Table des matières

Génie électrique en tension alternative 1

1.1 Signaux périodiques

1.1.1 Caractéristique des signaux périodiques

Définition – Signal périodique

Un signal $s(t)$ est dit périodique de période T si $\forall t$, $s(t) = s(t+T)$.

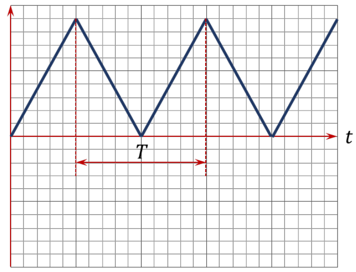


Figure 1.1 – Signal périodique

Définition – Caractéristiques

On peut définir :

- la fréquence du signal, en Hertz Hz, $f = \dfrac{1}{T}$;
- la pulsation, pour un régime sinusoïdal, en rad s^{-1} : $\omega = 2\pi f$;
- la valeur maximale (ou de crête).

1.1.2 Valeur moyenne

Définition – Valeur moyenne

Valeur de la grandeur continue qui créerait la même aire qu'un signal périodique sur une période T. On a alors :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, \mathrm{d}t.$$

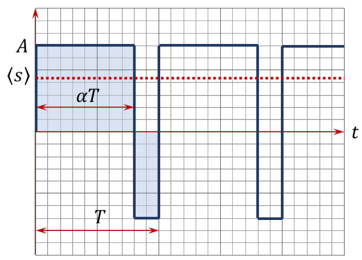


Figure 1.2 – Valeur moyenne

Propriété –

Si $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ alors $\langle s \rangle = \langle s_1 \rangle + \langle s_2 \rangle$.

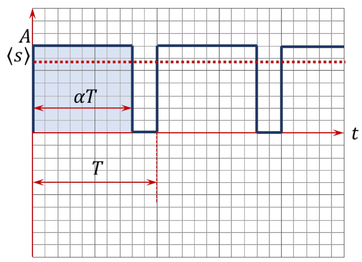


Figure 1.3 – Valeur moyenne

La valeur moyenne est celle mesurée par un multimètre en position **DC** ou **=**.

Le courant moyen d'un courant périodique serait équivalant au courant continu qui tranporterait la même quantité d'électricité que celle tranportée durant une période.

1.1.3 Valeur efficace

Définition – Valeur efficace

La valeur efficace S ou S_{eff} du signal $s(t)$ est donnée par

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\, \mathrm{d}t} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}.$$

En anglais on parle de Root Mean Square (RMS).

La valeur moyenne est celle mesurée par un multimètre en position ∼ ou **AC+DC** ou **RMS**.

Le courant efficace d'un courant périodique serait équivalant au courant continu qui produirait le même dégagement de chaleur que lui dans une résistance durant une période.

Pour la figure 1.2 la valeur moyenne du signal est de 4,2. $S_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\dfrac{1}{10}\left(\displaystyle\int_0^8 7^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_8^{10} 7^2(t)\,\mathrm{d}t\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{10}\left(\displaystyle\int_0^8 7^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_8^{10} 7^2(t)\,\mathrm{d}t\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{10}(49\times 8 + 49\times 2)} = 7$

Pour la figure 1.3 la valeur moyenne du signal est de 5,6. Dans ce cas, la valeur efficace est de $S_{\text{eff}} = 6,26$.

1.1.4 Décompostion d'un signal périodique

Propriété –

Un signal périodique $s(t)$ est déocomposable en une somme d'un signal alternarif $s_a(t)$ et d'un signal constant :

$$s(t) = \langle s \rangle + s_a(t).$$

On appelle $\langle s \rangle$ composante continue et $s_a(t)$ composante alternative ou d'ondulation. Par ailleurs, on a alors $\langle s_a \rangle = 0$.

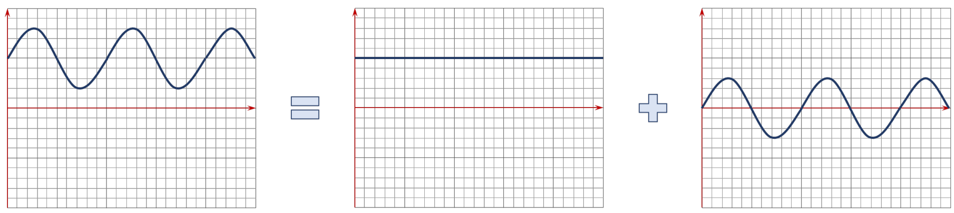


Figure 1.4 – Décomposition d'un signal périodique

Sur les oscilloscopes :

- en couplage DC le signal complet $s(t)$ est affiché ;
- en couplage AC seule la composante alternative $s_a(t)$ est affichée.

On a $S_{\text{eff}}^2 = \langle s \rangle^2 + {S_a}_{\text{eff}}^2$.

1.1.5 Signal alternatif et sinusoïdal

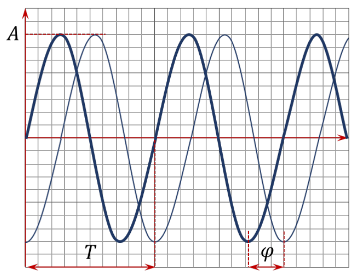


Figure 1.5 – Signal alternatif sinusoïdal

Définition –

On note $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec :

- A amplitude du signal ;
- ω pulsation en rad s^{-1} tel que $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$;
- φ phase à l'instant t.

Résultat –

Pour un signal sinusoïdal, on a (voir paragraphe 1.3.1) $S_{\text{eff}} = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$.

1.1.6 Puissance électrique

Définition – Puissance instantanée

Soit un dipôle parcouru par un courant $i(t)$ et soumis à une tension $u(t)$. La puissance instantanée s'exprime par

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Définition – Puissance active

Soit un dipôle parcouru par un courant $i(t)$ et soumis à une tension $u(t)$. La puissance active P en W s'exprime par :

$$P = \langle p(t)\rangle = \langle u(t)i(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puissance reçue par une résistance

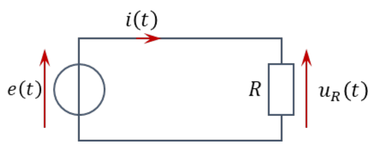


Figure 1.6 – Circuit R

La source de tension e est de la forme $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi)$. En écrivant la loi des mailles dans le ciruit de la figure 1.6 on a $u_R(t) = e(t)$. Par ailleurs, $u_R(t) = Ri(t)$; donc $i(t) = \dfrac{E}{R}\cos(\omega t + \varphi)$. $u_R(t)$ et $i(t)$ sont donc en phase.

La puissance instantanée reçue par le dipôle est $p(t) = \dfrac{E^2}{R}\cos^2(\omega t + \varphi)$.

La puissance active est $P = \dfrac{E^2}{2R} = \dfrac{E_{\text{eff}}^2}{R}$. Par ailleurs, $I = \dfrac{E}{R} \Rightarrow I_{\text{eff}}\sqrt{2} = \dfrac{E_{\text{eff}}\sqrt{2}}{R}$ et $I_{\text{eff}} = \dfrac{E_{\text{eff}}}{R}$; donc $P = RI_{\text{eff}}^2$.

Puissance reçue par un condensateur

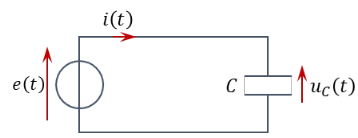


Figure 1.7 – Circuit RC

La source de tension e est de la forme $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi)$. En écrivant la loi des mailles dans le ciruit de la figure 1.7 on a $u_C(t) = e(t)$. Par ailleurs, $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u_c(t)\right]$.

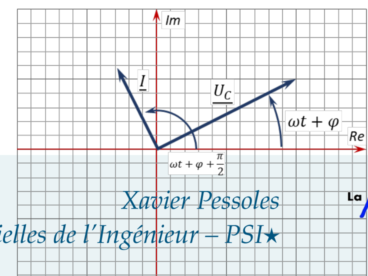
On a donc, $i(t) = -CE\omega\sin(\omega t + \varphi)$.

Or, $-\sin(x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{2})$. On a donc $i(t) = CE\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$. La tension aux bornes du condensateur est donc « en retard » sur le courant.

La puissance instantanée s'exprime donc par $p(t) = i(t)u_c(t) = -CE\omega^2\cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi)$.

La puissance active se calcule donc ainsi :

$$P = -\frac{CE\omega^2}{T}\underbrace{\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi)\;\mathrm{d}t}_{0} = 0.$$



Représentation dans le plan complexe

1.2 Alimentation monphasée

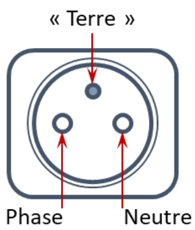


Figure 1.9 – Prise électrique

Aux bornes d'une prise électrique domestique, l'alimentation est sinusoïdale monophasée. Entre la phase et le neutre on mesure une tension simple $v(t)$ dont la valeur efficace est de 230 V.

Ainsi l'amplitude du signal est de 325 V.

La tension et le courant distribués sont sinusoïdaux. On note $i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(\omega t)$ et $v(t) = V_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$.

1.2.1 Evaluation de la puissance

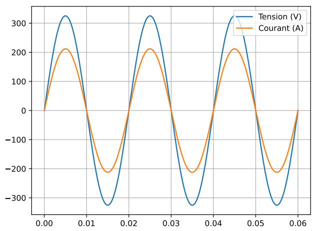


Figure 1.10 – Tension et courant sinusoïdaux

$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

Puissance instantanée

On a $p(t) = v(t)i(t) = V_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \times I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(\omega t) = 2V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\sin(\omega t + \varphi) \times \sin(\omega t)$

$= V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\left(\cos(\omega t + \varphi - \omega t) - \cos(\omega t + \varphi + \omega t)\right)$

$= V_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\left(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)\right)$

Puissance active

1.3 Quelques calculs

1.3.1 Intégrale $\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T A^2\sin^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$.

$$I = \frac{1}{T}\int\limits_0^T A^2\sin^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t. = \frac{A^2}{2T}\int\limits_0^T \left(1 - \cos\left(2\left(\omega t + \varphi\right)\right)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left([t]_0^T - \left[\frac{1}{2\omega}\sin\left(2\left(\omega t + \varphi\right)\right)\right]_0^T\right)$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left(T - \frac{1}{2\omega}\left[\sin\left(2\left(\omega T + \varphi\right)\right) - \sin\left(2\left(\omega \times 0 + \varphi\right)\right)\right]\right)$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left(T - \frac{1}{2\omega}\left[\sin\left(2\left(\omega T + \varphi\right)\right) - \sin(2\varphi)\right]\right).$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left(T - \frac{1}{2\omega}\left(\sin(2\omega T)\cos(2\varphi) + \cos(2\omega T)\sin(2\varphi) - \sin(2\varphi)\right)\right).$$

On a $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

$$I = \frac{A^2}{2T}\left(T - \frac{1}{2\frac{2\pi}{T}}\left(\sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right)\cos(2\varphi) + \cos\left(2\frac{2\pi}{T}T\right)\sin(2\varphi) - \sin(2\varphi)\right)\right)$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left(T - \frac{T}{4\pi}\left(\sin\left(2\varphi\right) - \sin\left(2\varphi\right)\right)\right) = \frac{A^2}{2}$$

1.3.2 Notation complexe

Rappel :

- forme algébrique : $\underline{z} = a + jb$;
- forme trigonométrique $\underline{z} = Z\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)$;
- forme exponentielle $\underline{z} = Ze^{j\varphi}$.

Définition –

Soit un signal mathématique $x(t) = X\cos\left(\omega t + \varphi\right)$. On lui associe une grandeur complexe : $\underline{x}(t) = Xe^{j(\omega t+\varphi)}$.

Résultat – Retour au signal réel

- $x(t) = Re\left(\underline{x}(t)\right)$
- φ...

Résultat –

Si $u(t) = U\cos\left(\omega t + \varphi\right)$ et $i(t) = I\cos\left(\omega t + \varphi'\right)$ alors on montre que $p(t) = \frac{UI}{2}\left(\cos\left(2\omega t + \varphi + \varphi'\right) + \cos\left(\varphi - \varphi'\right)\right)$