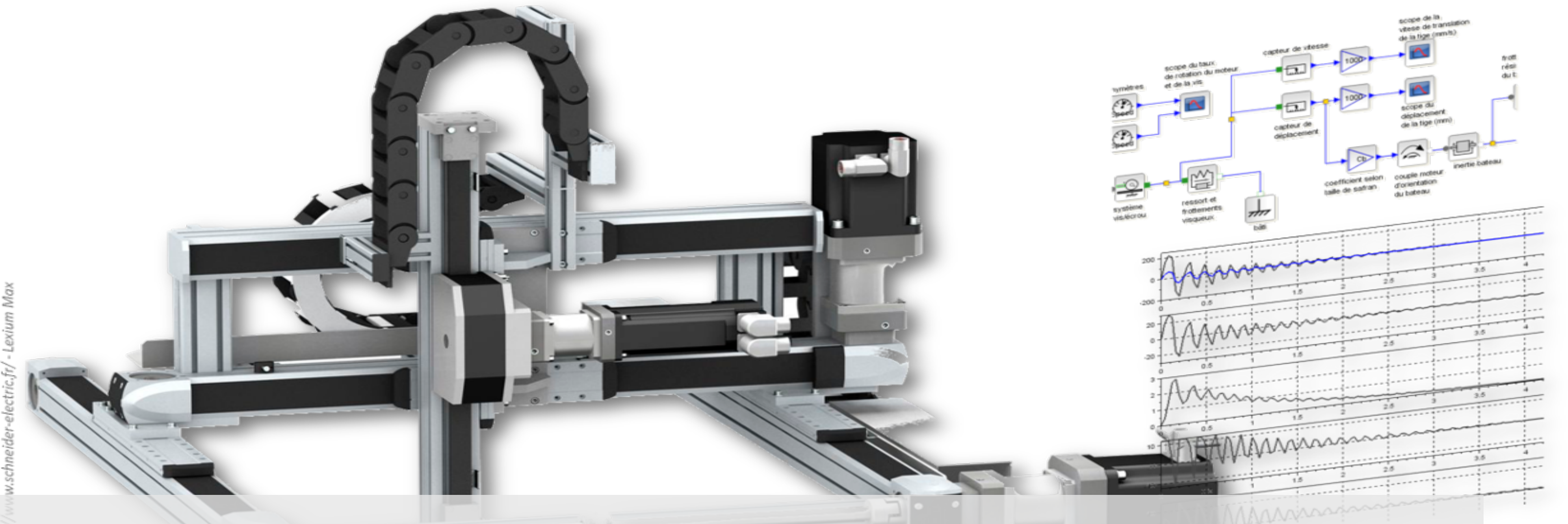


12 Correction des SLCI

12.1 Pourquoi corriger un système ?

C1-02

C2-04

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, *Correction des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse, `http://florestan.mathurin.free.fr/`.

Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- plus précis ;
- plus amorti ;
- plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité su système.

Résultat –

- D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

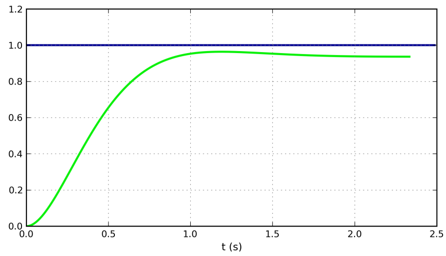
Au vue de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

12.2 Le correcteur proportionnel

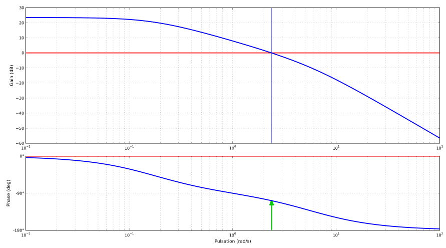
Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert $C(p) = K$.

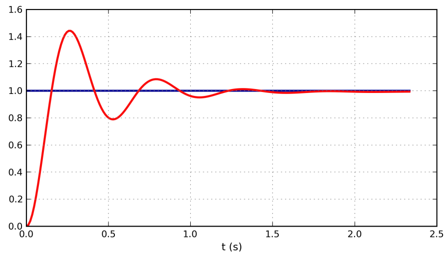
Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($K = 15$, $\xi = 3$, $\omega = 1$).



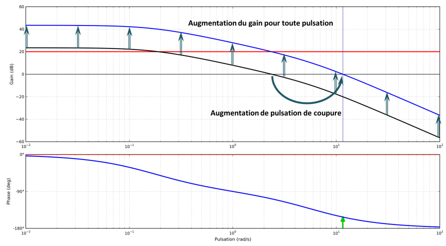
$T_{5\%}$: 0,781 s – Écart statique : 0,07



Marge de phase 71,94 °



$T_{5\%}$: 0,88 s – Écart statique : tend $\longrightarrow 0$



Marge de phase 6,43 °

Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- d'améliorer la précision ;
- d'augmenter la vivacité ;
- d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil) ;
- de diminuer l'amortissement ;
- de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

Méthode –

Réglage de la marge de phase :

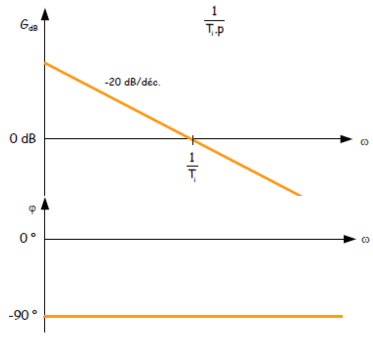
- En utilisant la BO non corrigée, on cherche $\omega_{0\,\text{dB}}$ tel que $\varphi(\omega_{0\,\text{dB}})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant BO non corrigée, on calcule $G_{\text{dB}}(\omega_{0\,\text{dB}})$.
- On cherche K_p tel que $G_{\text{dB}}(\omega_{0\,\text{dB}}) = 0$

Réglage de la marge de gain :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche $\omega_{-180°}$ tel que $\varphi(\omega_{-180°}) = -180°$.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{\text{dB}}\left(\omega_{-180°}\right)$.
- On cherche K_p tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

12.3 Les correcteurs à action intégrale

12.3.1 Le correcteur intégral pur



Définition – Correcteur I

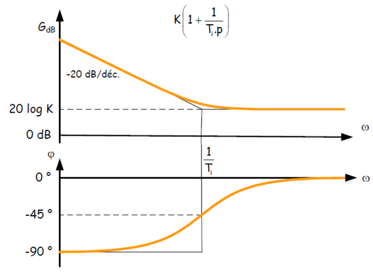
Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \dfrac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \dfrac{1}{T_i p}$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = \dfrac{1}{T_i}\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Résultat –

Avantages	**Inconvénients**
Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.	Le déphasage de -90°sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

12.3.2 Le correcteur proportionnel intégral



Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \dfrac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K\left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = K\left(\varepsilon(t) + \dfrac{1}{T_i}\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$.

En développant on obtient $C(p) = K\dfrac{T_i p + 1}{T_i p}$. Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si $K > 1$ la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

Résultat – Correcteur PI

- **augmente l'amortissement ;**
- **augmente la rapidité ;**
- **augmente la précision.**

Méthode –

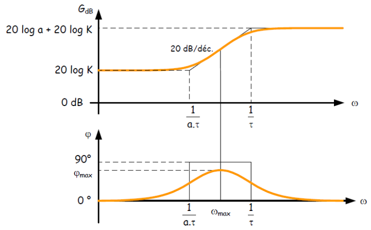
- En utilisant la BO non corrigée, on cherche $\omega_{0\,\mathrm{dB}}$ tel que $\varphi(\omega_{0\,\mathrm{dB}})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{\mathrm{dB}}(\omega_{0\,\mathrm{dB}})$.
- On cherche K tel que $G_{\mathrm{dB}}(\omega_{0\,\mathrm{dB}}) = 0$
- La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la

pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que $\dfrac{1}{T_i} << \omega_{0\,\text{dB}}$. Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc $T_i = \dfrac{10}{\omega_{0\,\text{dB}}}$.

Remarque

Une autre possibilité pour régler T_i est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme $(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)$ avec $\tau_1 >> \tau_2$. τ_1 ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre $T_i = \tau_1$ afin de supprimer l'effet du pôle associé à τ_1.

12.4 Le correcteur à avance de phase



Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert $C(p) = \dfrac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $\alpha > 1$.

Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre $\dfrac{1}{a\tau}$ et $\dfrac{1}{\tau}$. On montre que $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)$ et ce pour une pulsation $\omega_{\max} = \dfrac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

Remarque

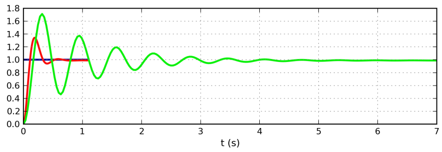
On peut prendre $K = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

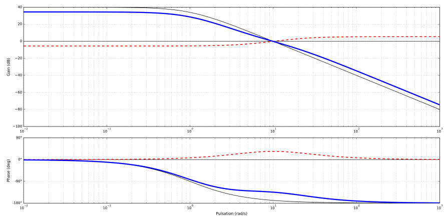
Démonstration

Pour déterminer $\omega_{\max}$ on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0$. On peut aussi remarquer « graphiquement » que $\omega_{\max}$ est situé au milieu des deux pulsations de coupures : $\dfrac{1}{2}\left(\log\left(\dfrac{1}{\tau}\right) + \log\left(\dfrac{1}{a\tau}\right)\right) = \log\left(\dfrac{1}{a\tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\dfrac{1}{\tau\sqrt{a}}\right)$ et $\omega_{\max} = \dfrac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

D'autre part, il faudrait calculer $\varphi(\omega_{\max})$...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($G(p) = \dfrac{100}{(p+1)^2}$, $a = 3,54$, $T = 0{,}053\,\text{s}$).





Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

Méthode –

- En utilisant la BO non corrigée on cherche $\omega_{0\,\text{dB}}$ tel que le gain est nul.
- On calcule $\varphi\left(\omega_{0\,\text{dB}}\right)$.
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule a.
- On calcule τ.
- On calcule K.

12.5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur		Situation sans correction	Si K_p augmente
Proportionnel K_p	Marges	←	
	Précision		→
	Rapidité		→
Proportionnel intégral $K_p + \dfrac{K_i}{p}$	Marges	←	Si mal réglé
	Précision		→ (Cf : classe)
	Rapidité	←	
À avance de phase $K_p \dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ $a > 1$	Marges		→
	Précision	←	→
	Rapidité		→

Application 1
Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

C1-02

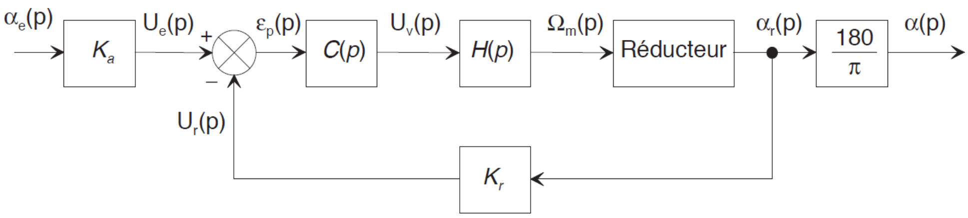
C2-04

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p} = \dfrac{30}{1+5\cdot 10^{-3}p}$;
- $K_r = 4\,\mathrm{V\,rad^{-1}}$: gain du capteur de position ;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degrés ;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c ;
- $N = 200$: rapport de transmission.

Objectif

- On souhaite une marge de phase de 45°.
- On souhaite un écart de traînage inférieur à 1°pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$.



Question 1 Déterminer la fonctionde transfert $R(p) = \dfrac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$ du réducteur.

Question 2 Déterminer le gain K_a de l'adaptateur.

Question 3 Déterminer, en fonction notamment de K'_m et t'_m, la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté K_{BO}.

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 4 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Question 5 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Question 6 Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$.

Question 7 Déterminer l'expression de $\alpha_e(t)$ correspondant à une consigne de vitesse de $105\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$. En déduire $\alpha_e(p)$.

Question 8 La valeur de K_{BO} définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

Éléments de correction

1. $R(p) = \dfrac{1}{Np}$.
2. $K_a = \dfrac{\pi}{180} K_r$.
3. $T(p) = \dfrac{K_{\mathrm{BO}}}{p\left(1+\tau'_m p\right)}$ avec $K_{\mathrm{BO}} = \dfrac{K_c K'_m K_r}{N}$.
4. $K_{\mathrm{BO}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$.
5. $K_c = \dfrac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$.
6. $\varepsilon_S = 0$.
7. $\alpha_e(p) = \dfrac{105}{p^2}$.
8. $\varepsilon_d = \dfrac{105 K_a}{K_{\mathrm{BO}}}$.

Application 1
Réglage de correcteurs P – Corrigé

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

C1-02

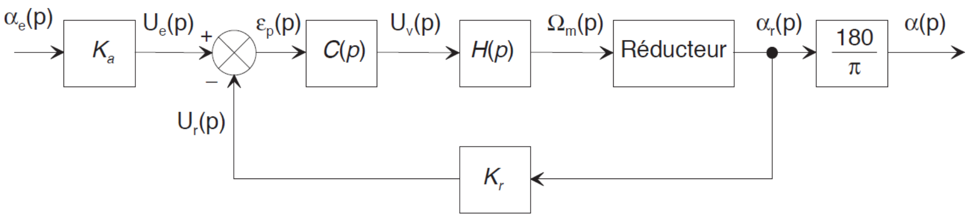
C2-04

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p} = \dfrac{30}{1+5\cdot 10^{-3}p}$;
- $K_r = 4\,\mathrm{V\,rad^{-1}}$: gain du capteur de position ;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degrés ;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c ;
- $N = 200$: rapport de transmission.

Objectif

- On souhaite une marge de phase de 45°.
- On souhaite un écart de traînage inférieur à 1°pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$.



Question 1 Déterminer la fonctionde transfert $R(p) = \dfrac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$ du réducteur.

Correction

D'une part le réducteur permet de réduire la vitesse. D'autre part, le schéma-bloc pemet de convertir une vitesse en position. Il joue donc le rôle d'intégrateur. On a donc $R(p) = \dfrac{1}{Np}$

Question 2 Déterminer le gain K_a de l'adaptateur.

Correction

On a $\varepsilon(p) = K_a\alpha_e(p) - K_r\alpha_r(p) = K_a\alpha_e(p) - K_r\dfrac{\pi}{180}\alpha(p)$. Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc $K_a = K_r\dfrac{\pi}{180}$.

Question 3 Déterminer, en fonction notamment de K'_m et t'_m, la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté K_{BO}.

Correction

On a $T(p) = C(p)H(p)R(p)K_r = K_c \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p}\dfrac{1}{Np}K_r$. On a donc $K_{\mathrm{BO}} = \dfrac{K_c K'_m K_r}{N}$

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 4 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Correction

Pour un premier ordre intégré, la phase est de 135°en $\dfrac{1}{\tau'_m}$. Le gain (dB) de la boucle ouverte doit donc être nul pour cette pulsation ou encore que le module soit unitaire.

$|T(p)| = 1 \Rightarrow \left| K_c \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p}\dfrac{1}{Np}K_r \right| = 1 \Rightarrow \dfrac{K_c K'_m K_r}{N}\left|\dfrac{1}{1+\tau'_m p}\dfrac{1}{p}\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{K_c K'_m K_r}{N\dfrac{1}{\tau'_m}}\dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = 1$

$\Rightarrow K_c = \dfrac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} \Rightarrow K_c = \dfrac{\sqrt{2}}{K_{\mathrm{BO}}}$

Question 5 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Correction

$\Rightarrow K_c = \dfrac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r}$

Question 6 Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Correction

La BO du sytème est de classe 1. Pour une entrée échelon, l'écart statique est nul.

On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s}^{-1}$.

Question 7 Déterminer l'expression de $\alpha_e(t)$ correspondant à une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s}^{-1}$. En déduire $\alpha_e(p)$.

Correction

$\alpha_e(t) = 105t$ et $\alpha_e(p) = \dfrac{105}{p^2}$

Question 8 La valeur de K_{BO} définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

Correction

L'écart de trainage est donné par $\varepsilon_t = \dfrac{105K_a}{K_{\text{BO}}} = \dfrac{105K_r\dfrac{\pi}{180}}{\dfrac{\dfrac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} K'_m K_r}{N}} = \dfrac{105\pi K_r \tau'_m}{180\sqrt{2}}$.

AN : $\varepsilon_t = \dfrac{105 \times \pi \times 4 \times 5 \times 10^{-3}}{180\sqrt{2}} = 0,02°$. Le CDC est respecté.