

Application 1

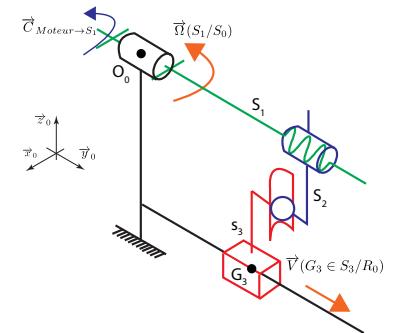
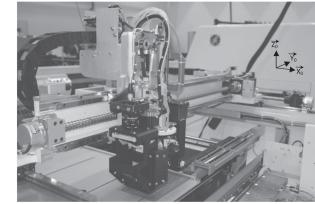
Système de dépose de composants électroniques – Sujet

Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée \vec{y}_0) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

Hypothèses :

- ▶ le référentiel associé au repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen;
 - ▶ les solides seront supposés indéformables;
 - ▶ on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe (O_0, \vec{y}_0) : $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$;
 - ▶ on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3 ;
 - ▶ la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
 - ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r);
 - ▶ seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.
-
- ▶ S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
 - ▶ S_1 : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
 - ▶ S_2 : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
 - ▶ S_3 : chariot supportant la tête de dépose (masse M_3).



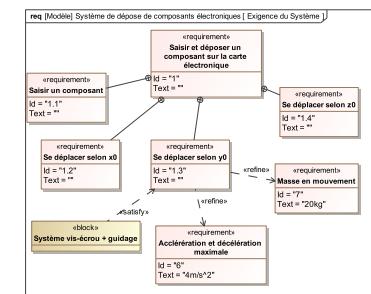
Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à S_1 : $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$;
- ▶ vitesse de rotation de S_1 : $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :

- ▶ masse : M_3 ;
- ▶ cinématique de S_3 : $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$.



Données numériques associées au système :

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0,1$.
- ▶ Pas de la vis à billes : $p = 20 \text{ mm}$.
- ▶ Diamètre de la vis à billes : $D = 25 \text{ mm}$.
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe \vec{y}_0 : $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$.
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $C_r = 3 \text{ Nm}$.
- ▶ l , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm .

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- ▶ couple maximal, $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$;
- ▶ fréquence de rotation maximale, $N_m = 6000 \text{ tr/min}$;
- ▶ moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe \vec{y}_0 , $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

On considère l'ensemble $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$.

Question 1 Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

Question 2 Déterminer l'expression de $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

Question 3 Calculer $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ en fonction des données du problème.

Question 4 Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble E : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$.

Question 5 Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0

Question 6 Déterminer la mobilité du système.

Question 7 Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

Question 8 Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe (O_0, \vec{y}_0) et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.

Question 9 Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction \vec{y}_0 et du paramètre $\dot{y}(t)$.

Question 10 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E .

Question 11 Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.

Question 12 Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2 . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Question 13 En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.

Question 14 On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2 . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Question 15 Déterminer dans ces conditions les dissipations.

Application 2

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E) – Sujet

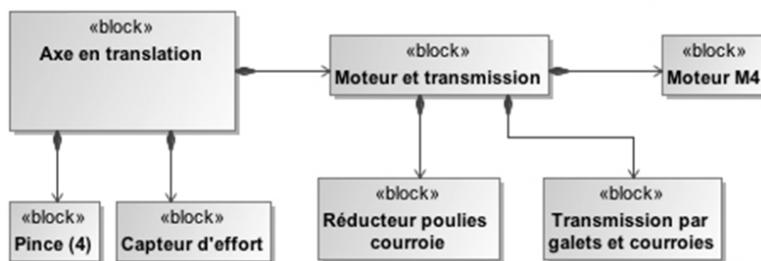
Concours Commun Mines Ponts 2016.

Mise en situation

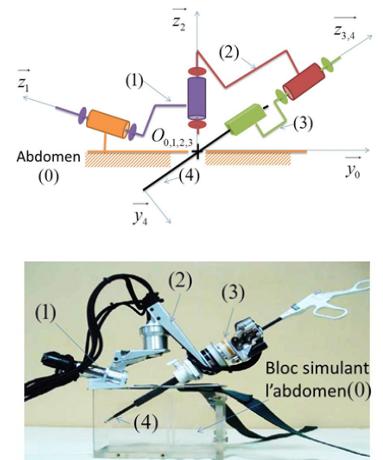
Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moteur réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).



Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

Équation de mouvement

Hypothèses

- ▶ La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- ▶ Les axes de rotation du MC²E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- ▶ L'instrument chirurgical est vertical.
- ▶ Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- ▶ Tous les galets G_i ont même rayon noté R_g et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points I_1 à I_6 .

Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

- ▶ La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primitif pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Modélisation simplifiée du problème

- ▶ La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée $\omega_m(t)\vec{x}_0$ où $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$ (vitesse de rotation avant réduction de rapport r).
- ▶ La poulie motrice a un rayon R_i et tourne à la vitesse $\omega_i(t)$ (vitesse de rotation après réduction de rapport r).
- ▶ La poulie réceptrice a un rayon R_e et tourne à la vitesse $\omega_e(t)$.
- ▶ Les deux pignons en contact ont même rayon primitif, supposé égal à R_e .
- ▶ Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$.
- ▶ L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{ressort} \rightarrow 4)} = -kz(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_4}$ où O_4 est le point de contact entre la pince (4) et le ressort, k la raideur du ressort et $z(t)$ la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.
- ▶ On note $\overrightarrow{V(O_4, 4/0)} = v(t)\vec{z}_0 = \frac{dz(t)}{dt}\vec{z}_0$.
- ▶ Les masses des courroies sont négligées.

Données

- ▶ I_m , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_r , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- ▶ I_i , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_i , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_e , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_p , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_g , moment d'inertie de chaque galet G_i , de rayon R_g , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ m_4 , masse de la pince (4).
- ▶ $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$, rapport de réduction constant du motoréducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- ▶ J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- ▶ $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

Travail demandé

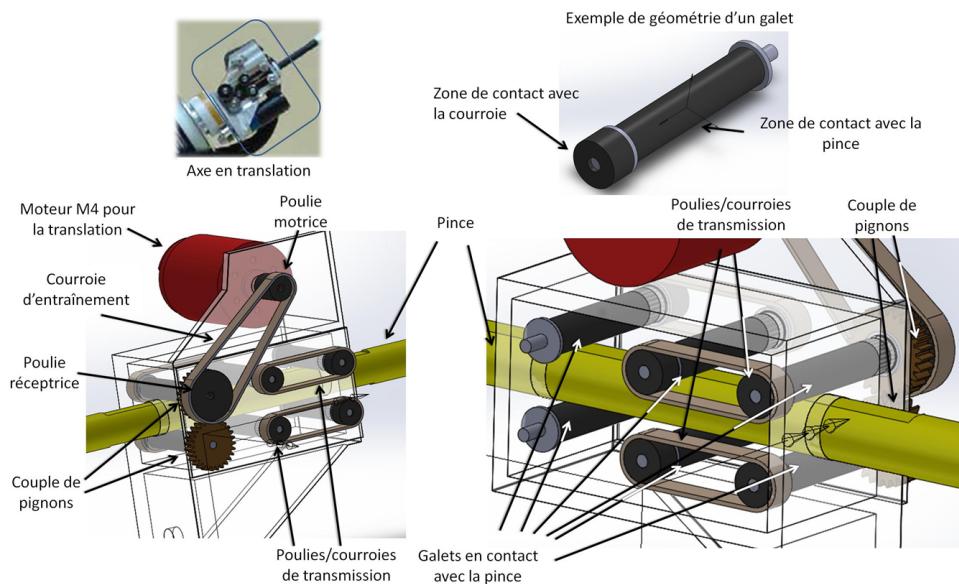
Question 1 Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.

Question 2 Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

Question 3 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.

Question 4 Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

Question 5 Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0), déterminer l'expression du terme $C_e(t)$ en fonction des données du problème et de $\theta_m(t)$.



Application 3

Tapis de course – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

On s'intéresse à un tapis de course dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'utilisateur court sur une courroie mobile qui est entraînée dans le sens inverse de la course. La vitesse de déplacement de la courroie mobile est réglable pour permettre au coureur de rester sur place. Le système propose un large choix de mode de fonctionnement cependant l'étude sera limitée à l'utilisation du programme de contrôle de la fréquence cardiaque. Avec ce programme, le système ajuste automatiquement la vitesse et l'inclinaison du tapis afin d'obtenir une fréquence cardiaque préglée.

Le programme de contrôle de la fréquence cardiaque fonctionne de la façon suivante :

- ▶ dans un premier temps, le système commence par augmenter la vitesse de déplacement de la courroie mobile via la chaîne fonctionnelle 1 pour atteindre la fréquence cardiaque préglée ;
- ▶ si la vitesse maximale ne suffit pas, le tapis de course s'incline via la chaîne fonctionnelle 2 pour augmenter encore l'effort.

Extrait du cahier des charges :

Exigences	Critères	Niveaux
1.1 Le système doit permettre au coureur de courir avec une fréquence cardiaque prédefinie.	Vitesse de course	De 0 à 19 km h ⁻¹ par incrément de 0,1 km h ⁻¹
	Pente	De 0 % à 14 % par incrément de 0,5 %
	Masse utilisateur	115 kg maxi

Hypothèses et données :

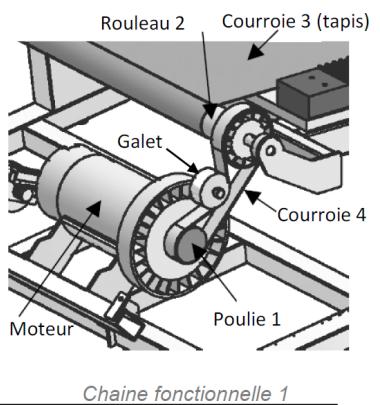
- ▶ on se place dans le cas où le tapis est réglé à l'horizontale ;
- ▶ la courroie 3, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur le rouleau 2. Le rayon d'enroulement de la courroie 3 sur le rouleau 2 est $R_e = 24,5$ mm. La poulie 2 est liée au rouleau 2.
- ▶ la courroie 4, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur les poulies 1 et 2, ainsi que sur le galet. Les rayons primitifs de la poulie motrice 1 et de la poulie 2 sont respectivement $R_{p1} = 27$ mm et $R_{p2} = 44$ mm ;
- ▶ une étude préliminaire a montré que la présence d'un coureur de 115 kg entraîne un effort résistant tangentiel $T_{coureur \rightarrow 3} = 230$ N sur la courroie 3 ;
- ▶ l'inertie équivalente des pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur est $I_{eq} = 0,1$ kgm² ;
- ▶ le rendement global du système mécanique est $\eta = 0,9$.

Objectif

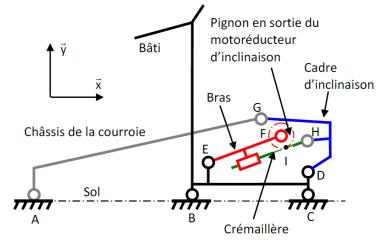
Valider le choix de la motorisation de la chaîne fonctionnelle 1 vis-à-vis du cahier des charges.

Question 1 Déterminer la vitesse de rotation du moteur ω_m en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement V_{30} en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur $\omega_{m \max}$ lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

Question 2 Déterminer l'expression du couple moteur C_m nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.



Chaine fonctionnelle 1



Chaine fonctionnelle 2

Question 3 Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h. Le système possède un moteur courant continu ayant les caractéristiques ci-dessous.

Puissance nominale $P_n = 1840 \text{ W}$	Tension nominale $U_n = 130 \text{ V}$
Vitesse maximale $N_{\max} = 4000 \text{ tr/min}$	Constante de vitesse $K_E = 0,33 \text{ V/(rad.s}^{-1}\text{)}$
	Courant nominal $I_n = 17,6 \text{ A}$
	Constante de couple $K_T = 0,33 \text{ N.m/A}$
	Résistance d'induit $R = 1,1 \text{ Ohm}$

Question 4 Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

Application 4

Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Sujet

Centrale MP 2004.

Mise en situation

Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.

Détermination de la motorisation

Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Faire monter ou descendre l'ascenseur

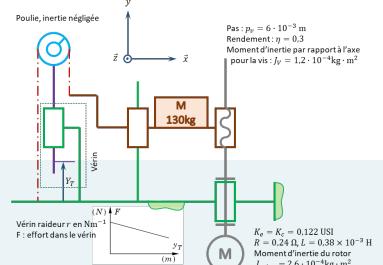
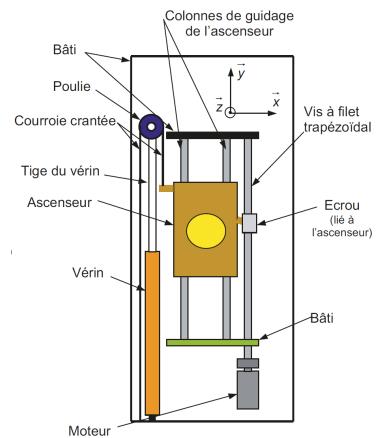
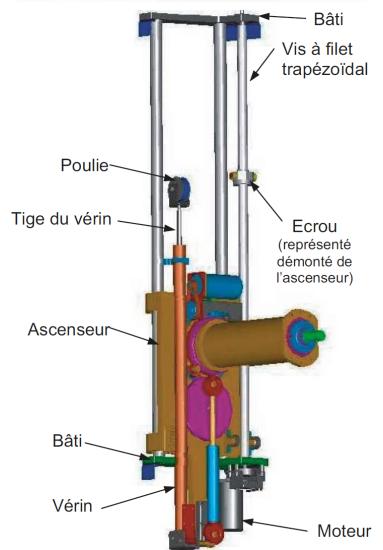
Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente V_L lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	$\text{course} = 0,8 \text{ m}$ $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide V_R : respecter la durée t_a de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s}$ (mini)

Question 1 Déterminer la fréquence de rotation du moteur ω en fonction de la vitesse de déplacement V de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum ω_{\max} que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

1. départ en position basse ($y = 0$ à l'instant $t = 0$);

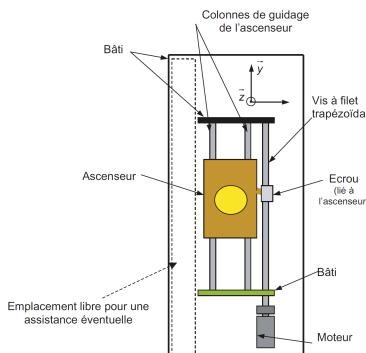
C1-05
C2-08



2. mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante a pour atteindre la vitesse V_R rapide en respectant les contraintes du cahier des charges;
3. arrêt de l'ascenseur à la position $y = 0,8\text{ m}$ (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à t_a).

Question 2 Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement y de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

Solution sans assistance



On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé Σ (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.

On notera :

- $\vec{g} = -g \vec{y}$ l'accélération de la pesanteur. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- C le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$, du système isolé. Mettre $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ sous la forme : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}M_eV^2$. Donner l'expression littérale de la masse équivalente M_e et faire l'application numérique.

Question 4 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Question 5 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire P_0 de ce moteur.

Question 6 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

Question 7 Faire un schéma de principe de ce dispositif.

Question 8 Donner l'expression littérale de la masse équivalente M'_e et faire l'application numérique.

Question 9 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Question 10 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur.

Question 11 En déduire la puissance nécessaire P du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Question 12 Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$ et de hauteur $1,4 \text{ m}$. Cette solution est-elle envisageable ?

Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

Question 13 Faire un schéma de principe du dispositif.

Question 14 L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum $F_{c \text{ maxi}}$ qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement y de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal D supérieur à $0,1 \text{ m}$. Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$ et de module de Coulomb $G = 82\,000 \text{ MPa}$. On prendra un coefficient de sécurité $s = 2$. Pour que le ressort résiste à l'effort maximal $F_{c \text{ maxi}}$, il doit avoir un diamètre $d \geq \sqrt[3]{\frac{8F_{c \text{ maxi}}Ds}{\pi R_{eg}}}$, c'est-à-dire $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c \text{ maxi}}}$.

Pour obtenir un ressort de raideur r il faut un nombre de spires $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$, c'est-à-dire $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$.

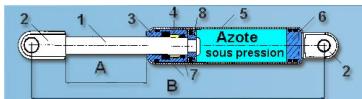
Question 15 La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

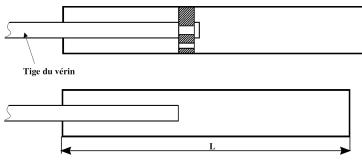
Question 16 Déterminer la relation existant entre le déplacement y de l'ascenseur et le déplacement y_T de la tige du vérin. En déduire la course Δy_T nécessaire de la tige du vérin à gaz.

Question 17 Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté F_c . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existante entre l'effort F développé par le vérin et l'effort de compensation F_c . En déduire l'effort minimum F_{\min} développé par le vérin.



Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-contre.

Question 18 Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.



Question 19 Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre $d = 15 \times 10^{-3}$ m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée p_2 .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand $D = 57 \times 10^{-3}$ m. L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale $L = 1$ m. Soient p_1 , F_1 , V_1 la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et p_2 , F_{\min} , V_2 pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

Question 20 Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de F_1 , F_{\min} et Δy_T . Exprimer F_{\min} en fonction de p_2 et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer F_1 en fonction de p_1 et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur r de ce vérin à gaz en fonction de F_{\min} , d , D , L et Δy_T .

Question 21 On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur L et calculer la raideur r .

On prendra $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$ pour la suite du problème.

Question 22 Déterminer l'effort maximal F_{\max} développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de F .

Question 23 Déterminer la relation $F = F(y_T)$.

On considérera dans cette question que l'effort de compensation F_c est constant.

Question 24 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de a , M_e , F_c , M ...

Question 25 Exprimer ensuite a en fonction de C , M_e , F_c , M ...

Question 26 En déduire la valeur du couple maximum C_{\max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur (prendre $F_c = 1300 \text{ N}$).

Question 27 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Synthèse

Question 28 On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

Application 5

Mesure d'inertie – Sujet

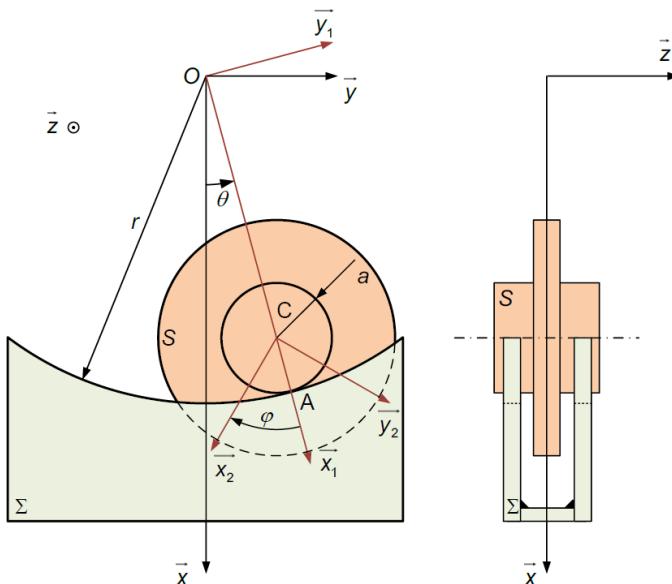
Un classique ...

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .

C1-05

C2-08



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- ▶ soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5$ s.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .

TD 1

Système de dépose de poudre – Sujet

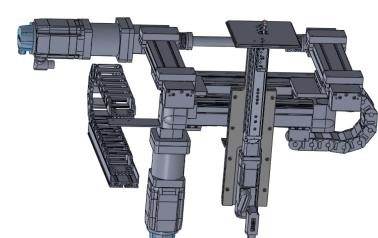
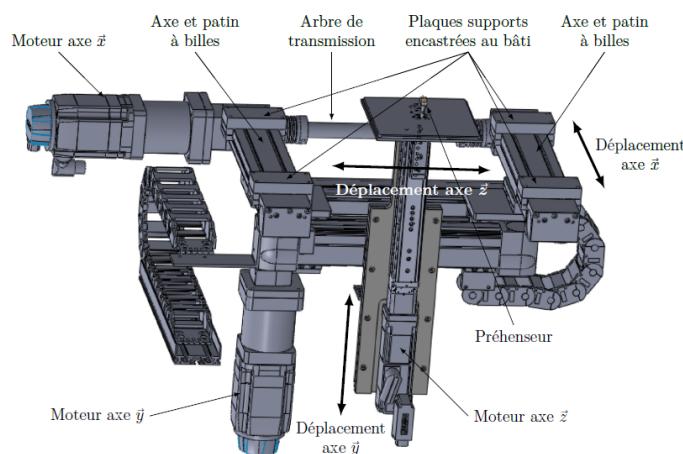
Concours Centrale Supelec – TSI 2016

Mise en situation

On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.

C1-05

C2-08



Objectif

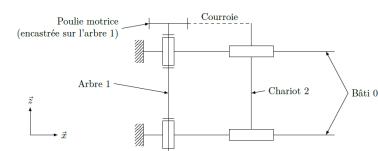
L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système. Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe \vec{x} soit de $V_{\max} = 0,45 \text{ m s}^{-1}$ et que l'accélération maximale du chariot soit de $\gamma_{\max} = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Travail demandé

La transmission est réalisée de la façon suivante. L'arbre 1 est entraîné par un moto-réducteur dont le rapport de réduction est noté r .

Notations

- ▶ Ω : vitesse de rotation du moteur;
- ▶ C_m : le couple exercé par le moteur;
- ▶ $r = n_{\text{axe poulie}} / n_{\text{moteur}} = \frac{1}{10}$: rapport de réduction du réducteur entre le moteur et les poulies;
- ▶ $M_2 = 25 \text{ kg}$: masse de l'ensemble mobile 2;
- ▶ $\phi = 28,65 \text{ mm}$ est le diamètre primitif des poulies;
- ▶ l'inertie des courroies est négligée;
- ▶ $J_m = 1,2 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$: moment d'inertie de l'arbre moteur;
- ▶ $J_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$: moment d'inertie de l'arbre 1;
- ▶ $C_r = 0,15 \text{ Nm}$: couple de frottements secs dans les liaisons ramené à l'arbre moteur;
- ▶ $\mu = 0,001 \text{ N m s rad}^{-1}$: coefficient de frottements visqueux dans les liaisons ramené à l'arbre moteur.



Question 1 Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur Ω_{\max} . Faire l'application numérique.

Question 2 Déterminer l'accélération maximale du moteur $\dot{\Omega}_{\max}$. Faire l'application numérique.

Question 3 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe \vec{x} par rapport au bâti notée \mathcal{E}_c (ensemble/0). En déduire l'inertie équivalente J de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

Question 4 Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté C_{\max} . Faire l'application numérique.

Question 5 Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de 3000 tr min^{-1} et de puissance utile $0,47 \text{ kW}$.

Question 6 Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

TD 2

Robot de dépose de fibres optiques – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08

Présentation

L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

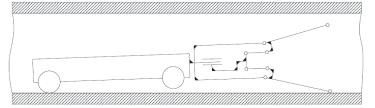
Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14^\circ$ et $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$.



De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.

Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action F du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant t , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :

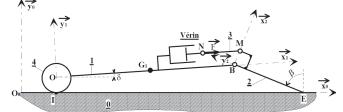


Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- ▶ une tige **1** de longueur $OB = L_1$, de section négligeable, de masse m_1 , et de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2}\vec{x}_1$;
- ▶ une roue **4**, de centre O , de rayon $R = 0,07\text{ m}$, de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec **1**;
- ▶ un bras **2** constitué de deux éléments BE et BM tels que $\overrightarrow{BE} = -a\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{BM} = b\vec{x}_2$, de section et de masse négligeables ;
- ▶ une biellette **3** (NM) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige **1**;
- ▶ un vérin hydraulique de masse négligeable.



En I , le contact entre la roue **4** et la paroi **0** se fait par roulement sans glissement.

En E , le contact entre le bras **2** et la paroi **0** se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action \vec{F} du vérin sur la biellette $3a$, à chaque instant, pour direction \vec{x}_1 : $\vec{F} = F\vec{x}_1$.

Repères et paramétrage

- ▶ $R_0(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère associé à la canalisation O et supposé galiléen.
- ▶ $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, repère associé à la tige **1**.
- ▶ $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, repère associé au bras **2**.
- ▶ $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

$$\blacktriangleright \beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2).$$

Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à $\delta = 14^\circ$, une vitesse $\dot{\delta}$ inférieur à $50^\circ/\text{s}$

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$, puis la calculer.

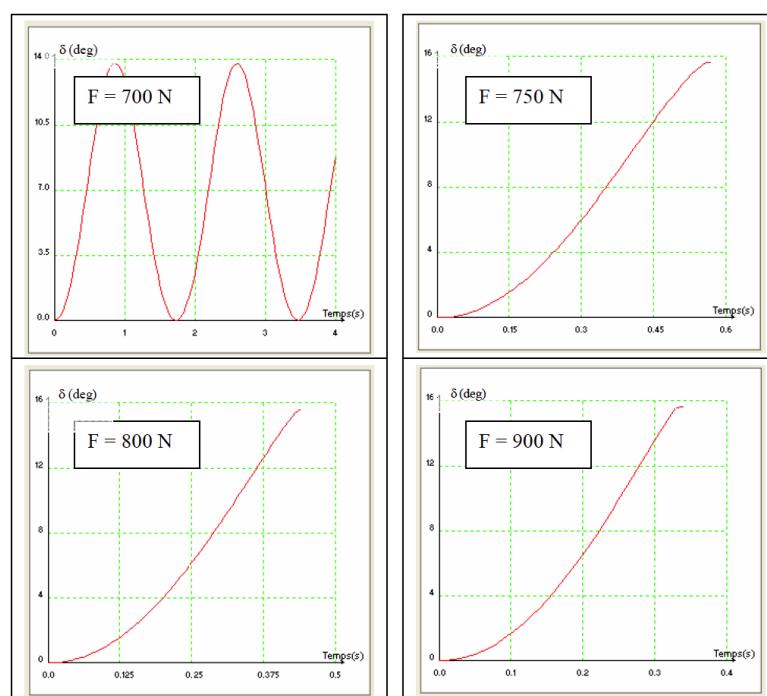
Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ .

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ .

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F , δ , et β .

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.



TD 3

RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2009.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Le robuROC 6 est un robot mobile développé par la société ROBOSOFT. Cette plateforme robotisée a été conçue pour des applications de recherche et d'exploration en milieu extérieur. Elle est équipée de 6 roues motrices indépendantes, de même diamètre, montées par paires sur 3 podes articulés en tangage et en roulis.

Hypothèse

Le mouvement de roulis n'est pas pris en compte. Il est fixé à une valeur nulle.



Les 6 roues de la plate-forme (notée PF) sont motorisées permettant ainsi de se déplacer sur des reliefs très accidentés. Cependant, la plate-forme ne comporte pas de systèmes spécifiques de direction. Le changement de direction est imposé par une rotation différentielle des roues du pôle central 1. Les roues avant et arrière doivent alors avoir des vitesses de rotation compatibles avec celles du pôle central 1. Lorsque le rayon de courbure de la trajectoire suivie par la plate-forme devient inférieur à 4 mètres, le groupe hydraulique est actionné pour passer en « Mode 2 roues instable ». La plate-forme ne tenant pas en équilibre sur 2 roues, elle retombe dès le début du mouvement sur les roues arrière ou les roues avant, passant donc en « Mode 4 roues Déplacement ». Cette intervention du groupe hydraulique permet ainsi de soulager le contact entre les roues des podes avant / arrière et le sol.

Pour cette étude, nous considérerons que la plate-forme retombe sur les roues arrière (figure suivante) et nous nous placerons dans le cas d'un rayon de courbure nul. Le mouvement de lacet étudié est donc une rotation autour de l'axe (C_1, \vec{z}_0) , d'angle φ , appelé angle de lacet.

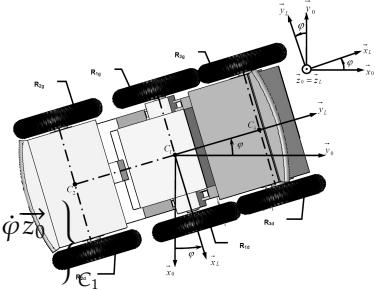
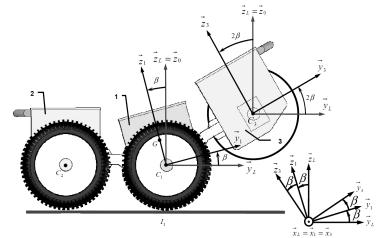
Ce mouvement est défini par le torseur cinématique suivant : $\{\mathcal{V}(PF/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(PF/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right.$

L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à respecter la loi de vitesse de la figure suivante.

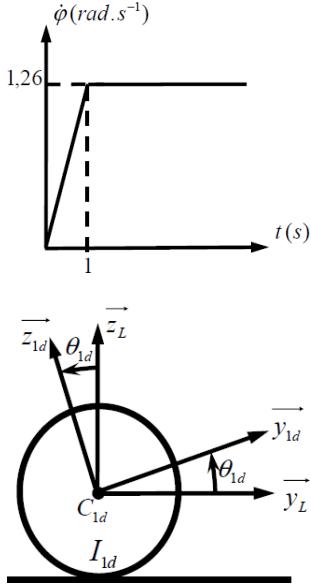
Les roues centrales et les roues arrière sont en contact avec le sol. Dans ce mode, seules les roues centrales R_{1d} et R_{1g} sont motrices. Elles roulent sans glisser sur le sol en I_{1d} et I_{1g} . Les roues du pôle avant 3 et du pôle arrière 2 sont bloquées .

Paramétrage

- ▶ $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol 0 supposé galiléen;
- ▶ $\mathcal{R}_L = (C_1; \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$ lié à la plate-forme PF tel que $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_L) = (\vec{y}_0, \vec{y}_L)$ appelé angle de lacet;
- ▶ $\mathcal{R}_1 = (C_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au pôle central 1 tel que $\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_1) = (\vec{z}_L, \vec{z}_1)$; β est l'angle de tangage; $\beta = 2^\circ$ (supposé constant pendant tout le mouvement du lacet);
- ▶ $\mathcal{R}_3 = (C_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié au pôle avant 3 tel que $2\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_3) = (\vec{z}_L, \vec{z}_3) = 4^\circ$;



- $\overrightarrow{C_1 C_3} = b \vec{y}_3$ et $\overrightarrow{C_1 C_2} = -b \vec{y}_L$ avec $b = 553 \text{ mm}$;
- la figure précédente permet de définir le paramétrage de chacune des roues de la plate-forme en contact avec le sol avec l'exemple de la roue centrale droite R_{1d} .



	Nom	Centre de gravité	Point de contact avec le sol	Vitesse de rotation i au pôle central	Repère associé
Roue centrale droite	R_{1d}	C_{1d}	I_{1d}	$\dot{\theta}_{1d}$	$R_{1d} = (C_{1d}, \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$
Roue centrale gauche	R_{1g}	C_{1g}	I_{1g}	$\dot{\theta}_{1g}$	$R_{1g} = (C_{1g}, \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$
Roue arrière droite	R_{2d}	C_{2d}	I_{2d}	nulle	-----
Roue arrière gauche	R_{2g}	C_{2g}	I_{2g}	nulle	-----

Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides

Le mouvement de roulis étant nul et le mouvement de tangage étant fixé à une valeur constante, il est possible de définir l'ensemble rigide Σ constitué des trois podes **1**, **2** et **3**, des deux roues avant, des deux roues arrière et des bras d'articulation **4** et **4'**. Pour chaque constituant de cet ensemble, la masse est supposée répartie uniformément. Centre de gravité de Σ : G tel que $\overrightarrow{C_1 G} = a_G \vec{z}_1$ et $a_G = 85 \text{ mm}$,

$$m_\Sigma = 152 \text{ kg}, I_{C_1}(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{avec } A = 30,2 \text{ kg m}^2, B = 8,2 \text{ kg m}^2 \text{ et } C = 32,3 \text{ kg m}^2.$$

Roue droite ou gauche + axe de roue : $R_{i \text{ d ou g}}$ (i correspond au numéro du pôle). Centre de gravité de $R_{i \text{ d ou g}}$: $C_{i \text{ d ou g}}$ tel que l'entraxe $C_{ig} C_{id} = 2e$, $\overrightarrow{C_i C_{id}} = e \vec{x}_L$ et $\overrightarrow{C_i C_{ig}} = -e \vec{x}_L$ avec $e = 340 \text{ mm}$, $m_r = 4 \text{ kg}$, rayon d'une roue $R = 225 \text{ mm}$,

$$I_{C_{i \text{ d ou g}}} (R_{i \text{ d ou g}}) = \begin{pmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{pmatrix} \quad \text{valable dans toute base orthonormée directe}$$

contenant \vec{x}_L avec $A_r = 0,1 \text{ kg m}^2$ et $B_r = 0,04 \text{ kg m}^2$.

Axe des moteurs du pôle central : les deux motoréducteurs centraux sont constitués chacun d'un moteur à courant continu alimenté en 48 V associé à un réducteur épicycloïdal de rapport de réduction $k = 1/25$. La matrice d'inertie en C_1 d'un axe moteur droit M_{1d} ou M_{1g} (en rotation suivant (C_1, \vec{x}_L)) est : $I_{C_1}(M_{1d} \text{ ou } M_{1g}) = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & B_m & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{pmatrix}$ avec $A_m = 795 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2$ et $B_m = 8 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

Les masses et inerties des autres pièces seront négligées.

Modélisation du contact roue / sol

Les roues centrales R_{1d} et R_{1g} sont motrices, elles roulent sans glisser aux points de contact I_{1d} et I_{1g} . On pose $\overrightarrow{C_{1d} I_{1d}} = -R \vec{z}_L$ et $\overrightarrow{C_{1g} I_{1g}} = -R \vec{z}_L$. Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1d})} = Y_{1d} \vec{y}_L + Z_{1d} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{1d}}$ et $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1g})} = Y_{1g} \vec{y}_L + Z_{1g} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{1g}}$.

Les roues arrière R_{2d} et R_{2g} sont bloquées, leur vitesse de rotation par rapport au pôle arrière **2** est nulle. Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2d})} = T_{2d} \vec{n}_g + Z_{2d} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{2d}}$ et $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2g})} = T_{2g} \vec{n}_g + Z_{2g} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{2g}}$ avec \vec{n}_d et \vec{n}_g deux vecteurs unitaires opposés

aux vitesses de glissement des roues R_{2d} et R_{2g} par rapport au sol **0** respectivement en I_{2d} et I_{2g} . On pose $\overrightarrow{C_{2d}I_{2d}} = -R\overrightarrow{z_L}$ et $\overrightarrow{C_{2g}I_{2g}} = -R\overrightarrow{z_L}$. $T_{2d} = fZ_{2d}$ et $T_{2g} = fZ_{2g}$; f est le facteur de frottement constant au contact roue/sol $f = 0,6$.

Autres liaisons

Toutes les autres liaisons de la plate-forme sont supposées parfaites (sans jeu, sans frottement).

Motoréducteur centraux

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite R_{1d} est notée $\{\mathcal{T} (\text{moteur} \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$.

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite R_{1g} est notée $\{\mathcal{T} (\text{moteur} \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$.

Question 1 Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble Σ au point C_1 dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer la somme des efforts normaux $Z_{2d} + Z_{2g}$ s'exerçant sur les roues arrières. Isolons l'ensemble de la plate-forme PF, soit l'ensemble Σ , les roues centrales et les motoréducteurs. Plaçons-nous dans le plan médian $(C_1, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$ de la plate-forme PF. Nous définissons le projeté I_1 des points de contact I_{1d} et I_{1g} dans ce plan. I_1 est défini par le vecteur : $\overrightarrow{C_1I_1} = -R\overrightarrow{z_L}$. D'autre part, nous avons $\overrightarrow{C_2I_1} = b\vec{y}_L - R\overrightarrow{z_L}$ et $\overrightarrow{C_3I_1} = -b\vec{y}_3 - R\overrightarrow{z_L}$. Nous ferons l'hypothèse que le moment dynamique $\delta(I_1, PF/0) \cdot \vec{x}_L$ est négligeable devant les actions mécaniques.

Question 2 En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_0 en I_1 en projection sur \vec{x}_L , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact $Z_{2d} + Z_{2g}$, entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r)g$ avec $m_2 = 52\text{ kg}$ la masse du pôle arrière 2.

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur C_m par une approche énergétique.

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme $\frac{1}{2}J\dot{\phi}^2$ où J est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

Question 4 Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme $C_m = k_2(J\ddot{\phi} + k_1(T_{2d} + T_{2g}))$ où k_1 et k_2 sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.

Pour la question suivante, vous prendrez $J = 34 \text{ kg m}^2$, $k_1 = 0,65 \text{ m}$ et $k_2 = 1,3 \times 10^{-2}$ sans unité.

Question 5 Calculer le couple moteur maximal : C_m maxi. À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

