

## 12 Correction des SLCI

### 12.1 Pourquoi corriger un système ?

Souvent évoqué en cours de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- ▶ plus précis;
- ▶ plus amorti;
- ▶ plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.

#### Résultat –

- ▶ D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- ▶ D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- ▶ D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

<b>12.1 Pourquoi corriger un système? . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>12.2 Le correcteur proportionnel . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>12.3 Les correcteurs à action intégrale . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>12.4 Le correcteur à avance de phase . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>12.5 Bilan sur l'influence des correcteurs . . . . .</b>	<b>5</b>

C1-02

C2-04

**Frédéric Mazet**, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

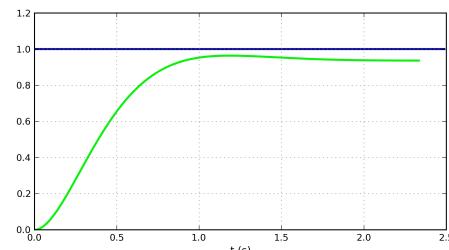
**Florestan Mathurin**, Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

## 12.2 Le correcteur proportionnel

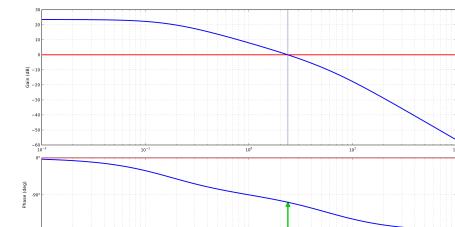
### Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

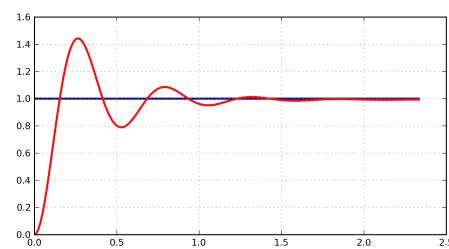
Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



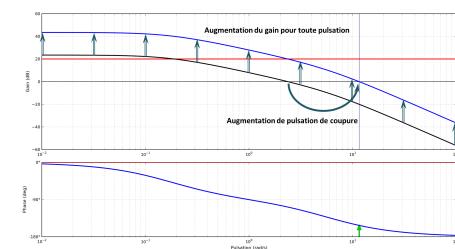
$T_{5\%} : 0,781 \text{ s} - \text{Écart statique} : 0,07$



Marge de phase  $71,94^\circ$



$T_{5\%} : 0,88 \text{ s} - \text{Écart statique} : \text{tend} \rightarrow 0$



Marge de phase  $6,43^\circ$

### Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- ▶ d'améliorer la précision;
- ▶ d'augmenter la vivacité;
- ▶ d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- ▶ de diminuer l'amortissement;
- ▶ de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode –

#### Réglage de la marge de phase :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0\text{dB}}$  tel que  $\varphi(\omega_{0\text{dB}})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

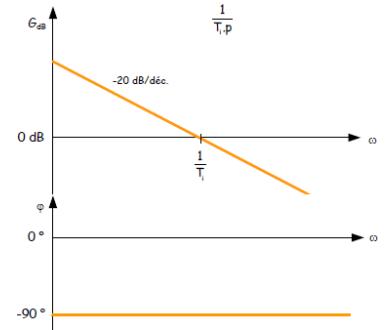
## 12.3 Les correcteurs à action intégrale

### 12.3.1 Le correcteur intégral pur

#### Définition – Correcteur I

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .



#### Résultat –

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

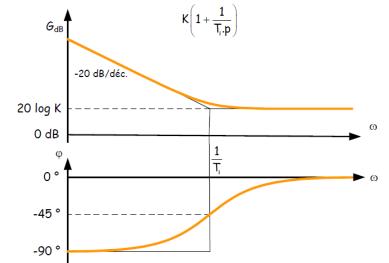
Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

### 12.3.2 Le correcteur proportionnel intégral

#### Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ .



En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

#### Résultat – Correcteur PI

- ▶ augmente l'amortissement;
- ▶ augmente la rapidité;
- ▶ augmente la précision.

#### Méthode –

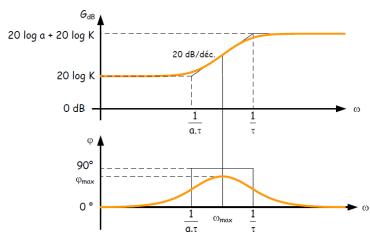
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- ▶ On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- ▶ La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la

pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} << \omega_{0\text{dB}}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_{0\text{dB}}}$ .

### Remarque

Une autre possibilité pour régler  $T_i$  est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$  avec  $\tau_1 >> \tau_2$ .  $\tau_1$  ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre  $T_i = \tau_1$  afin de supprimer l'effet du pôle associé à  $\tau_1$ .

## 12.4 Le correcteur à avance de phase



### Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1 + \alpha \tau p}{K \frac{1 + \tau p}{1 + \tau p}}$  avec  $\alpha > 1$ .

### Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{\alpha \tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

### Remarque

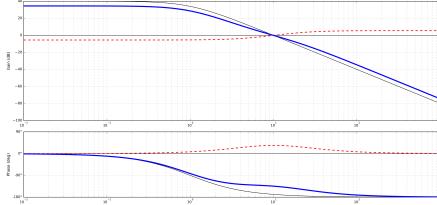
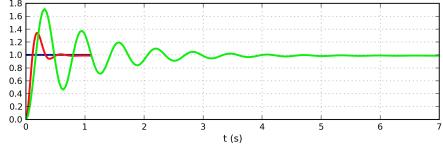
On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

### Démonstration

Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha \tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{\alpha \tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau \sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ ,  $a = 3,54$ ,  $T = 0,053$  s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

#### Méthode –

- En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que le gain est nul.
- On calcule  $\varphi(\omega_{0dB})$ .
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule  $a$ .
- On calcule  $\tau$ .
- On calcule  $K$ .

## 12.5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction		
	Si $K_p$ augmente		
Proportionnel $K_p$	Marges	↔	
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	↔	Si mal réglé
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	↔	(Cf : classe)
	Précision	↔	
	Rapidité	↔	



# Application 1

## Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

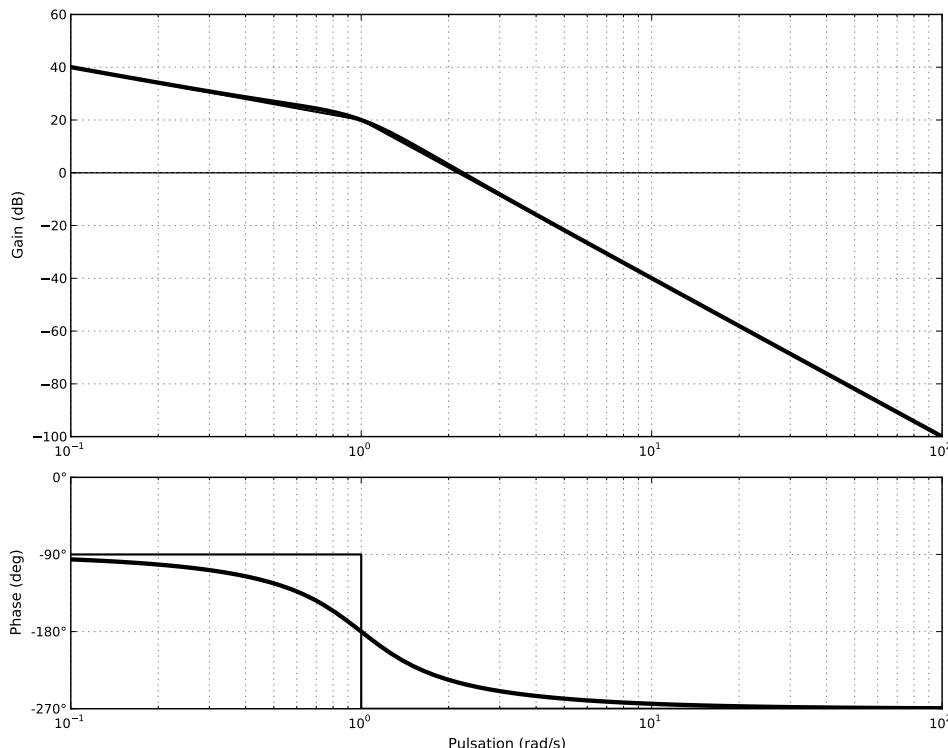
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.

D'après ressources P. Dupas.

C1-02

C2-04



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Éléments de correction**

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20 \text{ dB}$ .
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35 \text{ dB}$ .
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

D'après ressources P. Dupas.

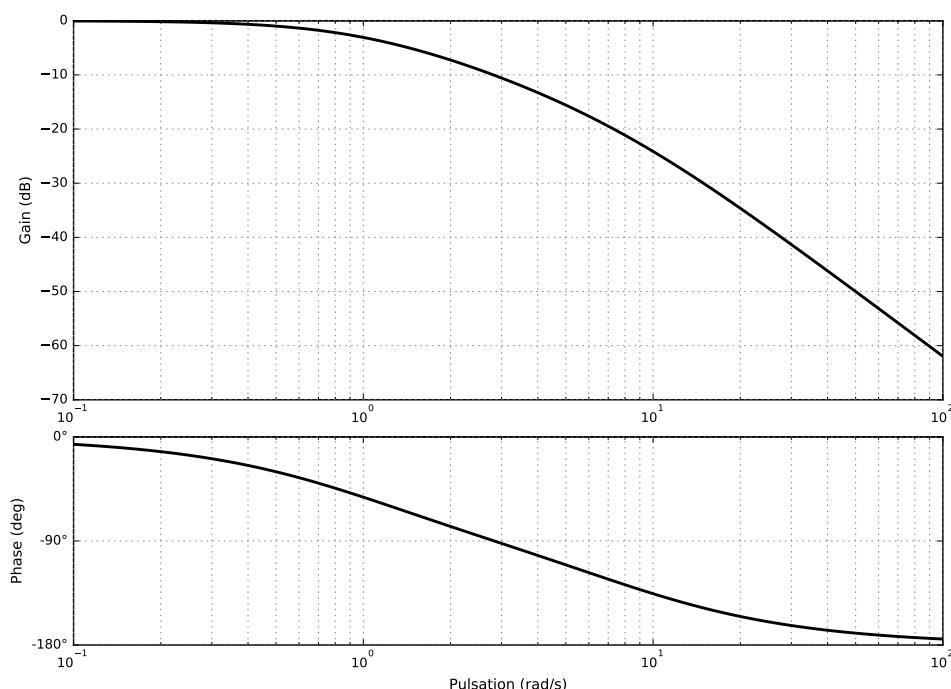
**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

**Correcteur proportionnel intégral**

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 5** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Question 6** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

**Éléments de correction**

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.

# Application 2

## Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

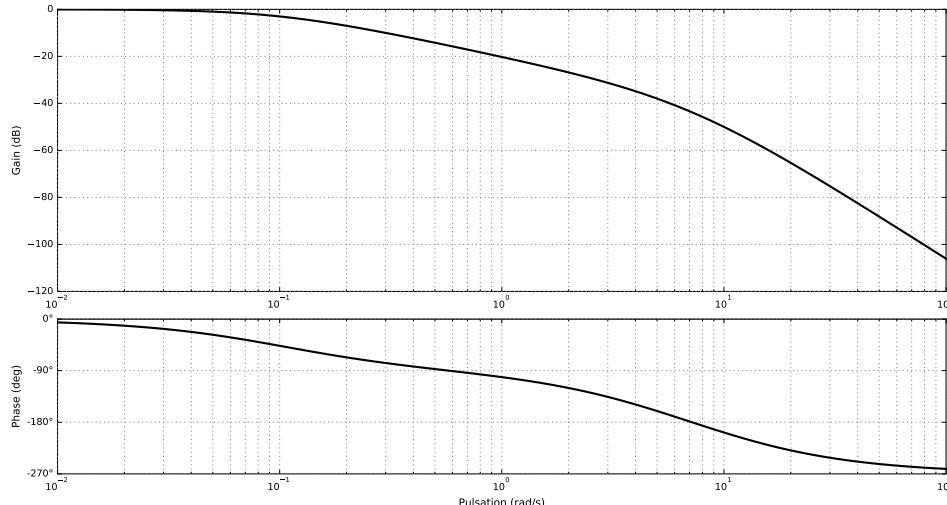
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

### Correcteur à avance de phase

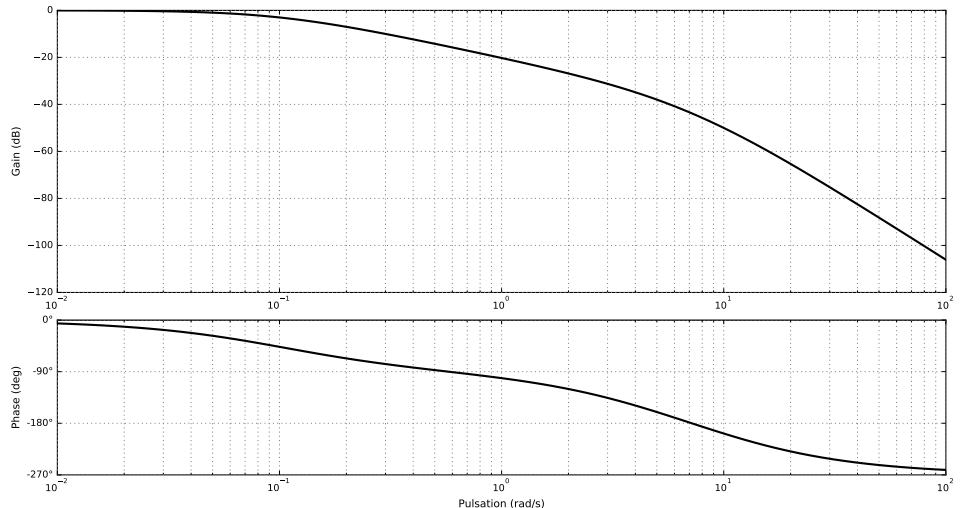
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de

#### Éléments de correction

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .

phase de la forme  $C(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ .

**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .



**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

#### Éléments de correction

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.

# Application 3

## Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

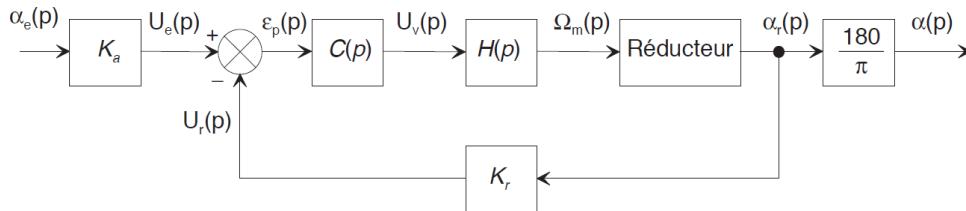
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $t'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

**Question 8** La valeur de  $K_{\text{BO}}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

#### Éléments de correction

1.  $R(p) = \frac{1}{Np}$ .
2.  $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$ .
3.  $T(p) = \frac{K_{\text{BO}}}{p(1 + \tau'_m p)}$  avec  

$$K_{\text{BO}} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$
.
4.  $K_{\text{BO}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$ .
5.  $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$ .
6.  $\varepsilon_S = 0$ .
7.  $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$ .
8.  $\varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{\text{BO}}}$ .

## Colle 1

# Asservissement en température d'un four – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension  $v(t)$ . Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle :  $\frac{d\theta(t)}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = 0,02v(t)$ .

C1-02

C2-04

**Question 1** Calculer la fonction de transfert  $G(p)$  du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

On décide de réguler la température  $\theta(t)$  dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension  $u(t)$ . Le capteur est régi par l'équation différentielle :  $u(t) + 2 \frac{du(t)}{dt} = 5 \cdot 10^{-3}\theta(t)$ . On introduit également un gain  $K$  dans la chaîne directe.

**Question 2** Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rappeler les conditions de stabilité d'un système.

On donne  $t_m$  le temps de montée du système en BF :  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$  avec  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 3** On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^\circ$ . Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour  $K = 11,3$ .

**Question 4** Pour conserver une marge de phase égale à  $60^\circ$  on introduit une correcteur à avance de phase sous la forme  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$ . Déterminer les constantes du correcteur.



## Colle 2

# Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :  $G(p) = \frac{K}{(10p + 1)^2 (p + 1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

- ▶ marge de phase :  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ ;
- ▶ dépassement  $D\% < 10\%$ ;
- ▶ écart statique  $\varepsilon_S < 0,08$ ;
- ▶ temps de montée  $t_m < 8\text{ s}$ .

C1-02

C2-04

**Question 1** Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $\varepsilon_S < 0,08$  ?

On note  $t_m$  le temps de montée du système en BF et  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{\text{co}}}$  et  $\omega_{\text{co}}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 2** Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $t_m < 8\text{ s}$  ?

**Question 3** Quel choix faire pour la valeur de  $K$  ?

**Question 4** Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.

Expérimentalement, on constate que  $z_{\text{BF}} \simeq \frac{\Delta\varphi^o}{100}$  et on rappelle que  $D\% = e^{\frac{-\pi z_{\text{BF}}}{\sqrt{1 - z_{\text{BF}}^2}}}$ .

**Question 5** Que vaut alors le dépassement D% ?

**Question 6** À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

Avec la valeur de  $K = 16,1$ , on introduit, en amont de  $G(p)$ , dans la chaîne directe, un correcteur  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

**Question 7** Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de  $60^\circ$ .



## Colle 3

# Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert est :  $G(p) = \frac{K}{(p + 1)^3}$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite une marge de phase supérieure à 45°.

C1-02

**Question 1** Définir la condition de stabilité théorique du système ?

C2-04

On note  $t_m$  le temps de montée du système en BF avec  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$  et  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 2** Calculer la valeur  $K$  qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

**Question 3** Calculer pour cette valeur de  $K$  la marge de phase.

**Question 4** En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  qu'il faut introduire dans la chaîne directe.



## Colle 4

# Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

### Correction proportionnelle

Soit  $F(p)$  la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de BODE de  $F(p)$  sont représentés sur la figure ci-dessous.

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.

On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note  $K_p$  le gain de ce correcteur.

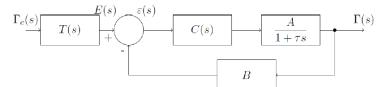
**Question 2** Déterminer la valeur de  $K_p$  permettant d'obtenir une marge de gain  $M_G = 12 \text{ dB}$ .

**Question 3** Déterminer la nouvelle marge de phase du système.

**Question 4** En le justifiant, déterminer l'erreur de position du système corrigé pour une consigne indicielle.

### Correction intégrale – Asservissement en accélération

On désire contrôler l'accélération  $\gamma(t)$  d'un plateau. Pour cela, un capteur d'accélération, fixé sur le plateau et de sensibilité  $B$ , est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert :  $H(s) = \frac{A}{1 + \tau s}$ . On modélise le correcteur par la fonction de transfert  $C(s)$ .



On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $B = 10^{-2} \text{ g}^{-1} \text{ V m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

**Question 5** Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur  $T(s)$  qui traduira l'accélération de consigne  $\Gamma_c(s)$  en tension  $E(s)$ .

On applique à l'entrée du système une consigne d'accélération  $\gamma_c = 20 \text{ g}$ .

Système asservi sans correction :  $C(s) = 1$ .

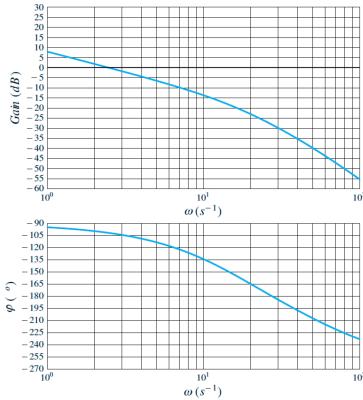
**Question 6** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

**Question 7** Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

**Question 8** Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent.

**Question 9** Donner l'allure de la réponse de ce système en précisant les points caractéristiques.

**Système asservi avec correction intégrale :**  $C(s) = \frac{1}{s}$ .



**Question 10** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

**Question 11** Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

**Question 12** Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent. Pouvait-on prévoir ce résultat.

**Question 13** Conclure en comparant le comportement du système avec et sans correction.

# Colle 5

## Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

### Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne

C1-02

C2-04

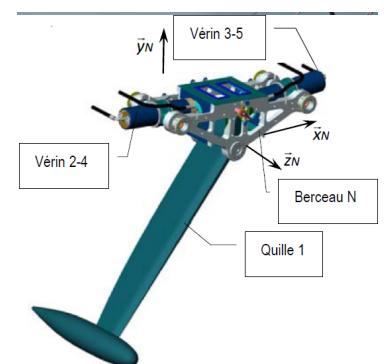
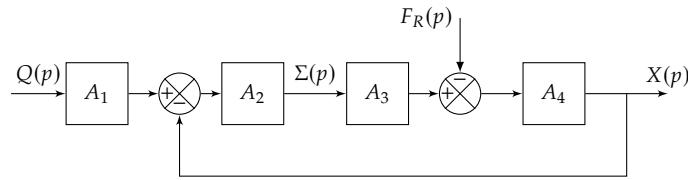


FIGURE 12.1 – Modèle volumique 3D

et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$  (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$  (b).

On a :

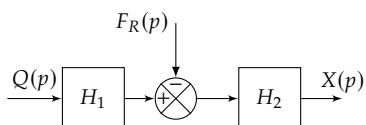
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- $S$  : section du vérin [ $m^2$ ];
- $k$  : raideur mécanique du vérin [ $N m^{-1}$ ];
- $V$  : volume d'huile de référence [ $m^3$ ];
- $B$  : coefficient de compressibilité de l'huile [ $N m^{-2}$ ];
- $M$  : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- $\lambda$  : coefficient de frottement visqueux [ $N m^{-1}s$ ].

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

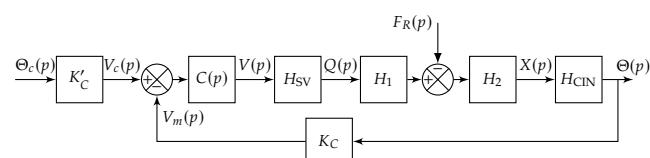
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\Theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\Theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];

- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [ $V/\circ$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1 \text{ V}/\circ$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  
 $H_{CIN} = K_\theta [\circ \cdot m^{-1}]$ ;
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.

### Comportement pour une commande de faible amplitude

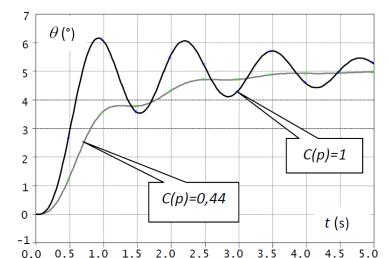
On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^\circ$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ .

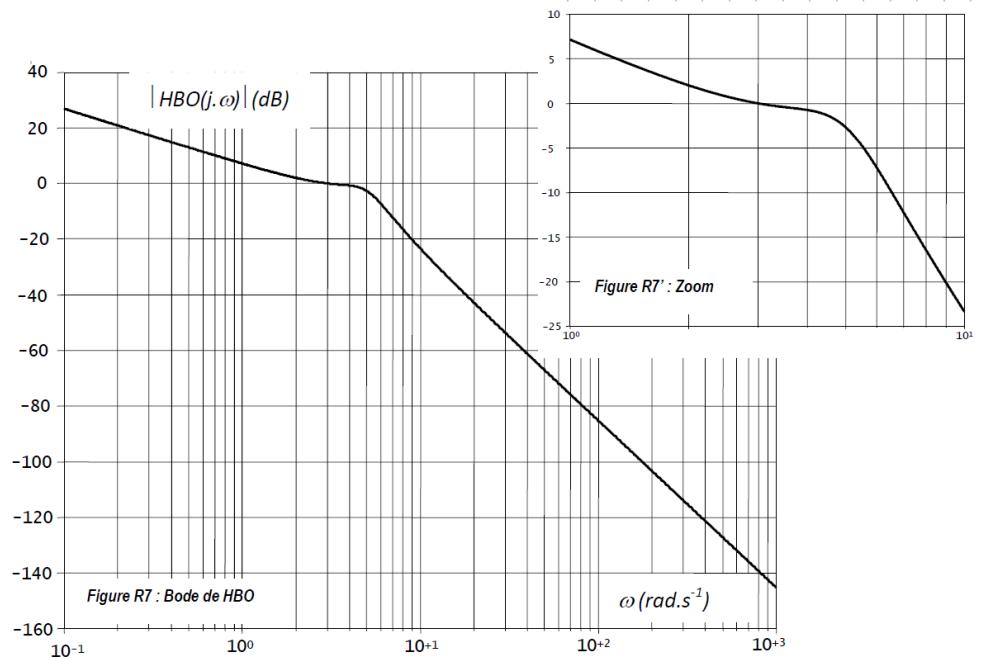
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^\circ$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassemens, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).

À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 4** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.





**Question 5** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 6** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{\text{COR}} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ .

Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :  $\sin [\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$  et  $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ .

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 7** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{\text{COR}} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

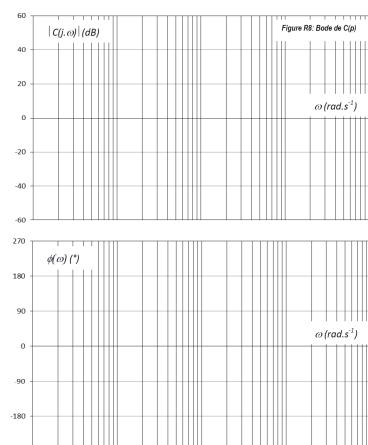
**Question 8** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 9** Pour  $K_{\text{COR}} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{\text{BO}}$  à  $\omega^*$  :

- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

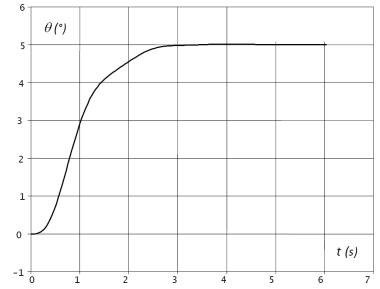
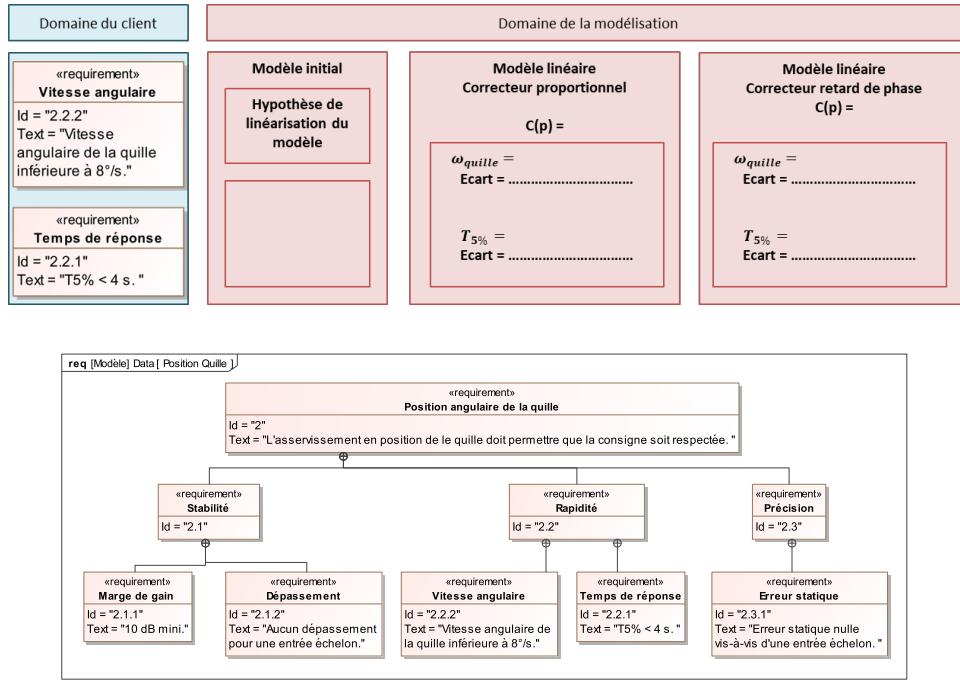
### Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{\text{COR}}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.



**Question 10** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Question 11** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



#### Éléments de correction

1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$   
et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .
4.  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ .  
Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02, T = 0,127 \text{ s}, \phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$ .
14.  $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s } 4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .



## TD 1

# Avance de Phase – Train d'atterrissement d'hélicoptère ★ – Sujet

Banque PT – SIA 2014.

## Mise en situation

Lors d'atterrissages d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de  $2 \text{ m s}^{-1}$  mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'appontage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashes correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

C1-02

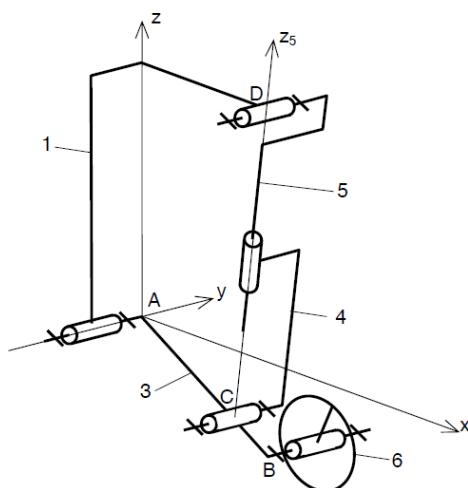
C2-04



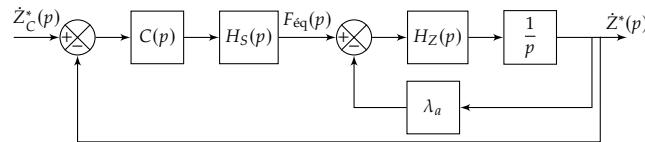
### Objectif

Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée  $Z^*$ . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne  $\dot{Z}_c^*(p)$ . On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- ▶  $\dot{Z}^*(p)$  la transformée de  $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$  avec  $V_0$  la vitesse d'impact et  $\dot{z}(t)$  la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;
- ▶  $F_{eq}(p)$  l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- ▶  $\lambda_a$  le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- ▶  $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$  la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra :  $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$  et  $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;
- ▶  $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$  la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- ▶  $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

### Objectif

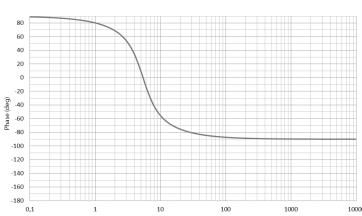
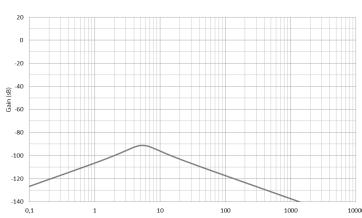
Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

**Question 2** Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

On donne le diagramme de Bode de  $H_F(p)$ .

**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$ .



## Choix et réglage de la correction

### Objectif

Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- ▶ erreur statique nulle;

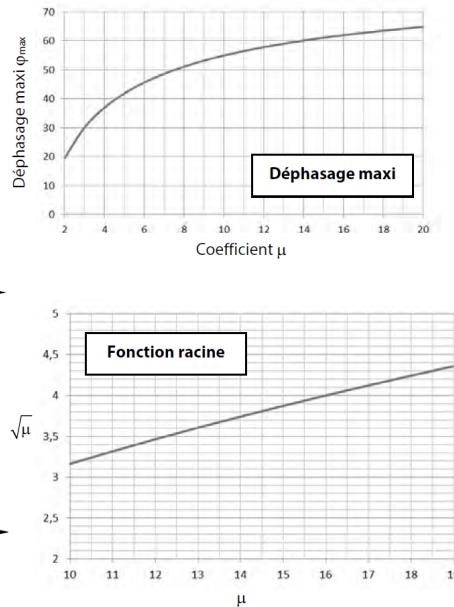
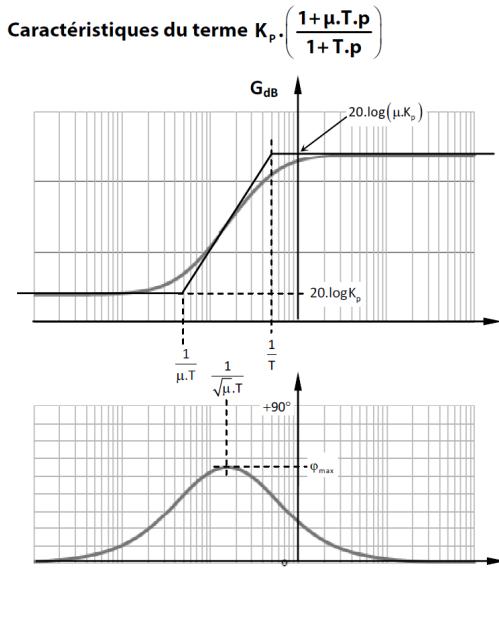
- pulsation de coupure à 0 dB et  $\omega_0 \text{dB} = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- marge de phase  $M\varphi = 45^\circ$ ;
- marge de gain  $MG > 6 \text{ dB}$ .

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$ . On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour  $K_p = 1$ .

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

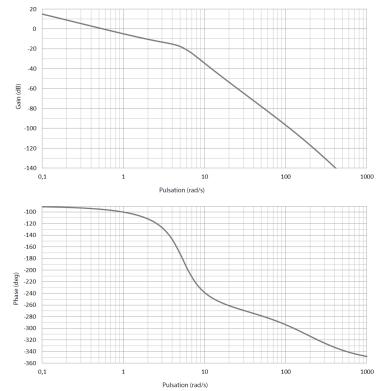
On choisit finalement un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  avec  $\mu > 1$ . Les caractéristiques du terme en  $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?



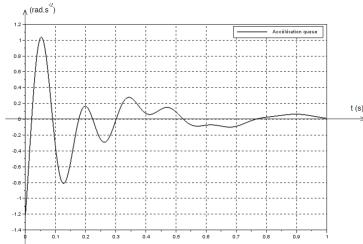
## Validation des performances

### Objectif

Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



### Éléments de correction

1.  $H_F(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$
2.  $H_{BONC}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}$
3.  $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $K_Z = 5 \times 10^{-6}$ .
4. 2.
- 5.

## TD 2

# La robotique au service du handicap – Sujet

Centrale Supélec – PSI 2010.

### Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

#### Objectif

L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force pré-déterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion. La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

C1-02

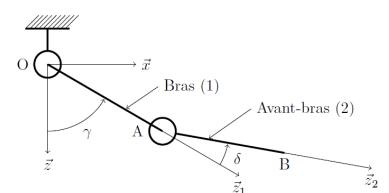
C2-04

Le cahier des charges est rappelé partiellement par les exigences données dans le tableau suivant. Les actionneurs peuvent fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent.

La structure des axes étudiés est donnée dans la figure ci-contre.

On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras  $t(\gamma, \delta)$  et de la variation de force  $Z_F$  exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).

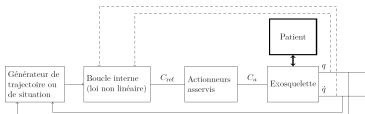
Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée)	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$



La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations ;

- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{ref}$ .



## Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

### Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

L'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .

L'action du premier actionneur sur le solide  $\{\text{Bras}\}$  :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps. Les actions du second actionneur sur le solide  $\{\text{Bras}\}$  et le solide  $\{\text{Avant-bras}\}$ , respectivement notées :

$\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps.

En utilisant le PFD on peut établir les lois de commandes suivantes pour piloter chacun des deux axes :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & (B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\gamma} + (B_2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 (\lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin (\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos (\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 \sin (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(t) = & -l_2 X_F \cos (\gamma + \delta) + l_2 Z_F \sin (\gamma + \delta) + \lambda_2 m_2 g \sin (\gamma + \delta) \\ & + \ddot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) \\ & + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta \end{aligned}$$

Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie $G_1$ tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1$ , $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2}$ kg · m <sup>2</sup> $B_1 = 2,3 \times 10^{-2}$ kg · m <sup>2</sup> $D_1 = 2,1 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup>
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie $G_2$ tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$ , $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup> $B_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup> $D_2 = 4,3 \times 10^{-5}$ kg · m <sup>2</sup>

Montrer que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Z_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A, B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement ( $\gamma, \delta$ ) et de leurs dérivées premières ( $\dot{\gamma}, \dot{\delta}$ ).

**Question 1** Calculer les couples ( $C_1, C_2$ ) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 2** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

## Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

### Objectif

L'objectif de cette partie est de déterminer une loi de commande afin que la relation entre les variations des positions  ${}^t(\gamma, \delta)$  du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $Z_F$  exercée par le patient soit celle d'une raideur en torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ) données dans le cahier des charges. La raideur comparativement à la force  $X_F$  ne sera pas à vérifier dans ce cas d'étude.

L'équation dynamique décrivant le comportement de l'exosquelette est de la forme  $A(q, \dot{q})\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + Q(q, \dot{q})F = C_a$  où  $C_a = {}^t(C_1 \quad C_2)$ ,  $q = {}^t(\gamma \quad \delta)$  et  $F = {}^t(X_F \quad Z_F)$ . On note sous forme vectorielle  $q_{\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}} \quad \delta_{\text{ref}})$  les consignes de positions angulaires. La loi de commande adoptée est organisée selon deux boucles :

- ▶ une boucle externe linéaire ;
- ▶ une boucle interne non linéaire qui détermine le couple  $C_a$  par la relation  $C_a = B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + A(q, \dot{q})U$ .

où  $U = {}^t(U_1 \quad U_2)$  sont les deux nouvelles commandes issues du correcteur linéaire de la boucle externe.



Le principe de cette loi de commande est donné par la structure représentée par le schéma suivant.

**Question 3** Donner au moins un argument, en particulier vis-à-vis du cahier des charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

Pour la synthèse de la loi de commande, il est nécessaire de linéariser le modèle dynamique autour d'un point de fonctionnement défini par les positions articulaires  ${}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$  et les forces  ${}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ . On note autour de ce point de fonctionnement :

- $u = {}^t(u_1 \quad u_2)$  les variations des grandeurs de commande autour de  $U_0 = {}^t(U_{10} \quad U_{20})$ ;
- $q_1 = {}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  les variations des positions angulaires des deux articulations autour de  $q_0 = {}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$ ;
- $f = {}^t(x_F \quad z_F)$  les variations des efforts exercés par le patient autour de  $F_0 = {}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ .

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme  $\ddot{q} = U + N(q, \dot{q}, F)$ , où  $N(q, \dot{q}, F) = M(q, \dot{q})F$ .

**Question 4** Préciser l'expression de la matrice  $M$  en fonction de  $A$  et de  $Q$ .

**Question 5** Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme  $\ddot{q}_1 = \tilde{A}\dot{q}_1 + \tilde{B}\ddot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f$  où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

Indication : la démarche de linéarisation fait intervenir  $\frac{\partial N}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial N}{\partial F}$ ; l'expression explicite du modèle linéarisé en fonction de  $M$  n'est pas demandée.

On admet pour la suite que le modèle linéarisé, décrivant les variations des positions  ${}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  du bras, autour du point de fonctionnement  $q_0 = {}^t(0, 60, 7)$  rad et  $F_0 = {}^t(0 \quad -5)$  N, est représenté par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1 \\ \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18,4 & -33 \\ 4 & -56,5 \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,9 \\ -45,4 \end{pmatrix} z_F.$$

On note  $q_{1\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}}, \delta_{\text{ref}})$  les variations de consignes de position. L'objectif des questions suivantes est la synthèse d'une loi de commande linéaire en vue d'assurer la raideur souhaitée entre les variations des positions  ${}^t(\gamma_1, \delta_1)$  des deux articulations et la variation de l'effort  $z_F$  exercé par le patient. L'adaptation de la loi de commande au point de fonctionnement ne fait pas partie du cadre de cette étude.

**Question 6** En justifiant la réponse, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

**Question 7** En utilisant un raisonnement qualitatif (sans calcul), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :  $\frac{U_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right)$

et  $\frac{U_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p}\right)$  où  $\varepsilon_1(p) = \gamma_{1\text{ref}} - \gamma_1$  et  $\varepsilon_2(p) = \delta_{1\text{ref}} - \delta_1$  sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions  $\gamma_1$  et  $\delta_1$ , du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $z_F$  exercée par le patient.

Pour la suite, on adopte la loi de commande  $u(t) = K_p (q_{1\text{ref}} - q_1) + K_v (\dot{q}_{1\text{ref}} - \dot{q}_1)$  avec :

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_v = \begin{pmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v22} \end{pmatrix}.$$

Par souci de simplicité, on pourra utiliser  $q_{1\text{ref}} = 0$  et  $\dot{q}_{1\text{ref}} = 0$ .

**Question 8** Déterminer les coefficients des matrices  $K_p$  et  $K_v$  afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :  $\frac{\gamma_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_1}p + \frac{p^2}{\omega_1^2}}$  et

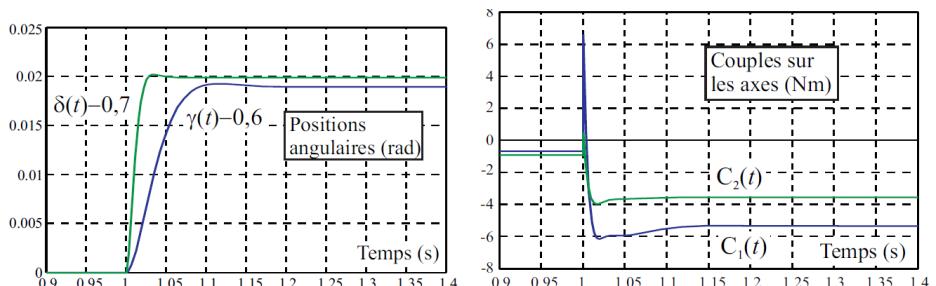
$$\frac{\delta_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_2}p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$$

caractérisées par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,7$ . Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

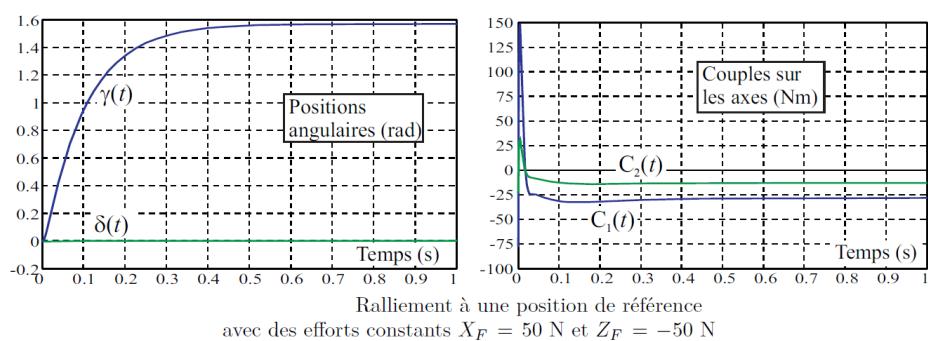
Les figures suivantes montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

- ▶ pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question précédente, la première figure suivante montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement  $t(0,6 \ 0,7)$  rad) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à  $t_0 = 1$  s de la force  $Z_F = \Delta Z_F = -1$  N;
- ▶ la seconde figure montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants,  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N en partant de conditions initiales nulles.

**Question 9** Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.



Réponses temporelles (angles des articulations et couples sur les axes) pour une variation de force  $Z_F = -1$  N



Ralliement à une position de référence avec des efforts constants  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N



# TD 3

## Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée ★ – Sujet

Concours CCP – PSI 2018.

### Présentation du prototype de canne robotisée étudié

L'objectif de cette canne est de prendre en charge une partie des efforts normaux supportés par une jambe handicapée.

C1-02

C2-04

Le prototype de canne robotisée envisagé conserve une forme longiligne, un point d'appui au sol ainsi qu'un encombrement et un poids réduits. La canne robotisée, dont la structure mécanique est présentée en 12.2, se compose d'un axe linéaire motorisé et d'une roue motorisée située à son extrémité.

Les deux degrés de mobilité, rendus possibles par cette structure, permettent de suivre la marche d'un sujet et lui offre un point d'appui. L'avantage est d'éviter aux utilisateurs la manipulation de la canne (levée et positionnement) pendant la marche, la roue restant toujours en contact avec le sol.

#### Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

Le maintien d'une hauteur constante lors de la phase d'appui revient finalement à asservir en position le déplacement  $x(t)$  de la canne supérieure 3 par rapport à la canne inférieure 2.

Le modèle causal retenu pour l'étude du comportement de l'axe linéaire perturbé est représenté par le schéma-blocs ci-dessous. Dans ce modèle, on note :

- ▶  $X_c(p)$  la transformée de Laplace de la consigne de déplacement  $x_c(t)$  en mètre,
- ▶  $X(p)$  la transformée de Laplace du déplacement  $x(t)$  en mètre,
- ▶  $F_p(p)$  la transformée de Laplace de l'effort exercé par le patient sur la canne  $F_p(t)$  en N,
- ▶  $\Omega_m(p)$  la transformée de Laplace de la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m(t)$  en rad/s,
- ▶  $C_m(p)$  la transformée de Laplace du couple moteur  $C_m(t)$  en N m,
- ▶  $C(p)$  la fonction de transfert du bloc correcteur.

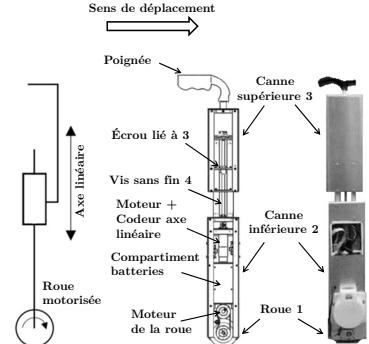
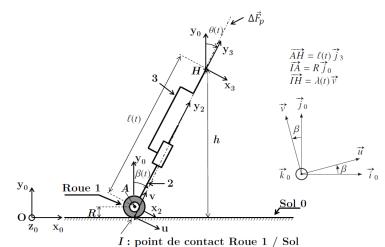
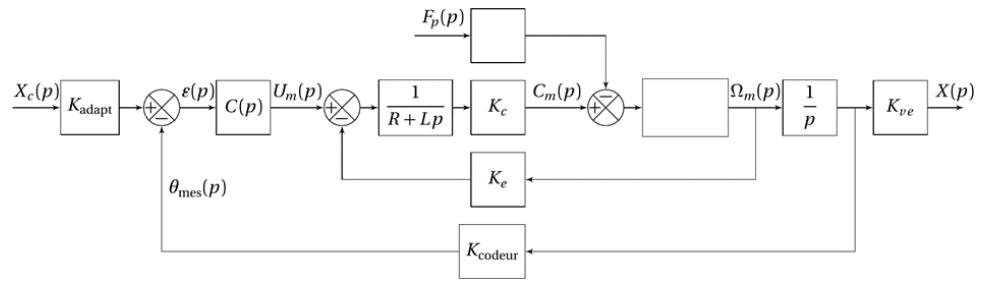


FIGURE 12.2 – Schéma cinématique et photographie du prototype de canne robotisée





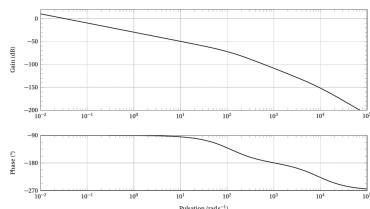
## Modèle comportemental

Afin de proposer une modélisation simplifiée de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire, une simulation du modèle précédent en boucle ouverte, non perturbé, a été réalisée. Le document réponse présente la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte à l'aide du diagramme de Bode (courbe de gain  $G_{BO}(\omega)$  et courbe de phase  $\varphi_{BO}(\omega)$ ).

**Question 1** À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit  $H_{BO\_1}(p)$  cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient  $T_1$  et  $T_2$ , telles que  $T_1 < T_2$ , les constantes de temps introduites et  $K_{BO}$  le gain de  $H_{BO\_1}(p)$ , préciser les valeurs numériques et unités de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_{BO}$ . Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.

Lors d'une marche saine à allure rapide la cadence moyenne est de 113 pas par minute.

**Question 2** Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.



Pour la suite, on considérera que la fréquence maximale de déplacement de l'axe linéaire de la canne (liée au mouvement de la marche) est fixée à  $F_{MAX} = 4$  Hz. On propose alors en première approximation une modélisation du comportement du système en boucle ouverte par une fonction de transfert  $H_{BO}(p)$  de la forme  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ .

**Question 3** Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

## Correction proportionnelle

Pour la suite, on modélise le comportement du système en boucle ouverte par  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ . On considère un correcteur à action proportionnelle tel que  $C(p) = K_{corr} = 1$ .

Le schéma-blocs du système non perturbé correspond alors à celui de la figure 12.3.

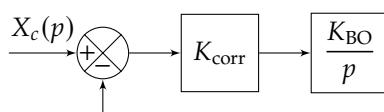


FIGURE 12.3 – Schéma-bloc simplifié du système non perturbé avec  $C(p) = K_{corr}$

**Question 4** Déterminer l'expression de  $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la 12.3. Déterminer les paramètres caractéristiques de  $H_{BF}(p)$  et en déduire les performances de cette modélisation pour  $C(p) = K_{corr} = 1$ . Conclure vis-à vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

On se propose de modifier la valeur de  $K_{corr}$  de manière à vérifier l'exigence de rapidité de l'asservissement.

**Question 5** Déterminer la valeur numérique à donner à  $K_{\text{corr}}$  pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

La 12.4 donne l'évolution de la réponse temporelle  $x(t)$  du système réel non perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10 \text{ mm}$ , pour une correction proportionnelle  $K_{\text{corr}} = 1500$ .

**Question 6** L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

Pour la suite, on modélise la fonction de transfert en boucle ouverte du système par  $H_{\text{BO}}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_{\text{BO}}}{1 + \tau_{\text{BO}} p}$  avec  $K_{\text{BO}} = 1/30$  (unité en  $\text{s}^{-1}$ ) et  $\tau_{\text{BO}} = 9 \text{ ms}$ .

**Question 7** Quelle valeur maximale de  $K_{\text{corr}}$ , notée  $K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$ , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

**Question 8** Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %,  $t_{r5\%}$  de ce modèle pour  $K_{\text{corr}} = K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$  à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.

La figure 12.5 donne les évolutions des réponses temporelles  $x(t)$  du système réel avec prise en compte de la perturbation ( $F_p$  constante et égale à 175 N) à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10 \text{ mm}$ , pour une correction proportionnelle  $K_{\text{corr}} = 1500$  et pour  $K = K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$ .

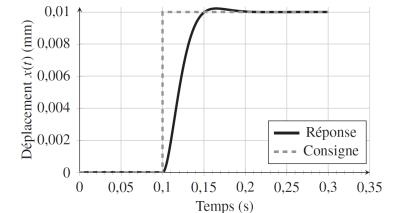


FIGURE 12.4 – Évolution de la réponse temporelle  $x(t)$  du système réel non perturbé à un échelon de valeur  $X_c = 10 \text{ mm}$ , pour  $K_{\text{corr}} = 1500$

**Question 9** Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

### Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée – correcteur PI généralisé

Le correcteur finalement retenu est un correcteur avec action proportionnelle et intégrale généralisée. La fonction de transfert  $C(p)$  prend alors la forme suivante :

$$C(p) = K_{\text{corr}} \cdot \frac{1+T_d p}{p} \text{ avec } K_{\text{corr}} >> 1 \text{ et } T_d < 1 \text{ s.}$$

On donne dans le document réponse le diagramme de Bode (courbe de Gain et de Phase) du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé pour  $K_{\text{corr}} = 1000$  et  $T_d = 0,2 \text{ s}$ .

**Question 10** Représenter sur le document réponse les marges de Gain  $M_G$  et de Phase  $M_\phi$  du système corrigé.

Avec cette correction, le système est précis mais les valeurs des marges de gain et de phase sont telles que le système n'est pas assez rapide. Il est donc nécessaire d'augmenter la valeur de  $K_{\text{corr}}$ , tout en conservant  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , de manière à augmenter la bande passante du système et ainsi se rapprocher des valeurs limites de marge de Gain et de Phase autorisées.

**Question 11** En déduire la valeur maximale à donner au gain  $K_{\text{corr}}$ , en conservant  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.

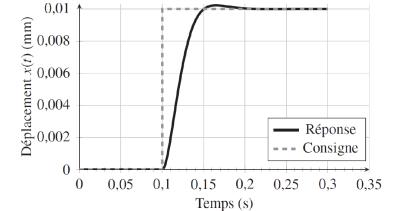
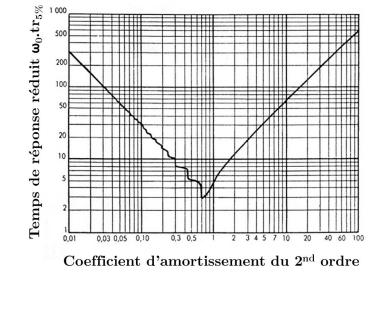
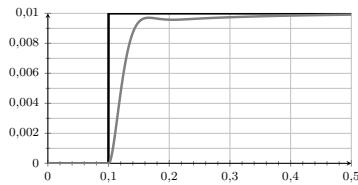
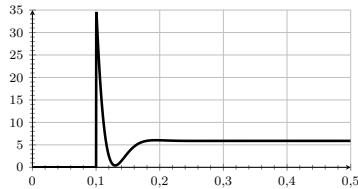


FIGURE 12.5 – Réponses temporelles  $x(t)$  du système réel perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10 \text{ mm}$ , pour une correction proportionnelle  $K_{\text{corr}} = 1500$  et pour  $K = K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$

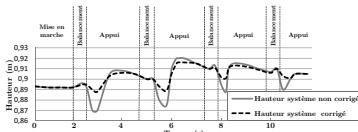


*Déplacement (mm) en fonction du temps (s)*

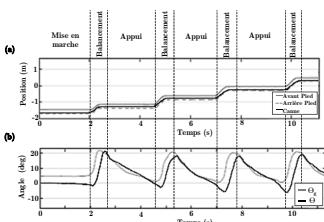


*Intensité simulée (A) en fonction du temps (s)*

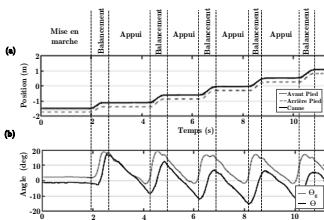
**FIGURE 12.6** – Réponses temporelles à un échelon d'amplitude  $X_c = 10$  mm du système simulé, perturbé et corrigé



**FIGURE 12.7** – Hauteur de la main au cours de la marche pour  $V = 0,22$  m/s



**FIGURE 12.8** –  $V = 0,22$  m/s, allure normale – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol



**FIGURE 12.8** –  $V = 0,22$  m/s, allure normale – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ )

Les figures 12.6 donnent la réponse temporelle à un échelon de consigne  $X_c = 10$  mm du système simulé, perturbé et corrigé du déplacement  $x(t)$  (en mm) ainsi que l'évolution de l'intensité simulée (en Ampères) circulant au sein du moteur.

**Question 12** Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

## Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

L'objectif de cette synthèse est de vérifier que les paramètres d'asservissement mis finalement en place sur la commande de l'axe linéaire et sur la commande de la roue permettent d'atteindre les performances de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche ».

La 12.7 donne les évolutions de la hauteur de main mesurées lors d'une marche assistée avec le prototype de canne à la vitesse  $V = 0,22$  m/s.

La courbe grise en trait continu correspond au cas où l'axe linéaire est sans correction ( $C(p) = 1$ ).

La courbe noire en trait pointillé correspond au cas où l'axe linéaire est corrigé (correction PI généralisée avec paramètres optimisés).

Il est à remarquer que lors de cet essai, le patient avait pour consigne de conserver sa main immobile lors du déplacement. Cette condition est difficilement vérifiable en pratique car le patient ne peut pas vraiment se concentrer sur la position de sa main pendant la marche.

**Question 13** Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

Les figures 12.8 et 12.9 donnent pour  $V = 0,22$  m/s (allure normale), respectivement pour  $V = 0,29$  m/s (allure rapide), le suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol et le suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ ).

**Question 14** Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

## Annexes – Diagramme partiel des exigences

### Éléments de correction

1.  $H_{BO\_1}(p) = K_{BO} \frac{1}{p} \frac{1}{1+T_1 p} \frac{1}{1+T_2 p}$  avec  $\omega_{c1} \approx 1 \times 10^4$  rad/s et  $T_1 = 0,1$  ms,  $\omega_{c2} \approx 1 \times 10^2$  rad/s et  $T_2 = 10$  ms.  $K_{BO} = 10^{-30/20} \approx 0,032$  s $^{-1}$ .
2. 1,88 Hz.
3. .
4.  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} p}$  et  $1/K_{BO} = 30$  s.
5.  $K_{corr} \geq 1500$ .
6. .
7.  $K_{corr} \leq 1700$ .
8.  $tr_{5\%} \approx 38$  ms < 60 ms.
9. .
10.  $M_G \approx 60$  dB et une marge de Phase  $M_\varphi \approx 50^\circ$ .
11.  $K_{corr}^{new} \approx 5620$ .
12. .

13. .  
14. .



## TD 4

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2016.

## Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

L'axe en translation du MC<sup>2</sup>E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC<sup>2</sup>E.

C1-02

C2-04



## Objectif

Modéliser et valider l'asservissement en effort. On cherche à savoir si l'asservissement réalisé permet d'obtenir un effort constant sur l'effecteur.

## Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :

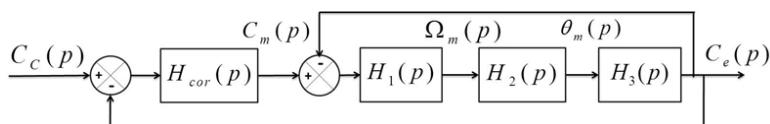


FIGURE 12.10 – Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;
- $C_c(p)$ , couple de consigne;
- $C_m(p)$ , couple moteur;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

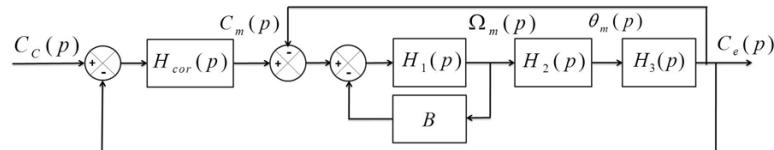


FIGURE 12.11 – Régulation avec retour tachymétrique

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.

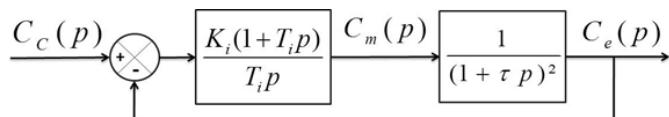


FIGURE 12.12 – Régulation avec correcteur PI.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : 
$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

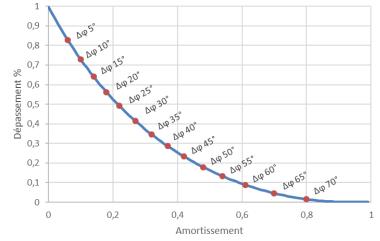
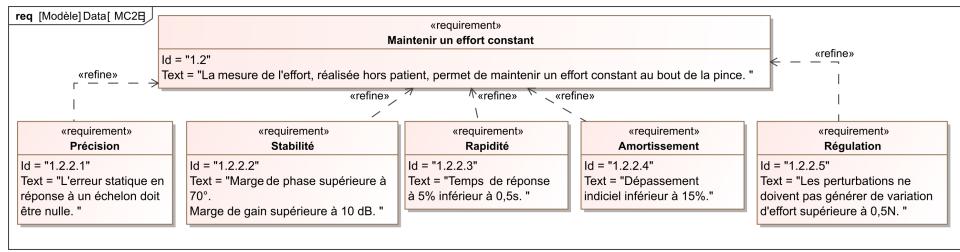
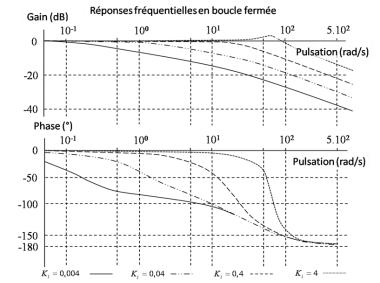
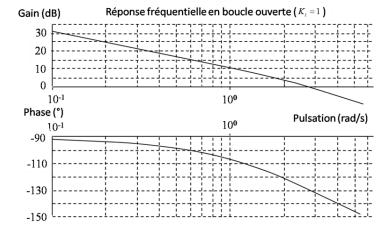
Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour  $K_i = 1$  et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K_i$  sont données ci-dessous.

**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.

## Retour sur le cahier des charges

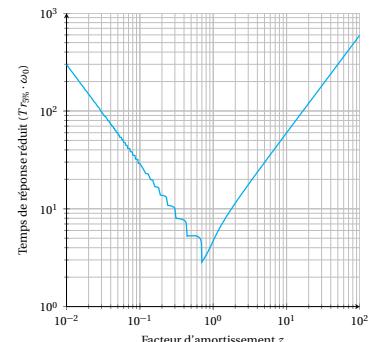
**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			



## Éléments de correction

1.  $H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p}, H_3(p) = K_C\theta.$
2.  $H_{BF}(p) = \frac{K_C\theta}{Jp^2 + 2K_C\theta}.$
3. Sinus d'amplitude  $C_0/2$  et de pulsation  $\omega_0$ .
4.  $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_C\theta}}$  et  $B = 2\sqrt{JK_C\theta}.$
5. Erreur statique nulle.
6.  $\tau = T_i.$
7.  $K_i = 0,4 (< 1,58).$
8. .





## TD 5

# Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

C1-02

C2-04

### Objectif

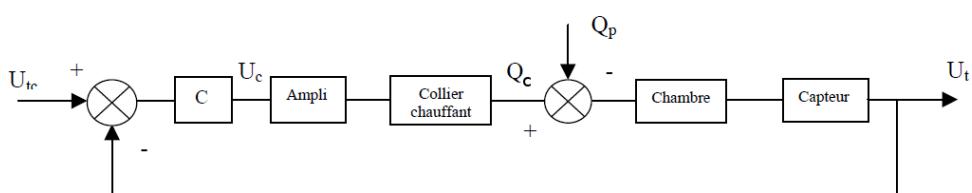
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

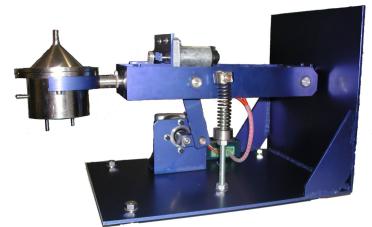
Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$



## Analyse des performances

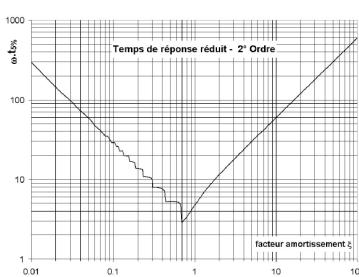
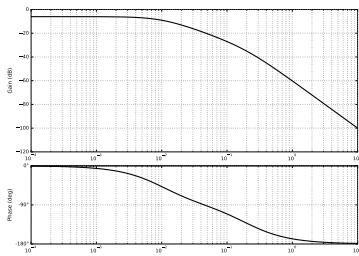
On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.



## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.

### Éléments de correction

1. 218 s.
2.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ( $M_G \rightarrow \infty$ ,  $M_\varphi$  non définie).
5.  $K = 9$ .
6. 50 s,
7.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
8.  $U_a = 450$  V.
9.  $K = 10$  et  $T_i = 100$  s.
10.  $\varepsilon_p = 0$ .

# TD 6

## Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

C1-02

C2-04

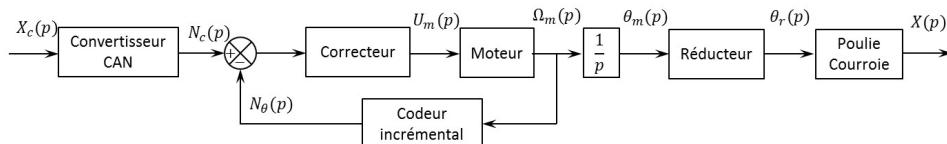
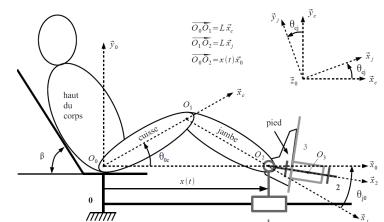
### Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

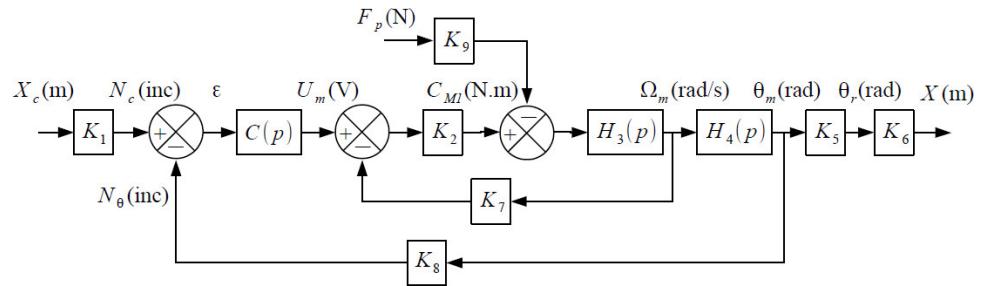
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	$50 \text{ rad s}^{-1}$

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



### Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$  et  $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

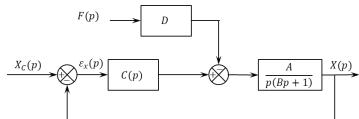
$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec :  $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied,  $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur,  $r = 46,1$  mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie,  $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .



### Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_i$ .

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

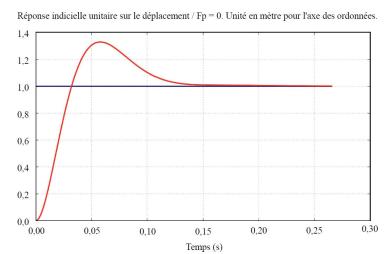
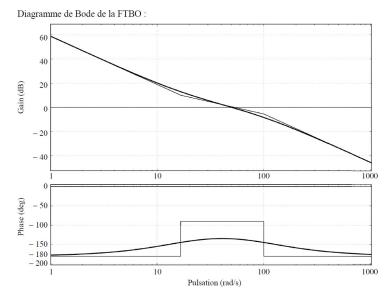
**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système FTBO( $p$ ) =  $\frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.





## TD 7

# Banc d'épreuve hydraulique – Sujet

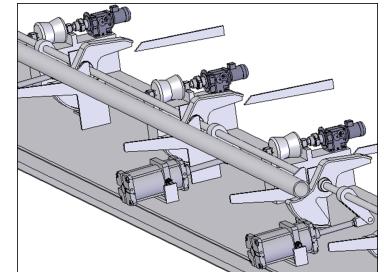
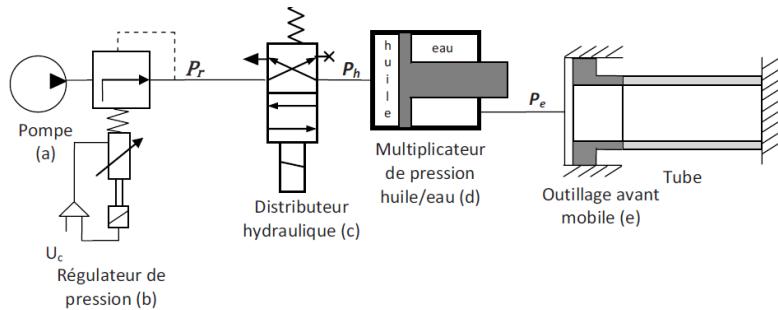
CCP – PSI – 2010.

### Présentation

Vallourec & Mannesmann Tubes (V&M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

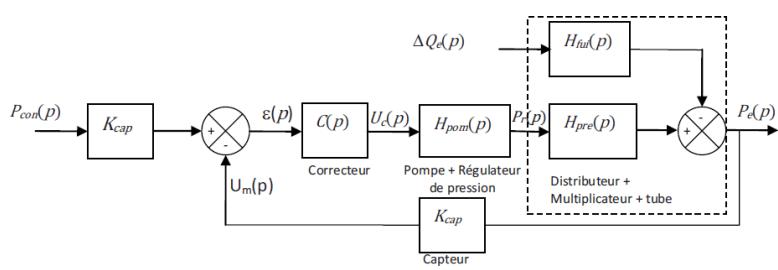
Afin de valider la caractéristique de tenue en pression des tubes, ceux-ci sont soumis à une pression hydraulique donnée durant un temps spécifié. Ces paramètres dépendent de la taille des tubes et de leur future utilisation.

Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante :



### Mise en place d'un asservissement de pression.

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. L'objectif est ici de proposer un réglage du correcteur pour répondre aux critères du cahier des charges. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression. Le schéma-blocs de l'asservissement est défini ci-dessous.



Hypothèses :

- ▶  $P_{con}(p)$  : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa);
- ▶  $P_e(p)$  : pression d'eau dans le tube (Pa);
- ▶  $U_c(p)$  : tension de commande du régulateur de pression (V);
- ▶  $P_r(p)$  : pression d'huile régulée (Pa);
- ▶  $\Delta Q_e(p)$  : débit de fuite ( $m^3/s$ );
- ▶  $U_m(p)$  : tension de mesure du capteur (V).

- quels que soient les résultats précédents, l'ensemble de mise sous pression {tube + distributeur + multiplicateur de pression} est défini par les transmittances suivantes :  $H_{\text{pre}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{\text{fui}}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \cdot 10^{10} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})$ ;  $T_1 = 10 \text{ s}$ ;
- l'ensemble {pompe+régulateur de pression} est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{\text{pom}} = 1,234 \cdot 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5 \text{ s}$ ;
- le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{\text{cap}} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{\text{con}} = 800 \text{ bars}$  et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

On rappelle que le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant :

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de $12 \text{ dB}$
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \omega_{0 \text{ dB}} = 3$  où  $\omega_{0 \text{ dB}}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1<sup>er</sup> maximum si le dépassement est supérieur à 5%;
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5% si le dépassement est nul ou inférieur à 5%.

## Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

**Question 2** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{\text{con}}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{\text{con}}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Question 3** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{con}}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 4** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$   $\varepsilon_{\text{pert}}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{pert}}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

**Question 6** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement.

**Question 7** À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

## Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Question 9** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

**Question 10** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.

**Question 11** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_0 \text{dB}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?

**Question 12** Déterminer alors le rapport  $T = K_p/K_i$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

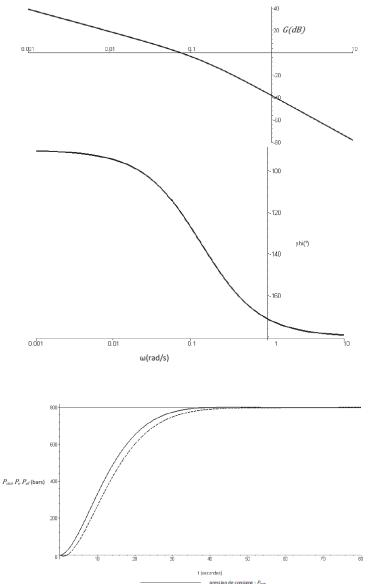
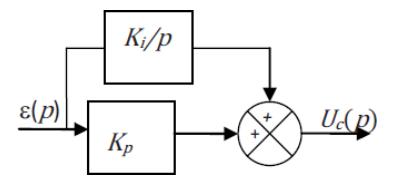
**Question 13** En déduire les valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

## Bilan

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.

On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

**Question 14** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.





# TD 8

## Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie – Sujet

Emilien Durif.

### Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.

### Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ .

On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{cor}(p) = K_p$ .

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partielle.

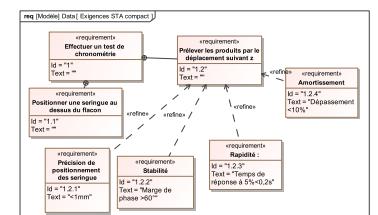
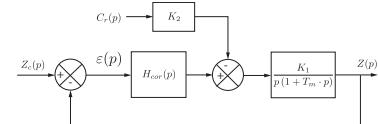
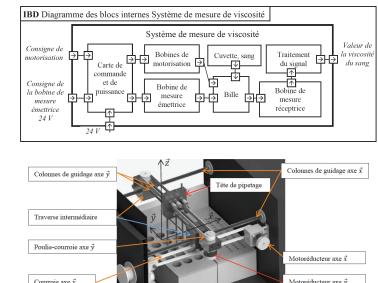
**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

C1-02

C2-04



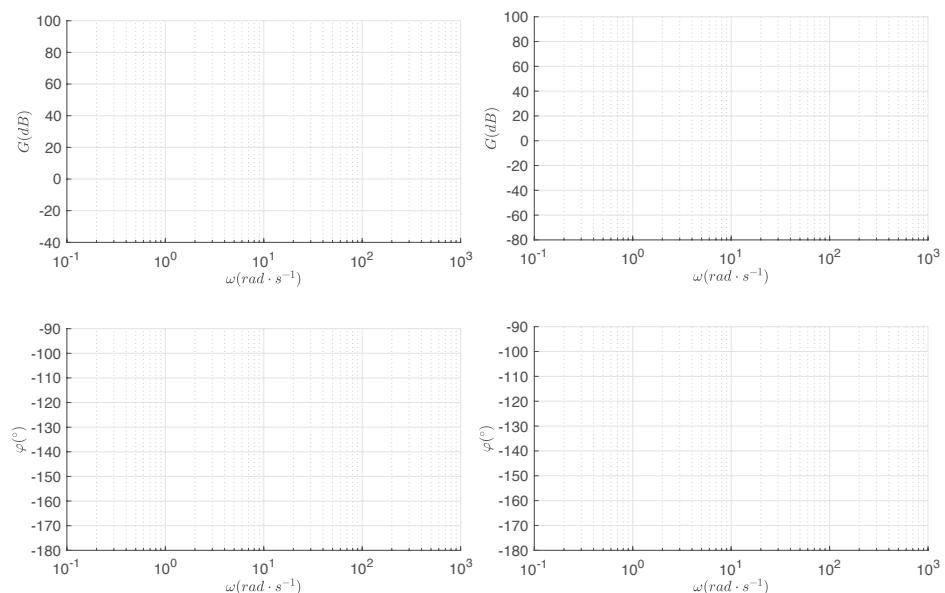
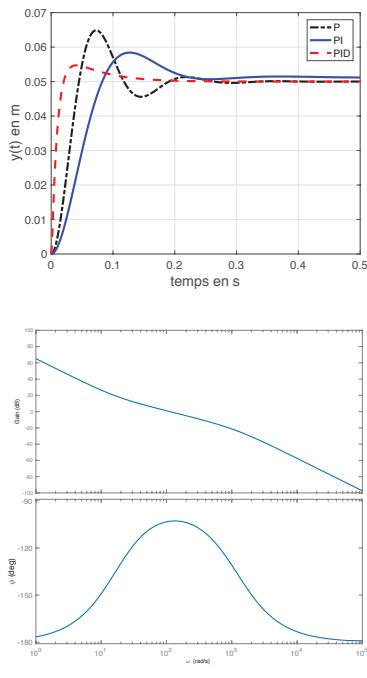
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



## TD 9

# La robotique au service du handicap – Sujet

Centrale Supélec – PSI 2010.

### Présentation

On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

C1-02

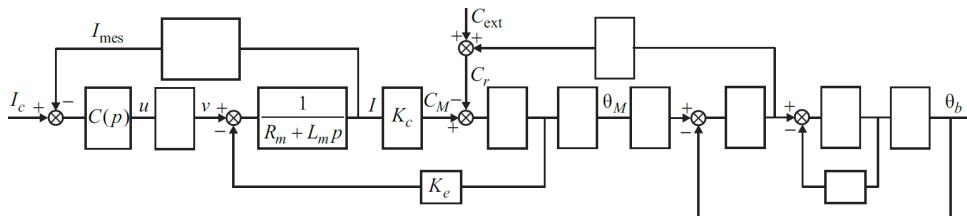
C2-04

### Objectif

- Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple :  $t \leq 2$  ms.
- Erreur statique pour un couple de référence constant  $C_{\text{ref}0}$  :  $|\varepsilon_0| \leq 0,05C_{\text{ref}0}$ .
- Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation  $C_{\text{max}} = 50$  Nm.

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ . On adopte sans aucune justification que  $T_i = 0,3$  ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left(1 + \frac{2 \times 0,08}{463}p + \frac{p^2}{463^2}\right)}{\left(1 + \frac{p}{122}\right) \left(1 + \frac{2 \times 0,09}{464}p + \frac{p^2}{464^2}\right) \left(1 + \frac{p}{10^3}\right) \left(1 + \frac{p}{10^4}\right)}$$

est donné en fin de document.  $i_{\text{mes}}(t)$  est la mesure du courant du moteur et  $u(t)$  la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

## Syntèse du régulateur PI de la boucle de courant

**Question 1** Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction  $H(p)$ .

**Question 2** En adoptant  $K = 1$ , tracer le diagramme de Bode (module et phase) de  $C(p)$  : diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

**Question 3** En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation  $\omega_1$  telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à  $-135^\circ$  et la valeur numérique du gain statique.

**Question 4** Déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer une marge de phase de  $45^\circ$ .

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur  $C(p)$  qui vient d'être déterminé.

**Question 5** Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

**Question 6** Déterminer l'écart statique  $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$  en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne  $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$  d'amplitude  $I_0$  et l'exprimer sous la forme  $\Delta i_0 = k I_0$  en précisant la valeur numérique de  $k$ .



La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) :  $i_c$  et  $i$  sont respectivement la consigne et le courant moteur,  $C_{\text{ref}}$  est le couple de référence souhaité,  $C_a$  est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et  $G_{ic}$  est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple  $C_a$ . On suppose pour toute cette question que le couple de référence  $C_{\text{ref}}(t)$  est constant d'amplitude  $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$ .

**Question 7** Exprimer  $G_{ic}$  en fonction de  $K_c$  et de  $N$ .

### Éléments de correction

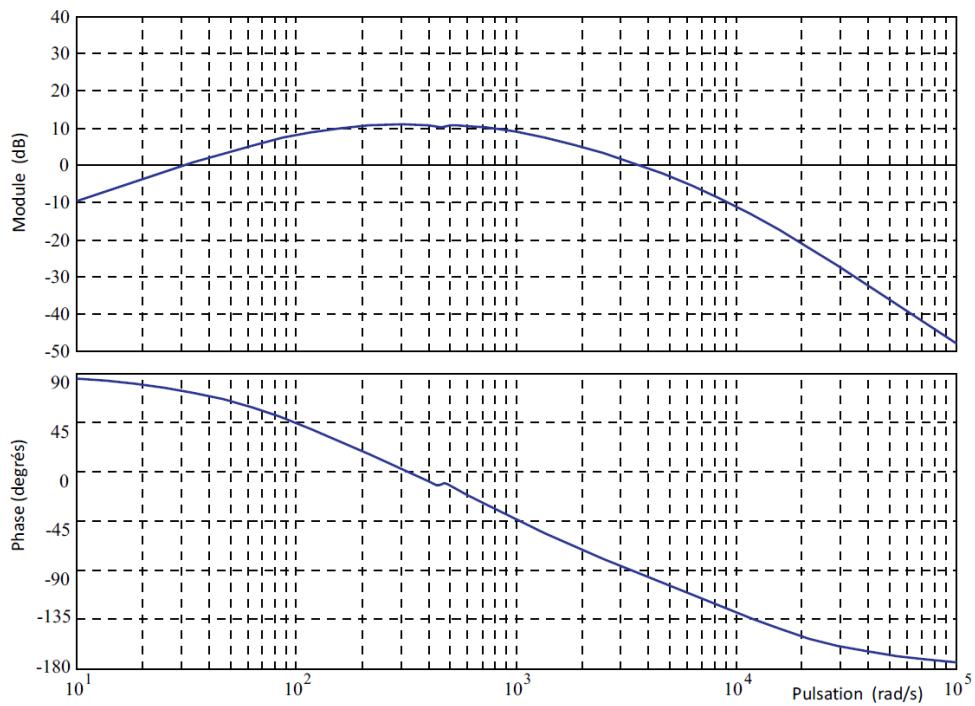
1. .
2. .
3.  $\omega_1 = 3300 \text{ rad s}^{-1}$  et gain statique de 1,4.
4.  $K = 0,7$ .
5. Marge de gain infinie, marge de phase positive.
6.  $\Delta i_0 = \frac{1}{1 + K_{bo}} I_0$ .
7.  $G_{ic} = K_c N$ .
8.  $G_0 = \frac{1}{G_{ic}}$ .
9.  $k_1 = k$ .
10. OK.

**Question 8** En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle  $\Delta i_0 = 0$ , donner la valeur du gain  $G_0$  permettant d'assurer l'égalité des couples de référence  $C_{\text{ref}0}$  et appliqués  $C_a$ .

**Question 9** En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur  $\Delta C = C_{\text{ref}} - C_a$  entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est  $\Delta C = k_1 C_{\text{ref}0}$ . Déterminer  $k_1$  en fonction de  $k$ .

**Question 10** Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative  $\omega_c Tr \approx 3$ .





## TD 10

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

## Mise en situation

### Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

C1-02

C2-04

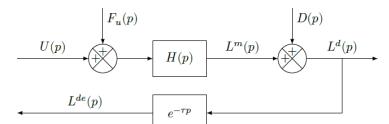


FIGURE 12.13 – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure ci-contre.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$  ;

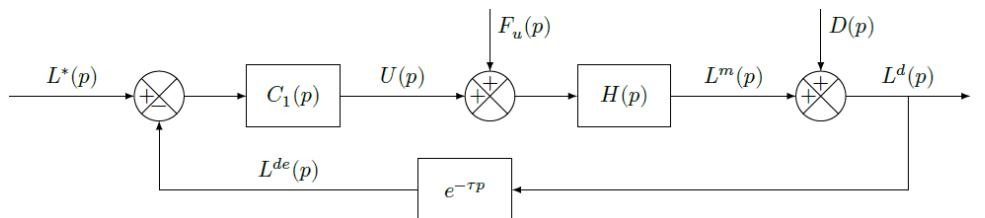
- marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

## Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure suivante.



**FIGURE 12.14** – Structure de commande à une boucle

En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

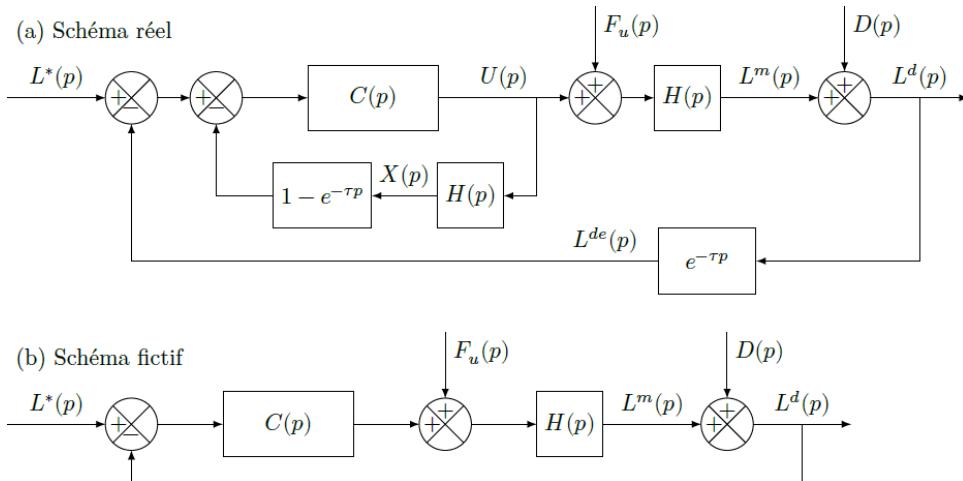
**Question 1** La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left( 1 + \frac{1}{T_{i1}p} \right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

## Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).



**FIGURE 12.15 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard**

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

## Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et

on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;

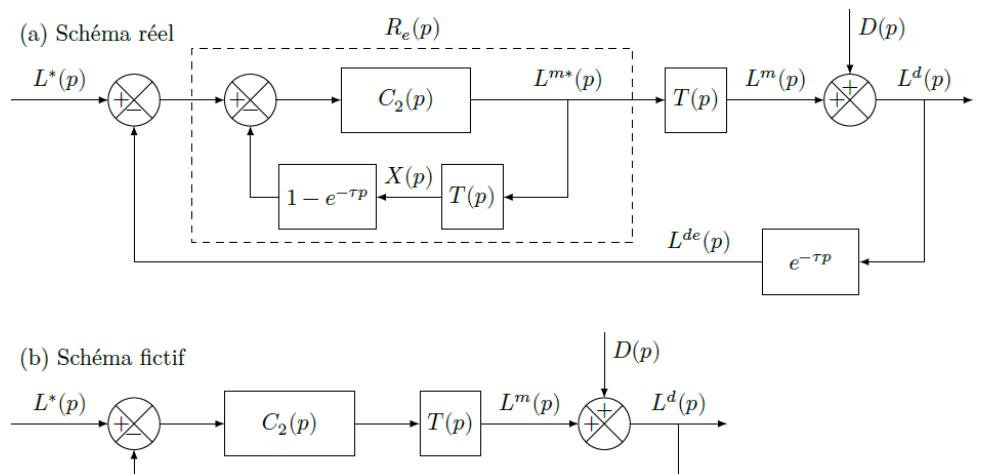
- la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

- $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.



**FIGURE 12.16** – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point de vue interne.

### Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

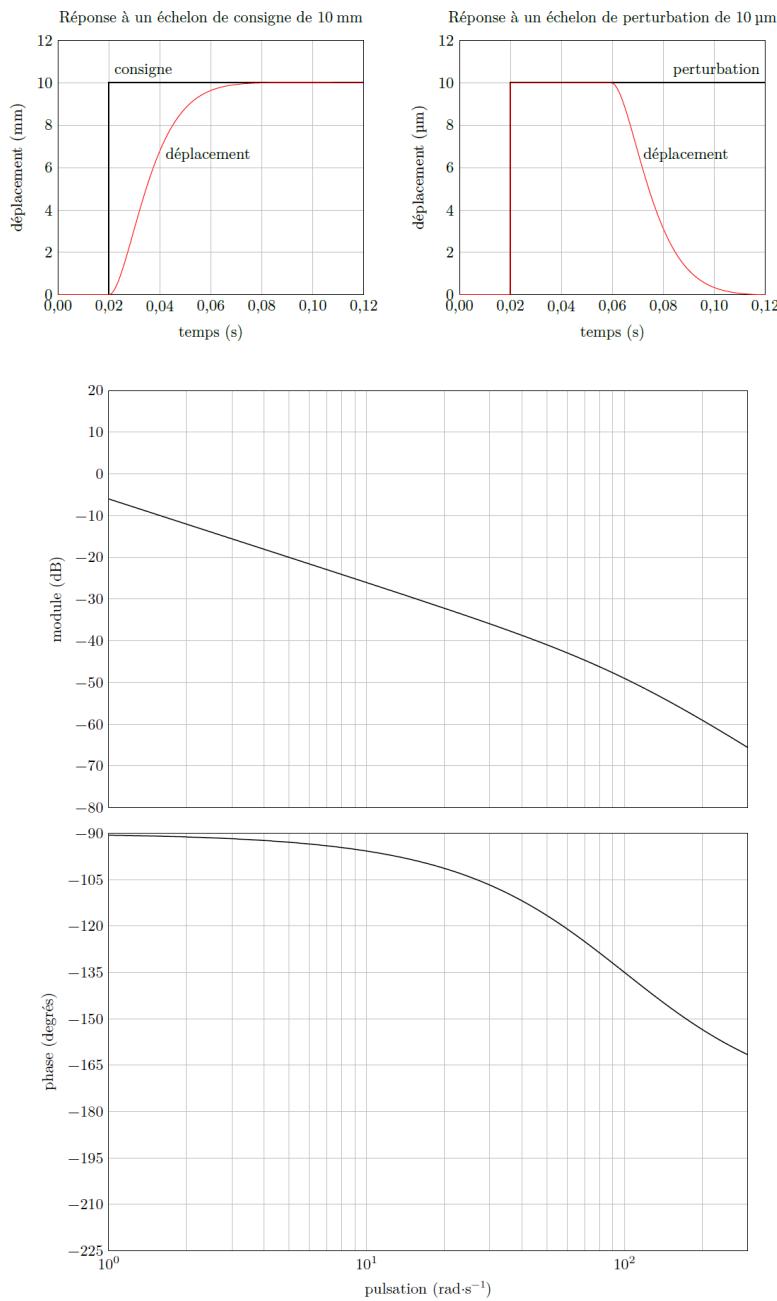


Figure B Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{0.5}{p(1 + 0.01p)}$



# TD 11

## Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

### Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne

C1-02

C2-04

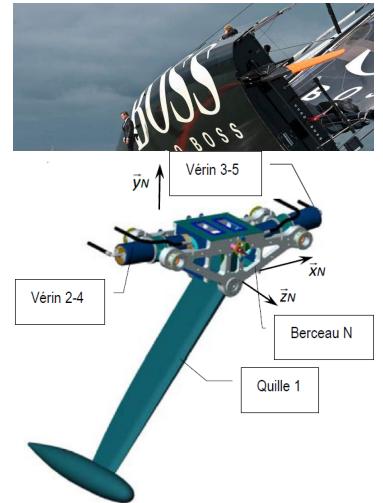
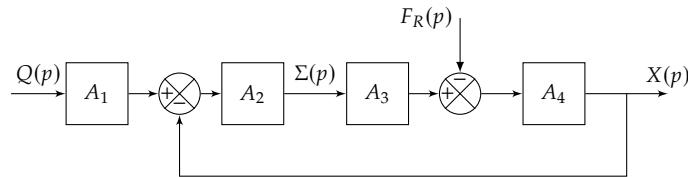


FIGURE 12.17 – Modèle volumique 3D

et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



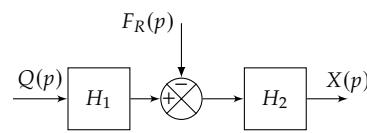
On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
  - $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
  - $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
  - $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].
- $$\begin{aligned} & \bullet q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt} \text{ (a);} \\ & \bullet M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t) \text{ (b).} \end{aligned}$$

On a :

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

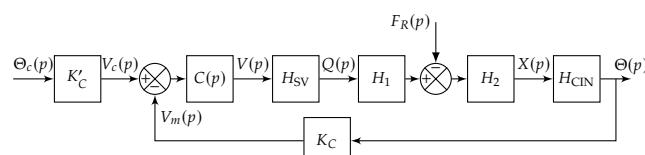
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1$  V/ $^\circ$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  $H_{CIN} = K_\theta$  [ $^\circ.m^{-1}$ ];
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.

## Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe suivante donnant les évolutions du débit  $q(t)$  fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande  $v(t)$ .

Ainsi :

- pour  $v(t) > -v_{\max}$  et  $v(t) < v_{\max}$  :  $H_{SV} = K_{SV} \left[ \text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \right]$
- pour  $v(t) < -v_{\max}$  :  $q(t) = -q_{\max}$  ;
- pour  $v(t) > v_{\max}$  :  $q(t) = +q_{\max}$  ,  $v_{\max} = 10 \text{ V}$ .

Le système n'est pas encore corrigé,  $C(p) = 1$  et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de  $45^\circ$ . Cette demande est modélisée par une consigne  $\theta_c(t)$  en échelon, soit :  $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$  avec  $\theta_0 = 45^\circ$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t > 0$ . La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve  $q(t)$  et la position angulaire de la quille  $\theta(t)$ .

Sur la figure précédente, la courbe représentative de  $q(t)$  présente un palier où  $q(t)$  garde une valeur constante.

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{SV}$  ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

## Comportement pour une commande de faible amplitude

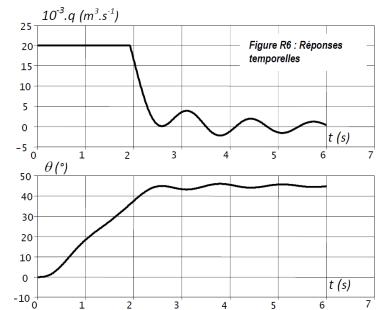
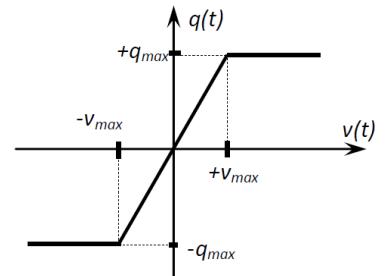
On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^\circ$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV} H_1 H_2 K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ .

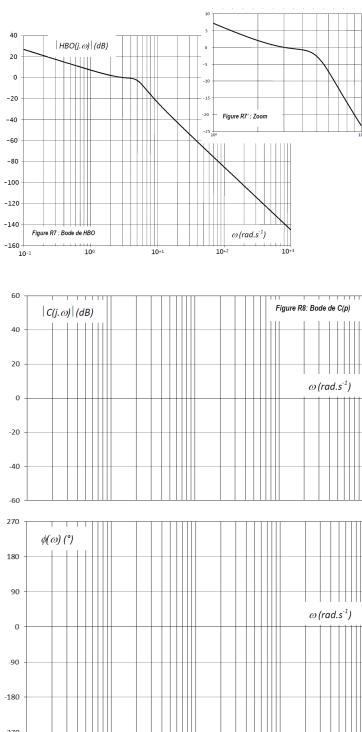
**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^\circ$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassemens, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée ;
- $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).





À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ . Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :  $\sin [\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$  et  $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ .

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 13** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

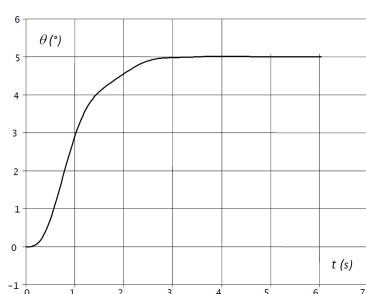
- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$ ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

### Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{COR}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

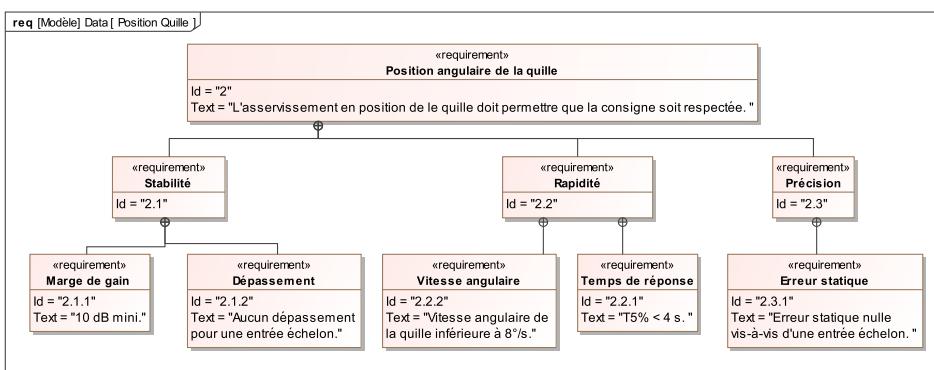
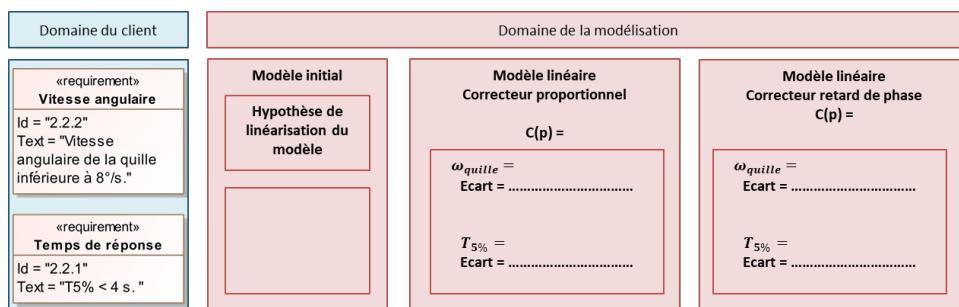
**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



### Éléments de correction

1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .
4.  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ . Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02$ ,  $T = 0,127 \text{ s}$ ,  $\phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$ .
14.  $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .





# TD 12

## Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Sujet

CCP – PSI 2015.

### Présentation

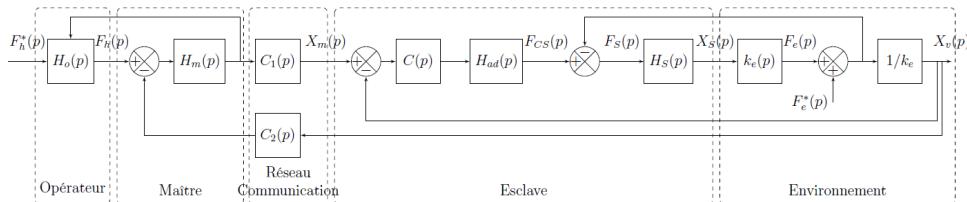
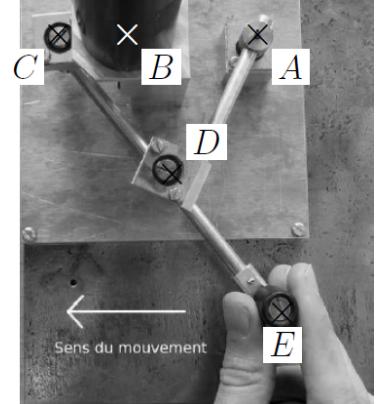
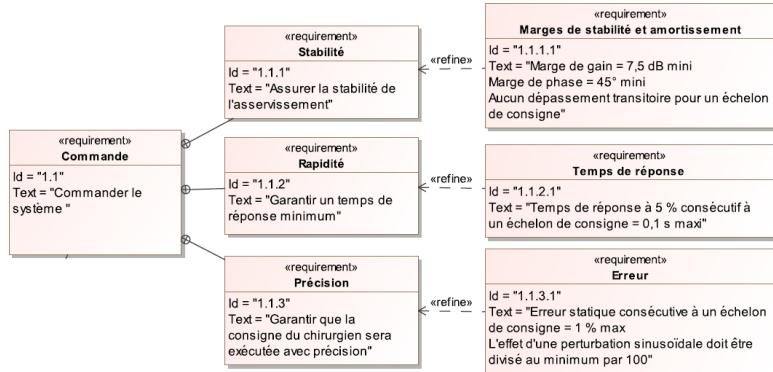
#### Réalisation de la commande de l'esclave

C1-02

C2-04

#### Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).

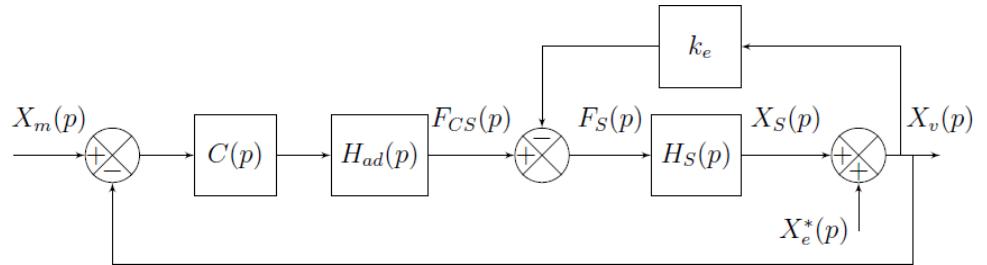


#### Modélisation et étude des performances du système sans correction

#### Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

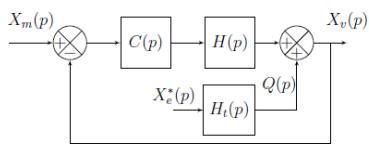
La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_S}{p(m_S p + b_S)}$  avec  $k_S = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_S = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_S = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_S(p)$ .

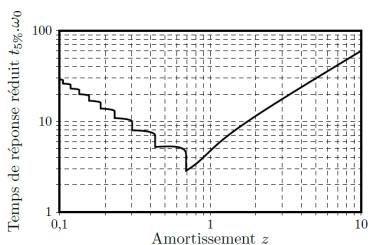
Pour la suite du problème, on prendra :  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .



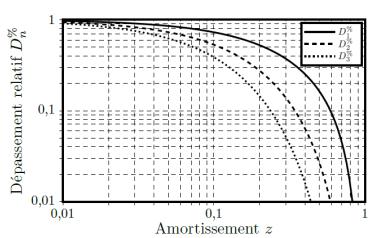
**Vérification des exigences sans correction :  $C(p) = 1$**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  $F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amortissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

**Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale :  $C(p) = \frac{K_i}{p}$**

### Objectif

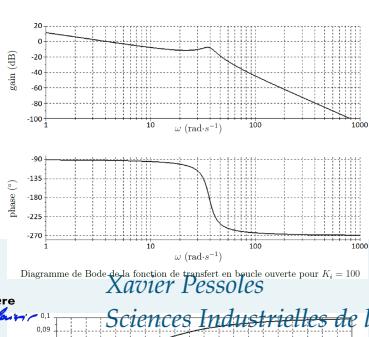
Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{imax}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

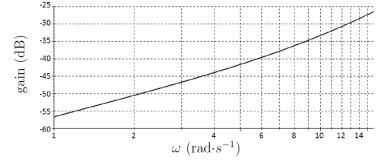
**Question 7** En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».



Xavier Pessoles

Sciences Industrielles de l'Ingénieur – PSI★

**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{\text{BF2}}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$  pour  $K_i = K_{\text{imax}}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{\text{BF2}}(j\omega)|_{\min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».



## Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

### Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

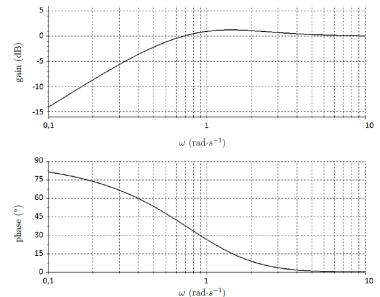
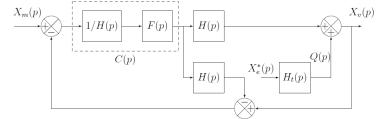
Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$  pour  $T = 1 \text{ s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



### Éléments de correction

$$\begin{aligned} 1. \quad H(p) &= \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)} \quad \text{et} \\ H_t(p) &= \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad K &= \frac{1}{1 + k_e}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}}, \\ \xi &= \frac{b_s}{2\sqrt{m_s(1 + k_e)}}. \end{aligned}$$

3. .

4. .

5. .

6.  $K_{\text{imax}} = 133$ .

7.  $G_{\text{dB,max}} = -30 \text{ dB}$ .

8.  $T \leq 0,02 \text{ s}$ .



# TD 13

## Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

### Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

C1-02

C2-04

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	<b>Ecart statique</b> en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	<b>Ecart de traînage</b> (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	<b>Marge de phase</b>	$M\varphi \geq 45^\circ$
	<b>Pulsation de coupure en boucle ouverte</b> (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$



Notation :

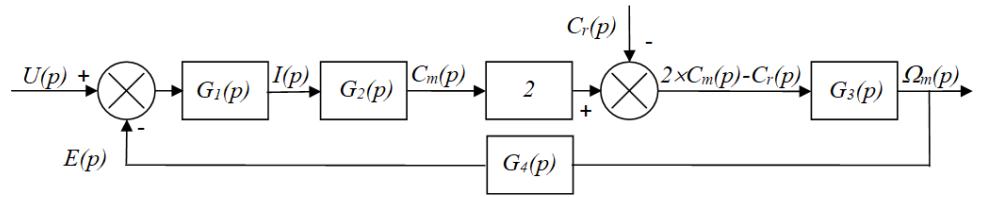
- ▶ on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$ ;
- ▶  $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs;
- ▶  $i(t)$  intensité traversant un moteur;
- ▶  $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur;
- ▶  $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur;
- ▶  $c_m(t)$  couple d'un seul moteur;
- ▶  $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

### Modélisation du moteur à courant continu

Hypothèses et données :

- ▶ on suppose les conditions initiales nulles;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique;
- ▶  $L = 0,59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur;
- ▶  $R = 0,0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur;
- ▶  $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶  $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶  $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur);
- ▶  $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$ ;
- ▶ loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

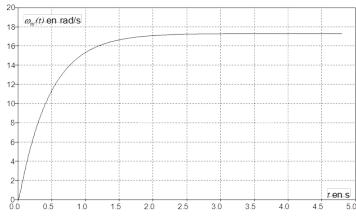
**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.



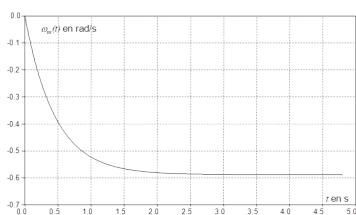
**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

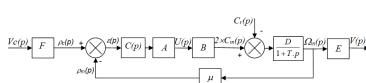
1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).



**FIGURE 12.18** – Réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V.

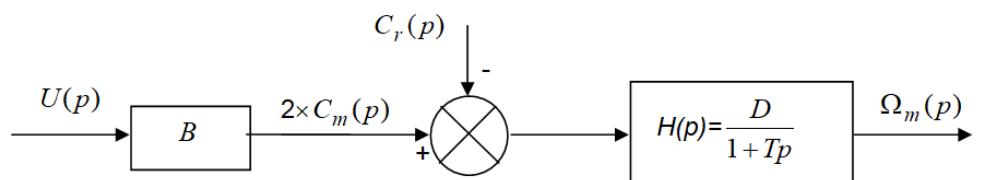


**FIGURE 12.19** – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m.



**Question 3** Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



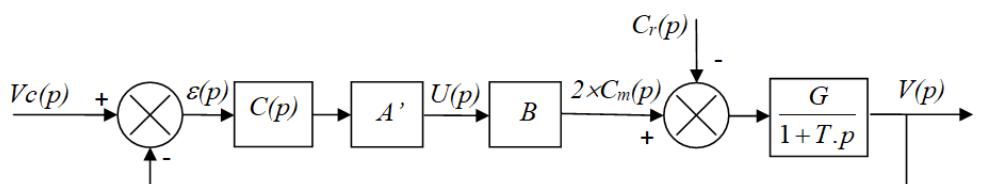
**Question 4** Donnez la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- ▶ La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain  $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E = 0,1 \text{ m}$  (réducteur et rayon de la poulie).

**Question 5** Déterminez l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4 \text{ sN}$ ;  $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

## Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 6** Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 7** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ . Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 8** Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 9** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$  qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 10** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 11** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

## Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur  $C(p) = \frac{C_i}{p}$ .

**Question 12** Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

**Question 13** Tracez le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracez également l'allure des courbes.

**Question 14** Quelles valeurs numériques de  $C_i$  permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 15** Ces valeurs numériques de  $C_i$  permettent-elles de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.

**Question 16** On suppose  $C_r(p)=0$ . Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ .

**Question 17** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculez numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modéliserait la descente des « Arcs ».

**Question 18** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifiez.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 19** Calculez l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 20** Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 21** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de  $-135^\circ$  ?

**Question 22** Tracez en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a>1$ . Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

**Question 23** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculez numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 24** Donnez l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 25** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

**Question 26** Calculez numériquement la valeur à donner à  $K$  pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

**Question 27** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.

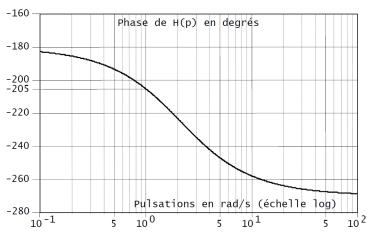
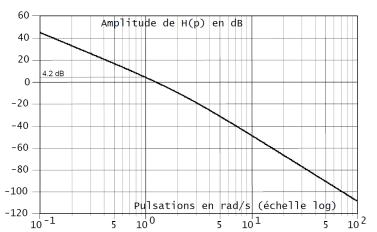
**Question 28** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ?

Justifiez.

### Éléments de correction

1.  $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$ ,  $G_2(p) = k_T$ ,  $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$ ,  $G_1(p) = k_E$ .
2.  $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$  et  $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ .
3.  $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$  et  $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$ .
4.  $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$ ,  $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}\text{Nm}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .
5.  $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0  $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$ .
8.  $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$  – à vérifier.
9.  $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$ .
10.  $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varepsilon'_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$ .
11.  $C_0$  infini
12.  $\text{FTBO}(p) = \frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14.  $\omega_{0\text{dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$  et  $C_i \leq 1,67$ .
- 15.
16. FTBO de classe 1  $\varepsilon'_S = 0$ .
17. Intégrateur en amont de la perturbation  $\varepsilon''_S = 0$ .
18. CDCF OK.
19.  $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21.  $70^\circ$  de phase à ajouter.
- 22.
23.  $a = 32,16$
24.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25.  $\tau = 0,176 \text{ s}$
26.  $K = 0,109$
- 27.
- 28.

Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{\mathcal{J} B G}{p^2(1 + T_p p)}$





## TD 14

# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway – Sujet

Centrale Supelec – PSI – 2008.

### Présentation

#### Étude du régulateur de la boucle de vitesse

C1-02

C2-04

#### Objectif

Déterminer un régulateur de vitesse permettant d'atteindre les exigences suivantes :

- ▶ écart nul en régime permanent pour une consigne de vitesse constante et un effort perturbateur, dû à la poussée des passagers, constant;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  pour un modèle nominal qui sera précisé par la suite;
- ▶ bande passante la plus grande possible compte tenu de la contrainte de marge de phase;
- ▶ temps de réponse inférieur à 0,2 s en réponse à une variation en échelon de l'effort perturbateur.

La chaîne de régulation de vitesse est décrite par le schéma-blocs suivant où la fonction de transfert représente la chaîne de mesure de vitesse comportant un filtre du 1<sup>er</sup> ordre, de constante de temps  $\tau_f = 10$  ms, permettant de limiter l'impact des bruits de mesure et  $G$  est le gain de l'amplificateur de puissance alimentant le moteur.

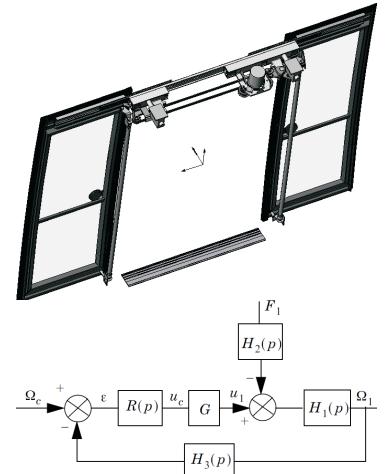
On choisit d'adopter pour cette chaîne un régulateur de type proportionnel-intégral dont la fonction de transfert est :  $R(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)$ .

**Question 1** Au regard des exigences du cahier des charges, justifier le choix de ce type de régulateur.

On cherche d'abord à évaluer le temps de réponse vis-à-vis des perturbations.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  entre les perturbations dues à la poussée des passagers et la vitesse du moteur, en fonction des différentes fonctions de transfert de la figure précédente. Montrer que la réponse fréquentielle peut être approchée par la relation :

$$||T(j\omega)|| = ||H_2(j\omega)|| \cdot \min \left( ||H_1(j\omega)||; \left\| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right\| \right)$$



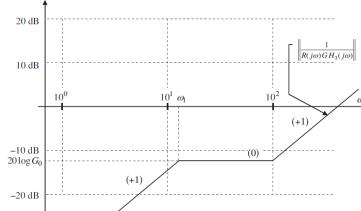
$$= ||H_2(j\omega)|| |M(j\omega)|.$$

Pour la suite, on adopte les modèles de commande simplifiés suivants :

$$H_1(p) = \frac{10}{p} \quad H_2(p) = 0,05 \quad H_3(p) = \frac{0,1}{1 + 0,01p} \quad G = 10.$$

Afin de limiter le périmètre de l'étude, on adopte sans justification les hypothèses suivantes :

- $1/T_i < 100 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- la situation considérée est celle de la figure suivante représentant le diagramme asymptotique de la fonction  $\left| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right|_{\text{dB}}$  où  $20 \log G_0 < 0$ .



**Question 3** Exprimer  $G_0$  en fonction de  $K_r$ . En utilisant la figure précédente, tracer le diagramme asymptotique de la fonction  $||H_1(j\omega)||$  (veiller au respect des pentes) et celui de  $||M(j\omega)||$  en adoptant l'approximation de la question précédente.

**Question 4** En déduire alors une approximation de la fonction de transfert  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en exprimant toutes les brisures en fonction de  $K_r$  et  $T_i$ .

**Question 5** Proposer une nouvelle expression approchée de  $T(p)$  sous la forme  $T_a(p) = \frac{N(p)}{1 + \tau p}$  où  $N(p)$  est le numérateur de  $T(p)$ ? En utilisant la forme approchée de  $T_a(p)$ , déterminer l'évolution de la vitesse  $\Omega_1(t)$  en réponse à un échelon de la force de perturbation et tracer son allure.

**Question 6** En se référant à des fonctions types connues donner, en fonction de  $T_i$ , un ordre de grandeur du temps de réponse vis-à-vis de la force perturbatrice.

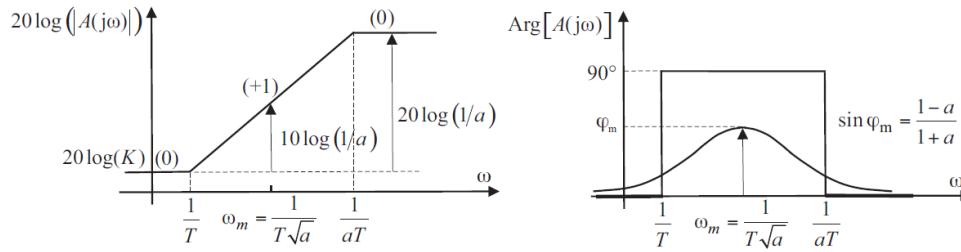
**Question 7** Justifier alors l'intérêt d'adopter pour  $T_i$  la valeur la plus petite possible.

**Question 8** En vous aidant de tracés succincts de diagrammes de Bode, analyser la stabilité du système bouclé dans les deux cas :  $\frac{1}{T_i} > 100 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{1}{T_i} < 100 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 9** En prenant  $K_r = 1$ , tracer les diagrammes de Bode asymptotiques (module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée et l'allure de la courbe réelle du diagramme de phase. Veiller à effectuer ce tracé de façon à respecter une situation stable du système en boucle fermée.

**Question 10** En utilisant la représentation dans le plan de Bode donnée figure suivante, déterminer quelle est la valeur  $T_{i\min}$  la plus petite possible que l'on peut conférer à  $T_i$  compatible avec la marge de phase minimale exigée par le cahier des charges (cette fonction servira uniquement à calculer en plaçant judicieusement pour obtenir la marge de phase souhaitée).

Diagrammes de Bode de la fonction  $A(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + aTp}$  ;  $a < 1$



**Question 11** En conservant la valeur  $T_{i\min}$  calculée précédemment, en déduire alors la valeur du gain  $K_r$  du régulateur permettant d'assurer la marge de phase souhaitée.

**Question 12** Vérifier si le cahier des charges est validé, et conclure sur l'adéquation du régulateur calculé vis-à-vis du problème posé.



# TD 15

## Vision en réalité augmentée pour hélicoptère ★ – Sujet

Concours Centrale Supelec 2014.

### Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

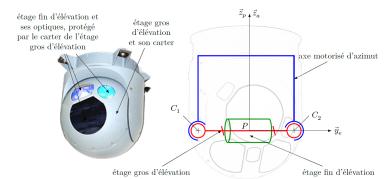
Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse  $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$  est établie par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$ . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  obtenues par la centrale inertuelle du porteur.

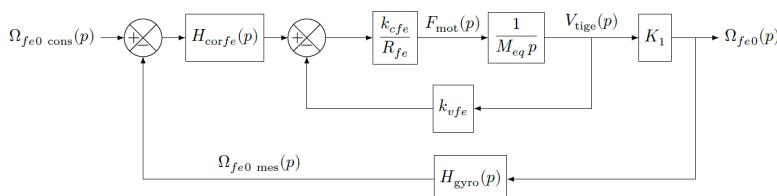
C1-02

C2-04



Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

$$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}, k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}, \\ \text{on note } K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}, R_{fe} = 7,5 \Omega.$$

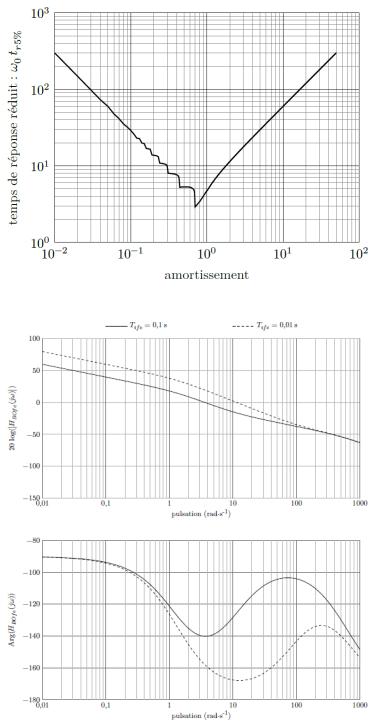


Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que  $H_{corfe}(p) = 1$ .

**Question 1** Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0 \text{ cons}}(p)}$ , en fonction de  $K_1$ ,  $\tau_{\text{gyro}}$ ,  $M_{\text{eq}}$ ,  $K_{fe}$  et  $R_{fe}$ .

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que  $H_{fe1}(p)$  peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :  $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$ .

**Question 2** En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en rapidité et en précision.



On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme  $H_{cor fe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife} p} \right)$ . La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors  $H_{BOfe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife} p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de  $H_{BOfe}(j\omega)$  pour  $K_{pfe} = 1$  et  $T_{ife} = 0,1$  s puis  $T_{ife} = 0,01$  s.

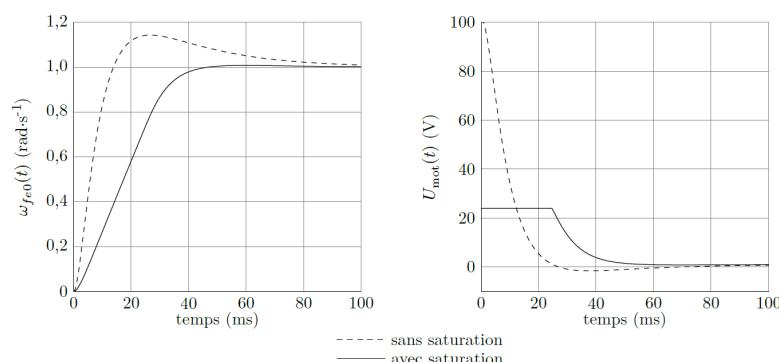
**Question 3** Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de  $H_{BOfe}(j\omega)$  (Bode) pour  $T_{ife} = 0,1$  s, en indiquant la pulsation  $\frac{1}{T_{ife}}$ .

La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation  $\omega_{\max}$  telle que  $\omega_{\max} \in \left[ \frac{1}{T_{ife}}; 600 \right] \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 4** En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de  $\omega_{\max}$ , calculer la valeur de  $T_{ife}$  comprise dans la décade  $[0,01 \text{ s}; 0,1 \text{ s}]$  qui permet de régler ce maximum à  $-120^\circ$ .

**Question 5** Pour le réglage de  $T_{ife}$  calculé à la question précédente avec  $K_{pfe} = 1$  et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de  $K_{pfe}$  qui permet de respecter le critère de marge de phase.

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$ . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$  déterminés précédemment. La réponse simulée  $\omega_{fe0}(p)$  de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon  $\omega_{fe0 \text{ cons}}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$  est donnée sur la figure suivante.



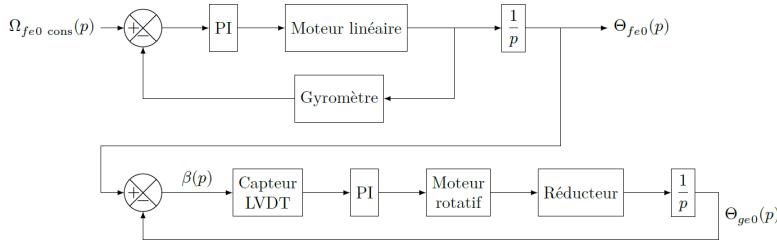
**Question 6** D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

## Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

### Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$ , c'est-à-dire que l'angle  $\beta(t)$  doit rester dans l'intervalle  $[-5^\circ, +5^\circ]$ . Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$ . Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.



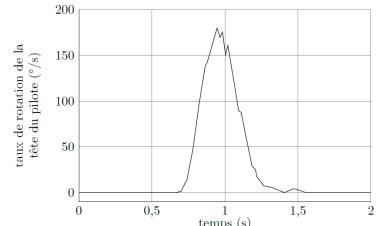
La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut alors être utilisé comme signal de consigne envoyé à l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

**Question 7** À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  exprimé en  $\text{rad s}^{-1}$ , sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de  $\theta_{fe0\ cons}(t)$ , exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

**Question 8** À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

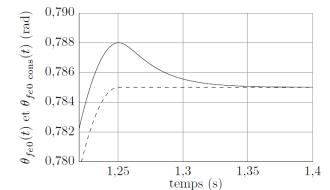
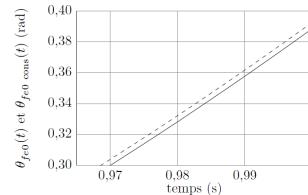
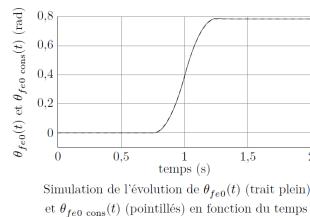
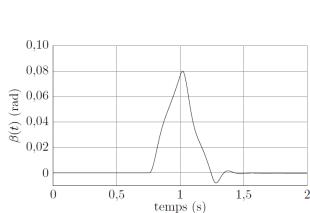
Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$  pour le signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.



**Question 9** À partir des figures suivantes :

- ▶ vérifier si l'hypothèse  $\vec{u} \simeq \vec{z}_e$  reste valide ;
- ▶ pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures, conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

**TABLE 12.1 – Zooms de  $\theta_{fe0}(t)$  (trait plein) et  $\theta_{fe0\ cons}(t)$  (pointillés)**  
en fonction de temps



## TD 16

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet

Centrale Supelec – PSI – 2006.

### Présentation

Par sécurité, il est nécessaire que la distance d'arrêt d'une rame de TGV soit inférieure à 2500 m.

Lors du freinage il est indispensable que les roues du train ne se bloquent pas. Le phénomène de blocage appelé enrayage a pour effet de déformer les roues et les rails et peut entraîner le déraillement du train.

C1-02

C2-04

### Dispositif d'anti-enrayage

L'objectif de cette partie est l'étude de la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation en vue de satisfaire un cahier des charges qui sera exprimé par la suite.

Le glissement relatif entre la roue et le rail est noté  $\nu$  et peut s'exprimer sous la forme  $\nu = 1 - \frac{V_R}{V_T}$  où  $V_T$  est la vitesse de translation du train par rapport aux rails et  $V_R$  l'opposée de la vitesse du point de contact appartenant à la roue par rapport à son support (bogie).

Dans le cadre de cette étude, on supposera que :

- ▶ les vitesses  $V_R$  et  $V_T$  sont directement accessibles à la mesure, éventuellement entachées d'une erreur ;
- ▶ la régulation peut se ramener directement à celle du glissement ;
- ▶ le comportement de l'actionneur et de sa « commande rapprochée » est modélisé par une fonction de transfert linéaire correspondant à un comportement « moyen ».

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure 12.20 où est la consigne de glissement.

- ▶  $H_1(p)$  : fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électro-valve) ;
- ▶  $H_2(p)$  : fonction de transfert de la roue au freinage ;
- ▶  $C(p)$  : correcteur de la boucle de régulation ;
- ▶  $M(p)$  : fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement obtenu à partir des vitesses  $V_T$  et  $V_R$ , cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- ▶  $\nu_m$  : glissement estimé à partir de  $V_T$  et de  $V_R$ .

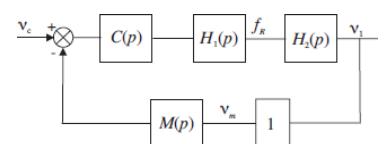
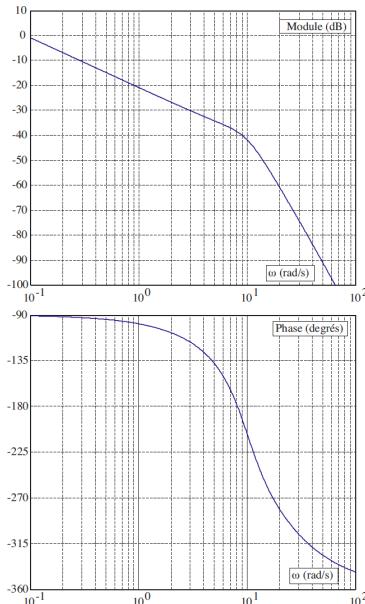


FIGURE 12.20 – Structure de la chaîne de régulation de glissement

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$ ,  $H_2(p) = \frac{K_h}{p} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

Marges de stabilité, performances en boucle ouverte	
Pulsation de coupure à 0dB	$\omega_c \approx 1 \text{ rad/s}$
Marge de phase	$\Delta\Phi \geq 60^\circ$ au point de fonctionnement nominal $B$
Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(\nu)$	
Réponse à un échelon de consigne de glissement	
Ecart de régime permanent	Nul
Temps du 1 <sup>er</sup> maximum	$t_{\text{m}} \leq 3,5 \text{ s}$
Dépassement	$D \leq 18\%$
Réponse à une variation en échelon de l'adhérence	
Ecart en régime permanent	Nul
Temps de réponse	$t_r \leq 9 \text{ s}$



## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni en figure suivante en justifiant le tracé.

## Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type PI dont la fonction de transfert est :  $C(p) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

**Question 1** Donner l'allure du diagramme de Bode de ce correcteur.

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Question 3** Calculer la valeur minimale  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées.

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain (avec très peu de calcul). Conclure sur les marges de stabilité obtenues.

## Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

On suppose sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode fournis sur la figure suivante de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 8** En justifiant, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert par la forme suivante :  $F(p) = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

### Objectif

Calcul de la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement.

**Question 9** En utilisant la relation ci-dessous, montrer que l'évolution temporelle de la réponse impulsionnelle  $f(t)$  du système décrit par la fonction de transfert  $F(p)$ , peut être exprimée par la relation suivante où  $y(t)$  est une fonction que vous préciserez,  $a$  et  $b$  deux constantes que vous exprimerez en fonction de  $K_f$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  :  $f(t) = ay(t) + b\dot{y}(t)$ .

On donne  $\mathcal{L}[t^n e^{-at} h(t)] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$  ( $h(t)$  fonction de heaviside – échelon unité).

**Question 10** À partir de cette réponse, calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0}h(t)$ .

**Question 11** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

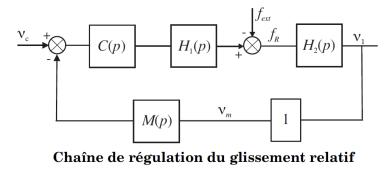
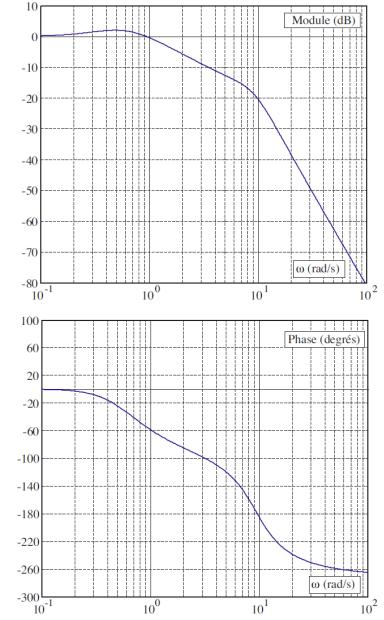
## Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

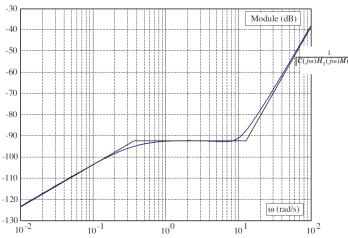
La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive  $f_{ext}$ . On admet que cette modélisation conduit au schéma-blocs représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 12** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (On rappelle qu'en régulation on considère l'entrée principale égale à 0). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left( \|H_2(j\omega)\|; \left\| \frac{1}{C(j\omega) H_1(j\omega) M(j\omega)} \right\| \right).$$





### Objectif

Calcul de la fonction de transfert  $F_2(p)$ .

On donne le tracé de la fonction  $\left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\|$ .

**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de  $\|H_2(j\omega)\|$ .

**Question 14** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

### Objectif

Calcul de l'évolution du glissement en réponse à une variation de l'adhérence.

**Question 15** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 16** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 h(t)$  avec  $F_0 = 2000$  N.

**Question 17** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale (valeurs à considérer en valeur absolue).

**Question 18** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

### Éléments de correction

1. .
2. .
3.  $-20^\circ$ .
4.  $T_i \geq 2,75$ .
5.  $K = 11$ .
6.  $MG = 18$  dB et  $M\varphi = 60^\circ$ .
7. .
8.  $K_f = 1$ ,  $\tau_1 = 1/0,3$ ,  $\tau_2 = 1/0,6$ ,  $\omega_0 = 10$  rad s $^{-1}$ ,  $\xi < 0,7$ .
9.  $\frac{1+3,3p}{(1+1,66p)^2}$ .
10.  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-t/\tau_2} h(t)$ .
11.  $t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = 3,3$  s et dépassement de 13%.
12. .
13. .
14. .
15.  $F_2(p) = -\frac{p}{(1+2,8p)(1+0,5p)}$ .
16.  $p_1 = -0,35$  et  $p_2 = -2$ .  $F_2(p) = -\frac{p}{(1+2,8p)}$ .
17.  $v_1(t) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t/T} h(t)$ .