

9 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

9.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \mathcal{T}(\overline{E} \rightarrow E) \right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- ▶ On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G .
- ▶ Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découlent plusieurs **théorèmes généraux**.

9.1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement

9.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général	1
9.2 Torseur cinétique	2
9.3 Torseur dynamique	4

B2-10

Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

9.1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

9.2 Torseur cinétique

9.2.1 Définition

Définition –

Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur cinétique, $\overrightarrow{R_c(S/R_0)}$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$.
- ▶ Le moment cinétique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)}$.

9.2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété –

Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

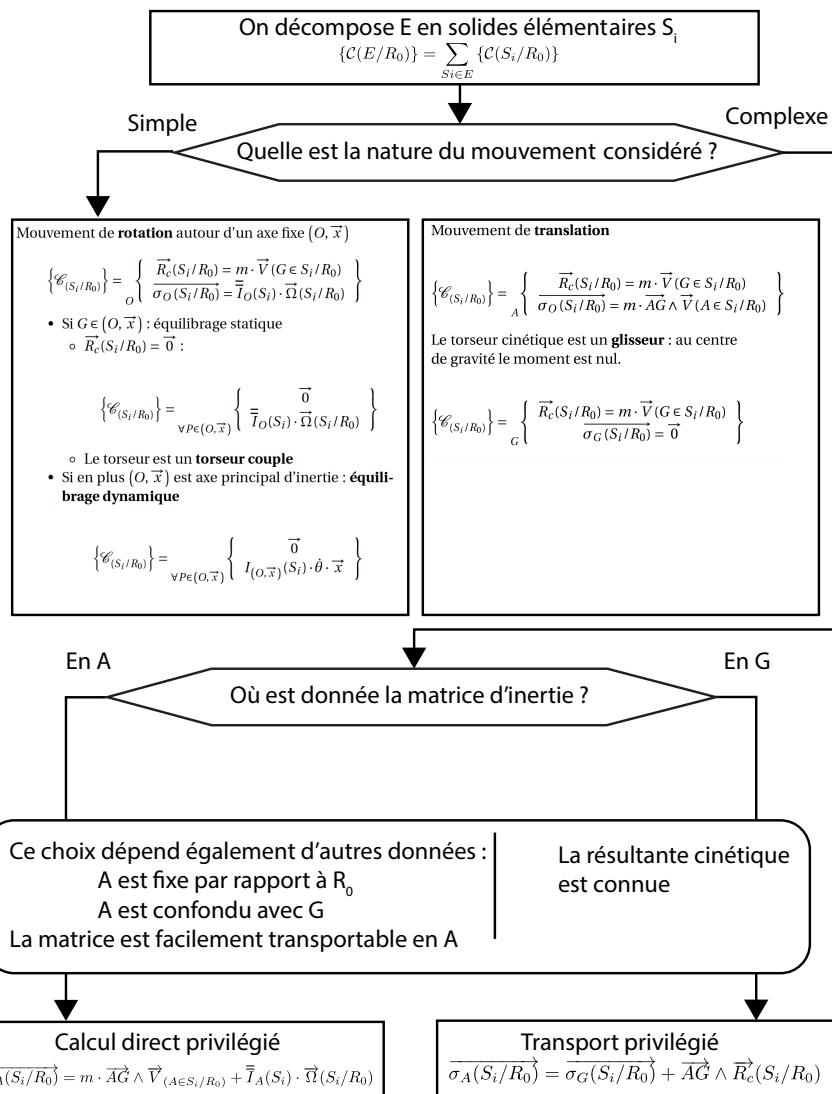
$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)}.$$

9.2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A fixe dans le mouvement de S/R_0 , on a : $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.
- En appliquant cette formule en G , centre d'inertie de S , on a : $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.

9.2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



9.3 Torseur dynamique

9.3.1 Définition

Définition – Torseur dynamique

Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$.
- ▶ Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$.

9.3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété –

Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

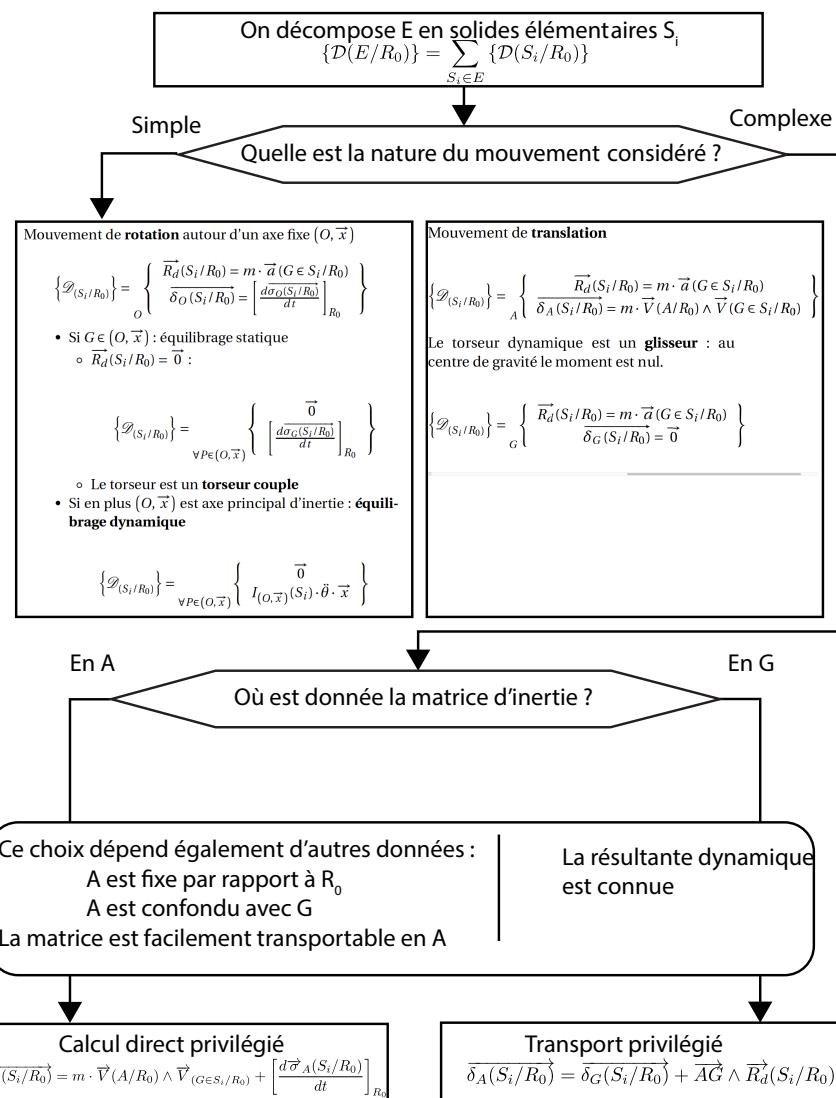
- ▶ Relation entre les **résultantes** : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.
- ▶ Relation entre les **moments** : $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

9.3.3 Cas particuliers

- ▶ En appliquant cette formule en un point O fixe dans R_0 , on a : $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.
- ▶ En appliquant cette formule en un point G , **centre d'inertie de S** , on a : $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.

9.3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Bilan

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans \mathcal{R}_0 A
Torseur cinétique $\{\mathcal{E}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)} \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{array} \right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\vec{T}(G, S/R_0)} \\ \delta(A, S/R_0) = \left[\frac{d\alpha(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)} \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\vec{T}(G, S/R_0)} \\ \delta(G, S/R_0) = \left[\frac{d\alpha(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\vec{T}(G, S/R_0)} \\ \delta(A, S/R_0) = \left[\frac{d\alpha(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_A$

Application 1

Pompe à plateau – Sujet

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

Paramétrage

Le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

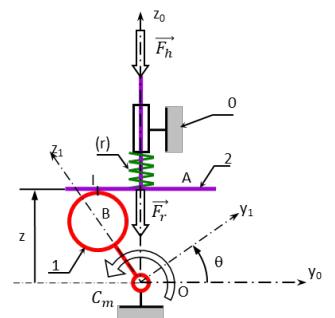
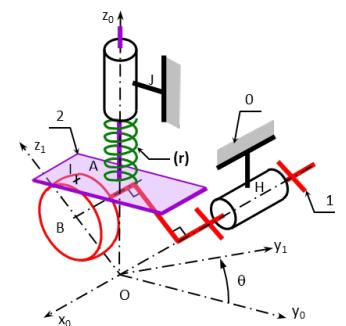
- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$;
- $\overrightarrow{OB} = e\vec{z}_1$, $\overrightarrow{BI} = R\vec{z}_0$, $\overrightarrow{OA} = z\vec{z}_0$.

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) . Le piston (2) possède une masse m_2 . Le ressort (r), de raideur k , est toujours comprimé. Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, l'effort de compression est égal à $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$.

Un moteur exerce un couple connu de moment $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe (O, \vec{z}_0) et de résultante $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$.

Résolution cinématique

Question 1 En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer z en fonction de θ et de constantes du problème. Déterminer alors $\overline{V}(A, 2/0)$ et $\overline{\Gamma}(A, 2/0)$.



Résolution dynamique

Question 2 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le PFD.

Question 3 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Résolution énergétique – Pour plus tard...

Question 4 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Question 5 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Pour aller plus loin...

Question 6 En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Application 1

Pompe à plateau – Corrigé

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

Paramétrage

Le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

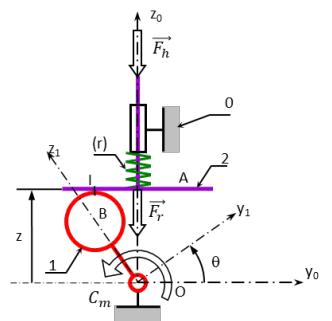
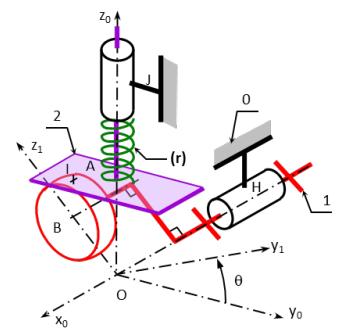
- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$;
- $\overrightarrow{OB} = e\vec{z}_1$, $\overrightarrow{BI} = R\vec{z}_0$, $\overrightarrow{OA} = z\vec{z}_0$.

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) . Le piston (2) possède une masse m_2 . Le ressort (r), de raideur k , est toujours comprimé. Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, l'effort de compression est égal à $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$.

Un moteur exerce un couple connu de moment $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe (O, \vec{z}_0) et de résultante $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$.

Résolution cinématique

Question 1 En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer z en fonction de θ et de constantes du problème. Déterminer alors $\overline{V}(A, 2/0)$ et $\overline{\Gamma}(A, 2/0)$.



Résolution dynamique

Question 2 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le PFD.

Question 3 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Résolution énergétique – Pour plus tard...

Question 4 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Question 5 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Pour aller plus loin...

Question 6 En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Fermerture géométrique.

On a : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$.

En projection sur $\overrightarrow{z_0}$: $e \cos \theta + R = z$. Par dérivation successive, on a : $-e\dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$ et $-e\ddot{\theta} \sin \theta - e\dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$.

On isole le solide (1).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

$$\blacktriangleright \text{ Liaison pivot: } \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ M_{01}\vec{y}_0 + N_{01}\vec{z}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O.$$

$$\blacktriangleright \text{ Liaison ponctuelle : } \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{21}\vec{y}_0 + Z_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I. \text{ On a } Z_{21} < 0, Y_{21} > 0$$

et à la limite du glissement, $Y_{21} = -fZ_{21}$.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}(O, 2 \rightarrow 1)} &= \overline{\mathcal{M}(I, 2 \rightarrow 1)} + \overline{\vec{OI}} \wedge \overline{\vec{R}(2 \rightarrow 1)} = (e\vec{z}_1 + R\vec{z}_0) \wedge (Y_{21}\vec{y}_0 + Z_{21}\vec{z}_0) \\ &= -eY_{21} \cos \theta \vec{x}_0 - eZ_{21} \sin \theta \vec{x}_0 - RY_{21} \vec{x}_0 = -((e \cos \theta + R) Y_{21} + eZ_{21} \sin \theta) \vec{x}_0. \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \text{ Couple moteur : } \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O.$$

Calcul de $\overline{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à (O, \vec{x}_0) on a donc : $\overline{\delta(O, 1/0)} \cdot$

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= \left[\frac{d\sigma(O, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \vec{x}_0 = \left[\frac{d\overline{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_O(1) \overline{\Omega(1/0)} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_1 \dot{\theta} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= I_1 \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Application du théorème du moment dynamique en projection sur \vec{x}_0 .

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + eZ_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{02}\vec{y}_0 \\ L_{02}\vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Y_{21}\vec{y}_0 - Z_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$.
- Ressort : $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_0 - kz\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.
- Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2g\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.
- Fluide : $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_h\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.

Calcul de $\overline{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0$.

$$\overline{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0 = m_2\ddot{z}$$

Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - kz - m_2g = m_2\ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - kz - m_2g - m_2\ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2g - em_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m + e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2g - em_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$

TD 1

Véhicule TIM – Sujet

L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertIELS étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

Florestan Mathurin.

C1-05

C2-08

C2-09



Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues lestées peut être assimilé au solide 1 représenté sur la figure 1, de masse m , de rayon R et de centre de masse G .

L'accélération de la pesanteur \vec{g} tel que $\vec{g} = -g\vec{z}_0$.

L'action de contact entre l'ensemble des roues 1 et le plan 0, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

Question 1 Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Question 2 Déterminer l'expression analytique de l'angle α_{\lim} à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Pour une masse du solide 1 $m = 50 \text{ kg}$ et pour un rayon $R = 0,25 \text{ m}$ le roulement se produit à partir d'un angle α_{\lim} tel que $\tan \alpha_{\lim} = 0,008$.

Question 3 Déterminer le coefficient de résistance au roulement r .

Question 4 Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en A_1 si le coefficient de frottement au contact vaut $f = 0,5$.

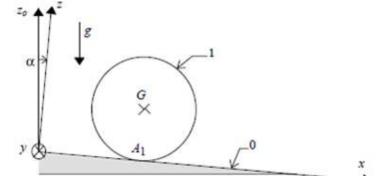


Figure 1

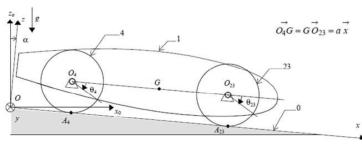
1: Cette action de contact peut s'écrire : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} -T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{Bmatrix}_{A_1}$ où C_r représente le couple de résistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que : $|C_r| = r|N_{01}|$ à la limite de l'équilibre et $|C_r| < r|N_{01}|$ à l'équilibre.

Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle α , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

L'accélération de la pesanteur \vec{g} telle que $\vec{g} = -g\vec{z}_0$. Le modèle est donné figure suivante. On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

- ▶ d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie G , de masse M en translation par rapport au repère galiléen R avec $\vec{OG} = \vec{x}x + \vec{z}z$;
- ▶ de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie O_{23} , de masse $2m$, de rayon R , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe (O_{23}, \vec{y}) sera noté $2I$. Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe (O_{23}, \vec{y}) caractérisé par le paramètre θ_{23} ;
- ▶ d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie O_4 , de masse m , de rayon R , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe (O_4, \vec{y}) sera noté I . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe (O_4, \vec{y}) caractérisé par le paramètre θ_4 ;
- ▶ un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté $C_m \vec{y}$.



Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\} = \begin{cases} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -N_{0i}r\vec{y} \end{cases}_{A_i}$ avec $i = 4$ ou 23 .

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aérodynamique qui peut être modélisée par le torseur $\begin{cases} -\frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ 0 \end{cases}_{O_{23}}$ avec ρ masse volumique du véhicule, S surface alaire, C_x coefficient de traînée du véhicule, \dot{x} vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.

Question 5 Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point A_{23} et A_4 .

Question 6 En isolant l'ensemble $E = 1 + 2 + 3 + 4$, écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} .

Question 7 Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en O_{23} et O_4 en projection sur \vec{y} .

Question 8 Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur C_m vaut : $C_m = (M + 3m)g \cos \alpha r + \left[\frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2}R\rho S C_x \dot{x}^2$.

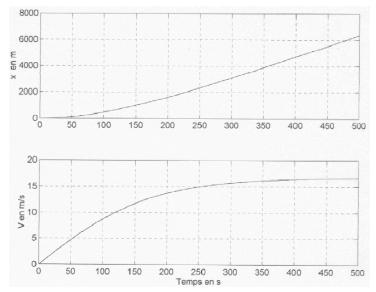
Question 9 Identifier dans l'expression de C_m les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

Question 10 Déterminer l'expression du couple moteur C_m quand le véhicule a une vitesse constante V sur une piste horizontale.

On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple C_m constant. Les données véhicules sont : $M = 70 \text{ kg}$, $m = 1 \text{ kg}$, $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $R = 0,25 \text{ m}$, $C_m = 3,245 \text{ mN}$, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$. L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-dessous.

Question 11 Déterminer dans les conditions d'essais le produit $\frac{1}{2} \rho S C_x$ caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

Question 12 Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de 5 km h^{-1} (on négligera le couple de résistance au roulement).



Éléments de correction

1. $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0; N_{01} - mg \cos \alpha = 0; C_r = RT_{01}.$
2. $\tan \alpha_{\lim} = \frac{r}{R}.$
3. $r = 0,002 \text{ m}.$
4. Pour $\tan \alpha_{\lim} < f$ il y a donc roulement sans glissement.
5. $\dot{x} = R\dot{\theta}_{23}$ et $\ddot{x} = R\ddot{\theta}_4.$
6. $(M + 3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M + 3m)\ddot{x}$ et $-(M + 3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0.$
7. $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$ et $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4.$
- 8.
- 9.
- 10.
11. $\frac{1}{2}\rho S C_x = 0,025 \text{ kg m}^{-1}.$
12. $\alpha = 1^\circ.$

TD 1

Véhicule TIM – Corrigé

Florestan Mathurin.

C1-05

C2-08

C2-09

Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Question 1 Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Correction

- ▶ On isole le solide 1.
- ▶ Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- ▶ On applique le PFS :
 - TRS : $-T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} = -mg\vec{z}_0 = -mg(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x})$;
 - TMS en G en projection sur \vec{y} : $-C_r + RT_{01} = 0$.
- ▶ On résout :
 - $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0$;
 - $N_{01} - mg \cos \alpha = 0$;
 - $C_r = RT_{01}$.



Question 2 Déterminer l'expression analytique de l'angle α_{\lim} à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Correction

À la limite du roulement, on a $C_r = rN_{01} \Leftrightarrow RT_{01} = rN_{01} \Leftrightarrow Rmg \sin \alpha_{\lim} = rmg \cos \alpha_{\lim}$ et $\tan \alpha_{\lim} = \frac{r}{R}$.

Pour une masse du solide 1 $m = 50 \text{ kg}$ et pour un rayon $R = 0,25 \text{ m}$ le roulement se produit à partir d'un angle α_{\lim} tel que $\tan \alpha_{\lim} = 0,008$.

Question 3 Déterminer le coefficient de résistance au roulement r .

Correction

$$r = 0,002 \text{ m.}$$

Question 4 Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en A₁ si le coefficient de frottement au contact vaut $f = 0,5$.

Correction

À la limite du glissement, on a $T_{01} = fN_{01}$ et $\frac{T_{01}}{N_{01}} = \tan \alpha$. Pour $\tan \alpha_{\lim} < f$ il y a donc roulement sans glissement.

Modélisation du véhicule

Question 5 Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point A_{23} et A_4 .

Correction

En A_{23} , on a : $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \overrightarrow{V(A_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)}$ et $\vec{0} = \overrightarrow{V(O_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{A_{23}O_{23}} \wedge \overrightarrow{\Omega(23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} + R\vec{z} \wedge \theta_{23}\vec{y} + \dot{x}\vec{x}$
 $\Rightarrow 0 = -R\dot{\theta}_{23} + \dot{x}$.
 De même en A_4 , $0 = -R\dot{\theta}_4 + \dot{x}$.

Question 6 En isolant l'ensemble $E = 1 + 2 + 3 + 4$, écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} .

Correction

- On isole E .
- BAME :

- Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g(\cos \alpha \vec{z} - \sin \alpha \vec{x}) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E}$.
- Résistance au roulement : $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_i = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$.
- Traînée : $\{\mathcal{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{23}}$.

- La résultante dynamique est donnée par $(M+3m)\overrightarrow{\Gamma(G, E/0)} = (M+3m)\vec{x}\dot{x}$.
- On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} :

- $(M+3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$
- $-(M+3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

Question 7 Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en O_{23} et O_4 en projection sur \vec{y} .

Correction

- On isole 23.
- BAME :

- 23 est soumis à la pesanteur;
- action de la pivot sans frottement avec le solide 1;
- résistance au roulement : $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ -N_{023}r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_{23}} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ (-rN_{023} + RT_{023})\vec{y} \end{array} \right\}_{O_{23}}.$$

- Le moment dynamique de O_{23} centre d'inertie des roues en projection sur \vec{y}_0 s'écrit
 $\frac{\delta(O_{23}, 23/0)}{\delta(O_{23}, 23/0)}\vec{y}_0 = 2I\ddot{\theta}_{23}$.
- TMD en O_{23} en projection sur \vec{y}_0 s'écrit donc $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$.

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur : $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$.

Question 8 Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur C_m vaut : $C_m = (M + 3m)g \cos \alpha r + \left[\frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2}R\rho SC_x \dot{x}^2$.

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a : } C_m &= I\ddot{\theta}_4 + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - rN_{023} + r(M + 3m)g \cos \alpha - RT_{04} \\ &= \frac{I}{R}\ddot{x} - RT_{023} + 2I\ddot{\theta}_{23} + r(M + 3m)g \cos \alpha - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + \frac{2I}{R}\ddot{\theta}_{23} + r(M + 3m)g \cos \alpha - \\ &\quad R \left((M + 3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 - (M + 3m)\ddot{x} \right). \\ C_m &= r(M + 3m)g \cos \alpha + \left(\frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right) \ddot{x} + \left(-R(M + 3m)g \sin \alpha + R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 \right). \end{aligned}$$

CQFD.

Question 9 Identifier dans l'expression de C_m les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

Correction

$$C_m = \underbrace{(M + 3m)gr \cos \alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M + 3m)gR \sin \alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left(\frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right) \ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

Question 10 Déterminer l'expression du couple moteur C_m quand le véhicule a une vitesse constante V sur une piste horizontale.

Correction

À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M + 3m)gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

Question 11 Déterminer dans les conditions d'essais le produit $\frac{1}{2}\rho SC_x$ caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

Correction

La vitesse constante atteinte sur les graphes est de 17 m s^{-1} . Par ailleurs $\frac{1}{2}\rho SC_x = \frac{C_m - (M + 3m)gr}{R\dot{x}^2} = \frac{3,245 - (70 + 3 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 0,002}{0,25 \cdot 17^2} = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$.

Question 12 Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de 5 km h^{-1} (on négligera le couple de résistance au roulement).

Correction

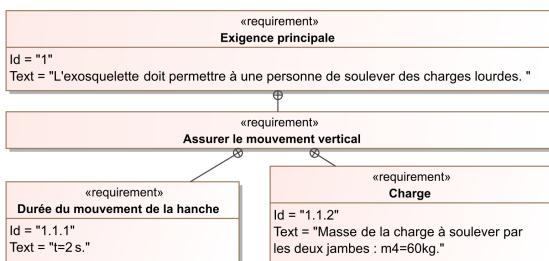
Application 2

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



Objectif

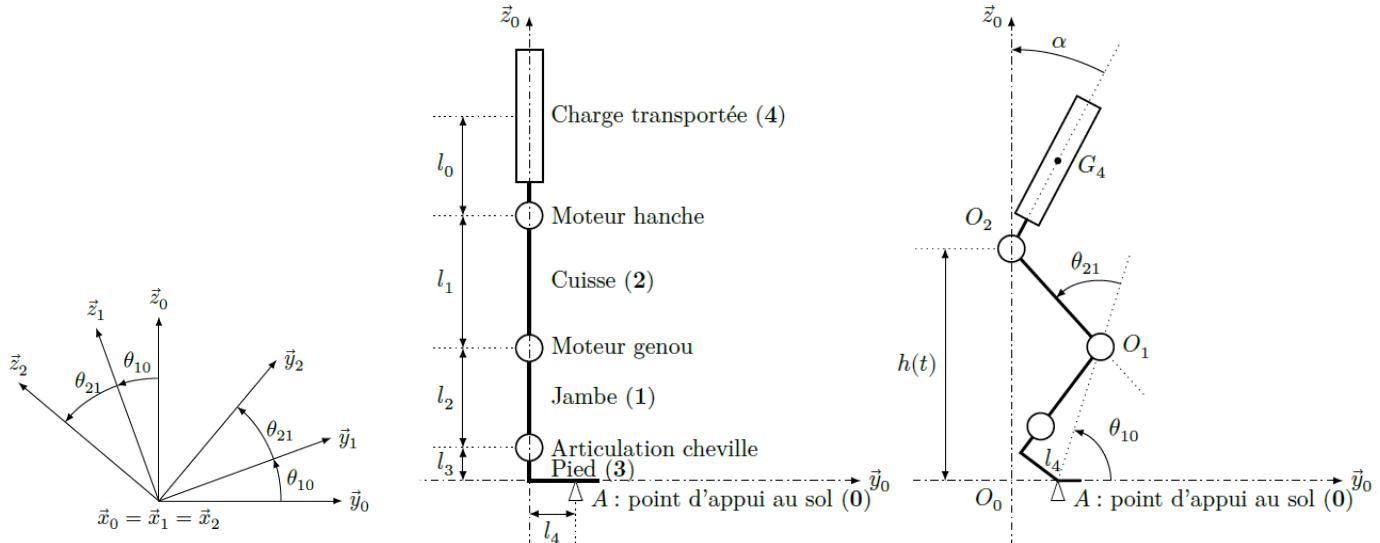
Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle dynamique

Objectif

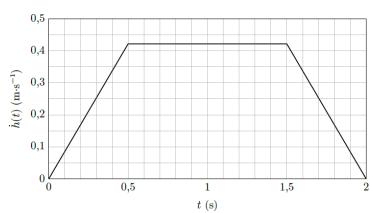
Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massique de la charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation. Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.



Données :

- $\overrightarrow{O_1G_4} = \lambda(t)\vec{z}_0 - L \cos \theta_{10}\vec{y}_0$;
- accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- longueur de la cuisse $l_1 = 43,1 \text{ cm}$.
- longueur de la jambe $l_2 = 43,3 \text{ cm}$.
- longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied $l_3 = 6,9 \text{ cm}$.
- longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol $l_4 = 13 \text{ cm}$.
- longueur $\overrightarrow{O_0O_1} = L\vec{y}_1$ avec $L = 51,8 \text{ cm}$.
- rapport de réduction : $r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{120}$.



Hypothèses :

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées.
- Toutes les masses sont négligées **sauf la masse m_4 de la charge à soulever**.
- L'angle α entre la charge transportée et la verticale \vec{z}_0 reste constant.
- G_4 , centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point A d'appui au sol.

On note $E = \{\text{cuisse}(2) + \text{charge transportée}(4)\}$.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure ci-contre.

Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à $54,5^\circ$ correspondant à la valeur maximale du couple.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Validation du dimensionnement du moteur

Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période $T = 15$ s.

Quatre phases sont définies sur cette période :

- phase 1 pour $0 \leq t < 2$ s, valeur efficace du couple moteur $C_1 = 0,838$ Nm;
- phase 2 pour $2 \leq t < 4$ s, couple moteur constant $C_2 = -0,912$ Nm;
- phase 3 pour $4 \leq t < 6$ s, valeur efficace du couple moteur $C_3 = 0,838$ Nm;
- phase 4 pour $6 \leq t < 15$ s, couple moteur nul.

Question 7 Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini

$$\text{par : } C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T c(t)^2 dt}. \text{ On a aussi } C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i}$$

Question 8 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre $-1,156$ Nm et $0,596$ Nm. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

- vitesse à vide de 3120 tr min^{-1} pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de 36 V ;
- couple permanent admissible de $0,560$ Nm;
- pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de $423 \text{ tr min}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de 2200 tr min^{-1} .

Question 9 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Problématique	
Le moteur pré-choisi permet d'assurer le fonctionnement de l'exosquelette ?	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> Domaine de la modélisation <p>Résolution Cinématique</p> <ul style="list-style-type: none"> • $N_{\text{mot}} = 2200 \text{ tr min}^{-1}$ <p>Modèle cinématique</p> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> Domaine du client <p>Moteur choisi</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vitesse à vide : 3120 tr min^{-1} • Couple permanent admissible : $0,56 \text{ Nm}$ </div>

Éléments de correction

1. $\cdot \overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 =$
2. $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t).$
3. $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t).$
4. $C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t)) \simeq -190,5 \text{ Nm}.$
5. $C_m \simeq 2,12 \text{ Nm}.$
6. ...
7. ...
8. $C_{\text{eff}} \simeq 0,546 \text{ Nm}.$

Application 2

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

Objectif

Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.



Élaboration du modèle dynamique

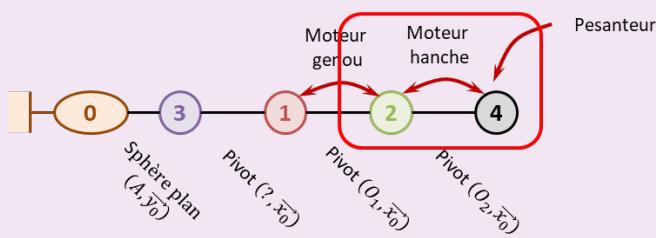
Objectif

Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Correction

Étant donné que l'on souhaite que l'angle α reste constant pendant la levée d'une charge, le mouvement de 4 sera donc un mouvement de translation rectiligne.



Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction

E étant en translation, on a $\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} = \overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} + \overrightarrow{O_1 G_4} \wedge \overrightarrow{R_c(E/0)}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{R_c(E/0)} = m_4 \overrightarrow{V(G_4, E/0)} = m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}$.

On a donc : $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0}$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction

Méthode 1 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}$ et déplacement

On a $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)} = \frac{d\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}}{dt} = \overrightarrow{0}$. En conséquences, $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge m_4 \ddot{h}(t) \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Méthode 2 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}$

On a aussi $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}}{dt} \right) + m_4 \overrightarrow{V(O_1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}$.

Par suite on a $(\overrightarrow{V(O_1, E/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}) \overrightarrow{x_0} = ((L \overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{x_0}) \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} = (-L \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_1} \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} = -L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10}$.

Enfin, $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) + L m_4 \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \dot{h}(t) - m_4 L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à $54,5^\circ$ correspondant à la valeur maximale du couple.

Correction

- On isole l'ensemble E .
- On réalise le bilan des actions mécaniques :

• action de la liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(1 \rightarrow E)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{O_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$;

• action du réducteur : $\{\mathcal{T}(1_r \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{O_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$;

• action de la pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_4 g \overrightarrow{z_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_4}$. On a alors $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} + (\overrightarrow{O_1 G_4} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = (-L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = m_4 g L \cos \theta_{10}$.

- E étant en pivot d'axe $(O_1, \overrightarrow{x_1})$, on applique le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur $\overrightarrow{x_1}$: $-L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) = C_r + m_4 g L \cos \theta_{10} \Leftrightarrow C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t))$.

En réalisant l'application numérique, on a : $C_r = -60 \times 51,8 \times 10^{-2} \times \cos 54,5 \left(9,81 + \frac{0,425}{0,5} \right) \simeq -190,5 \text{ Nm}$.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Correction

En régime permanent, on a $\eta = \frac{C_r \omega_r}{C_m \omega_m} = r \frac{C_r}{C_m}$ et $C_m = \frac{r}{\eta} C_r = \frac{1}{0,75 \times 120} \times 190,5 \simeq 2,12 \text{ Nm.}$

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Correction

Si on en avait la possibilité, il faudrait mettre un capteur de puissance au niveau de la commande (mesure de la vitesse et du couple de commande) puis un capteur de puissance au niveau de la charge (mesure de vitesse et du couple en sortie au niveau du genou). Le rendement peut s'observer en régime permanent en faisant le rapport des puissances. Pour observer une perte de rendement, il est nécessaire que soient modélisées les actions de frottement.

Validation du dimensionnement du moteur

Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Question 7 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

Correction

$$C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i} = \sqrt{\frac{1}{15} (0,838^2 \times 2 + 0,912^2 \times 2 + 0,838^2 \times 2)} \simeq 0,546 \text{ Nm.}$$

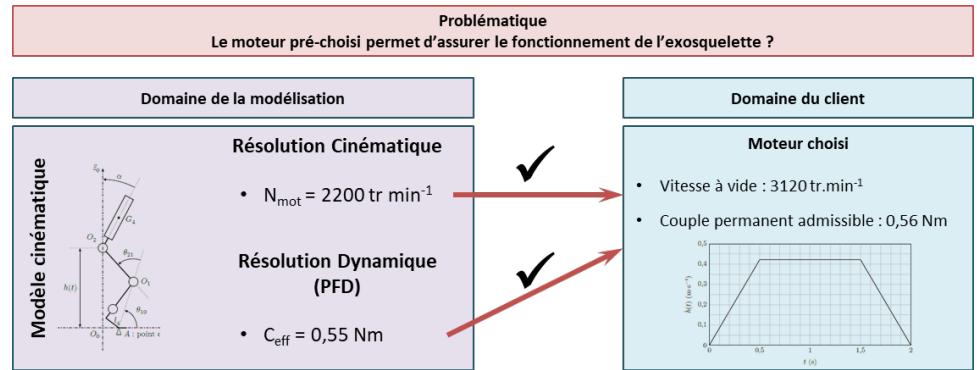
Retour sur l'objectif

Question 8 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Correction

1. Le couple thermiquement équivalent calculé est de 0,546 Nm ce qui est inférieur aux couple admissible par le moteur.
2. La fréquence de rotation à atteindre par le moteur est de 2200 tr min^{-1} . Le moteur proposé tourne à 3120 tr min^{-1} à vide. On peut donc supposer qu'en charge, il atteindra les 2200 tr min^{-1} .

Su ces deux critères le moteur proposé est donc validé.

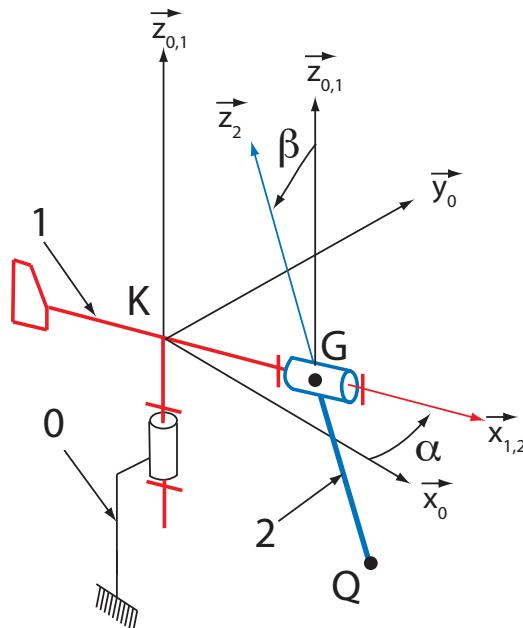


Application 3

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Émilien Durif.

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support 0, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette 1 (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support 0. On lui associe un repère $R_1 = (K, \vec{z}_{0,1}; \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice 2, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec 1. On lui associe un repère $R_2 = (K, \vec{x}_{1,2}; \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M

sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\overrightarrow{KG} = a \vec{x}_1$.
On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\overrightarrow{GQ} = -b \vec{z}_2$.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Éléments de correction

- 1.
2. $C_m = \left(\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)} \right) \cdot \vec{z}_0$
3. $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$
4. $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$
5. $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [ab\dot{\beta}\vec{z}_2 + a^2\dot{\alpha}\vec{z}_1 + b^2\dot{\beta}\vec{x}_2 + ba\dot{\alpha}\cos\beta \cdot \vec{x}_1 + b^2\dot{\alpha}\sin\beta\vec{y}_2]$
6. $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = J\ddot{\alpha}$.
7. $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + Ma^2] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta [B - C]$.
8. $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = m [ab (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)]$
9. $C_m = -mab\dot{\beta}^2 \sin \beta$

Application 3

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Émilien Durif.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Correction

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.



Correction

On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1 + 2 + 3\}$) en projection sur l'axe (K, \vec{z}_0) : $\overrightarrow{\mathcal{M}(K, \bar{E} \rightarrow E)} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\delta(K, E/R_0)} \cdot \vec{z}_0$
 $\Leftrightarrow C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \vec{z}_0.$

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (K, \vec{z}_0) :
- $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = (\overline{\bar{I}_K(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0)}) \cdot \vec{z}_0 = (\overline{\bar{I}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0}) \cdot \vec{z}_0.$

Or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}) soit : $\overline{\bar{I}_K(1) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0} = J$.

Ainsi : $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$.

Remarque

En considérant que $\bar{I}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, $\overline{\bar{I}_K(1)\vec{\Omega}(1/0)} = \begin{pmatrix} -E_1\dot{\alpha} \\ -D_1\dot{\alpha} \\ J\dot{\alpha} \end{pmatrix}$ et
 $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G , on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \bar{I}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0) : \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{y}_2)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$
 $= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} :$
 - $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0)$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(G \in 2/0) : \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \vec{0} - a \cdot \vec{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) = a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$
 - On calcule $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) : a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) = a \cdot \vec{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$
 - On en déduit $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q, 3/0)} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \vec{V} (Q \in 3/0) :$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} : \overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2$
 - On calcule $\vec{V}(Q \in 3/0) : \vec{V}(Q \in 3/0) = \vec{V}(Q \in 3/2) + \vec{V}(Q \in 2/1) + \vec{V}(Q \in 1/0) = \vec{0} + \vec{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \vec{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \vec{0} + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) :$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) &= m \cdot [a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}] \\ &= m [a \cdot b \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2] \end{aligned}$$
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$$

Or, $\vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2$,

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].}$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Correction

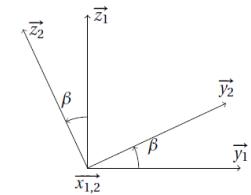
On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction

Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$.



$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 = \cos \beta$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 = 1$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 = 0$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 = \sin \beta$$

Application 4

Le robot humanoïde Lola – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2015.

Mise en situation

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

Les dimensions d'une maison et la hauteur des meubles sont adaptées à notre forme humaine. L'avantage des robots humanoïdes devient alors économique : il n'est pas indispensable de modifier l'environnement quotidien pour les utiliser.

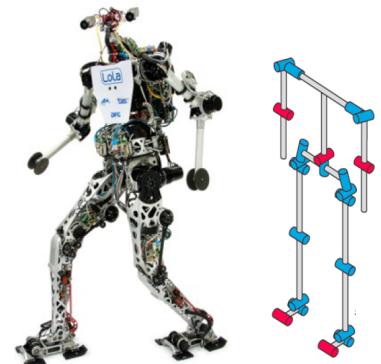
Le robot humanoïde LOLA, développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité accrue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3. Le robot est équipé d'une caméra stéréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertielle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol. Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant.

Stabilité du robot

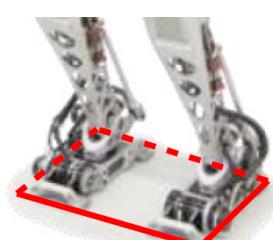
Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, LOLA est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenu dans le polygone de sustentation qui est tracé en rouge autour de ses deux pieds sur la figure suivante. Lorsque le robot marche, il y a une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.

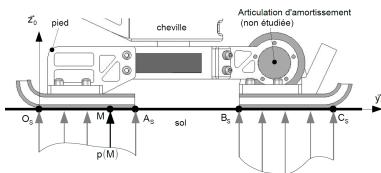
Objectif

L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ci-après.



Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180 cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5 km h ⁻¹ maxi
Hauteur du centre de gravité	105 cm





Exigence 1.3 : Le robot ne doit pas basculer lors de la marche

Description : la position du ZMP reste dans le polygone de sustentation

Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir attendre les performances cibles

1.1.4 La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum

1.1.3 Le robot peut accélérer jusqu'à $1,39 \text{ m s}^{-2}$

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement sur la figure ci-contre.

Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0). Le problème se ramène donc à une répartition linéaire de pression sur les deux segments de contact $[O_S; A_S]$ et $[B_S; C_S]$. En chaque point M (d'ordonnée \vec{y}) de ces segments, la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0$, avec $p(M)$ en N m^{-2} . On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$. Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_S, A_S] \cup [B_S, C_S]$, le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy \end{array} \right\}_{O_S}.$$

Question 1 Montrer que $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ est un glisseur.

Soit H_S le point de la droite (O_S, \vec{y}_0) tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$, on notera $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$. Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Question 2 Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Question 3 Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0 + t(M)\vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

Établissement de la condition de non-basculement

Considérons le robot en marche avec le torse ayant un mouvement de translation vers l'avant (suivant $+\vec{y}_0$). Le robot est toujours dans la phase d'appui d'un seul pied sur le sol, via une des deux jambes notées (2).

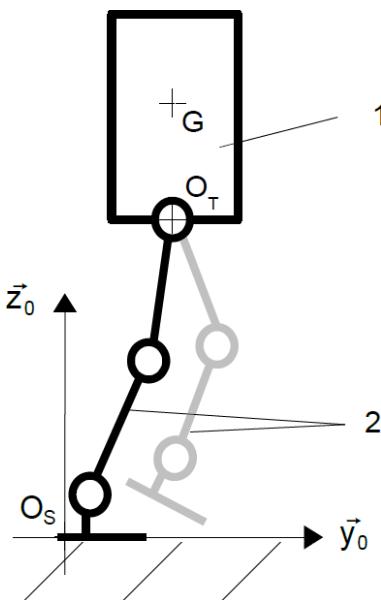
Données et paramètres :

► Torse (1) :

- masse m_1 , accélération de la pesanteur : $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- centre de gravité : G , tel que $\overrightarrow{O_S G} = Y_G(t)\vec{y}_0 + Z_G(t)\vec{z}_0$;
- le torse est supposé en mouvement de translation rectiligne, de direction \vec{y}_0 par rapport au sol, on a : $\{\mathcal{V}(1/\text{Sol})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{dY_G}{dt}\vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$.

► Jambe avec les pieds (2) :

- masses et inerties négligeables dans cette phase;



- le pied d'appui est sans mouvement par rapport au sol;
- l'action mécanique du sol sur la semelle du pied est modélisée par le glisseur : $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{H_S}$ où : H_S est le

ZMP, point mis en évidence à la question 2 tel que $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$,
 $\overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{z}_0 + T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{y}_0$, avec à la limite du glissement
 $|T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}| = \mu N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}$ où μ est le facteur de frottement du contact sol / semelle.

Question 4 En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$.

Conformément au résultat de la question 2, le calculateur du robot contrôle en permanence la position du point H_S (ZMP) : s'il est positionné à l'intérieur du segment $[O_S; C_S]$, le robot ne bascule pas. On appelle foulée, la longueur entre deux emplacements successifs d'appui du même pied. Lors du premier pas, le centre de gravité se déplace de sorte que $Y_G \in \left[-\frac{\text{foulée}}{4}, +\frac{\text{foulée}}{4} \right]$, car pour une accélération constante, les deux pas qui constituent une foulée sont de même longueur.

Le cahier des charges stipule qu'à partir de la station immobile, le robot doit atteindre la vitesse cible de 5 kmh^{-1} en une seconde, avec une accélération constante du centre de gravité $\frac{d^2 Y_G}{dt^2} = 1,39 \text{ m s}^{-2}$. On rappelle que $Z_G = 105 \text{ cm}$.

Question 5 Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S; C_S]$ est $L = 300 \text{ mm}$, déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Question 6 Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

Application 4

Le robot humanoïde Lola – Corrigé

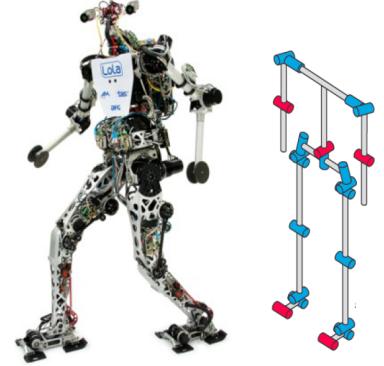
Concours Mines Ponts – PSI 2015.

Mise en situation

Stabilité du robot

Objectif

L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ci-après.



Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

Question 1 Montrer que $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ est un glisseur.

Correction

L'automoment est un des invariants du torseur : $\forall P, \overrightarrow{R}(\text{sol} \rightarrow \text{pied}) \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \text{cst}$. Dans le cas d'un glisseur, il existe un point tel que le moment est nul. L'automoment est donc nul en tous points de l'espace.

Dans notre cas, $b \int_{M \in \Sigma} p(M) \vec{z_0} dy \cdot b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z_0} dy = 0$ (permutation circulaire du produit mixte).

Question 2 Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Correction

On cherche H_S tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$.

On a donc $b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \vec{z_0} dy = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S O_S} + \overrightarrow{O_S M}) \wedge p(M) \vec{z_0} dy = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S O_S} \wedge p(M) \vec{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z_0} dy = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} -Y_{H_S} \vec{y_0} \wedge p(M) \vec{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z_0} dy = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy \vec{x_0} + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z_0} dy = \vec{0}$$

Projetons cette expression sur $\vec{x_0}$: $-Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z_0}) \cdot \vec{x_0} dy = 0$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} p(M) \vec{y_0} \cdot \overrightarrow{O_S M} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy = 0 \text{ soit } Y_{H_S} = \frac{\int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}.$$

On a, en raison du parmaétrage, $Y_M > 0$. Nécessairement, H_S est donc à droite du point O_S .

De même, on a donc $b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S C_S} + \overrightarrow{C_S M}) \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S C_S} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{C_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

On a $\overrightarrow{C_S M} = -\lambda \overrightarrow{y_0}$ avec $\lambda > 0$ ($M \in \Sigma$) et $\overrightarrow{H_S C_S} = \mu \overrightarrow{y}$. En projetant de plus suivant $\overrightarrow{x_0}$, on

a :

$$\left(\int_{M \in \Sigma} \mu \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \right) \overrightarrow{x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{M \in \Sigma} \mu p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda p(M) dy = 0 \text{ soit } \mu = \frac{\int_{M \in \Sigma} \lambda p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}.$$

μ est donc nécessairement positif et H_S est à gauche de C_S .

Au final, H_S appartient à $[O_S C_S]$.

Question 3 Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à dire que la densité d'efforts de contact est $p(M)\overrightarrow{z_0} + t(M)\overrightarrow{y_0}$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

Correction

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} &= \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} (p(M) \overrightarrow{z_0} + t(M) \overrightarrow{y_0}) dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{z_0} dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S} + \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} t(M) \overrightarrow{y_0} dy \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_S}. \end{aligned}$$

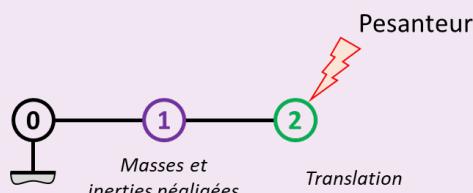
Le premier torseur vérifie bien les deux premières questions. Le second torseur est bien un glisseur (automoment nul).

(...)

Établissement de la condition de non-basculement

Question 4 En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$.

Correction



- On isole 1+2.
- Bilan des actions mécaniques :
 - action de la pesanteur;
 - action du sol.
- On applique le TMD au point H_S en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.

- $\frac{\overrightarrow{\delta(1,0/G)}}{R_d(1/0)} = \vec{0}$ (mouvement de translation). $\overrightarrow{\delta(1,0/H_S)} = \overrightarrow{\delta(1,0/G)} + \overrightarrow{H_S G} \wedge$
 $= m_1 (-Y_{H_S} \vec{y}_0 + Y_G(t) \vec{y}_0 + Z_G(t) \vec{z}_0) \wedge \vec{Y}_G \vec{y}_0 = -m_1 Z_G(t) \vec{Y}_G \vec{x}_0.$
- Déplacement de l'action de la pesanteur : $(-Y_{H_S} \vec{y}_0 + Y_G(t) \vec{y}_0 + Z_G(t) \vec{z}_0) \wedge -m_1 g \vec{z}_0$
 $= -m_1 g (-Y_{H_S} \vec{x}_0 + Y_G(t) \vec{x}_0).$
- Au final, $-m_1 g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = -m_1 Z_G(t) \vec{Y}_G \Leftrightarrow g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = Z_G(t) \vec{Y}_G$. On a donc $g Y_G(t) - Z_G(t) \vec{Y}_G = g Y_{H_S}$ et $Y_{H_S} = \frac{g Y_G(t) - Z_G(t) \vec{Y}_G}{g}$.

En faisant le TMD au point H_S il est inutile de faire le TRD.

Question 5 Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S; C_S]$ est $L = 300$ mm, déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Correction

Le cas limite de basculement est lorsque $H_S = C_S$ et donc $Y_{H_S} = L$.

On a donc $Y_G(t) = Y_{H_S} + \frac{Z_G(t) \vec{Y}_G}{g} = 300 + \frac{1050 \times 1390}{9810} = 449$ mm.

La foulée est donnée par $4Y_G \approx 1,795$ m < 1,50 m. L'exigence 1.1.4 n'est pas respectée.

Question 6 Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

Correction

On isole (1+2) et on réalise le TRD :

- projection sur \vec{y}_0 : $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = m_1 \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2}$;
- projection sur \vec{z}_0 : $b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy - m_1 g = 0$.

À la limite du glissement, on a $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = \mu b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy$ soit $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max} = \mu g = 0,1 \times 9,81 = 0,981 \text{ m s}^{-2} < 1,39 \text{ m s}^{-2}$. L'exigence 1.1.3 n'est pas respectée.

Application 5

Régulateur centrifuge – Sujet

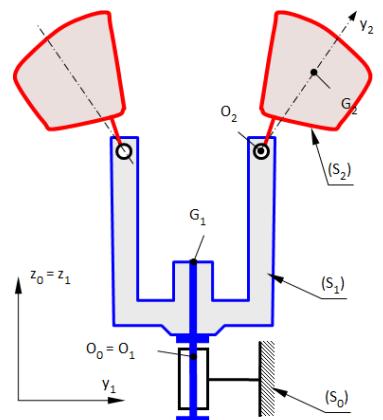
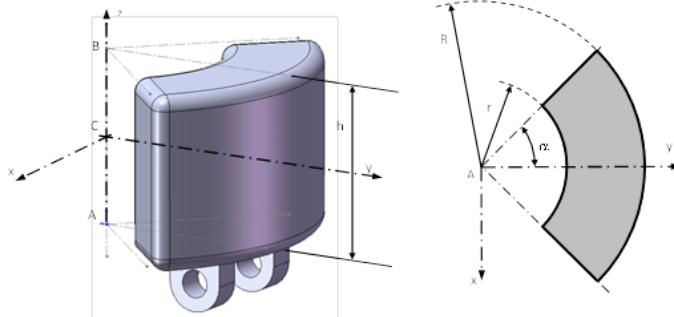
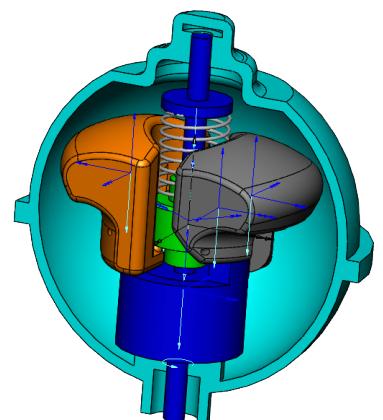
C. Gamelon & P. Dubois.

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-contre.

- (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- $\overrightarrow{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- $\overrightarrow{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

C1-05

C2-09

Question 3 Déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 et le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

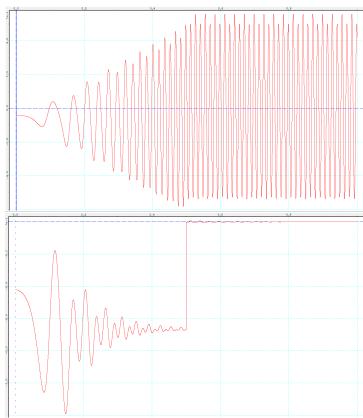
Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.



Application 5

Régulateur centrifuge – Corrigé

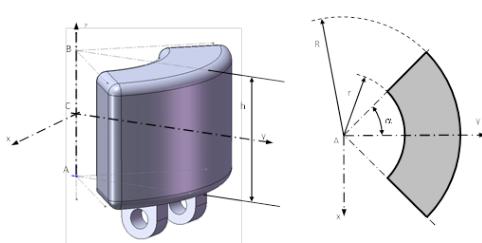
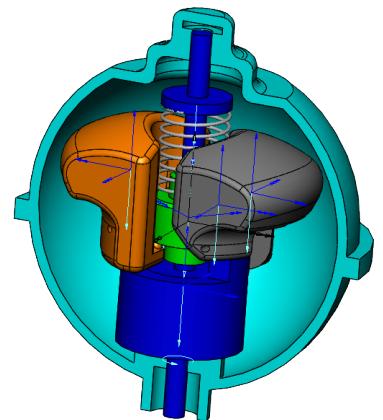
C. Gamelon & P. Dubois.

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-contre.

- (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- $\overrightarrow{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- $\overrightarrow{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.

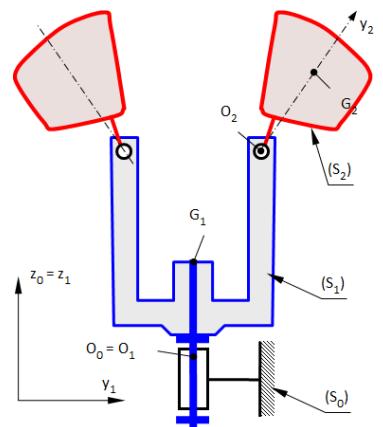


Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Correction

Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On a donc $I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$.

Le solide 2 admet le plan (\vec{y}_2, \vec{z}_2) comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant



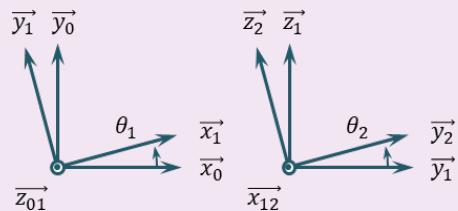
de x sont nuls. On a donc $I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$.

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 et le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

Correction



Mouvement du solide 1/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}.$$

O_1 est un point fixe dans R_0 .

$$\{\mathcal{C}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ I_{O_1}(S_1) \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \text{ et } \{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}$$

Mouvement du solide 2/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2}{V(G_2, S_2/R_0)} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_2}.$$

$$\overrightarrow{V(G_2, S_2/R_0)} = \overrightarrow{V(G_2, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G_2, S_1/R_0)}$$

$$= \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_2, S_2/S_1)} + \overrightarrow{G_2 O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}}_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_0, S_1/R_0)} + \overrightarrow{G_2 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}}_{\vec{0}} \right)$$

$$= (-L_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) + (-(\vec{d}_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + L_2 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1) = L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1$$

G_2 est le centre de gravité de S_2 .

$$\{\mathcal{C}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 (L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1) \\ I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1 (\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2$$

$$I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} =$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, S_2/R_0)} \\ \left[\frac{d}{dt} \left(I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right) \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2} \\
\overrightarrow{\Gamma(G_2, S_2/R_0)} &= \left[\frac{d \left(L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \right)}{dt} \right]_{R_0} \\
&= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_2 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \right) - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1 (-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{x}_1 - \\
&\quad \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\
&= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2 + (2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2)) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\
\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} &= \dots \\
&= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} \\
&+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \quad + \quad (B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \left(-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \right) \quad + \\
&(-D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \left(\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \right) \\
\left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \\
\left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\
\left[\frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1
\end{aligned}$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

Correction

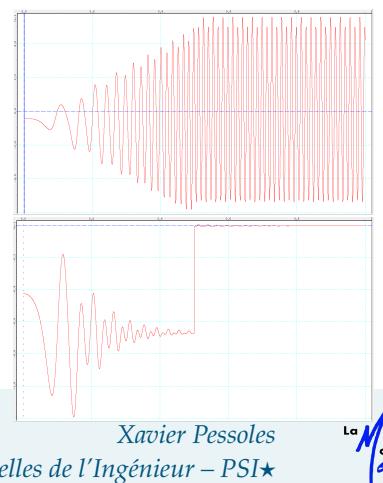
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2 \\
&= \left(\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\
&= \left(\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\
&\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \vec{x}_2 + \\
&\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0}
\end{aligned}$$

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne les résultats de deux simulations permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.



Application 6

Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Subject

Centrale Supélec PSI 2014.

L'accroissement de la circulation automobile dans les grandes agglomérations menace de saturation leur réseau d'autoroutes. Une des solutions consiste à augmenter les flux en automatisant les voitures sur ces dernières. Après une évaluation du gain en terme de flux d'automobiles que peut apporter ce concept, l'étude portera sur le système de guidage automatique latéral d'une automobile sur une autoroute dite « intelligente ».

C1-05

C2-09

Objectif

L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

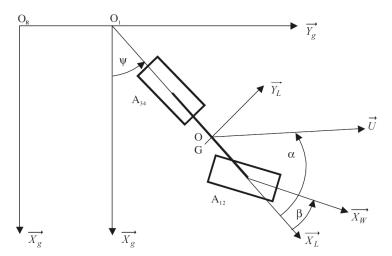
Une approche simplifiée permettant d'aborder le problème consiste à adopter un modèle dit « bicyclette », représenté sur la figure suivante, qui assimile le comportement du véhicule à celui d'une bicyclette :

- ▶ le train avant directeur se réduit à une seule roue (12) sur laquelle s'appliquent les actions exercées sur les deux roues avant (1) et (2) du véhicule, de même la roue arrière (34) supporte les actions exercées par l'essieu arrière portant les roues (3) et (4), les pneumatiques avant et arrière ont les mêmes caractéristiques, en particulier le même coefficient de dérive (celui-ci sera défini plus loin);
- ▶ le modèle choisi est un modèle à 2 degrés de liberté : l'angle de lacet $\psi(t) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L)$ et l'angle d'attitude $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$. La rotation de chaque roue autour de son axe n'est pas prise en compte;
- ▶ on notera que l'angle de braquage des roues $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$ avant est imposé au moyen d'un asservissement qui ne sera pas étudié dans le cadre de ce problème;
- ▶ les roues ont une masse supposée négligeable.

Cette modélisation ne prend pas en compte les mouvements suivants : tangage (rotation autour de \vec{Y}_L) et roulis (rotation autour de \vec{X}_L).

Les différents repères sont les suivants :

- ▶ repère galiléen : $\mathcal{R}_g(O_g; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, O_g est lié à la route, $\Pi_R = (\vec{X}_g, \vec{Y}_g)$ plan fixe par rapport à la route;
- ▶ repère intermédiaire : $\mathcal{R}_1(O_1; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, $\overrightarrow{O_R O_1} = a \vec{Y}_g$;
- ▶ repère intermédiaire : $\mathcal{R}_0(O; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, O lié au châssis et $\overrightarrow{O_1 O} = b \vec{X}_L$, $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$, $\vec{V}(O, \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_g) = \vec{V} \vec{U}$ avec $\overrightarrow{O_R O} \cdot \vec{Z}_g = 0$ et V constante



positive;

- repère lacet $\mathcal{R}_0(G; \vec{X}_L, \vec{Y}_L, \vec{Z}_L)$, $\vec{OG} = h\vec{Z}_g$ avec G centre d'inertie lié du châssis lié au véhicule, $\vec{Z}_L = \vec{Z}_g$ et $(\vec{Y}_g, \vec{Y}_L) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L) = \psi(t)$ angle de lacet, h constate positive;
- repère lié à la roue $\mathcal{R}_W(A_i; \vec{X}_W, \vec{Y}_W, \vec{Z}_W)$, A_i centre de la roue R_i (assimilée à un disque), $\vec{Z}_W = \vec{Z}_L$ avec $\vec{OA}_{12} = l_1\vec{X}_L$ et $\vec{OA}_{34} = -l_2\vec{X}_L$, $(\vec{Y}_L, \vec{Y}_W) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W) = \beta(t)$ angle de braquage.

On appelle :

- $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$: angle d'attitude,
- $\psi(t) = (\vec{X}_G, \vec{X}_L)$: angle de lacet,
- $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$: angle de braquage de la roue avant.

Le torseur cinématique du mouvement du véhicule (VH) par rapport à \mathcal{R}_g , au point O , est noté : $\{\mathcal{V}(VH/\mathcal{R}_g)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} \\ \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U} \end{array} \right\}_O$.

La roue munie d'un pneumatique se comporte différemment d'une roue rigide au niveau du contact avec le sol. On adoptera le modèle représenté sur la figure ci-contre.

Le contact roue/sol pour chaque roue est modélisé par le torseur d'efforts suivant :

$$\{\mathcal{T}(\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M_i, \text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \end{array} \right\}_{M_i} \text{ avec } i \in \{12, 34\} \text{ avec } \overrightarrow{OM_{12}} = \ell_1\vec{X}_L - R\vec{Z}_L \text{ et } \overrightarrow{OM_{34}} = -\ell_2\vec{X}_L - R\vec{Z}_L.$$

L'angle de dérive d'un pneumatique est défini par : $\delta_i = (\vec{X}_W, \overrightarrow{V(M_i/\mathcal{R}_g)})$. Si D désigne le coefficient de dérive du pneumatique, on admettra qu'on peut écrire $Y_i = -D\delta_i$, soit ici $Y_{12} = -2D\delta_{12}$ et $Y_{34} = -2D\delta_{34}$. Comme la vitesse du véhicule est supposée constante et la roue arrière n'est pas motrice, on peut considérer : $X_{12} = 0$ et $X_{34} = 0$. La matrice d'inertie du véhicule de masse M , dans le repère \mathcal{R}_L , est de la

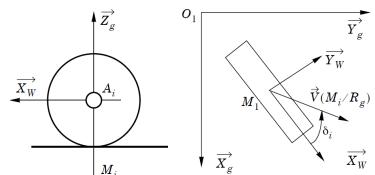
forme : $I_G(VH) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ Remarque : le véhicule comprend la caisse, les roues, et sera modélisé dans la mise en équation comme un solide indéformable.

Modélisation du comportement dynamique du véhicule

Question 1 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}, \alpha, h, V$ et des caractéristiques inertielles.

Question 2 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}, \ddot{\psi}, \dot{\alpha}, \alpha, h, V$ et des caractéristiques inertielles.

Question 3 On note $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_G . Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L$ en fonction de $\dot{\psi}, \ddot{\alpha}, \alpha, V$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0, \psi = 0$ et $\beta = 0$.



Question 4 En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$

et celui de la roue arrière $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$, en déduire l'expression de $\overrightarrow{R(\overline{VH} \rightarrow VH)} \cdot \vec{Y_L}$.

Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Question 5 Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V} \right) \dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V} \dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1 = 1 \text{ m}$, $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$, $D = 21\,000 \text{ N rad}^{-1}$, $C = 3100 \text{ kg m}^2$, $M = 1500 \text{ kg}$, $V = 15 \text{ m s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

Question 6 En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.

Application 6

Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Corrigé

Centrale Supelec PSI 2014.

Objectif

L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

C1-05

C2-09

Modélisation du comportement dynamique du véhicule

Question 1 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, α , h , V et des caractéristiques inertielles.

Correction

La matrice d'inertie étant donnée en G , commençons par calculer $\overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = I_G(VH)\overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \dot{\psi} \overrightarrow{Z_g} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

Il faut alors déplacer le moment cinétique. On aura pour cela besoin de $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{VU} - h\overrightarrow{Z_g} \wedge \dot{\psi} \overrightarrow{Z_g} = \overrightarrow{VU}$.

Au final, $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{OG} \wedge MV\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + h\overrightarrow{Z_g} \wedge MV\overrightarrow{U}$
 $= \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV \left(\cos \alpha \overrightarrow{Y_L} - \sin \alpha \overrightarrow{X_L} \right) = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} - hMV \sin \alpha \\ hMV \cos \alpha \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

– Je note \overrightarrow{V} le vecteur tel que $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{Z_L})$ est une base. –



Question 2 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α , h , V et des caractéristiques inertielles.

Correction

On a en un point quelconque $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \left[\frac{d\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge \overrightarrow{MV(G, VH/\mathcal{R}_g)}.$

D'une part, $\left[\frac{d\vec{X}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \dot{\psi} \vec{Y}_L$ et $\left[\frac{d\vec{Y}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = -\dot{\psi} \vec{X}_L$. On a donc $\left[\frac{d\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - \dot{\alpha}hMV \cos \alpha - \dot{\psi}(hMV \cos \alpha) \\ -\dot{\alpha}hMV \sin \alpha + \dot{\psi}(-E\ddot{\psi} - hMV \sin \alpha) \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$

D'autre part, $\overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge \overrightarrow{MV(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U} \wedge MV\vec{U} = \vec{0}.$

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})(hMV \cos \alpha) \\ -E\ddot{\psi}^2 - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})hMV \sin \alpha \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$

Question 3 On note $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_G . Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L$ en fonction de $\dot{\psi}, \dot{\alpha}, \alpha, V$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0, \psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction

On a vu que $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U}$, donc $\overrightarrow{\Gamma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})\vec{V} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})(\cos \alpha \vec{Y}_L - \sin \alpha \vec{X}_L)$. On a donc $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha$. En linéarisant cette relation, on a $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})$.

Question 4 En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$ et celui de la roue arrière $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$, en déduire l'expression de $\overrightarrow{R(\overline{VH} \rightarrow VH)} \cdot \vec{Y}_L$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0, \psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction

On a $Y_{12} = -2D\delta_{12}$ et $Y_{34} = -2D\delta_{34}$. En conséquence, $Y_{12} = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)$ et $Y_{34} = -2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$. Au final, $\overrightarrow{R(\overline{VH} \rightarrow VH)} \cdot \vec{Y}_L = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right) - 2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right) = -2D\left(2\alpha - \beta + \frac{\ell_1 - \ell_2}{V}\dot{\psi}\right).$

Question 5 Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V}\right)\dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V}\dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1 = 1 \text{ m}$, $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$, $D = 21\,000 \text{ N rad}^{-1}$, $C = 3100 \text{ kg m}^2$, $M = 1500 \text{ kg}$, $V = 15 \text{ m s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

Correction

La première équation correspond au théorème de la résultante dynamique appliqué à VH en projection sur \vec{Y}_L .

La seconde équation correspond au théorème du moment dynamique appliqué à VH en O projection sur \vec{Z}_L .

Question 6 En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.

Correction

Dans le domaine de Laplace, on a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 211p\psi(p) + 225p\alpha(p) + 840\alpha(p) = 420\beta(p) \\ 31p^2\psi(p) + 91p\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} (225p + 840)\alpha(p) = 420\beta(p) - 211p\psi(p) \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha(p) = \frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \\ & \Rightarrow \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) + \left(\frac{-210 \times 420}{225p + 840} - 420\right)\beta(p) = 0 \\ & \Rightarrow H_2(p) = \frac{\frac{210 \times 420}{225p + 840} + 420}{31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}} = \frac{210 \times 420 + 420(225p + 840)}{(225p + 840)(31p^2 + 91p) + 210 \times 211p} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p((225p + 840)(31p + 91) + 210 \times 211)} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)} \\ & = \frac{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)}{441000 + 94500p} \\ & = \frac{p(6975p^2 + 46515p + 120750)}{p(6975p^2 + 46515p + 120750)} \end{aligned}$$

TD 2

Orthèse d'épaule – Sujet

Centrale Supelec PSI 2010.

Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

Objectif

L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

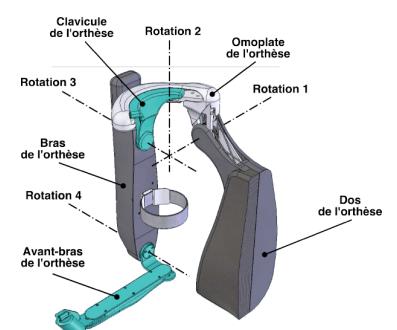
La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs (K_1, K_2) de maintien (pour ce critère, seule la force Z_F est considérée).	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma = K_1 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta = K_2 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras (γ et δ) et la variation de la force Z_F (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs (K_1, K_2).

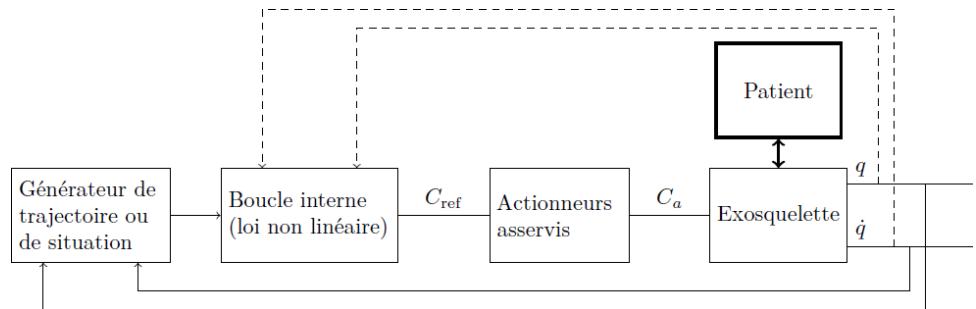
C1-05

C2-09



La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- ▶ q et \dot{q} sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations;
- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence $C_a = C_{\text{ref}}$.

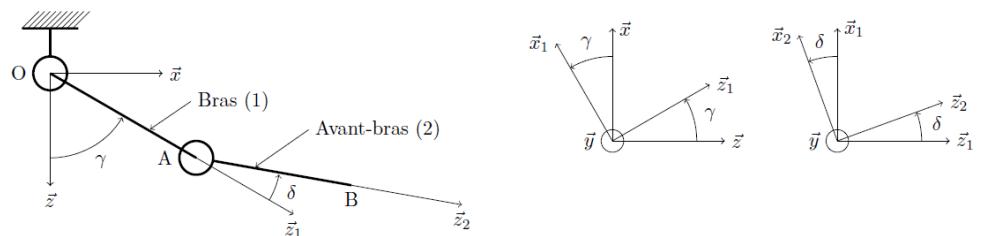


Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan $(\vec{x}; \vec{z})$ donné, où l'on choisit \vec{z} vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.



Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie G_1 tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1$, $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2}$ kg · m ² $B_1 = 2,3 \times 10^{-2}$ kg · m ² $D_1 = 2,1 \times 10^{-3}$ kg · m ²
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie G_2 tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$, $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m ² $B_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m ² $D_2 = 4,3 \times 10^{-5}$ kg · m ²

Question 1 Exprimer littéralement, au point G_2 et dans le repère R_1 , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe R_0 supposé galiléen : $\{\mathcal{T}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2, (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- ▶ l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- ▶ l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe (O, \vec{y}) et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :

$$\{\mathcal{T}(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$$
où les paramètres $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$ sont inconnus ;
- ▶ l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} : $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$ où le couple $C_1(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe (A, \vec{y}) et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\{\mathcal{T}(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$ où les paramètres $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$ sont inconnus ;
- ▶ les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées : $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$ et $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$ où le couple $C_2(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité B de l'avant-bras et définie par : $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$.

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.

Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & \left(B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\gamma} + \left(B_2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 \left(\lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta \right) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin(\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos(\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

Question 2 Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

Question 3 Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

Question 4 Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple $C_2(t)$, et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$ des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

Question 5 En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ où C est un vecteur et A, B et Q sont des matrices 2×2 que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement (γ, δ) et de leurs dérivées premières $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$.

Question 6 Calculer les couples (C_1, C_2) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ($X_F = 0, Z_F = 0$) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

Question 7 Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

TD 2

Orthèse d'épaule – Corrigé

Centrale Supelec PSI 2010.

Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

C1-05

C2-09

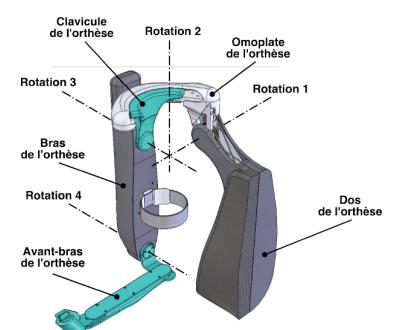
Objectif

L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

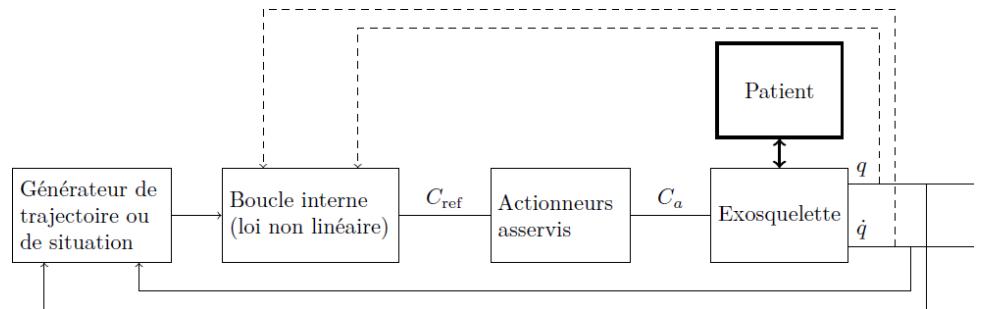
Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs (K_1, K_2) de maintien (pour ce critère, seule la force Z_F est considérée).	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma = K_1 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta = K_2 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras (γ et δ) et la variation de la force Z_F (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs (K_1, K_2).



La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- ▶ q et \dot{q} sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations;
- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence $C_a = C_{\text{ref}}$.

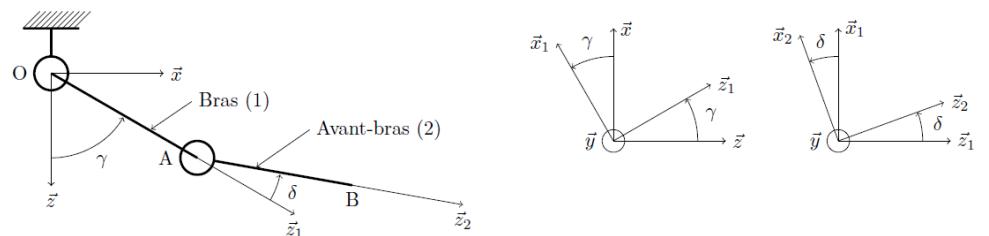


Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan $(\vec{x}; \vec{z})$ donné, où l'on choisit \vec{z} vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.



Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie G_1 tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1$, $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2}$ kg · m ² $B_1 = 2,3 \times 10^{-2}$ kg · m ² $D_1 = 2,1 \times 10^{-3}$ kg · m ²
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie G_2 tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$, $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m ² $B_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m ² $D_2 = 4,3 \times 10^{-5}$ kg · m ²

Question 1 Exprimer littéralement, au point G_2 et dans le repère R_1 , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe R_0 supposé galiléen : $\{\mathcal{T}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2, (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- ▶ l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- ▶ l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe (O, \vec{y}) et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :

$$\{\mathcal{T}(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$$
où les paramètres $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$ sont inconnus ;
- ▶ l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} : $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$ où le couple $C_1(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe (A, \vec{y}) et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\{\mathcal{T}(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$ où les paramètres $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$ sont inconnus ;
- ▶ les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées : $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$ et $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$ où le couple $C_2(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité B de l'avant-bras et définie par : $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$.

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.

Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & \left(B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\gamma} + \left(B_2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 \left(\lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta \right) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin(\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos(\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

Question 2 Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

Correction

Question 3 Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

Correction

Question 4 Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple $C_2(t)$, et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$ des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

Correction

Question 5 En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ où C est un vecteur et A, B et Q sont des matrices 2×2 que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement (γ, δ) et de leurs dérivées premières $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$.

Correction

Question 6 Calculer les couples (C_1, C_2) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ($X_F = 0, Z_F = 0$) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

Correction

Question 7 Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

Correction

Question 8

$$\boxed{\begin{aligned} \{D_{AB/R0}\} &= \{D_{2/0}\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \bar{a}(G_2, 2/0) \\ \bar{\delta}_{G2}(2/0) \end{array} \right\} \\ \bar{V}(G_2, 2/0) &= l_1 \dot{\gamma} \bar{x}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{x}_2 \\ \bar{a}(G_2, 2/0) &= l_1 \dot{\gamma} \bar{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \bar{z}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \bar{z}_2 \\ m_2 \bar{a}(G_2, 2/0) &= m_2 \left| \begin{array}{c} l_1 \dot{\gamma} + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 \\ -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \cos \delta \end{array} \right|_{R1} \\ \bar{\sigma}_{G2}(2/0) &= [I_{G2}(2)] \bar{\Omega}(2/0) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R2 R2} . \left| \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\gamma} + \dot{\delta} = \\ 0 \end{array} \right|_{R2 ou R1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\delta}_{G2}(2/0) &= \left(\frac{d \bar{\sigma}_{G2}(2/0)}{dt} \right)_0 = B_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{y}_1 \end{aligned}}$$

Question 9

- On isole l'ensemble {bras (1) + Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$$\begin{aligned} \{T(bâti \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{l} X_1 \bar{x}_1 + Y_1 \bar{y}_1 + Z_1 \bar{z}_1 \\ L_1 \bar{x}_1 + M_1 \bar{y}_1 + N_1 \bar{z}_1 \end{array} \right\}_O \text{ avec } M_1 = 0 \text{ si liaison pivot parfaite ;} \\ \{T(actionneur1 \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \bar{0} \\ C_1(t) \bar{y} \end{array} \right\}_O ; \\ \{T(force \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{l} X_F \bar{x} + Z_F \bar{z} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_B ; \\ \{T(pesanteur \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{l} m_1 g \bar{z} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_{G1} ; \\ \{T(pesanteur \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{l} m_2 g \bar{z} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_{G2} ; \end{aligned}$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en 0 selon la direction \bar{y} :

$$C_1(t) + 0 + (\overrightarrow{OB} \wedge (X_F \bar{x} + Z_F \bar{z}) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 g \bar{z} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 g \bar{z}) \bar{y} = \bar{\delta}_O(1/0) \bar{y} + \bar{\delta}_O(2/0) \bar{y}$$

Question 10

Compléments au corrigé : Détails du calcul (**non demandé**) :

$$\overrightarrow{OB} = l_1 \bar{z}_1 + l_2 \bar{z}_2 ; \quad \overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \bar{z}_1 ; \quad \overrightarrow{OG_2} = l_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 \bar{z}_2$$

$$\bar{\delta}_O(2/0) = \bar{\delta}_{G2}(2/0) + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \bar{a}(G_2, 2/0)$$

$$\bar{\delta}_O(2/0) \cdot \bar{y} = B_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) + \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 \sin \delta & l_1 \dot{\gamma} + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 & 0 \\ \hline l_1 + \lambda_2 \cos \delta & -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \cos \delta \end{array} \right) \bar{y}$$

$$\dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \dot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

$$\bar{\delta}_O(1/0) = \bar{\delta}_{G1}(1/0) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \bar{a}(G_1, 2/0)$$

$$\bar{\delta}_O(1/0) \cdot \bar{y} = B_1 \dot{\gamma} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & l_1 \dot{\gamma} \\ 0 \wedge m_1 & 0 \\ \hline l_1 & -l_1 \dot{\gamma}^2 \end{array} \right) \cdot \bar{y} = \dot{\gamma} (B_1 + m_1 l_1^2)$$

Soit :

$$\begin{aligned} C_1(t) + l_1 X_F \cos \gamma - l_1 Z_F \sin \gamma + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_1 m_1 g \sin \gamma - l_1 m_2 g \sin \gamma - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = \\ \dot{\gamma} (B_1 + m_1 l_1^2) + \dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \dot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2 \end{aligned}$$

Question 11

- On isole l'Avant-Bras (2).

• BAME :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_2 \ddot{x}_1 + Y_2 \ddot{y}_1 + Z_2 \ddot{z}_1 \\ L_2 \ddot{x}_1 + M_2 \ddot{y}_1 + N_2 \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} \text{ avec } M_2=0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(\text{actionneur}2 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_2(t) \ddot{y} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{force} \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_F \ddot{x} + Z_F \ddot{z} \\ \bar{0} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} m_2 g \ddot{z} \\ \bar{0} \end{Bmatrix} ;$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en A selon la direction \vec{y} :

$$C_2(t) + 0 + (\overrightarrow{AB} \wedge (X_F \ddot{x} + Z_F \ddot{z}) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 g \ddot{z}) \cdot \vec{y} = \vec{\delta}_2(2/0) \cdot \vec{y}$$

- Détails du calcul :

$$\overrightarrow{AB} = l_2 \ddot{z}_2 ; \overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \ddot{z}_2$$

$$\vec{\delta}_A(2/0) = \vec{\delta}_{G_2}(2/0) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \vec{a}(G_2, 2/0)$$

$$\text{avec } \vec{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{y} \ddot{x}_1 - l_1 \dot{y}^2 \ddot{z}_1 + \lambda_2 (\ddot{y} + \ddot{\delta}) \ddot{x}_2 - \lambda_2 (\dot{y} + \delta) \ddot{z}_2$$

$$\vec{\delta}_A(2/0) \cdot \vec{y} = B_2 (\ddot{y} + \ddot{\delta}) + \begin{pmatrix} 0 & l_1 \ddot{y} \cos \delta + l_1 \dot{y}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\dot{y} + \delta) \\ 0 \wedge m_2 & 0 \\ R_2 \lambda_2 & l_1 \ddot{y} \sin \delta - l_1 \dot{y}^2 \cos \delta - \lambda_2 (\dot{y} + \delta) \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$$

$$= B_2 (\ddot{y} + \ddot{\delta}) + m_2 \lambda_2 (l_1 \ddot{y} \cos \delta + l_1 \dot{y}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\dot{y} + \delta))$$

Soit :

$$\boxed{C_2(t) + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) =}$$

$$\boxed{\ddot{y} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y}^2 \sin \delta}$$

Question 12

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y} \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{y} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{y} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas statique (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F , Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 13

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas statique (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F , Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 14

Hypothèses :

- $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$ et $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$ (statique)
- $\gamma = \pi/2$ et $\delta = 0$ (configuration la plus défavorable)

$$C_{1,\text{statmax}} = (l_1 + l_2)Z_F + C_{1,\text{permax}} \text{ et } C_{2,\text{statmax}} = l_2 Z_F + C_{2,\text{permax}}$$

Le couple statique maximal est limité à $C_{1,\text{statmax}} = 50$ N.m soit :

$$Z_{F,\text{max}} = \frac{C_{1,\text{statmax}} - C_{1,\text{permax}}}{l_1 + l_2} = \frac{50 - 2,55}{0,35 + 0,27} \text{ soit } \boxed{Z_{F,\text{max}} = 76,5N}$$

Le cahier des charges est respecté (effort de manipulation maximal du patient 50 N.m)

TD 3

Stabilisateur passif d'image – Sujet

Mines Ponts 2018 – PSI.

C1-05

C2-09

Mise en situation

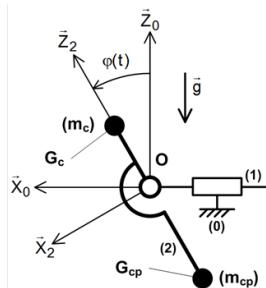
Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif. Le but de ce sujet est de s'intéresser au support de la caméra assurant la liaison entre le bras de l'utilisateur et la caméra elle-même.

Le stabilisateur se compose principalement de trois objets :

- ▶ une poignée orientable (1) manipulée directement par le photographe, liée au support (2) en O ;
- ▶ un support rigide (2) (**supposé sans masse**) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle m_c placée en G_c ;
- ▶ un contrepoids lié à (2) et assimilé à une masse ponctuelle m_{cp} placée en G_{cp} .



Système réel



Modèle utilisé



L'utilisateur tient fermement la poignée (1) dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le (**porteur + (1)**) ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

Dans le cas général, le mouvement du bras par rapport au référentiel terrestre est quelconque (6 degrés de libertés). Ici, on se limite à un mouvement de translation. Dans le cas général, afin que la caméra soit en position verticale, le support doit permettre 3 rotations dans la liaison avec (**porteur + (1)**). Ici on se limite à la stabilisation d'une seule rotation.

Objectif

Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.

Travail demandé

On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur (**1**) est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble (**E**)=**Support(2) + Caméra(C) + Contrepoids(Cp)** est en équilibre stable en position verticale. On note $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(P, 1/0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$. On note $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. De plus, $\overrightarrow{OG_C} = L_C \overrightarrow{Z_2}$ et $\overrightarrow{OG_{CP}} = -L_{CP} \overrightarrow{Z_2}$.

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (**E**) dans (**0**) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Afin de quantifier la modification d'attitude de (**E**), l'équation de mouvement est linéarisée autour de la position d'équilibre (verticale) en supposant que les valeurs de l'angle restent faibles. On transpose cette équation différentielle dans le domaine de Laplace et on note $\mathcal{L}(\varphi(t)) = \Phi(p)$ et $\mathcal{L}(a(t)) = A(p)$. Afin de conserver la fluidité des images lors de travelling, les fluctuations indésirables des mouvements du porteur ne doivent pas être intégralement transmises à (**E**).

On suppose que $a(t) = a_0 \sin(\omega_a t)$ avec $a_0 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$ et $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c , m_{cp} , L_c , L_{cp} et g .

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) . En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de (**E**) selon l'axe $(O, \overrightarrow{y_0})$.

Éléments de correction

1. $Q_1 = M_{CP}L_{CP}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = (L_{CP}M_{CP} - L_C M_C) g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = (M_{CP}L_{CP} - M_C L_C) \cos \varphi.$
2. $\omega_0^2 = \frac{(L_{CP}M_{CP} - L_C M_C) g}{M_{CP}L_{CP}^2 + M_C L_C^2}.$
3. .
4. $0,03^\circ$.
5. .

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

TD 3

Stabilisateur passif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI.

C1-05

C2-09

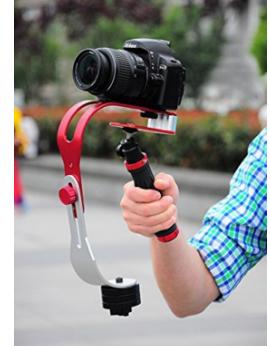
Mise en situation

Objectif

Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.

Travail demandé

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.



Correction

(1) et (E) sont en liaison pivot d'axe (O, \vec{Y}_0) . On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à (E) en O en projection sur \vec{Y}_0 .

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, E/0)}$

Méthode 1 – En passant par le calcul de $\overrightarrow{\delta(O, 2/0)}$, $\overrightarrow{\delta(O, C/0)}$ et $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$

Le support 2 étant sans masse, on a $\overrightarrow{\delta(O, 2/0)} = \vec{0}$. La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a $\overrightarrow{\delta(G_C, C/0)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} = \vec{0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, C/0)}$

On a $\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = \overrightarrow{\delta(G_C, C/0)} + \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$

$\overrightarrow{V(G_C, C/0)} = \overrightarrow{V(G_C, C/1)} + \overrightarrow{V(G_C, 1/0)} = \overrightarrow{G_C O} \wedge \overrightarrow{\Omega(C/0)} + v(t) \vec{X}_0 = -L_C \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t) \vec{X}_0 = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t) \vec{X}_0$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \vec{Z}_2 \wedge M_C (L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0)$

$\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = L_C M_C (L_C \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0)$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$

On a $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, C/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)}$

De même, $\overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/0)} = \overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/1)} + \overrightarrow{V(G_{Cp}, 1/0)} = \overrightarrow{G_{Cp}O} \wedge \overrightarrow{\Omega(Cp/0)} + v(t) \overrightarrow{X_0} = L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{Y_2} + v(t) \overrightarrow{X_0} = -L_{Cp} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2} + v(t) \overrightarrow{X_0}$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \ddot{\varphi} \overrightarrow{X_2} + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge M_{Cp} (-L_{Cp} \ddot{\varphi} \overrightarrow{X_2} + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0})$

$\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = -L_{Cp} M_{Cp} (-L_{Cp} \ddot{\varphi} \overrightarrow{Y_2} + a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0})$

On a donc $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = M_{Cp} L_{Cp}^2 \ddot{\varphi} - M_{Cp} L_{Cp} a(t) \cos \varphi + M_C L_C^2 \ddot{\varphi} + M_C L_C a(t) \cos \varphi$

Méthode 2 – En passant par le calcul de $I_O(E)$

On a $I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et $I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et donc

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

O est un point quelconque; donc $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} =$

$$\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} \text{ et } \overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)} = I_O(E) \cdot$$

$$\overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{OG} = \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2}, \overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \text{ et } \overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2}.$$

$$\text{On a donc, } \overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

$$(M_C + M_{Cp}) \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2} \wedge v(t) \overrightarrow{X_0} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) v(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) (a(t) \cos \varphi - v(t) \dot{\varphi} \sin \varphi) \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \wedge (M_C + M_{Cp}) \left(v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2} \right)$$

$$= (M_C + M_{Cp}) \left(\frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \right) \overrightarrow{Y_2} =$$

$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}$$

Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E

► Liaison pivot $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0$.

► $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = (\overrightarrow{OG} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = (L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}$.

$$\blacktriangleright \{ \mathcal{T} (\text{pes} \rightarrow Cp) \} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow Cp)} \cdot \vec{Y_2} = \left(-L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge -M_{Cp} g \vec{Z}_0 \right) \vec{Y_2} = \\ -L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi \vec{Y_2}.$$

Théorème du moment dynamique en O en projection sur $\vec{Y_2}$

$$\ddot{\varphi} \left(M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi = L_C M_C g \sin \varphi - L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi. \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi} \left(M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi = \\ - \left(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi.$$

$$\text{On a donc : } Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = \left(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = \\ \left(M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C \right) \cos \varphi.$$

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c , m_{cp} , L_c , L_{cp} et g .

Correction

Dans les conditions précédentes, on a $Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \varphi$ et $Q_3(t) = (M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C) g$.

$$\text{L'équation de comportement devient donc } Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \varphi = Q_3 a(t) \\ \Rightarrow Q_1 p^2 \Phi(p) + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \Phi(p) = Q_3 A(p) \quad \text{et} \quad H(p) = \\ \frac{Q_3}{Q_1 p^2 + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}.$$

$$\text{On a donc } \omega_0^2 = \frac{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}{Q_1} = \frac{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}{M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}. \text{ Le gain } K \text{ vaut}$$

$$\frac{M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C}{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g} = \frac{1}{g}.$$

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Correction



Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$.

Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) . En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe (O, \vec{y}_0) .

Correction

On a $\omega_a = 10\omega_0$. Une décade après ω_0 , $G_{dB} = -20 \log 10 - 40 = -60$ dB. Une atténuation de -60 dB correspond à un gain de $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$. L'amplitude des oscillations sera donc de $0,001a_0 = 5 \times 10^{-4}$ rad soit $0,03^\circ$.

Retour sur le cahier des charges

Éléments de correction

1. $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = (L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C)g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = (M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C)\cos \varphi.$
2. $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C)g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}.$
3. .
4. $0,03^\circ$.
5. .

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Correction

On a $0,03^\circ < 0,5^\circ$. Le cahier des charges est vérifié au voisinage de $10\omega_0$.