0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$. On a donc $\Delta = 412,3^2$ et $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$
on conserve la racine positive et $x_1 = 156,15$ et $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$.
 $\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1 + 0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$.
La marge de phase est donc de $38,66^\circ$.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.

Correction

Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau = 0,005$



Application 2

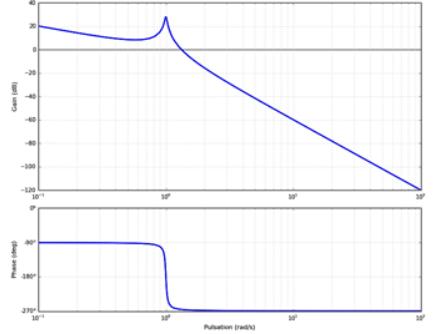
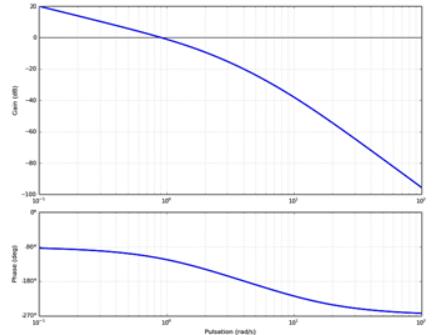
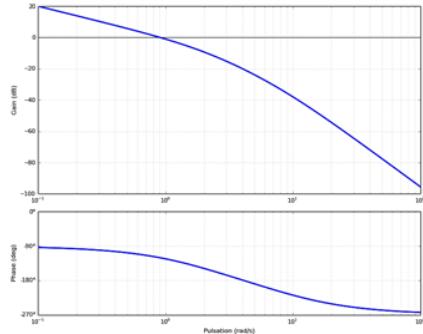
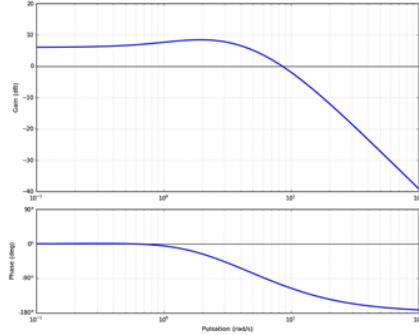
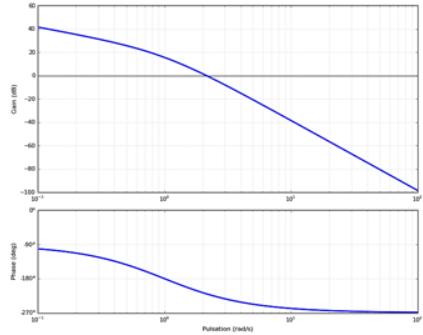
Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

C2-03

P. Dupas?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.



Application 2

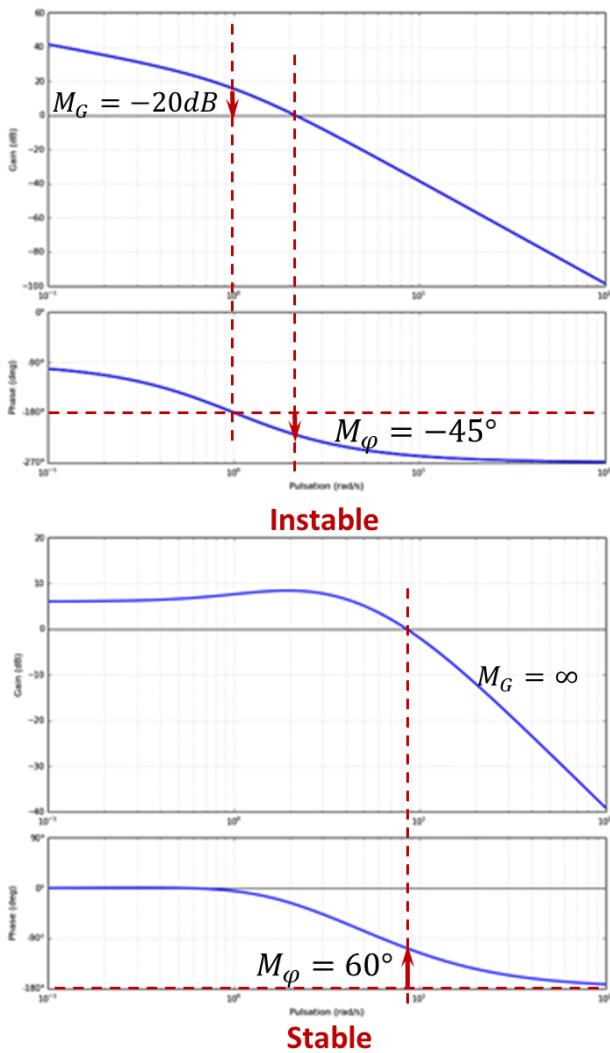
Stabilité des systèmes – Corrigé

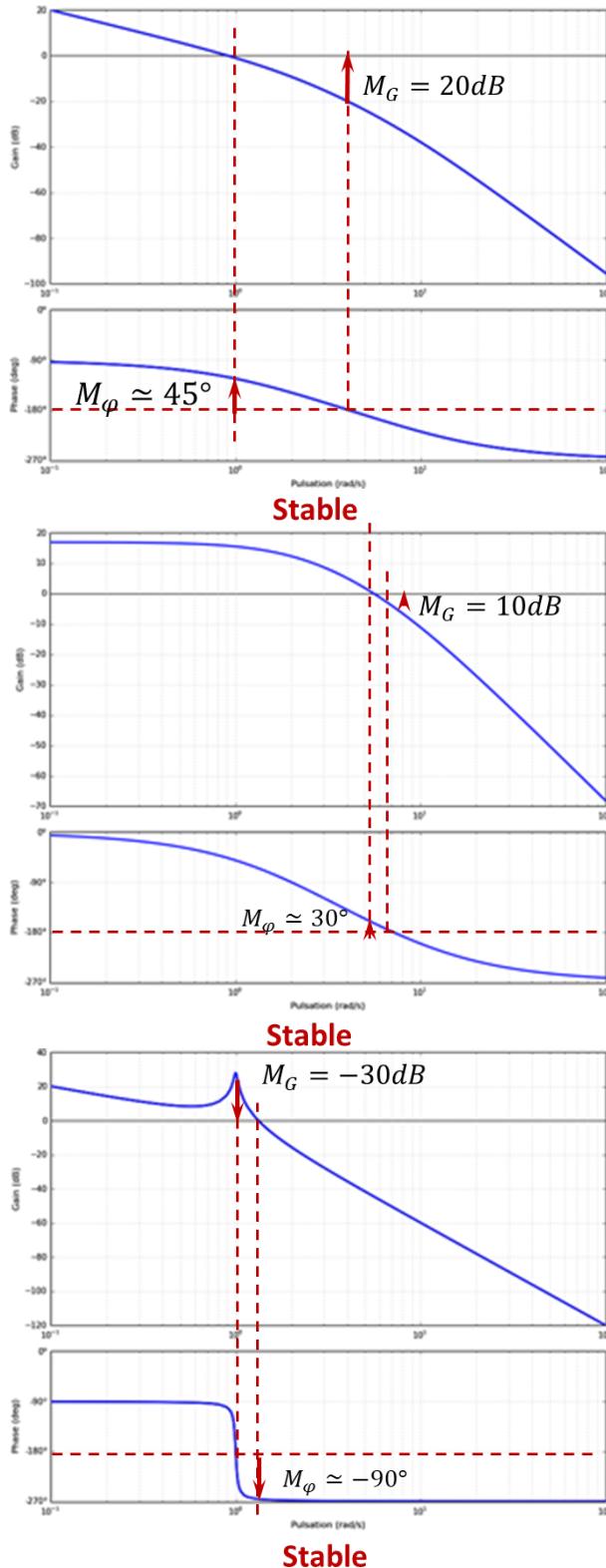
C1-01

C2-03

P. Dupas?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

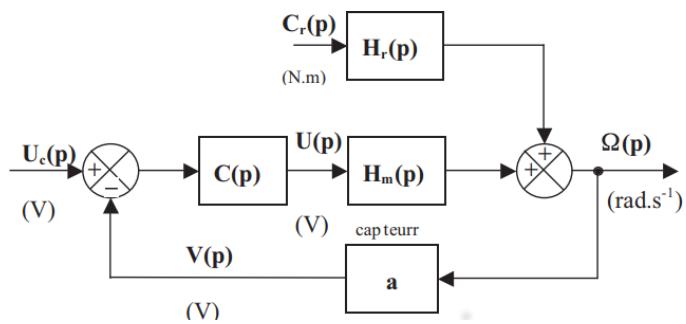




Application 3

Précision des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$.

Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

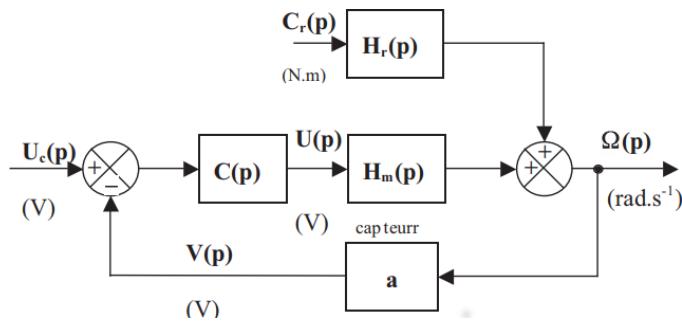
On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

Application 3

Précision des systèmes – Corrigé

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$.

Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

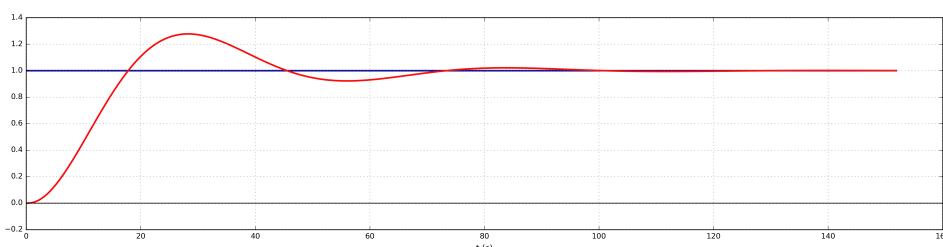
Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



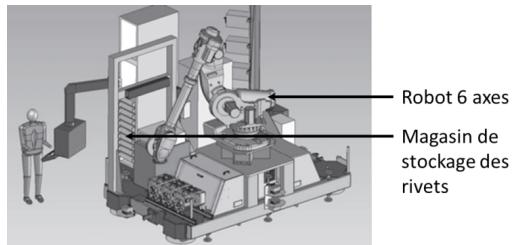
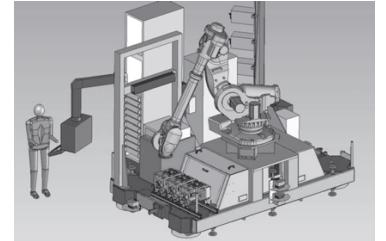
Application 4

Cellule d'assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

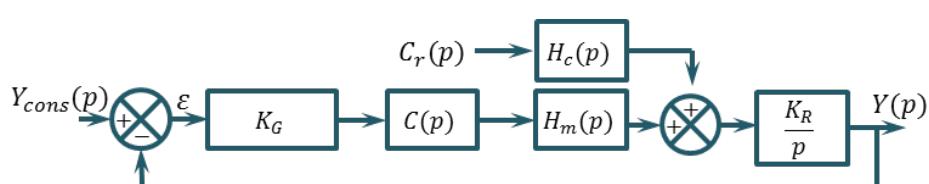


Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant C_r dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



$$H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} \quad \text{et}$$

$$\frac{(R + Lp) K_M}{K_C} \\ H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}.$$

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

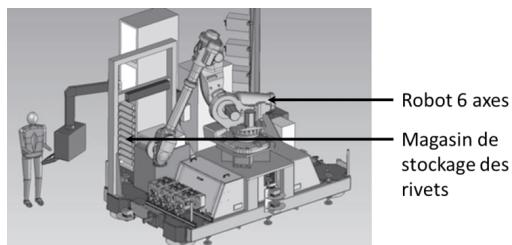
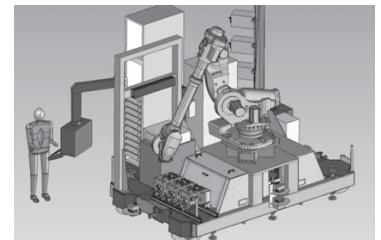
Application 4

Cellule d'assemblage pour avion Falcon Corrigé

E3A – PSI 2015.

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :

Si $C_r(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \\ &\quad . \end{aligned}$$

Correction

Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C (1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \end{aligned}$$

On a donc : $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

===== TD =====



TD 1

Drone quadri-rotor – Sujet

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction \vec{z}) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe (O, \vec{x})) et en tangage (rotation autour de l'axe (O, \vec{y})) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ($\frac{\omega_2}{\omega_4}$ pour le roulis et $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

u représente la tension de commande du moteur, $\omega(t)$ son taux de rotation, τ et k_v des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme $k_q\omega^2$ provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en ω^2 , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement ω_0 , fréquence

| | |
|------------------------|---|
| Accélération verticale | Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (valeur absolue) |
| Précision | Erreur statique nulle |
| Stabilité | Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 % |
| Rapidité | $t_{r5\%} < 0,6$ s |



de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$ où $\delta\omega$ et δu représentent des petites variations de ω et u autour du point de fonctionnement.

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 . On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction \vec{Z} , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. La masse totale du drone est $m = 240$ g. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 . La poussée F varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant F à la fréquence de rotation ω en rad/s.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

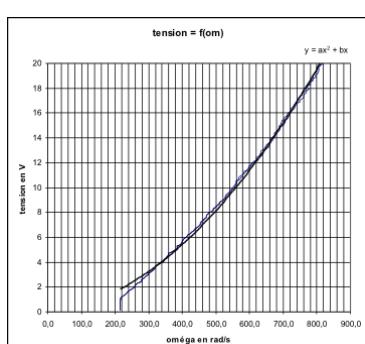
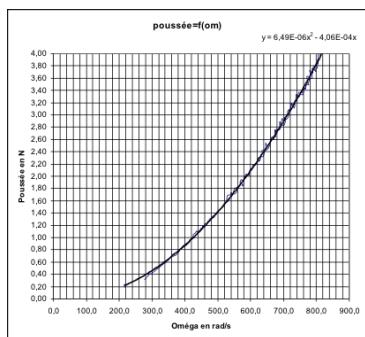
Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande u et la fréquence de rotation ω en rad/s en régime permanent lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme $y = ax^2 + bx$. On donne la constante de temps du moteur : $\tau = 125$ ms.

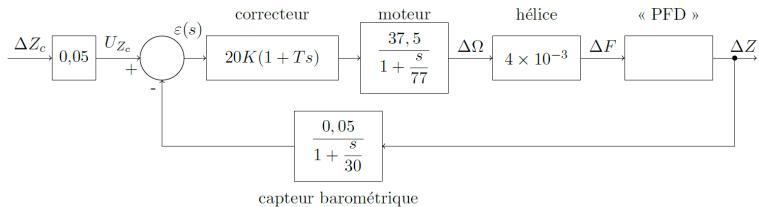
Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement ω_0 , par le schéma-bloc suivant :





Le gain du capteur barométrique est de $0,05 \text{ V m}^{-1}$. On pose $z(t) = z_0 + \delta z(t)$, $\Delta Z(p)$ la transformée de Laplace de $\delta z(t)$, $F = F_0 + \delta F$ représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire : $m\ddot{z} = 4F - mg$.

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté $K_{BO} = 2,5K$. La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 2.3, en gras avec un correcteur proportionnel ($T = 0$) et en trait fin avec le correcteur retenu ($K = 1$ et $T = 0,2s$).

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2s$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0dB} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure 2.4 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain K précédemment déterminée.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

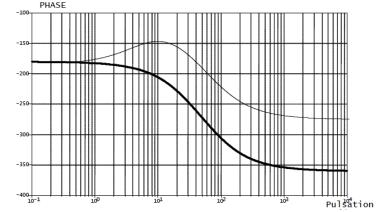


FIGURE 2.3 – Courbe de phase

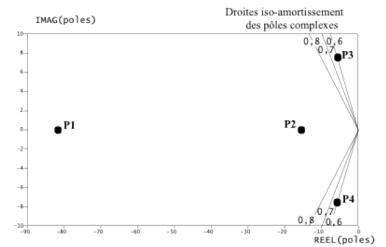
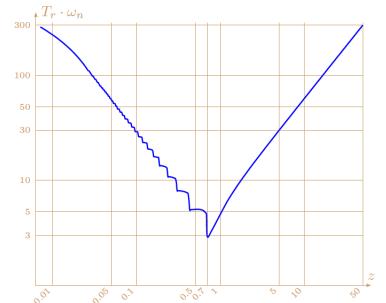


FIGURE 2.4 – Carte des pôles



Éléments de correction

1. $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0;$
2. $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}.$
3. $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$ et $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}.$
4. $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}.$
5. $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}.$
6. $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$ et $k_b = \frac{a}{b\tau}.$
7. $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}.$
- 8.
- 9.
10. $K = 17,9.$
11. FTBO de classe 2, ε_s nul.
12. $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j.$
13. $\xi = 0,6$
- 14.
15. $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}.$ $\omega_n \simeq 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16. $t_{5\%} \simeq 0,61 \text{ s}.$



TD 1

Drone quadri-rotor – Corrigé

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

C1-01

C2-03

Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Correction

En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence, $\delta u = 0$ et $\delta\omega = 0$.

On a donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$ En notant ω_0 et u_0 les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$.

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction

On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$$

$$\Rightarrow \frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(\omega_0 + \delta\omega) - k_q(\omega_0 + \delta\omega)^2 + \frac{k_v}{\tau}(u_0 + \delta u)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega_0 - \frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}u_0 + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{Or } \frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0 \text{ (question précédente)}; \text{ donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

Au final, $A = \frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}$.

On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$ et donc

$$\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}. \text{ En conséquence, } K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \frac{k_v}{1 + \tau k_q 2\omega_0}.$$

$$\tau_m = \frac{\tau}{1 + \tau k_q 2\omega_0}$$

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 .

Correction

On a $4F_0 = mg$. Le poids du drone est de $0,240 \times 9,81 = 2,3544$ N. Chaque moteur doit donc exercer $\frac{2,3544}{4} = 0,59$ N.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Correction

En lisant le graphe, on obtient $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

Correction

Lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$, on a $u = a\omega^2 + b\omega_0$. Par ailleurs en régime stationnaire, on a

$$\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0. \text{ Il en résulte que } u_0 = \frac{1}{k_v}\omega_0 + \frac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2.$$

On a donc $a = \frac{k_q\tau}{k_v}$ et $b = \frac{1}{k_v}$. On a donc b tel que $[V] = [B][s^{-1}]$ et $[B] = [V][s]$. On a donc k_v en $[V^{-1}s^{-1}]$.

Par ailleurs, $[V] = [k_q][s][Vs][s^{-2}]$ et k_q n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de

fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Correction

On a vu que $4_0 F = mg$.

Par ailleurs, $m\ddot{z} = 4F - mg$ et donc, $m \frac{d(z_0 + \delta z(t))}{dt} = 4(F_0 + \delta F(t)) - mg$ et $m \frac{d(\delta z(t))}{dt} = 4\delta F(t)$. Dans le domaine de Laplace, on a $mp^2 \Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$. En conséquences, $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}$.

La FTBO s'exprime alors par $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$.

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2\text{ s}$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Correction

On a $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$. Les pulsations de cassure sont alors : 5 rad s^{-1} , 30 rad s^{-1} et 77 rad s^{-1} . Les pentes sont alors :

- ▶ pour $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade ;
- ▶ pour $5\text{ rad s}^{-1} < \omega < 30\text{ rad s}^{-1}$: -20 dB/décade ;
- ▶ pour $30\text{ rad s}^{-1} < \omega < 77\text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade
- ▶ pour $\omega > 77\text{ rad s}^{-1}$: -60 dB/décade .

Pour une pulsation de $10 \times 10^{-2}\text{ rad s}^{-1}$, on a $FTBO(p) \approx \frac{2,5}{p^2}$. On a donc un gain $\approx 20\log\left(\frac{2,5}{0,01^2}\right) \approx 88\text{ dB}$. Reste à tracer...

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0\text{dB}} = 1,5\text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Correction

Si on considère que pour $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$, on a $H_{BO}(p) \approx \frac{2,5K}{p^2}$. Dans ces conditions, pour $K = 1$, on a $\left|\frac{2,5}{-\omega^2}\right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \approx 1,58\text{ rad s}^{-1}$.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Correction

En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation ω_{-145} pour laquelle la phase est de $-180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$, soit $\arg FTBO(j\omega) = -145^\circ$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur

Python ou autre. Il y a surement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite K tel que $|FTBO(j\omega_{-145})| = 1$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

Correction

La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Correction

Les pôles dominants sont $P_2 \approx -15$, $P_3 \approx -5 + 8i$, $P_4 \approx -5 - 8i$.

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Correction

Dans ce cas, on ne prend que P_3 et P_4 . $\xi = 0,6$.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié ?

Correction

Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Correction

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Correction

TD 2

Stabilisateur actif d'image – Sujet

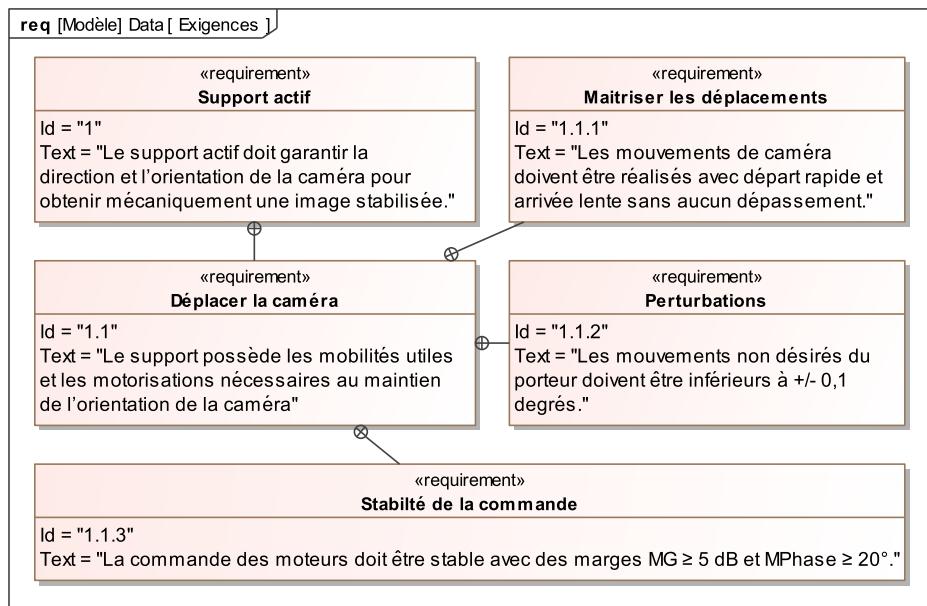
Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne

présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur K_m ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique A et de constante de temps τ_m .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur $com(t)$ et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Le réglage retenu est tel que $K_m A = 1$. **Le retour K_D agit par un sommateur.** Dans cette étude, $A_i(p) = 1$.

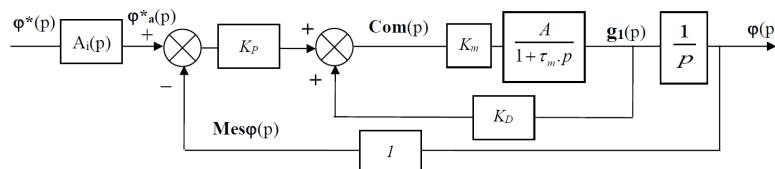


FIGURE 2.5 – Modèle 1 de l'axe de tangage.

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqués.

En accord avec les résultats précédents, on fixe $K_D = 0,5$ et $\tau_m = 0,2\text{ s}$. Dans un premier temps on impose $K_p = 10\text{ s}^{-1}$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ($A_1(p) = 1$). On considère ici que la consigne est constante donc $\varphi_a^*(t) = 0$. Une perturbation $Pe(p)$ agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle $Com(p)$ la transformée de Laplace de la commande du moteur $com(t)$.

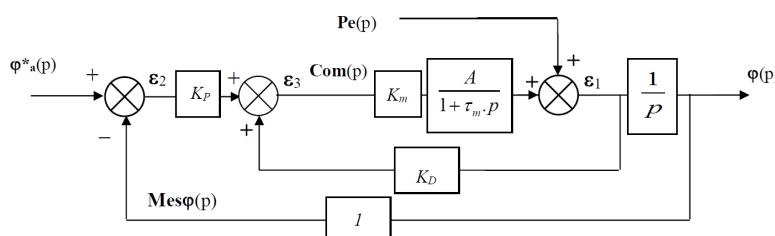
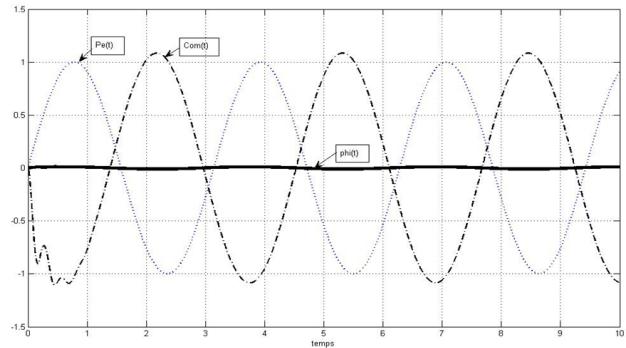
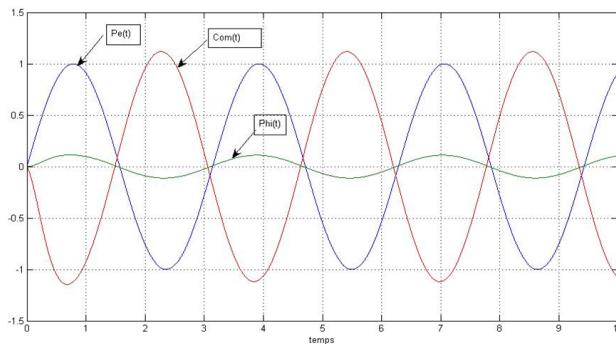


FIGURE 2.6 – Modèle 2 de l'axe de tangage.

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $Pe(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $com(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{Mesφ(p)}{ε_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $Pert(p) = \frac{φ(p)}{Pe(p)}$.



Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5$ dB et une marge de phase $M\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

| ω (rad/s) | 1 | 2,5 | 5 | 7 | 10 |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\text{Arg}(F(\omega))$ | -112° | -135° | -153° | -160° | -166° |
| $20 \log F(\omega) $ | 5,4 dB | 3 dB | -1 dB | -3 dB | -6,2 dB |

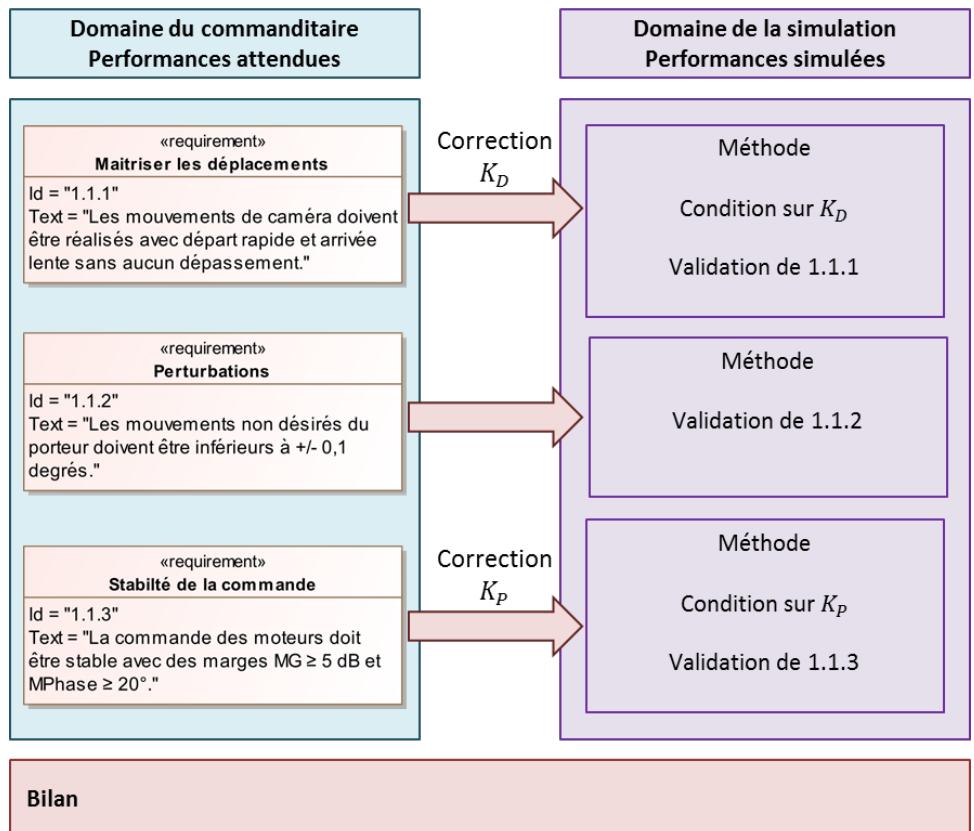
Le figure suivante (droite) présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $\text{Com}(t)$ relativement à $\text{Pe}(t)$ en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure précédente – droite).

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



Éléments de correction

1. $\frac{FTBO(p)}{K_P} = \frac{p(1 + \tau_m p - K_D)}{A_i(p)}$ et $\frac{FTBF(p)}{K_P} = \frac{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}{A_i(p)}$.
2. $K_D < 1$.
- 3.
4. $\text{Stab}(p) = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}$.
5. $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = -1$.
6. $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$ et $\frac{\text{Pert}(p)}{1 + \tau_m p} = \frac{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D) A K_m}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D) A K_m}$.
7. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ$.
8. $K_P < 1,41$.
9. .
10. .

TD 2

Stabilisateur actif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

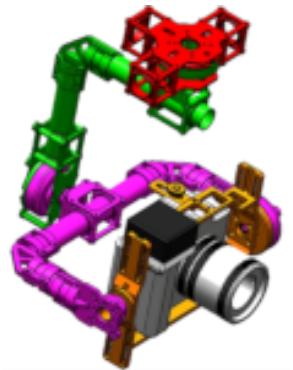
Mise en situation

Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).



Correction

Attention au signe du comparateur de la boucle imbriquée !

On définit la FTBO par $FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{Mes\varphi(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur.

On a d'une part $G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}$. On a alors $FTBO(p) = \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$.

Si on définit la FTBF par $FTBF(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}$, on a $FTBF(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$

$= A_i(p) \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_p}$.

Au final, $FTBO(p) = \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$ et $FTBF(p) = A_i(p) \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_p}$.

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

Correction

Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur $D(p)$ de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$ et donc nécessairement, $1 - K_D > 0$ et $K_D < 1$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Correction

$$\text{On a : FTBF}(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}.$$

$$\text{On a alors } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}} \text{ et } \xi = \frac{1 - K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1 - K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1. \text{ Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.}$$

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Correction

$$\text{On a } \varepsilon_2(p) = -\text{Mes}(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p) \frac{1}{p}. \text{ Par ailleurs, } \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}.$$

$$\text{On a donc } \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left(\frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \right) =$$

$$\text{Pe}(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)} = \text{Pe}(p).$$

$$\text{On a donc } \text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}.$$

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $\text{Pe}(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $\text{com}(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Com}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Stab}(p) \text{Pe}(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1 \text{ si } AK_m = 1.$$

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer

la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$.

Correction

On a $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$ (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$ et $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)$.

En conséquences, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p} \iff \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) +$

$$\varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p) \Leftrightarrow p\varphi(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p)$$

$$\text{et donc } \text{Pert}(p) = \frac{1}{p\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} = \frac{1}{p\left(1 + \frac{K_P - pK_D}{p}\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} =$$

$$\frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}.$$

Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\text{Pert}(p)\text{Pe}(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_P A K_m} = \frac{1}{K_P} = 0,1^\circ. \end{aligned}$$

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5 \text{ dB}$ et une marge de phase $M\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

Correction

Pour une marge de phase de 20° , la phase doit être de -160° lorsque le gain est nul. Or en -160° le gain est de -3 dB . Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer K_P tel que $20 \log K_P = 3$ soit $K_P < 10^{\frac{3}{20}} \approx 1,41$.

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $\text{Com}(t)$ relativement à $\text{Pe}(t)$ en utilisant le résultat de la question 5.

Correction

La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question 5). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de $0,1^\circ$ et $-0,1^\circ$.

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

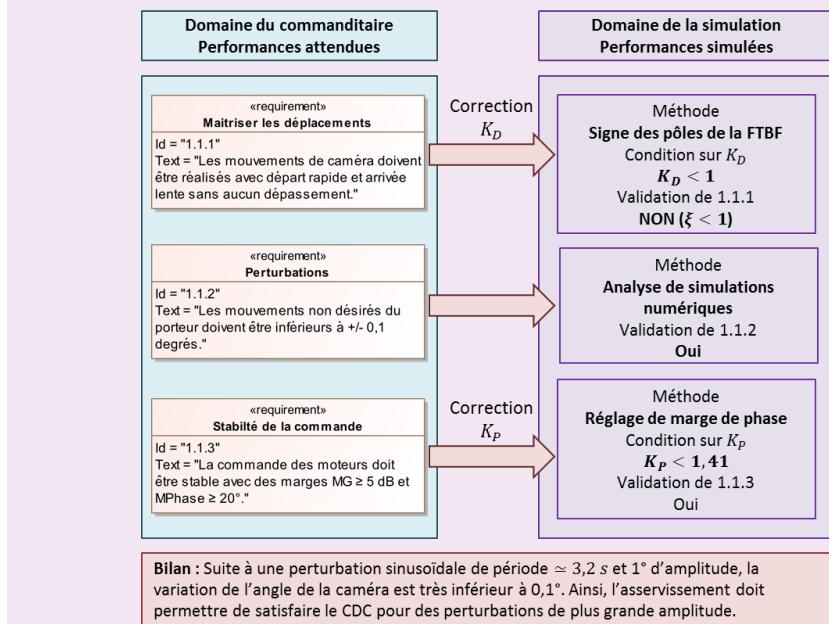
Correction

Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à 0,1 degrés (en valeur absolue).

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

Correction



TD 3

Direction automobile découplée – Sujet

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.16).

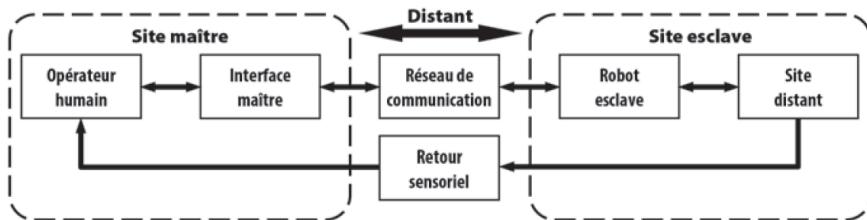


FIGURE 2.7 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.23) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.17.

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v(G_v)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe (G_v, \vec{x}_v) ;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);

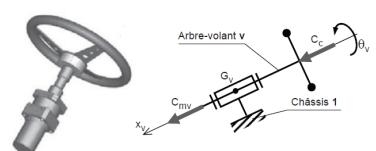


FIGURE 2.8 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x}_v$ et $C_{mv} \vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.18 où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta_v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{cv}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv} .

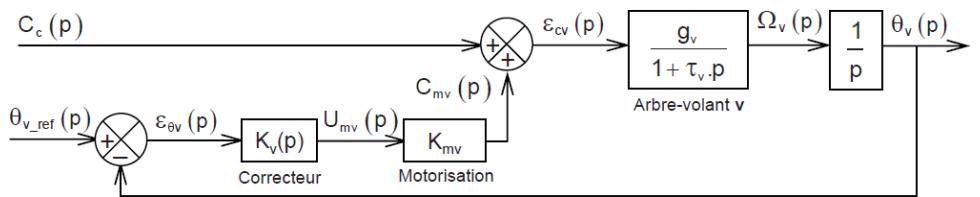


FIGURE 2.9 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $\tau_v = 0,1 \text{ s}$ et $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv} .

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité?

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p) \varepsilon_{\theta_v}(p)$ sous la forme $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta_v}(p) = \frac{\theta_{v_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

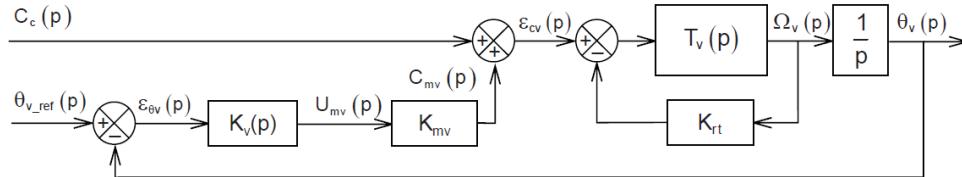
On donne (Figure 2.19) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α .

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0 , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis (Figure 2.19) pour justifier la réponse.

On donne (Figure 2.20), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1^{er} dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique



Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt} . Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v .

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv} , g_v , τ_v , K_i , α et β .

On donne sur la Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (Figure 2.22), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement

On note :

- ▶ $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ▶ ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$.

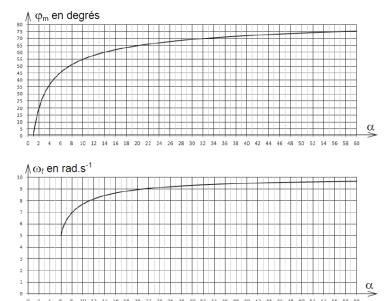


FIGURE 2.10 – Aboques de réglage de $H(p)$ en fréquentiel

FIGURE 2.12 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

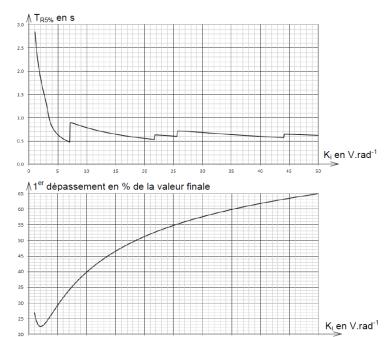


FIGURE 2.11 – Aboques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée

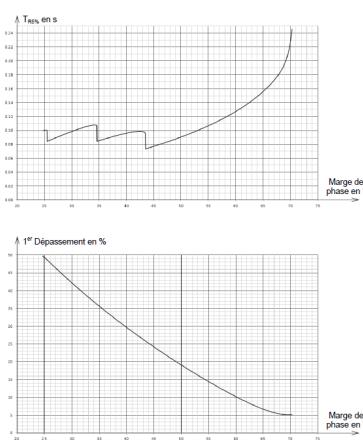


FIGURE 2.13 – Abaques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique

Éléments de correction

1. .
2. $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v}$ et $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}$, $\alpha > 1$.
3. $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$ et $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$.
4. .
5. $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$.
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g v}$
10. $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g v}{\alpha \tau_v}$.
11. .
12. $M_\varphi = 58^\circ$.
13. $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$.
14. .
15. .

FIGURE 2.14 – Exigences

| Exigence | Critères | Niveaux | Flexibilité |
|--|---|---|--|
| Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité. | <ul style="list-style-type: none"> 1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0 2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle <ul style="list-style-type: none"> - pour une consigne en échelon - pour une consigne en rampe de pente Ω_{v0} 4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple <ul style="list-style-type: none"> - pour une perturbation en échelon - pour une perturbation en rampe de pente C_{s0} 5- Stabilité <ul style="list-style-type: none"> - Marge de phase - Marge de gain 6- Amortissement <ul style="list-style-type: none"> - 1^{er} dépassement en réponse indicielle (boucle fermée) | <ul style="list-style-type: none"> 30 rad/s (≈ 5 Hz) 0,1 s nulle $\leq 0,5\%$ de Ω_{v0} nulle $\leq 10\%$ de C_{s0} 45° 20 dB 0% | <ul style="list-style-type: none"> mini ± 20 ms aucune $\pm 0,2\%$ aucune $\pm 5\%$ mini mini 15% maxi |

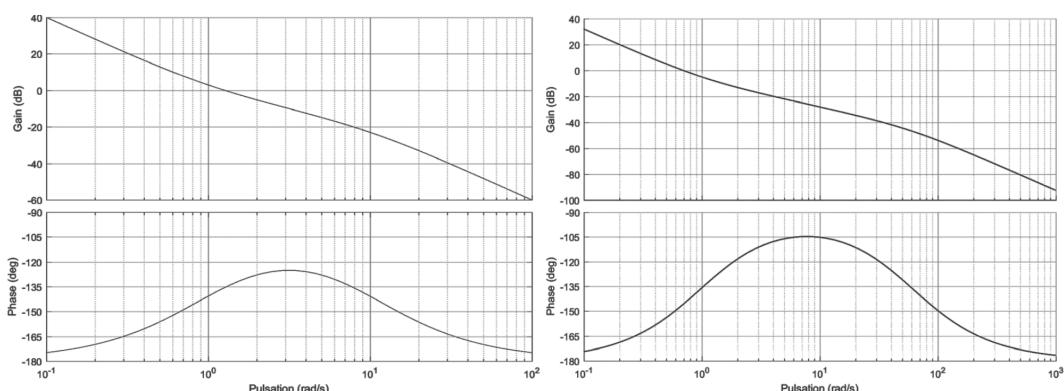


FIGURE 2.15 – Lieux de transfert de $FTBOv1(p)$ et $FTBOv2(p)$

TD 3

Direction automobile découplée – Corrigé

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découplée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.16).

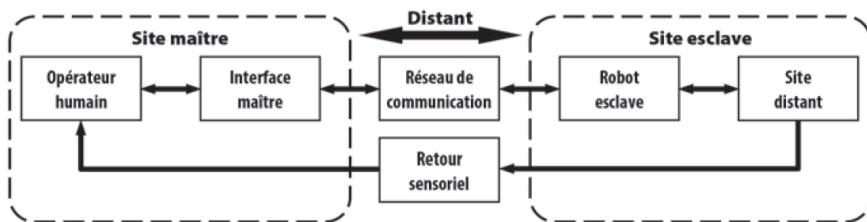


FIGURE 2.16 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découplée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.23) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.17.

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v(G_v)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe (G_v, \vec{x}_v) ;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);

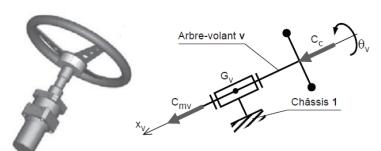


FIGURE 2.17 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x}_v$ et $C_{mv} \vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.18 où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta_v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{cv}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv} .

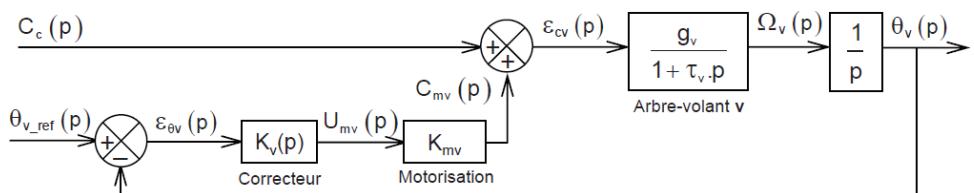


FIGURE 2.18 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $\tau_v = 0,1 \text{ s}$ et $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv} .

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

Correction

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = FTBO_{v1}(p)\varepsilon_{\theta_v}(p)$ sous la forme $FTBO_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

Correction

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta v}(p) = \frac{\theta_{v_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

Correction

On donne [Figure 2.24](#) le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Correction

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

Correction

On donne ([Figure 2.19](#)) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α .

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0 , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis ([Figure 2.19](#)) pour justifier la réponse.

Correction

On donne ([Figure 2.20](#)), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1^{er} dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

On note :

- $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$.

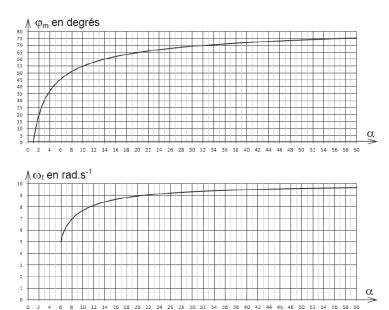


FIGURE 2.19 – ABAQUES DE RÉGLAGE DE $H(p)$ EN FRÉQUENTIEL

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

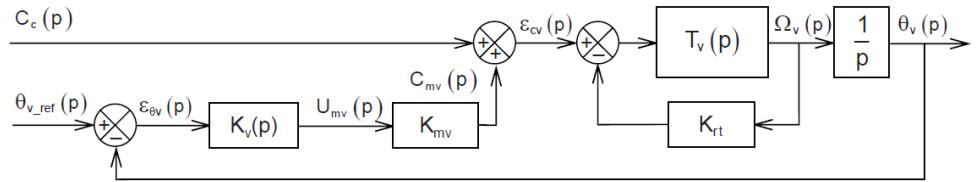


FIGURE 2.21 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Correction

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{\text{cv}}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt} . Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v .

Correction

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2} \frac{1 + \beta \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv} , g_v , τ_v , K_i , α et β .

Correction

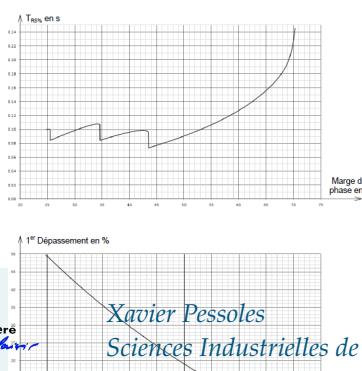
On donne sur la Figure 2.24 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

Correction

On donne (Figure 2.22), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d'angle θ_{v_ref} , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec $\beta = 1/6$.

Question 12 Donner par lecture des abaques (Figure 2.22), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.



Correction

Question 13 Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de $\text{FTBO}_{v2}(p)$, tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de K_i permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

Correction

Question 14 Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

Correction

Question 15 Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système ?

Correction

| Exigence | Critères | Niveaux | Flexibilité |
|---|---|---|--|
| Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité. | <ul style="list-style-type: none"> 1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0 2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle <ul style="list-style-type: none"> - pour une consigne en échelon - pour une consigne en rampe de pente Ω_{v0} 4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple <ul style="list-style-type: none"> - pour une perturbation en échelon - pour une perturbation en rampe de pente C_{e0} 5- Stabilité <ul style="list-style-type: none"> - Marge de phase - Marge de gain 6- Amortissement <ul style="list-style-type: none"> - 1^{er} dépassement en réponse indicielle (boucle fermée) | <ul style="list-style-type: none"> 30 rad/s (≈ 5 Hz) 0,1 s nulle $\leq 0,5\%$ de Ω_{v0} nulle $\leq 10\%$ de C_{e0} 45° 20 dB 0% | <ul style="list-style-type: none"> mini ± 20 ms aucune $\pm 0,2\%$ aucune $\pm 5\%$ mini mini 15% maxi |

Éléments de correction

1. .
2. $K_{\text{BOv1}} = \frac{K_i K_{\text{Mnv}} g v}{\alpha \tau_v} \text{ et } H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}, \alpha > 1.$
3. $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{\text{Mnv}}} \text{ et } K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}.$
4. .
5. $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}.$
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \frac{1}{1 + K_{\text{rtg}} v} \frac{K_i K_{\text{Mnv}} \beta g v}{K_i K_{\text{Mnv}} \beta g v}.$
10. $K_{\text{BOv2}} = \frac{1}{\alpha \tau_v}.$
11. .
12. $M_Q = 58^\circ.$
13. $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}.$
14. .
15. .

FIGURE 2.23 – Exigences

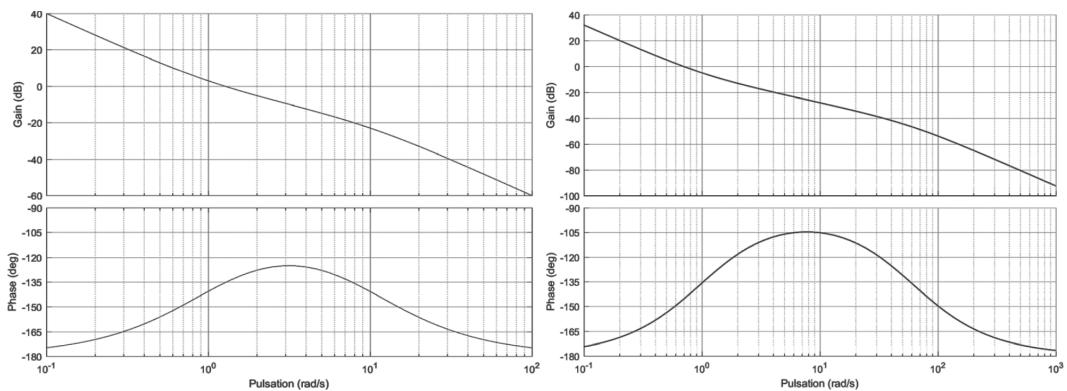


FIGURE 2.24 – Lieux de transfert de $\text{FTBO}_{v1}(p)$ et $\text{FTBO}_{v2}(p)$



TD 4

Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Sujet

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension u par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

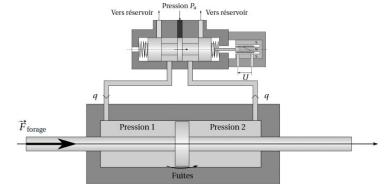
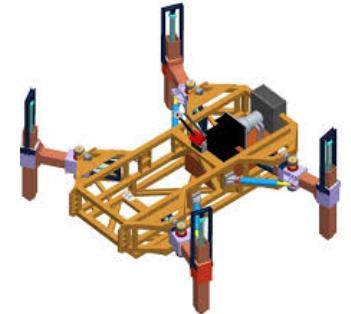
Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement : $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$;
- ▶ stabilité : marge de phase de 45° , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶ $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, surface utile des pistons;
- ▶ $b = 10^9 \text{ Pa}$: module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶ $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$: pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶ $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$: constante de débit de la servovalve;
- ▶ $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$: facteur de fuite dans le vérin;
- ▶ $q(t)$: débit entrant et sortant du vérin;
- ▶ V_1 et V_2 : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse : $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$);
- ▶ $p(t) = p_1 - p_2$: différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶ $z(t)$: déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶ $M = 700 \text{ kg}$: masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶ $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$: raideur équivalente de la structure du robot;



- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$: coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$: effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$: position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur k .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe \vec{z} du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

Question 1 Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ► l'inertie du robot; ► à la raideur du robot; ► au frottement visqueux; ► à la pression dans la chambre; | <ul style="list-style-type: none"> ► à la compressibilité de l'huile; ► au déplacement de la tige de vérin; ► aux fuites entre les chambres. |
|--|---|

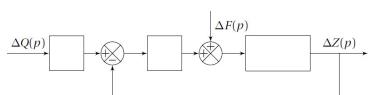
Question 2 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , F_0 et Z_0 , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

Question 3 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $F_{\text{forage}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$ et $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 4 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , Q_0 et Z_0 , traduire l'équation de bilan des débits.

Question 5 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 6 À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.



Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit $q(t)$ au vérin à partir d'une tension de commande $u(t)$ appliquée en entrée : la tension $u(t)$ est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante p_a et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension $u(t)$, mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire : $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$.

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

Question 7 Déterminer la relation liant Q_0 , U_0 et P_0 au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ et $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$.

Question 8 Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servovalve et vérin, admettant en entrée la tension $\Delta U(p)$ et la force $\Delta F(p)$, et en sortie la position $\Delta Z(p)$.

Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

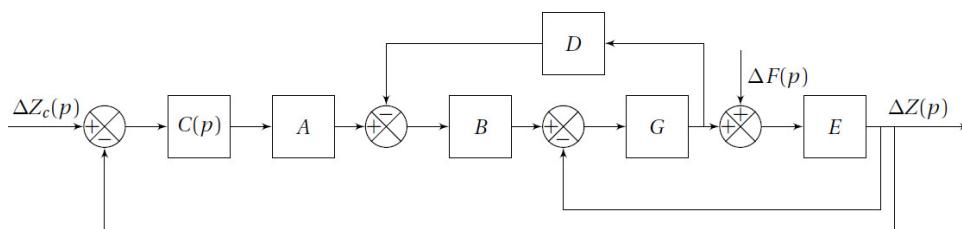
- ▶ la servovalve, qui fournit le débit $q(t)$ au vérin à partir d'un signal de commande $u(t)$;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert k_c , qui fournit une tension $\text{Im}(z(t))$ image de la position réelle $z(t)$;
- ▶ un correcteur $C(p)$ qui élabore la commande $u(t)$ de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre $\text{Im}(z_c(t))$, image de la consigne de position, et $\text{Im}(z(t))$. $\text{Im}(z_c(t))$ est obtenue grâce à un adaptateur K_a situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

Question 9 Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

Question 10 Préciser l'expression de l'adaptateur K_a pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où A , B , C , D , E , et G sont utilisés pour simplifier les calculs.

Question 11 À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.



Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert $0,975$ en boucle fermée, $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$ et $p_3 = -30,4$ (en rad/s).

Question 12 Le système est-il stable ? Est-il précis ?

Question 13 À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

Question 14 À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte, $\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -18 \pm 81,6j$ et $p_3 = -0,75$ (rad/s)

Question 15 Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Éléments de correction

1. ...
2. $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$ et $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p)$.
3. ...
4. $\Delta q = K\Delta U\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig.}$
5. ...
6. ...
7. $K_a = k_c$.
8. $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$ et $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$.
9. ...
10. ...
11. ...
12. $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$ et $\xi = 0,21$, $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$.
13. ...
14. ...

Question 16 Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

On choisit de prendre ω_0 égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et $\xi_2 = 0,7$.

Question 17 Proposer une valeur pour le paramètre ξ_1 . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).



TD 4

Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Corrigé

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension u par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

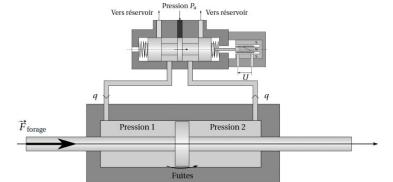
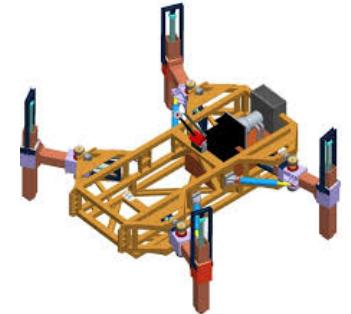
Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement : $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$;
- ▶ stabilité : marge de phase de 45° , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶ $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, surface utile des pistons;
- ▶ $b = 10^9 \text{ Pa}$: module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶ $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$: pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶ $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$: constante de débit de la servovalve;
- ▶ $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$: facteur de fuite dans le vérin;
- ▶ $q(t)$: débit entrant et sortant du vérin;
- ▶ V_1 et V_2 : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse : $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$);
- ▶ $p(t) = p_1 - p_2$: différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶ $z(t)$: déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶ $M = 700 \text{ kg}$: masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶ $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$: raideur équivalente de la structure du robot;



- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$: coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$: effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$: position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur k .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe \overrightarrow{z} du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

Question 1 Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ► l'inertie du robot ; ► à la raideur du robot ; ► au frottement visqueux ; ► à la pression dans la chambre ; | <ul style="list-style-type: none"> ► à la compressibilité de l'huile ; ► au déplacement de la tige de vérin ; ► aux fuites entre les chambres. |
|--|---|

Correction

Termes correspondant :

- l'inertie du robot : $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$;
- à la raideur du robot : $-k(z(t) - Z_0)$;
- au frottement visqueux : $-\mu \frac{dz(t)}{dt}$;
- à la pression dans la chambre : $Sp(t)$;
- à la compressibilité de l'huile : $\frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$;
- au déplacement de la tige de vérin : $S \frac{dz(t)}{dt}$;
- aux fuites entre les chambres : $\varphi p(t)$.

Question 2 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , F_0 et Z_0 , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

Correction

On a : $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t)$. Au point de fonctionnement, on a donc $0 = SP_0 - F_0$ et donc $SP_0 = F_0$.

Question 3 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $F_{\text{forage}}(t) = F_0 + \Delta F(t)$ et $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Correction

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc : $M \frac{d^2 \Delta z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{d \Delta z(t)}{dt} - k \Delta z(t) + S(P_0 + \Delta p(t)) - F_0 - \Delta F(t)$. De plus, à l'équilibre, $SP_0 = F_0$. Dans le domaine de Laplace, on a alors $\Delta Z(p) (Mp^2 + \mu p + k) = S\Delta P(p) - \Delta F(p)$.

Question 4 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , Q_0 et Z_0 , traduire l'équation de bilan des débits.

Correction

On a $q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$. Au point de fonctionnement, on a donc $Q_0 = \varphi P_0$.

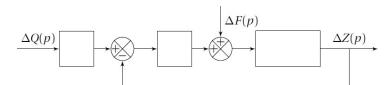
Question 5 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Correction

$$\begin{aligned} \text{Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc} \\ Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d(Z_0 + \Delta z(t))}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d(P_0 + \Delta p(t))}{dt} \\ \Leftrightarrow Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d\Delta z(t)}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d\Delta p(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \Delta q(t) &= S \frac{d\Delta z(t)}{dt} + \varphi \Delta p(t) + \frac{V}{2b} \frac{d\Delta p(t)}{dt} \text{ (en utilisant la question précédente).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans le domaine de Laplace, on a donc } \Delta Q(p) &= Sp\Delta Z(p) + \varphi \Delta P(p) + \frac{V}{2b} p \Delta P(p) \text{ soit} \\ \Delta Q(p) &= Sp\Delta Z(p) + \Delta P(p) \left(\varphi + \frac{V}{2b} p \right) \end{aligned}$$

Question 6 À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.

Correction**Modélisation du comportement de la servovalve**

La servovalve permet de fournir le débit $q(t)$ au vérin à partir d'une tension de commande $u(t)$ appliquée en entrée : la tension $u(t)$ est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante p_a et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension $u(t)$, mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire : $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$.

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

Question 7 Déterminer la relation liant Q_0 , U_0 et P_0 au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ et $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$.

Correction

Au point de fonctionnement, $Q_0 = KU_0\sqrt{p_a - P_0}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} Q_0 + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{(p_a - P_0) \left(1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)} \end{aligned}$$

et $\sqrt{1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right) \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} - \frac{K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} - \underbrace{\frac{KU_0\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}} - \\ &\quad \underbrace{\frac{K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Delta q(t) = K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2} \frac{\Delta p(t)}{\sqrt{p_a - P_0}}$$

Question 8 Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servo-valve et vérin, admettant en entrée la tension $\Delta U(p)$ et la force $\Delta F(p)$, et en sortie la position $\Delta Z(p)$.

Correction**Asservissement de position**

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

- ▶ la servovalve, qui fournit le débit $q(t)$ au vérin à partir d'un signal de commande $u(t)$;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert k_c , qui fournit une tension $\text{Im}(z(t))$ image de la position réelle $z(t)$;
- ▶ un correcteur $C(p)$ qui élabore la commande $u(t)$ de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre $\text{Im}(z_c(t))$, image de la consigne de position, et $\text{Im}(z(t))$. $\text{Im}(z_c(t))$ est obtenue grâce à un adaptateur K_a situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

Question 9 Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

Correction

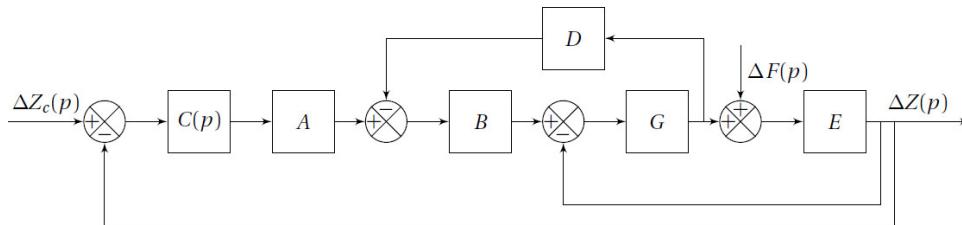
Question 10 Préciser l'expression de l'adaptateur K_a pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Correction

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où A , B , C , D , E , et G sont utilisés pour simplifier les calculs.

Question 11 À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.

Correction



Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée, $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$ et $p_3 = -30,4$ (en rad/s).

Question 12 Le système est-il stable ? Est-il précis ?

Correction

Question 13 À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

Correction

Question 14 À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassemens.

Correction

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte, $\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -18 \pm 81,6j$ et $p_3 = -0,75$ (rad/s)

Question 15 Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

Correction**Optimisation du comportement : réduction des oscillations**

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Question 16 Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

Correction**Éléments de correction**

1. ...
2. $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$ et
 $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p).$
3. ...
4. $\Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig..}$
5. ...
6. ...
7. $K_a = k_c.$
8. $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$
et $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$
9. ...
10. ...
11. ...
12. $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$ et $\xi = 0,21$, $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$.
13. ...
14. ...

On choisit de prendre ω_0 égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et $\xi_2 = 0,7$.

Question 17 Proposer une valeur pour le paramètre ξ_1 . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

Correction

TD 5

Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

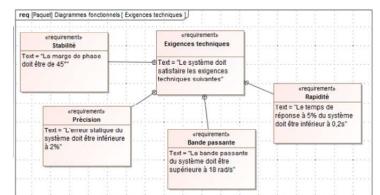
Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

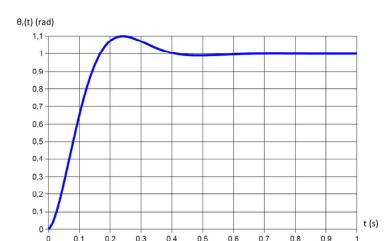
Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$.



Avec :

- ▶ $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶ $e(t)$: force contre-électromotrice (en V);
- ▶ $i(t)$: intensité (en A);
- ▶ $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶ $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶ J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²) ;
- ▶ R : résistance électrique du moteur;
- ▶ k_e : constante de force contre-électromotrice;
- ▶ k_m : constante de couple.



Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

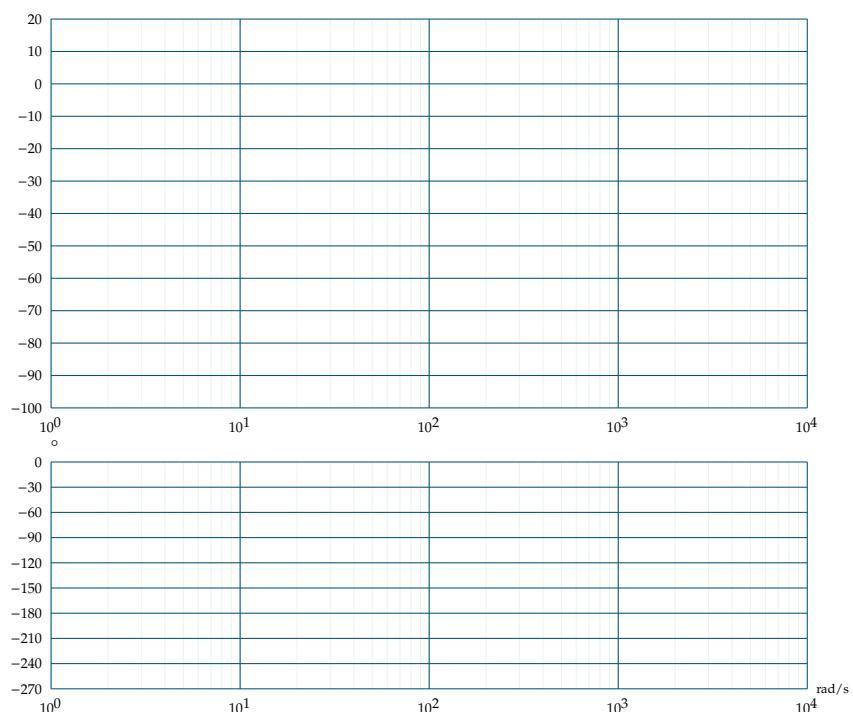
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$.

Pour $\omega < 20 \text{ rad/s}$, on a $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 5

Radar d'avion – Corrigé

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

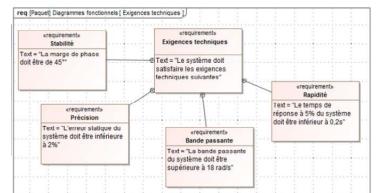
Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$.



Avec :

- ▶ $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶ $e(t)$: force contre-électromotrice (en V);
- ▶ $i(t)$: intensité (en A);
- ▶ $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶ $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶ J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²) ;
- ▶ R : résistance électrique du moteur;
- ▶ k_e : constante de force contre-électromotrice;
- ▶ k_m : constante de couple.



Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

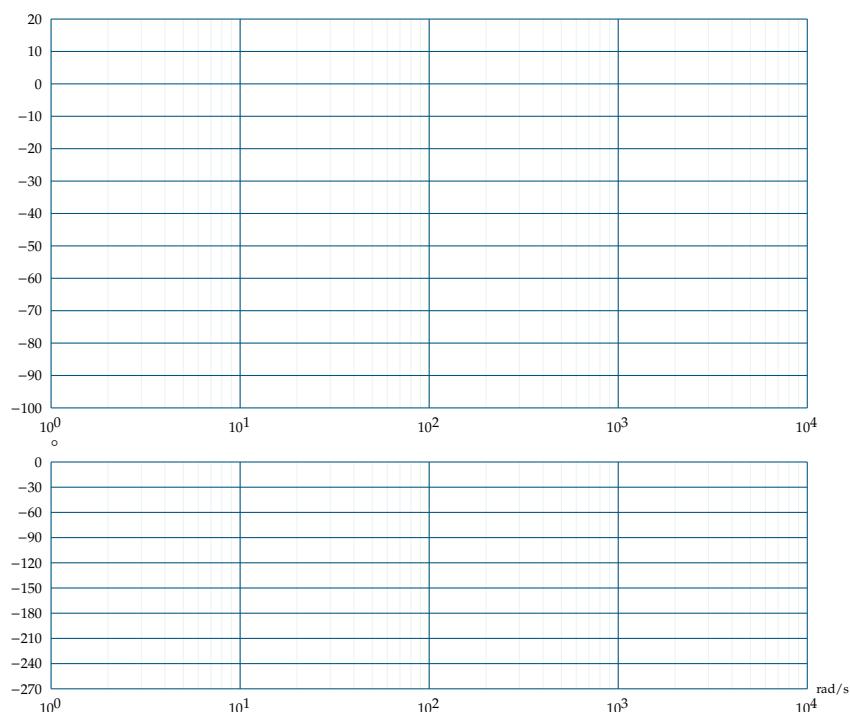
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$.

Pour $\omega < 20 \text{ rad/s}$, on a $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 6

Base TC200 Tecdron – Sujet

Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



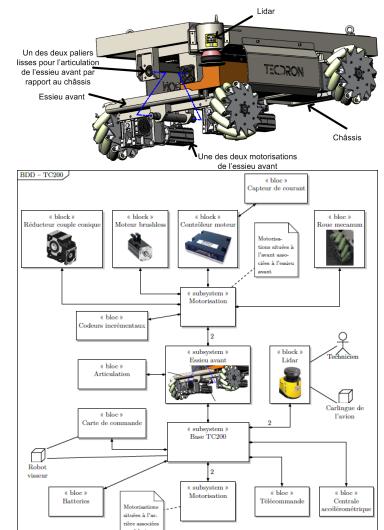
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

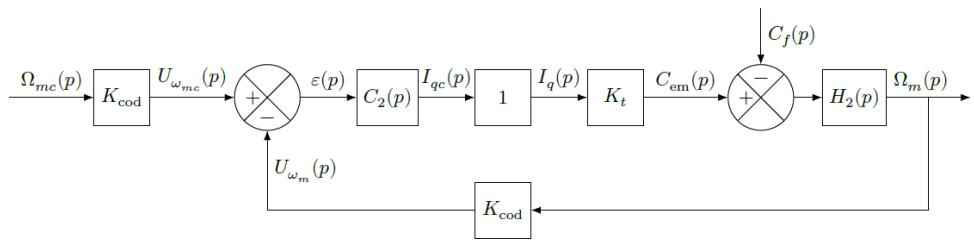
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.



| Exigence | Critère | Performance attendue |
|-----------|--|---|
| Précision | Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0} | $\mu_{v\infty} < 1\%$ |
| Rapidité | Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$ | $\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une pente de 1800 rad s^{-1} |
| Stabilité | Temps de réponse à 5 % | $t_{5\%} < 180 \text{ ms}$ |
| | Dépassemant maximal | $\leq 10\%$ |
| | Marge de phase | $\geq 60^\circ$ |



| Fonction de transfert | Expression | Valeur |
|----------------------------------|--------------------------------------|---|
| Codeur et sa carte de traitement | K_{cod} | $0,2 \text{ V s rad}^{-1}$ |
| Constante de couple | K_t | $0,09 \text{ N m A}^{-1}$ |
| Corrètore de type proportionnel | $C_2(p) = K_2$ | |
| Dynamique de la motorisation | $H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}} p}$ | $J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ |

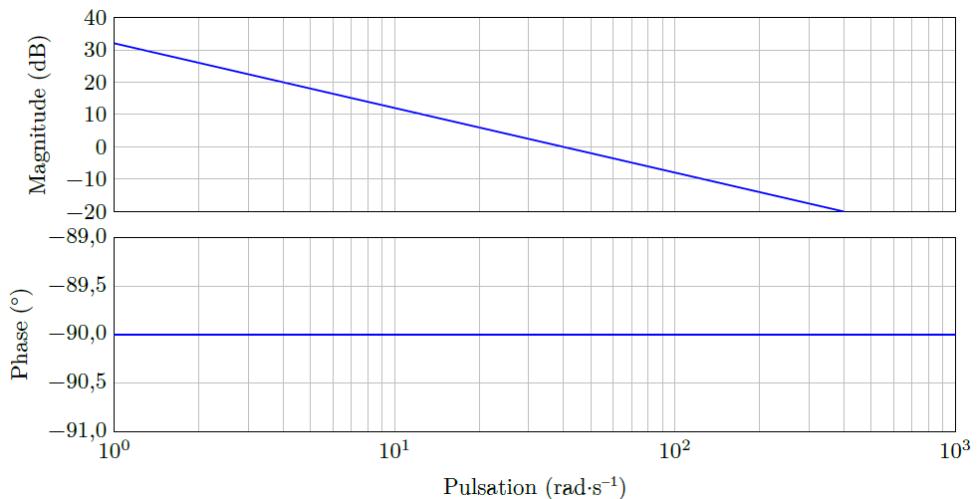
Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

TD 6

Base TC200 Tecdron – Corrigé

Centrale Supélec TSI 2021.

C2-03

Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



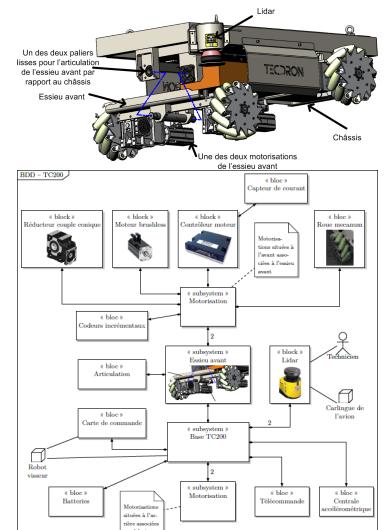
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

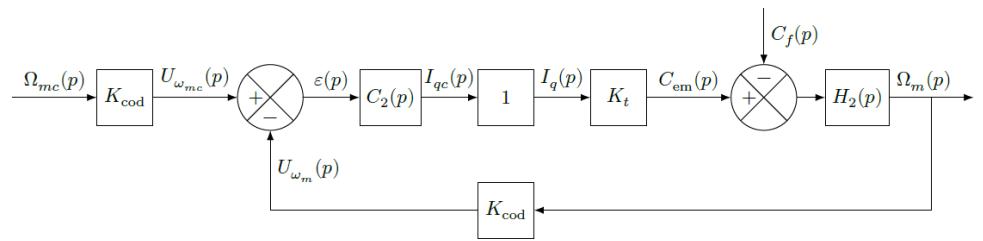
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.



| Exigence | Critère | Performance attendue |
|-----------|--|---|
| Précision | Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0} | $\mu_{v\infty} < 1\%$ |
| | Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$ | $\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une pente de 1800 rad s^{-1} |
| Rapidité | Temps de réponse à 5 % | $t_{5\%} < 180 \text{ ms}$ |
| Stabilité | Dépassemant maximal | $\leq 10\%$ |
| | Marge de phase | $\geq 60^\circ$ |



| Fonction de transfert | Expression | Valeur |
|----------------------------------|--------------------------------------|---|
| Codeur et sa carte de traitement | K_{cod} | $0,2 \text{ V s rad}^{-1}$ |
| Constante de couple | K_t | $0,09 \text{ N m A}^{-1}$ |
| Corrèleur de type proportionnel | $C_2(p) = K_2$ | |
| Dynamique de la motorisation | $H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}} p}$ | $J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ |

Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Correction

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Correction

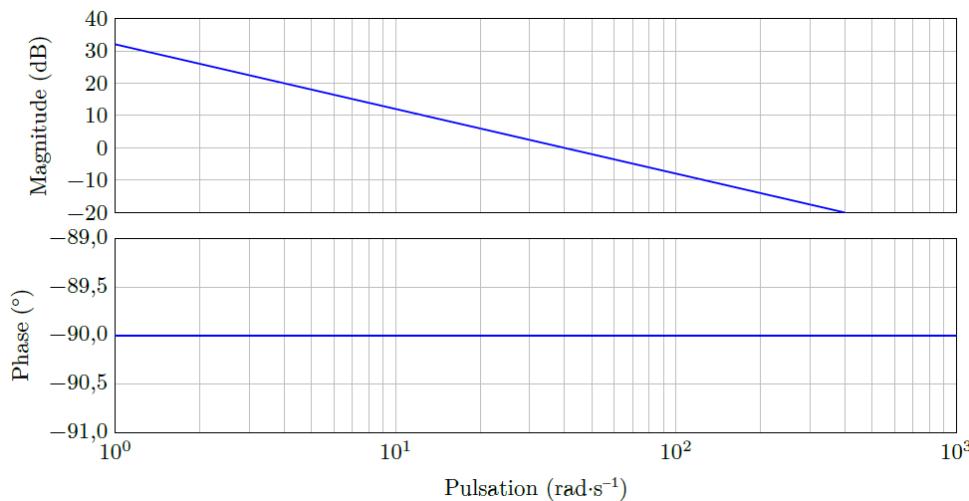
Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Correction

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

Correction

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Correction

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

Correction

Colle 1

Stabilité – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

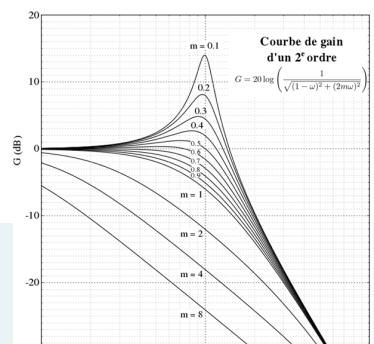
Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

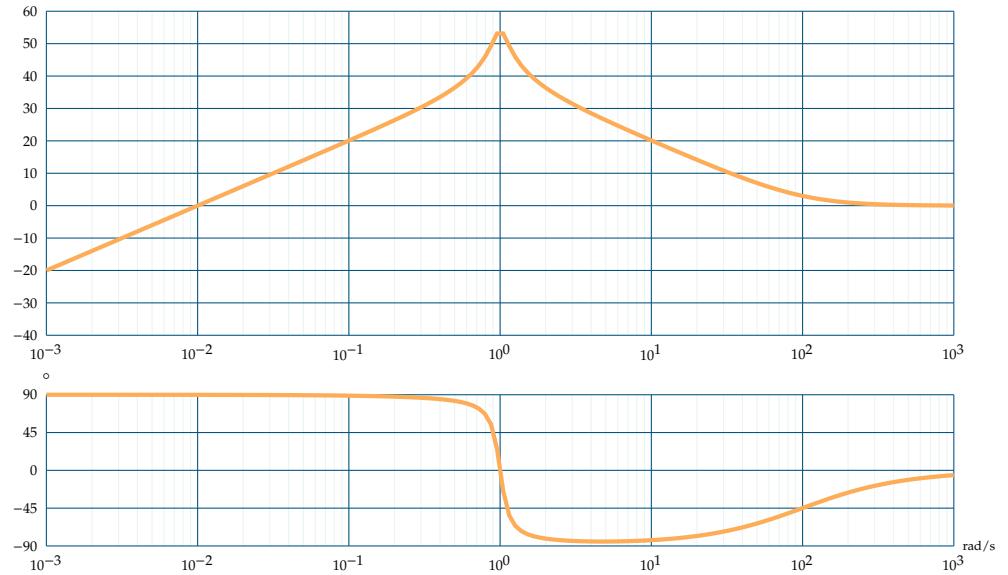
Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 7 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





Colle 1

Stabilité – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

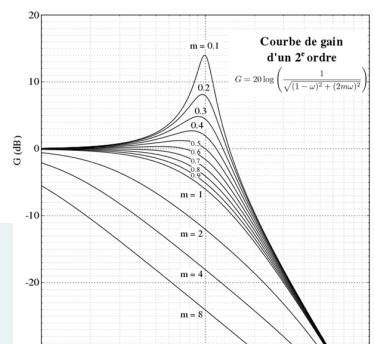
Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

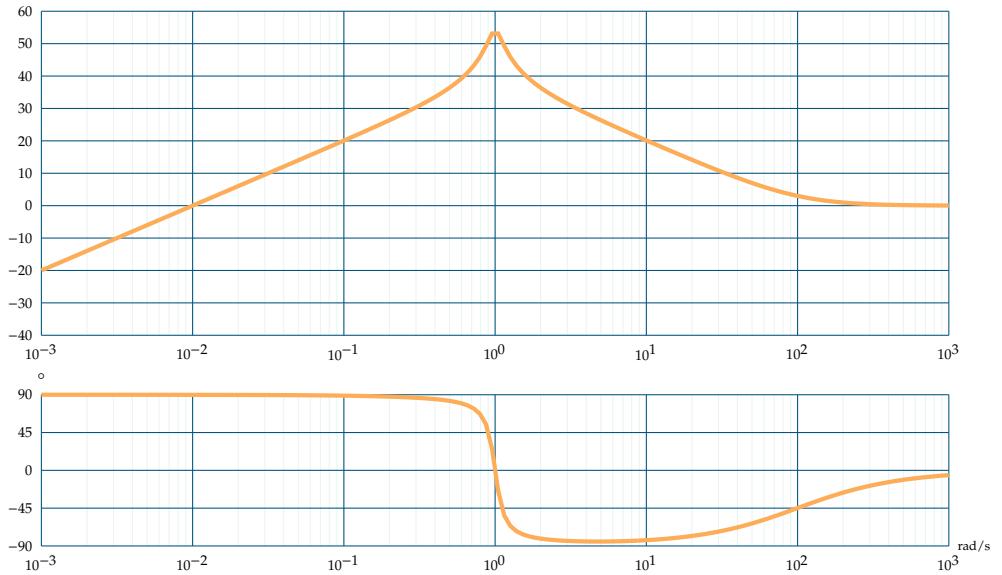
Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 7 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





7.7 Pour obtenir une marge de phase supérieure à 45° , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) > \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \frac{K}{(10j\omega_{c0} + 1)^3} > \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\varphi = \pi - 3 \arctan 10\omega_{c0} > \frac{\pi}{4}$$

d'où : $\omega_{c0} < \frac{1}{10} \tan \frac{3\pi}{12} = 0,1 \text{ rad/s}$

Calculons la valeur de K correspondant à cette pulsation de coupure à 0 dB.

On a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3} = 1$$

$$\text{d'où : } K = \left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3 = 2,8$$

La condition sur ω_{c0} nous imposant une limite supérieure, il en est de même pour la condition sur K .

En conclusion : $\Delta\varphi > 45^\circ \Rightarrow K < 2,8$

Par ailleurs, comme :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

on a :

$$t_m > \frac{3}{0,1} = 30 \text{ s}$$

Le temps de montée minimal (autrement dit la meilleure rapidité possible) est donc égal à 30 s.

Calculons à présent l'erreur statique. La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(10p + 1)^3 + K}$$

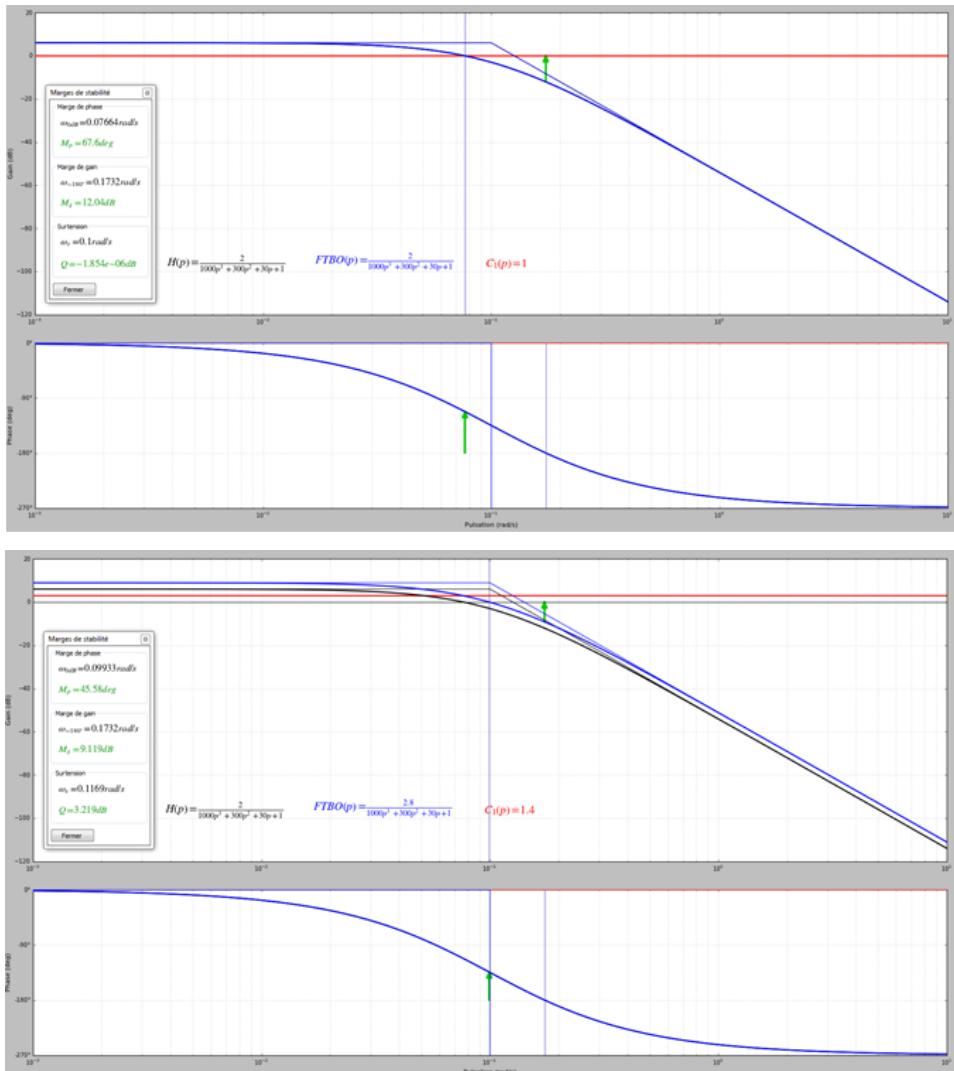
Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{1 + K}$$

On a donc :

$$K < 2,8 \Rightarrow \varepsilon_p > \frac{1}{1 + 2,8} = 0,26$$

L'erreur statique est donc obligatoirement supérieure à 26 % si on souhaite avoir une marge de phase supérieure à 45° .



Colle 2

Stabilité – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

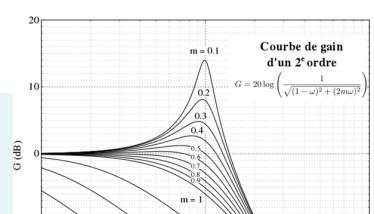
Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

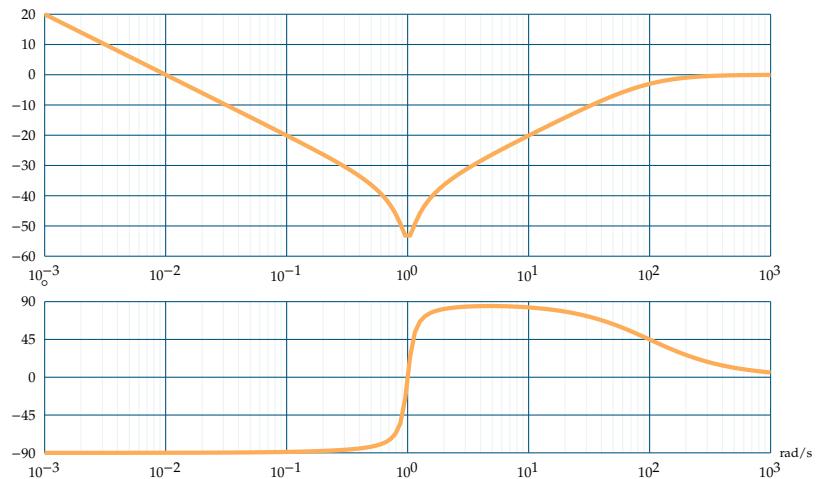
Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 7 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





Colle 2

Stabilité – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

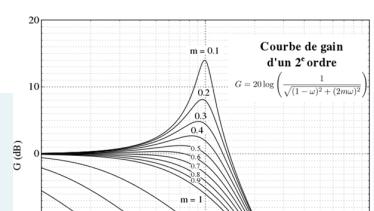
Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

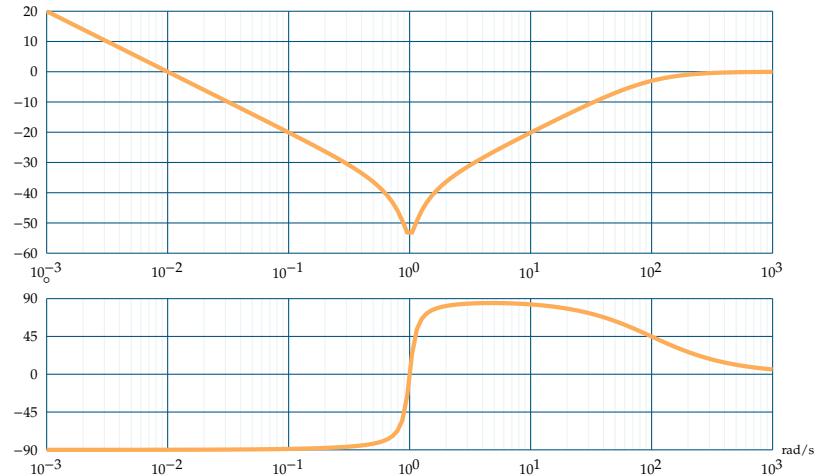
Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 7 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit : $KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit : $\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

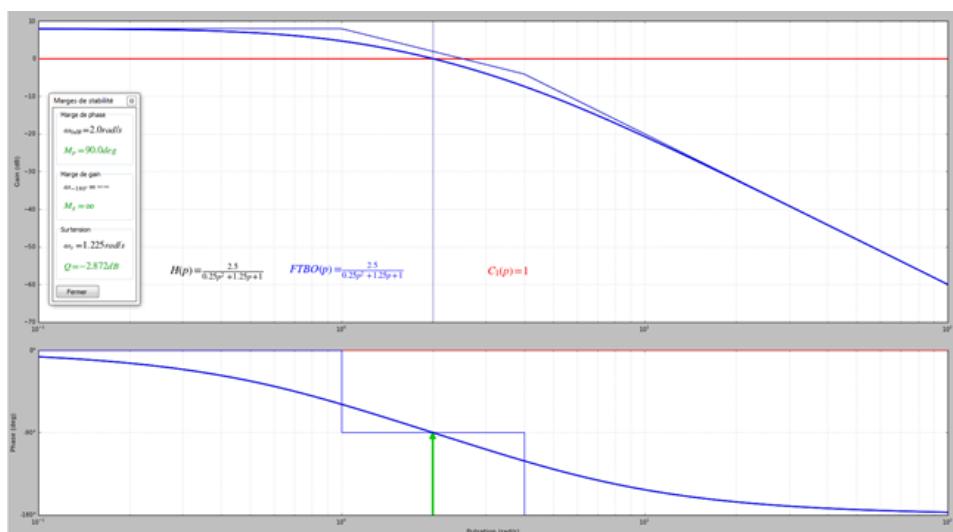
Par conséquent :

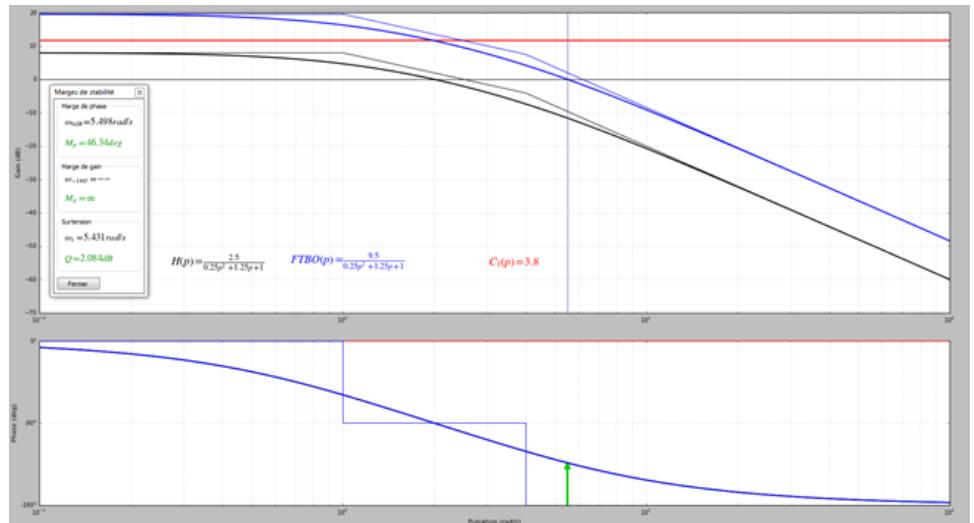
$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.





Colle 3

Performances – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 2 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 3 Tracer le schéma-blocs.

Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Colle 3

Performances – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Correction

Question 2 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

Correction

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 3 Tracer le schéma-blocs.

Correction

Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Correction

Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

$$\text{soit : } KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{soit : } \arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\varepsilon = 0,123$$

$$\text{d'où : } \frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

$$\text{La seule solution positive est : } \omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

$$\text{Par définition : } KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

$$\text{Par conséquent : } K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

$$\text{Par définition : } KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

$$\text{Par conséquent : } K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.

