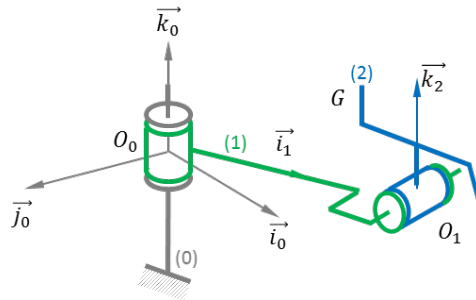


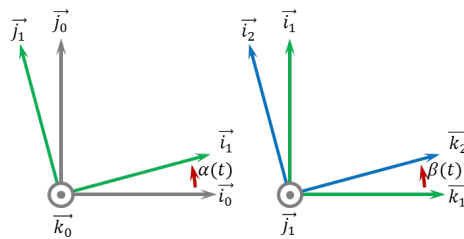
Application 1

Centrifugeuse humaine – Sujet

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a \vec{i}_1$;
- $\overrightarrow{O_1G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$.

Trajectographie

Question 1 Donner la trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 .

Cinématique

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V}(G, S_2/S_0)$.

Accélération

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Gamma}(G, S_2/S_0)$.

Application 2

Capsuleuse de bocaux – Galet – Sujet

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute**.



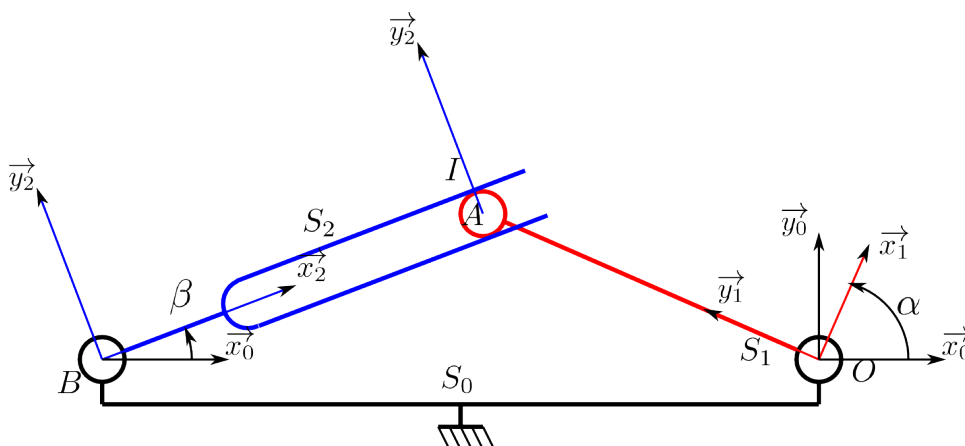
Motoréducteur
Maneton
Croix de Malte

Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :

- $\mathcal{R} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti S_0 . On note $\vec{OB} = -L\vec{x}_0$ avec $L = 145$ mm ;
- $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié à l'arbre S_1 . On pose $\vec{OA} = R\vec{y}_1$ avec $R = 141$ mm et $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. L'arbre S_1 est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a : $\dot{\alpha} = 10$ tr/min ;
- $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère lié à l'arbre S_2 . On pose $\vec{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$, $\vec{AI} = r\vec{y}_2$ et $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$;



Question 1 Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

Question 2 Établir la loi entrée/sortie du système.

Question 3 Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

Question 4 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$.

Question 5 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

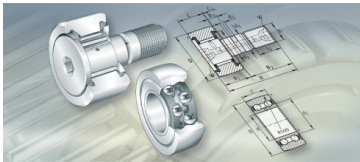
Question 6 En déduire l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$ dans la base \mathcal{R}_2 . On donne $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$.

Question 7 D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide S_1 par rapport à S_2 ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

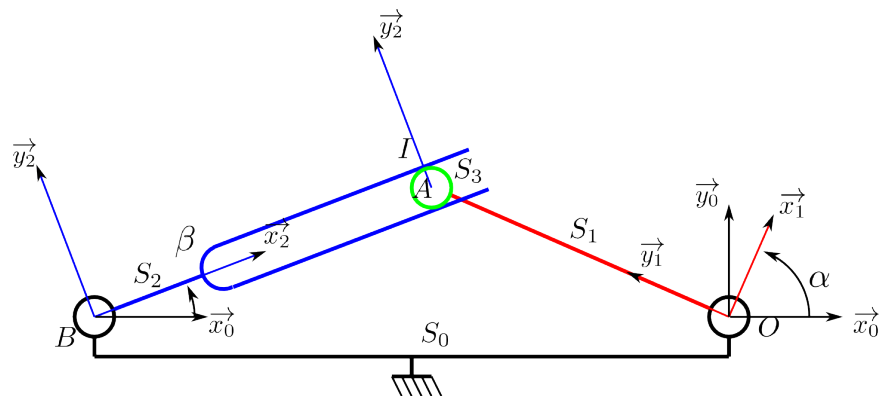
Question 8 $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$ est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse? Si oui, comment? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet S_3 en bout de de l'arbre S_1 . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le S_2 . S_3 et S_1 sont en liaison pivot d'axe \vec{z}_0 et de centre A.



Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



Question 9 Quelle est la modification sur le paramétrage du système?

Question 10 Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement** sans glissement?

Question 11 Calculer la vitesse de rotation du galet $\dot{\gamma}$ en commençant par exprimer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$? Indice : décomposer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ en fonction des mouvements connus.

Question 12 Valider le choix du galet.

Application 3

OMNIROB – Le robot collaboratif de l'usine du futur d'Airbus – Sujet

Objectif

Déterminer le modèle cinématique direct ou inverse de la commande Omnirob.
Valider le critère de mobilité omnidirectionnelle et analyser les limites du modèle.

Les roues utilisés pour le robot omnirob sont des roues holonomes également appelées Mecanum (voir figure suivante) qui sont mises en mouvement par quatre moteurs commandés indépendamment. La surface de roulement de ces roues spéciales est pourvue de rouleaux ellipsoïdes répartis sur la circonférence à un angle de 45° .

Le paramétrage cinématique est donné dans les pages suivantes.

En analysant la géométrie du contact entre les rouleaux et le sol, proposer la liaison équivalente entre le châssis 3 et le sol.

Hypothèses :

- ▶ Les roues sont parfaitement symétriques par rapport aux plans $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$ et $(O_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.
- ▶ Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Données :

- ▶ Le nombre de rouleaux 1 par roue est $n = 8$.
- ▶ Les rouleaux sont inclinés d'un angle $\alpha_a = -45^\circ$ par rapport à l'axe de rotation de la roue.

Notations : torseurs cinématiques.

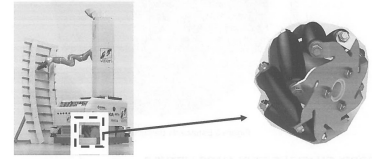
- ▶ Le torseur cinématique de 3/0 pourra s'exprimer dans la base locale du robot $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ avec les notations $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3}$
- $$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\phi} \vec{z}_3 = \omega \vec{z}_3 \\ V_{RX} \vec{x}_3 + V_{RY} \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3}.$$

Dans le mouvement de rotation de la roue a, le rouleau 1 reste en contact avec le sol suivant la corde $I_{1a_ext}I_{1a_int}$ (annexe 4).

On peut alors démontrer que la fluctuation du rayon r de l'ellipsoïde est telle que :

$$\Delta r_{\%} = \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) \sin \alpha_a \text{ avec } n \text{ le nombre de rouleaux.}$$

Pour les roues de cette étude, $\alpha_a = -45^\circ$ et $n = 8$ rouleaux, on obtient une fluctuation de rayon de 14 % lorsque le point de contact I_{1a} se déplace le long de la corde de rouleau 1. On supposera donc le rayon r comme étant constant.



Déterminer $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)}$ en fonction du paramétrage du robot dans la base \mathcal{B}_3 .

On constate que la variation d'angle θ_{2a} lors du contact d'un rouleau avec le sol reste faible, $\theta_{2a} \ll 1$. Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de $\cos \theta_{2a}$, on

gardera pour la suite du sujet une expression de la vitesse $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$

En vous aidant de l'annexe 3, déterminer $\overrightarrow{V(I_{1a}, 2/3)}$ en fonction du paramétrage du robot.

En vous aidant de l'annexe 1, déterminer $\overrightarrow{V(I_{1a}, 3/0)}$ en fonction du paramétrage du robot et des notations du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}$ proposées.

Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(I_{1a}, 3/0)}$.

Afin d'établir le modèle cinématique du robot, on introduit une notation classique en robotique avec les vecteurs suivants :

- \dot{q}_k étant le vecteur des vitesses articulaires des roues $k = a, b, c$ et d tel que

$$\dot{q}_k = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2k} \\ \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2k} \\ \omega_{1k} \\ \omega \end{pmatrix}. \text{ On aura par exemple pour la roue } a \text{ le vecteur } \dot{q}_a = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}.$$

- \dot{q} étant le vecteur des vitesses articulaires pilotées donc les vitesses des 4 moteurs

$$\text{des roues } a, b, c \text{ et } d \text{ tel que } \dot{q} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix};$$

- \dot{X}_R étant le vecteur des vitesses opérationnelles du robot tel que $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} \text{ exprimé dans la base locale } \mathcal{B}_3 \text{ du robot.}$$

Dans un premier temps nous allons chercher les relations entre $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ pour $k = a, b, c$ et d .

À partir des équations des questions 2 à 4, déduire de la condition de roulement sans glissement du rouleau 1 par rapport au sol 0 la relation $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ pour la roue a . On utilisera les notations proposées et on rappelle que l'on note $\omega = \dot{\phi}$.

La relation précédente pourra se noter $\dot{X}_R = \mathcal{J}_a \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$ avec \mathcal{J}_a la matrice jacobienne relative à la roue a .

De façon analogue en prenant $\lambda, -\lambda, \ell$ ou $-\ell$ on trouve rapidement les matrices jacobienes relatives aux roues b, c et d .

\dot{X}_R étant unique on peut obtenir 4 équations faisant intervenir uniquement les 4 inconnues articulaires $\omega_{2a}, \omega_{2b}, \omega_{2c}$ et ω_{2d} que l'on souhaite déterminer.

En effet, pour chaque relation $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ on peut écrire pour :

- la roue a : $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2a} + (\lambda + \ell)\omega$ (eq1);

- la roue b : $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2b} + (\lambda + \ell) \omega$ (eq2);
- la roue c : $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2c} - (\lambda + \ell) \omega$ (eq3);
- la roue d : $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2d} - (\lambda + \ell) \omega$ (eq4).

Trouver le modèle cinématique direct (MCD) revient à obtenir $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$. Ainsi on remarquera que les coordonnées de \dot{X}_R se déduisent facilement en utilisant les simplifications issues des 3 combinaisons :

- (eq1)+(eq2)+(eq3)+(eq4);
- (eq2)-(eq1)+(eq4)-(eq3);
- (eq1)+(eq2)-(eq3)-(eq4).

Déduire de ces 3 simplifications, le modèle cinématique direct (MCD) du robot, $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$.

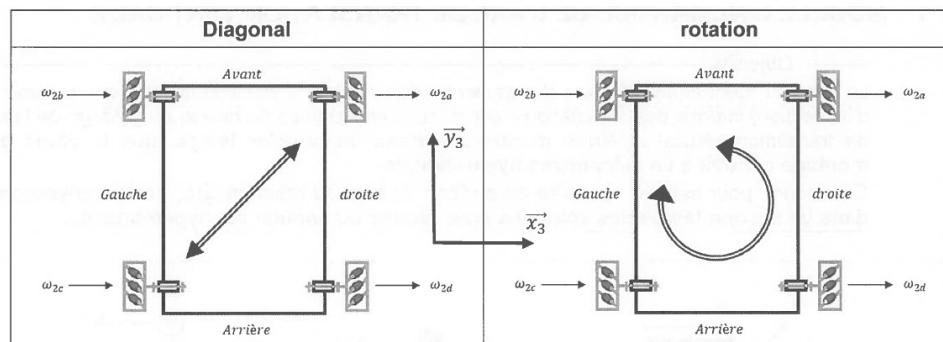
Déduire également à l'aide des équations (eq1), (eq2), (eq3), (eq4), le modèle cinématique inverse (MCI) du robot $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$.

Le contrôle du robot peut également être envisagé dans l'espace de travail lié au bâti à savoir le système de coordonnées du repère global.

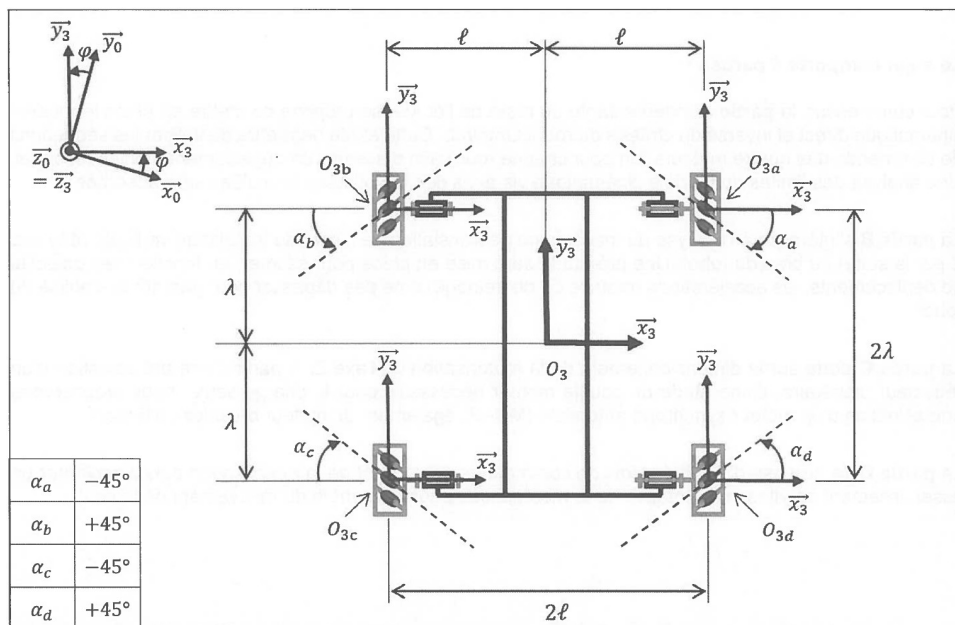
En notant $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi} \vec{z}_0 = \omega \vec{z}_0 \\ V_X \vec{x}_0 + V_Y \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_3}$ le torseur cinématique de 3/0 dans la base $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le changement de base étant une rotation d'un angle φ selon \vec{z}_0 , il vient immédiatement

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ \omega \end{pmatrix}.$$

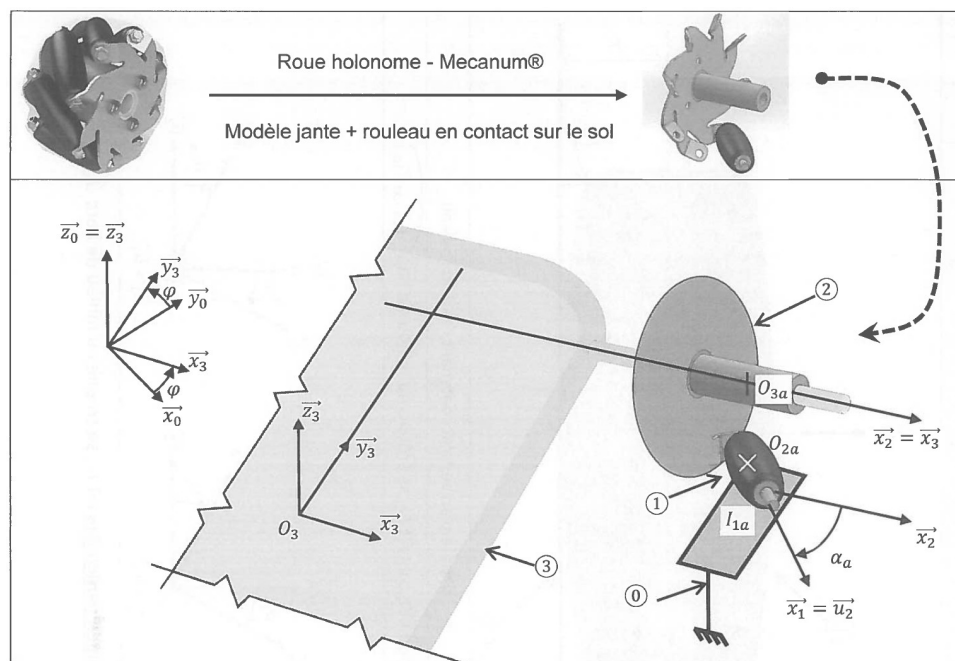
À partir des résultats précédents, indiquer comment commander la vitesse de rotation des moteurs des 4 roues a , b , c et d pour que le robot se déplace suivant une direction diagonale puis tourne sur lui-même, ω_m est une vitesse de rotation algébrique.



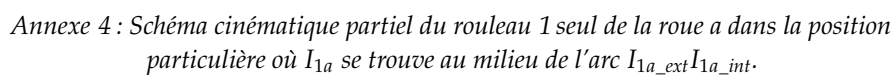
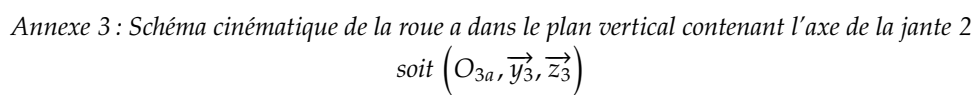
Conclure sur le comportement omnidirectionnel du robot des limites possibles.



Annexe 1 : Schéma cinématique plan du robot – Paramétrages repères robot et repère global



Annexe 2 : Schéma cinématique 3D de principe du robot – Représentation partielle du châssis 3 avec la roue a

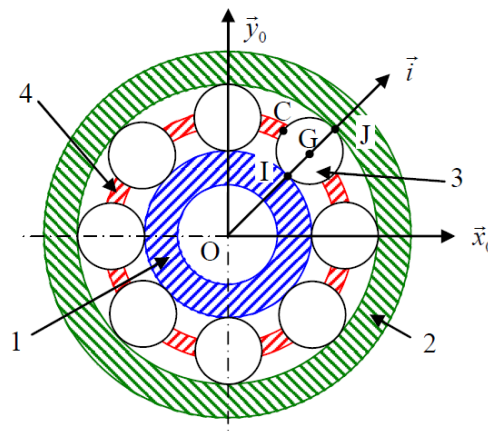
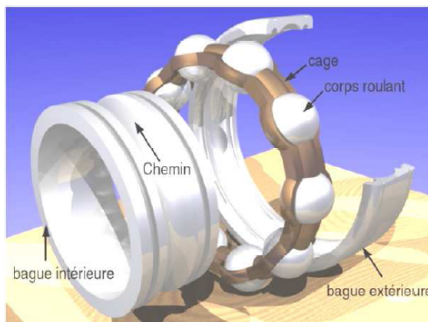


Application 4

Roulement à billes – Sujet

Un roulement mécanique est un élément technologique permettant le positionnement, la transmission des efforts et la rotation entre deux pièces par roulement. Ce composant mécanique interposé entre les deux pièces optimise le frottement et la précision de la liaison. Un roulement à billes se présente sous la forme de deux bagues coaxiales entre lesquelles sont placées des billes maintenues espacées par une cage. La fonction de la cage est donc de maintenir deux billes consécutives à distance égale l'une de l'autre lors du fonctionnement du roulement mais elle entraîne aussi des effets nuisibles car il existe un phénomène de glissement entre la cage et les billes. **L'objectif est d'étudier ce phénomène de glissement.**

Ressources de Renan Bonnard.



On désigne par :

- ▶ $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère associé au bâti 0 ;
- ▶ $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bague intérieure 1 en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti 0 tel que $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- ▶ $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bague extérieure 2 en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti 0 tel que $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$;
- ▶ $\mathcal{R}_3 = (G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bille 3 qui roule sans glisser sur 1 en I et sur 2 en J et dont on peut considérer qu'elle est en liaison pivot d'axe (G, \vec{z}_0) avec la cage 4 tel que $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$;
- ▶ $\mathcal{R}_4 = (O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ le repère associé à la cage 4 en mouvement de rotation autour de (O, \vec{z}_0) tel que $\theta_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$.

Pour faciliter les calculs on définit le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z}_0)$ tel que, à tout instant, le vecteur \vec{i} possède la même direction et le même sens que le vecteur \vec{OG} . Ce repère n'est lié à aucun solide en particulier et ne sert qu'à exprimer simplement les différents termes cinématiques évoqué dans l'énoncé. On pose :

$$\omega_k = \dot{\theta}_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad \vec{OI} = r_1 \vec{i} \quad \vec{OJ} = r_2 \vec{i}$$

$$\overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\overrightarrow{j}$$

Question 1 Réaliser les figures planes correspondant au paramétrage du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$, $\overrightarrow{V}(O, 1/0)$ et $\overrightarrow{V}(I, 1/0)$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$, $\overrightarrow{V}(O, 2/0)$ et $\overrightarrow{V}(J, 2/0)$.

Question 4 Exprimer les conditions de roulement sans glissement en I et J . Établir les expressions des vecteurs $\overrightarrow{V}(I, 3/0)$ et $\overrightarrow{V}(J, 3/0)$.

Question 5 En déduire l'expression de ω_3 en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

Question 6 Déterminer $\overrightarrow{V}(G, 3/0)$ en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

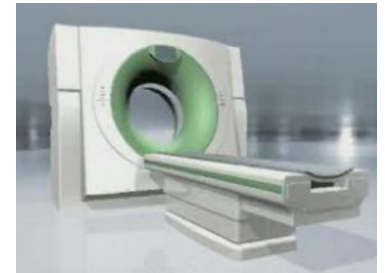
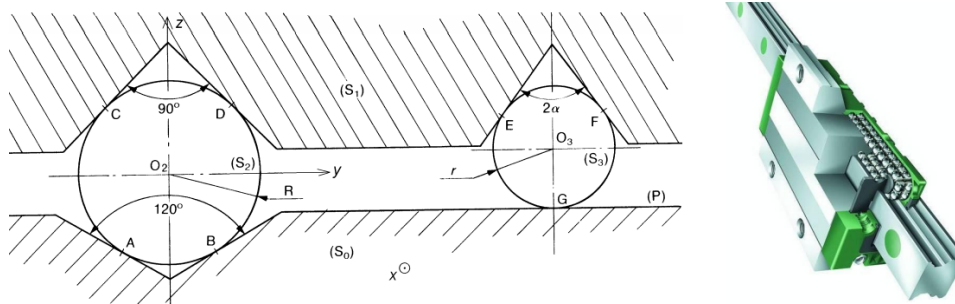
Question 7 Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de la bille 3 par rapport à la cage 4 au point C en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

Application 5

Guidage linéaire de systèmes médicaux – Sujet

L'étude suivante porte sur le guidage en translation d'un chariot de scanner médical S1 par rapport au bâti de la machine S0. Ce guidage est réalisé par deux séries de billes, S2 et S3, qui roulent dans des rainures en V.

La figure ci-dessous présente, en coupe, la réalisation technologique de ce guidage.



Les billes S2 de rayon R roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à 90° usinée dans S1 et sur les plans d'une autre rainure en V d'angle égal à 120° usinée dans S0. Les billes S3 de rayon r roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à 2α usinée dans S1 et sur le plan (P) de S0.

On note $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ v\vec{x} \end{array} \right\}_{\forall P}$ le torseur cinématique du mouvement du chariot S1 par rapport au bâti S0.

On pose $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \omega_{20}\vec{y}$ et $\overrightarrow{\Omega}(3/0) = \omega_{30}\vec{y}$.

Question 1 Traduire les conditions de non glissement. En déduire quelques axes instantanés de rotation.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ en fonction de v , puis $\overrightarrow{V}(E, 3/0)$ en fonction de v . Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ en fonction de ω_{20} , puis $\overrightarrow{V}(E, 3/0)$ en fonction de ω_{30} . En déduire une relation entre ω_{20} et v , puis une relation entre ω_{30} et v .

Question 3 En déduire les torseurs cinématiques des mouvements de S2/S0 et S3/S0 en fonction de v et des caractéristiques géométriques.

Question 4 Préciser les composantes de roulement et de pivotement en G et B.

Question 5 Déterminer les vecteurs vitesses des centres des billes dans leur mouvement par rapport au bâti S0 : $\overrightarrow{V}(O_2, 2/0)$ et $\overrightarrow{V}(O_3, 3/0)$.

Question 6 Déterminer α pour que ces vecteurs vitesses soient identiques.