

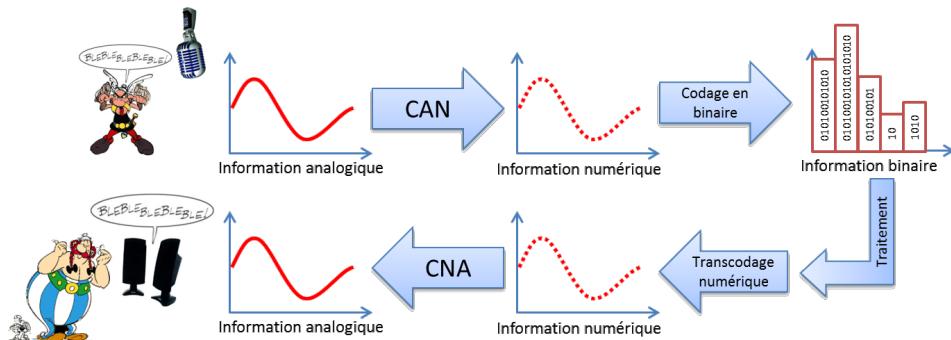
# 1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

## 1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

### 1.1.1 Définitions

## Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
  - Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).



## Définition – Systèmes automatiques ou asservis

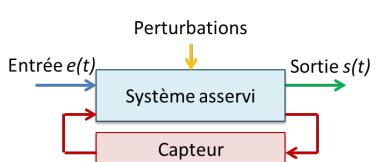
Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- ▶ la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable ;
  - ▶ la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger

<b>1.1</b>	Premières définitions . . . . .	1
<b>1.2</b>	Transformée de Laplace . . . . .	3
<b>1.3</b>	Modélisation par fonction de transfert et schéma- blocs . . . . .	4
<b>1.4</b>	Systèmes d'ordre 1 & 2 . . . . .	6
<b>1.5</b>	Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	8

- B2-04
  - B2-05
  - B2-06
  - B2-07
  - C1-01
  - C2-01
  - C2-02
  - C2-03



de la qualité de la tâche accomplie.

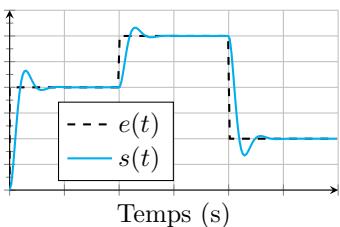


FIGURE 1.1 – Système suiveur.

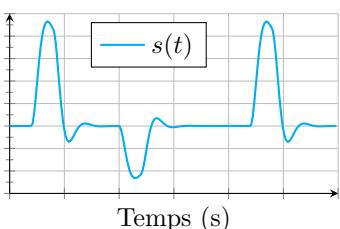


FIGURE 1.2 – Système régulateur.

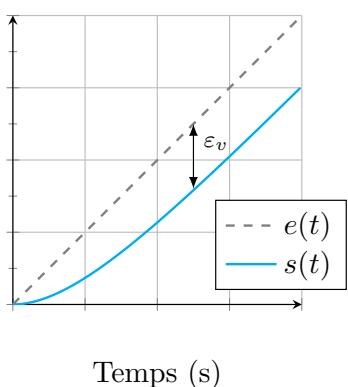


FIGURE 1.3 – Erreur de trainage.

### Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

### 1.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

#### Définition – Précision en position – Écart statique $\varepsilon_s$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_s$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

#### Définition – Précision en vitesse $\varepsilon_v$

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

#### Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

#### Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

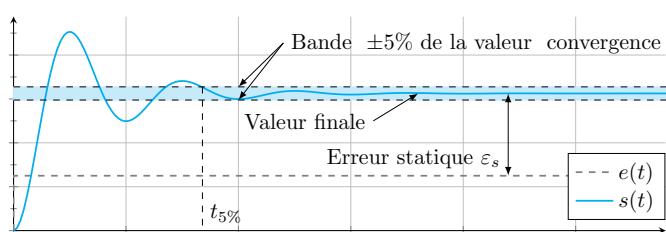


FIGURE 1.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

**Définition – Stabilité**

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 1.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

### 1.2.1 Définitions

#### Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$

**Définition – Transformée de Laplace**

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

**Résultat – Dérivation**

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^nF(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### 1.2.2 Théorèmes

**Théorème – Valeur initiale**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

**Théorème – Retard**

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

**Théorème – Valeur finale**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Théorème – Amortissement**

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

## 1.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

### 1.3.1 Définitions

#### Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

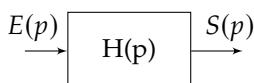
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

#### Définition – Classe – Ordre – Pôles – Zéros

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

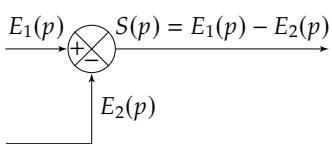
- ▶ Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Le degré de  $D(p)$  est appelé **ordre  $n$**  du système ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).
- ▶ L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- ▶ S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  $\alpha$  est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.



#### Définition – Modélisation d'un bloc

Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$



#### Définition – Modélisation d'un comparateur

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

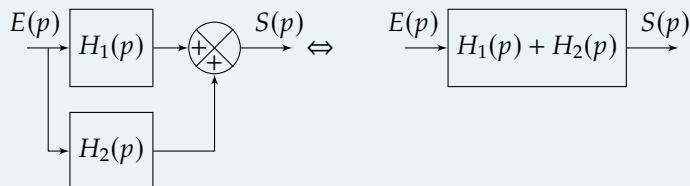
### 1.3.2 Algèbre de blocs

#### Résultat – Blocs en série

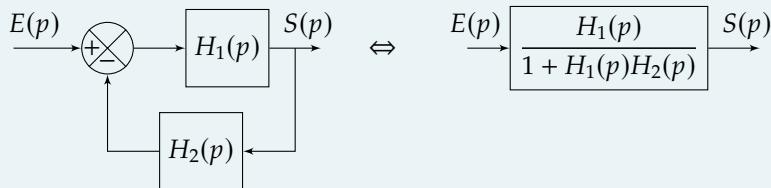


*Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.*

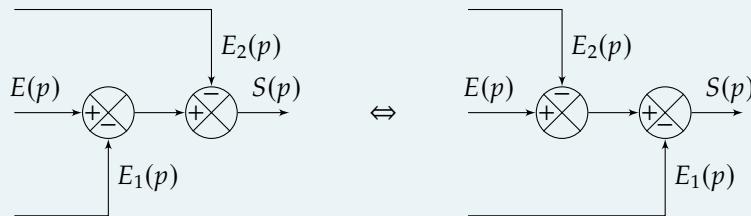
#### Résultat – Blocs en parallèle



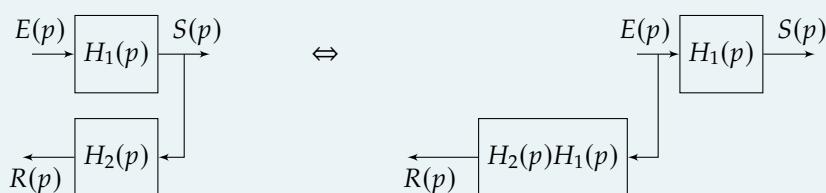
#### Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



#### Résultat – Comparateurs en série



#### Résultat – Point de prélèvement

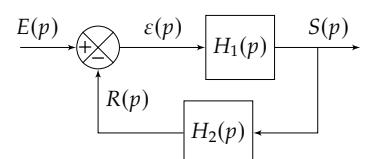


### 1.3.3 Fonctions usuelles

#### Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

*Formule de Black*

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



**Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO**

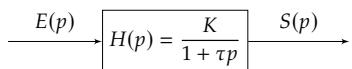
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

**Définition – Théorème de superposition**

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1E_1 + H_2E_2$ .

## 1.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

### 1.4.1 Systèmes d'ordre 1

**Définition – Système d'ordre 1**

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

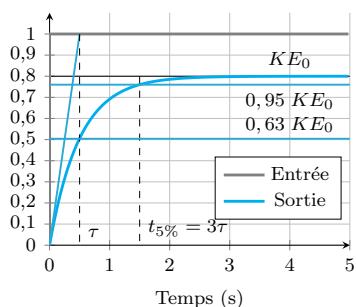
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶  $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- ▶  $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

**Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre**

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- ▶ la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;

- $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_\infty$ .

### Résultat – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

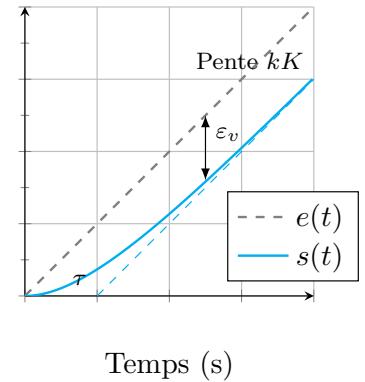
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente  $k$  :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = Kk \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ .



Temps (s)

### 1.4.2 Systèmes d'ordre 2

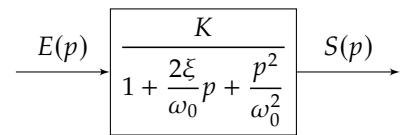
#### Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

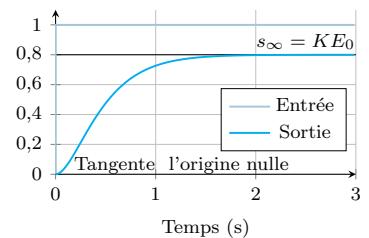


- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- $\xi$  (lire  $\chi$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- $\omega_0$  pulsation propre du système (rad/s ou  $s^{-1}$ ).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

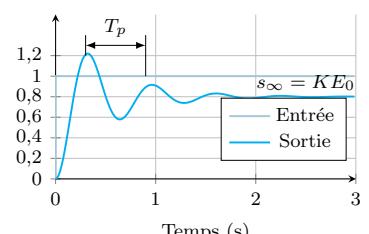
#### Résultat – $\xi \geq 1$ : système non oscillant et amorti (apériodique)

- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.



#### Résultat – $\xi < 1$ : système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ .



$$\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

► La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = KE_0 e \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ .

**Résultat –**

- Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $KE_0$  ( $2KE_0$  crête à crête).
- Pour  $\xi \approx 0,69$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

## 1.5 Réponse fréquentielle des SLCI

### 1.5.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
- $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.
- $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
- $\omega$  : la pulsation en rad/s;
- $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

**Définition – Gain & Phase**

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

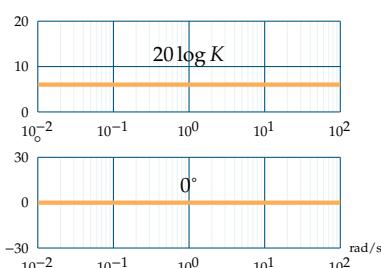
- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

**Résultat –**

On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$ ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$ .

### 1.5.2 Gain

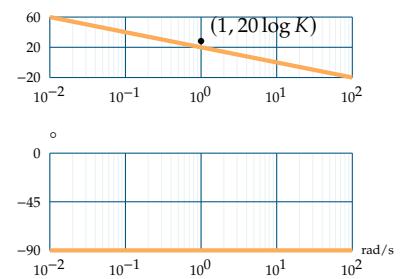
**Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur**

- Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .

### 1.5.3 Intégrateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

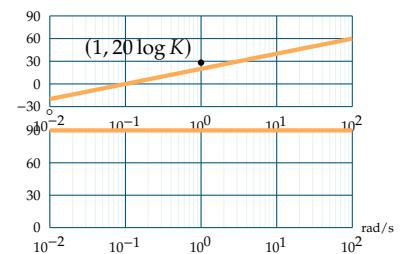
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 1.5.4 Dérivateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

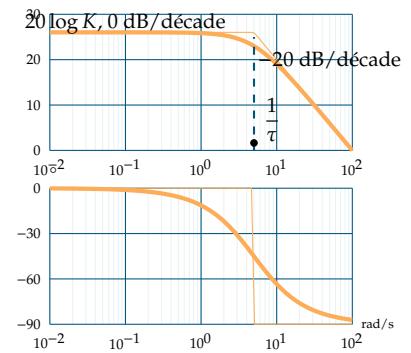
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .



### 1.5.5 Systèmes d'ordre 1

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

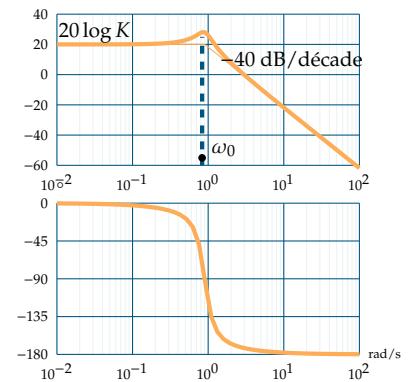
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 1.5.6 Systèmes d'ordre 2

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .
- ▶ Cas où  $\xi < 1$ .
  - ▶ Diagramme de gain asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
    - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40\text{dB/decade}$ .
  - ▶ Diagramme de phase asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;



- pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .

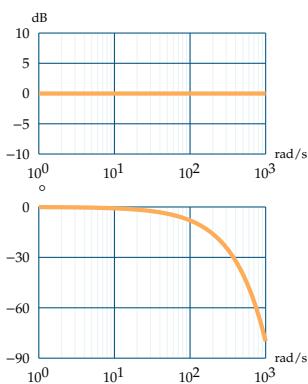
Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

### Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

### 1.5.7 Retard



### Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$ .

### 1.5.8 Tracé du diagramme de Bode

#### Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

#### Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

# Application 1

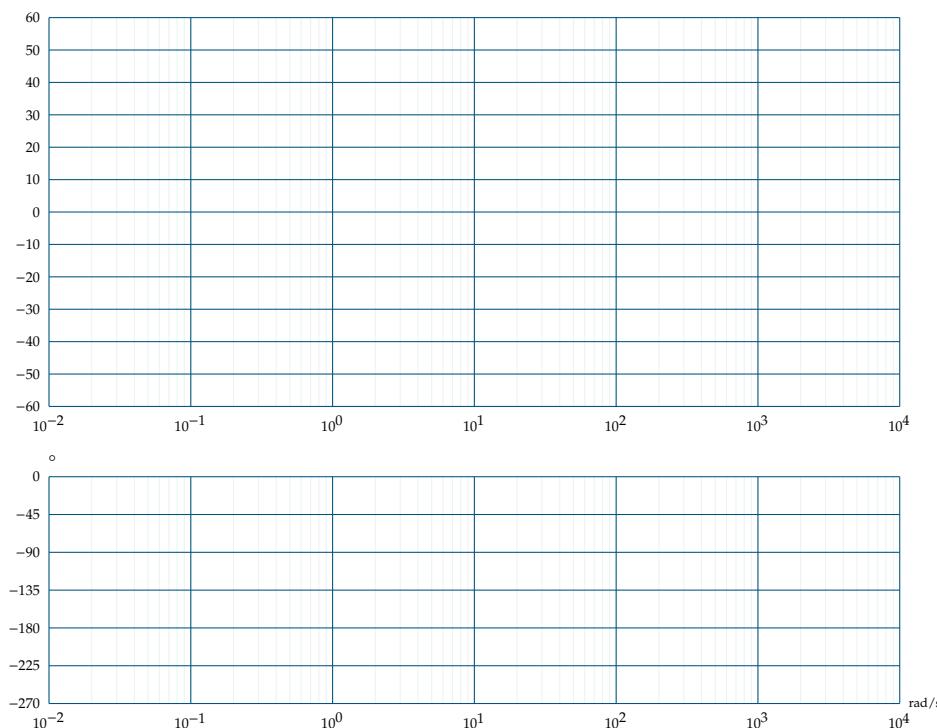
## Réponses fréquentielles– Sujet

D'après Sébastien Grange.

### Diagramme de Bode

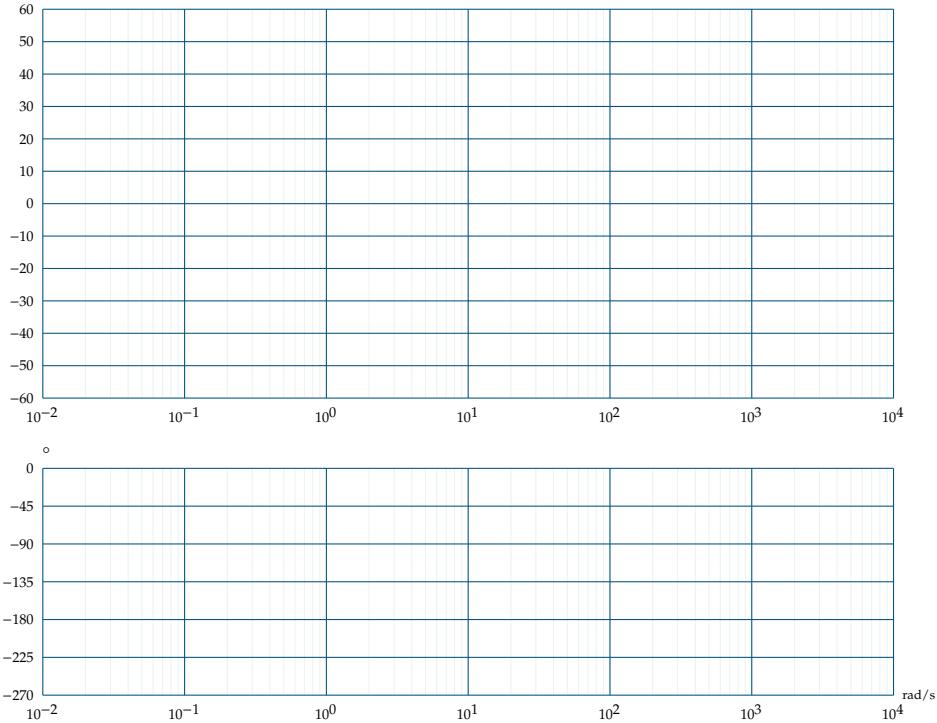
**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

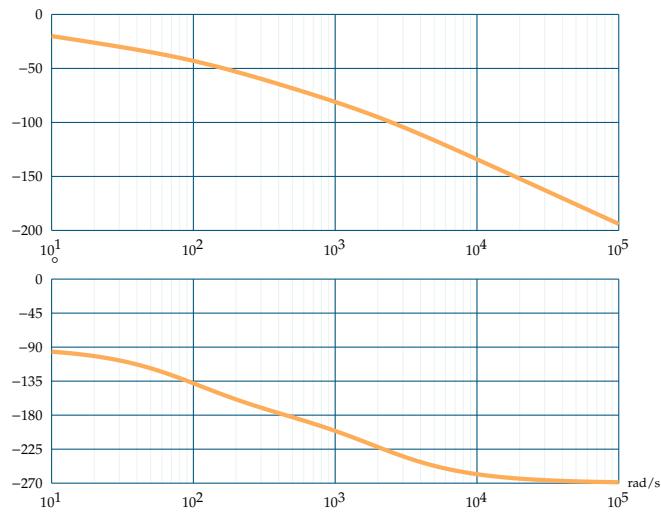


**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

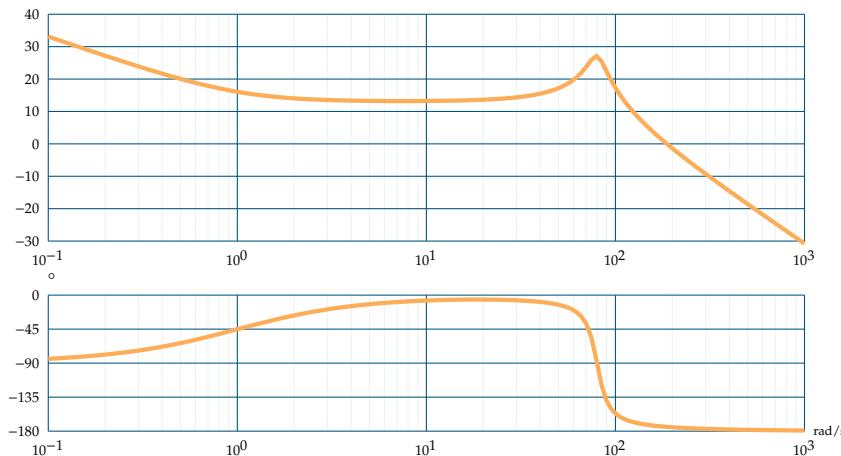


**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .



**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .



**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

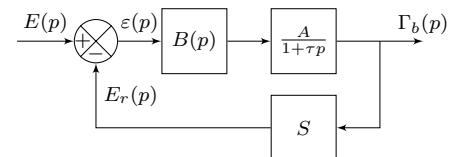
**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega_b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



- ▶  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ;
- ▶  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \text{ g}^{-1} \cdot 10^{-3} / (\text{V}/(\text{m/s}^2))$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur;
- ▶  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement;
- ▶  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .







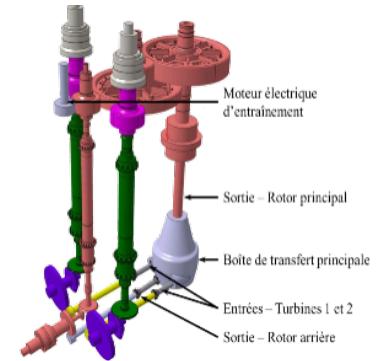
## TD 1

# Banc d'essai BTP- Sujet

Concours CCINP- TSI 2015

B2-07

C2-03

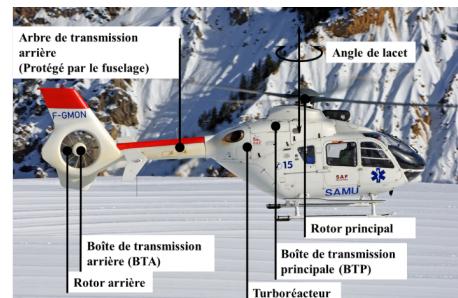


## Mise en situation

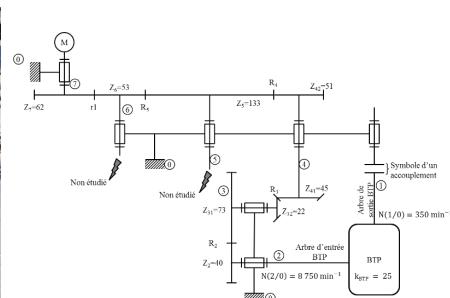
Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1.5a). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 1.5b présente la structure du banc d'essai.

### Objectif

Valider Req 1.1.1.



(a) Hélicoptère.



(b) Structure du banc d'essai.

«requirement»	Précision de la régulation
Id = "1.1.1"	Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul. "

FIGURE 1.5 – Hélicoptère et banc d'essai

## Le moteur à courant continu

On note :

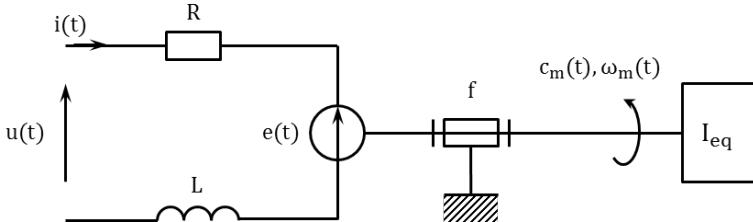
- $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;

- ▶  $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- ▶  $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶  $c_m(t)$  : le couple moteur;
- ▶  $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- ▶  $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- ▶  $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 1.6.

- ▶  $R$  : la résistance de l'induit;
- ▶  $L$  : l'inductance de l'induit;
- ▶  $f$  : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à  $\omega_m(t)$ ;
- ▶  $I_{eq}$  : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;

**FIGURE 1.6 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.**



Hypothèses :

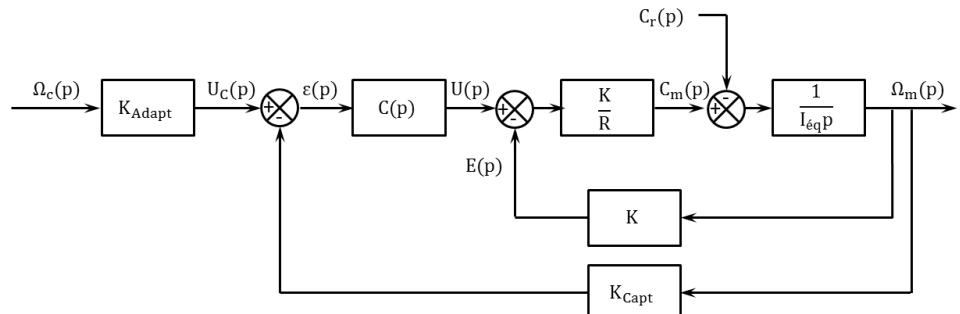
- ▶ le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- ▶ les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- ▶ on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- ▶ on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- ▶ on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- ▶ pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 1.7.



**FIGURE 1.7 – Régulation en vitesse du banc d'essai.**

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$  ?

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$ . On considère

que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_C(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_C(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

#### Éléments de correction

1.  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .
2.  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}} \text{ et } \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K^2 + K K_P K_{\text{Capt}}}.$
3. .
4.  $K_2 = \frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}.$
5.  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p).$
6.  $\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}.$
7. On montre que l'écart statique est annulé.
8.  $\varepsilon = 0.$







## TD 2

### Tête de découpe de tissus– Sujet

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 1.8) :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration ;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport à la table ;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction  $\vec{x}_0$  par rapport au bras transversal ;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

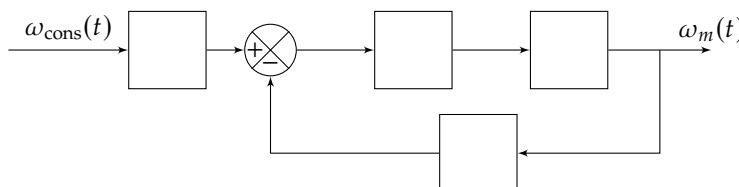
### Modélisation du comportement du moteur de coupe

#### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.9).

Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée  $\omega_m(t)$ , est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension  $u_{\text{mes}}(t)$ , image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne  $u_{\text{cons}}(t)$ , image de la vitesse de rotation de consigne  $\omega_{\text{cons}}(t)$ ; un adaptateur fournit  $u_{\text{cons}}(t)$  à partir de  $\omega_{\text{cons}}(t)$ . La tension écart  $\varepsilon(t) = u_{\text{cons}}(t) - u_{\text{mes}}(t)$  est alors transformée en tension d'alimentation du moteur  $u_m(t)$  par l'ensemble correcteur-variateur.

**Question 1** Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



**Question 2** On note  $K_a$  le gain de l'adaptateur et  $K_c$  le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre  $K_a$  et  $K_c$  pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

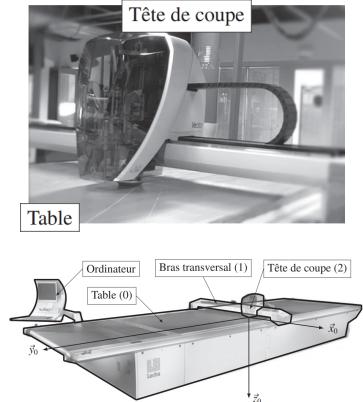


FIGURE 1.8 – Structure d'une table de découpe de tissus

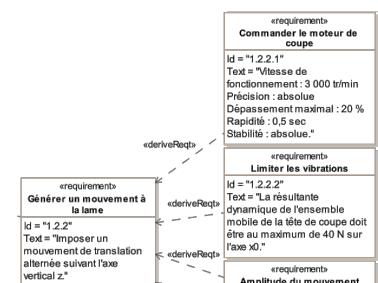
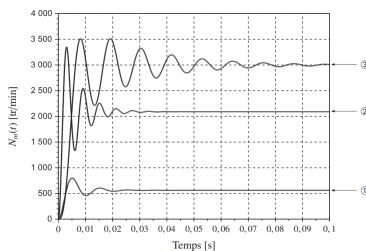


FIGURE 1.9 – Exigence 1.2.2.1

Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont :

- ▶  $R$ , résistance de l'induit;
- ▶  $L$ , inductance de l'induit;
- ▶  $k_e$ , constante de vitesse;
- ▶  $k_c$ , constante de couple;
- ▶  $u_m(t)$  est la tension d'alimentation du moteur;
- ▶  $i(t)$  est l'intensité traversant l'induit;
- ▶  $e(t)$  est la force contre-électromotrice;
- ▶  $\omega_m(t)$  est la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶  $c_m(t)$  est le couple moteur;
- ▶  $c_r(t)$  est le couple résistant;
- ▶  $J$  est le moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ramené à l'arbre moteur, supposé constant dans cette partie.



**FIGURE 1.10** – Évolutions simulées de  $\omega_m(t)$ .

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu :  $u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t)$ ,  $c_m(t) = k_c i(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ . La fonction de transfert du moteur est notée  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

**Question 4** En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . On exprimera les constantes en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $k_e$ ,  $k_c$  et  $J$ .

## Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

### Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Le correcteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur de fonction de transfert  $H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

Les résultats de simulation de la réponse du moteur  $N_m(t)$ , en boucle fermée, pour une entrée échelon d'amplitude  $N_0 = 3000 \text{ tr min}^{-1}$  pour différentes valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  sont donnés sur la figure 1.10.

**Question 5** Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.10, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

**Question 6** Pour chaque courbe de la figure 1.10, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non.

**Question 7** Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

### Éléments de correction

1. .
2.  $K_a = K_c$ .
3. .
4.  $K = \frac{1}{k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$  et  $\xi = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$ .
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de  $K_p$ .
6.  $K_i \neq 0$  pour la courbe 3 uniquement.
7. .





## TD 3

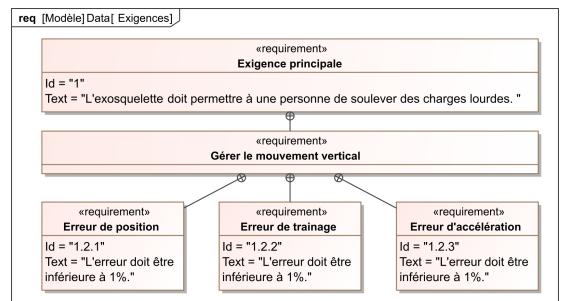
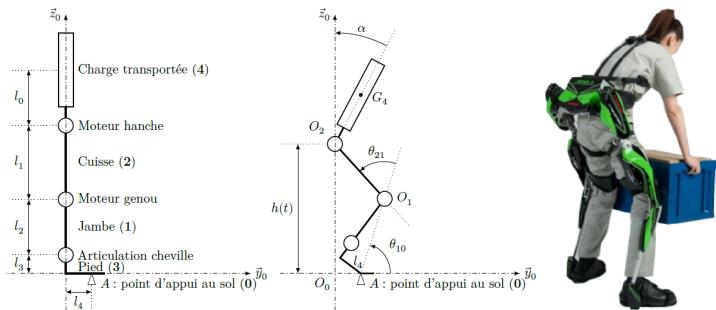
# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.

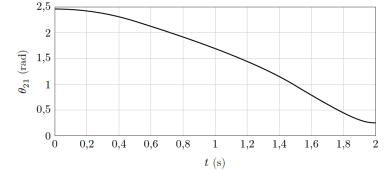


## Gestion du mouvement vertical

### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

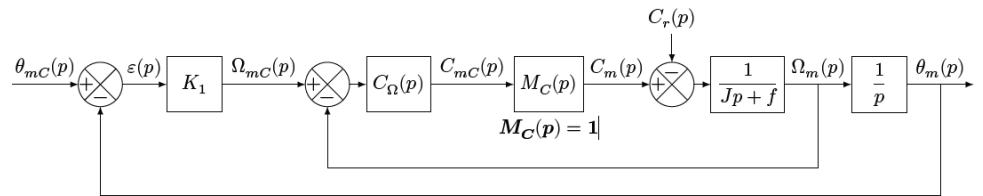
La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.

#### Notations :

- ▶  $\theta_{mC}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mC}(t)$  en rad);
- ▶  $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad);
- ▶  $C_{mC}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mC}(t)$  en Nm);
- ▶  $C_m(p)$  couple moteur (variable temporelle :  $c_m(t)$  en Nm);
- ▶  $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm);
- ▶  $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ );
- ▶  $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en rad  $s^{-1}$ );
- ▶  $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en rad  $s^{-1}$ );
- ▶  $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- ▶  $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ;
- ▶  $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- ▶  $f$  coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.



Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- ▶ l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ;
- ▶ l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

#### Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

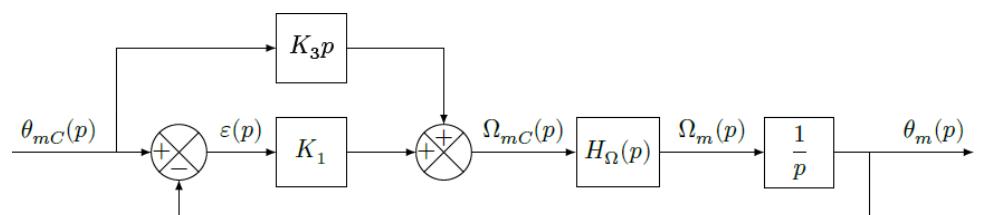
#### Méthode –

On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon).

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33$  ms.



**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

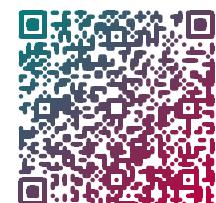
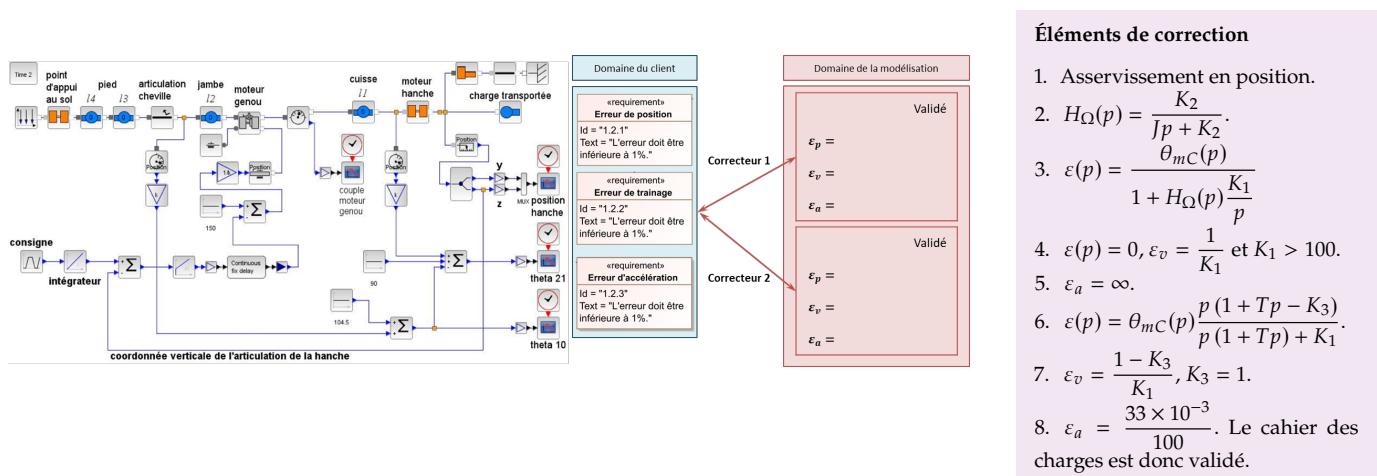
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.







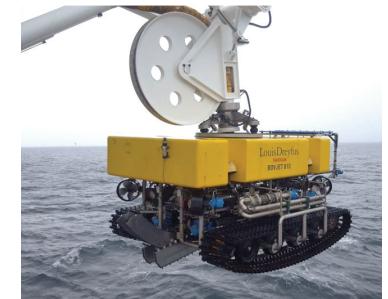
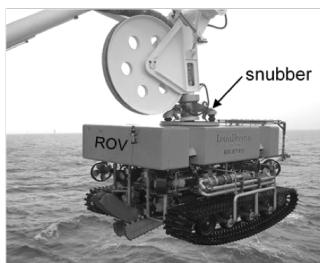
## TD 4

# Bateau support de ROV– Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

## Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.



**FIGURE 1.11 – ROV suspendu à la grue portique**

## Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

**TABLE 1.1 – Extrait du cahier des charges**

Exigence	Critère	Niveau
Id 1.1 : Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre 0,5 rad s <sup>-1</sup> à 1,7 rad s <sup>-1</sup>	Amplitude verticale du ROVmaximale	< 1 m pour 5 m d'amplitude de houle
Id 1.2 : Mise en tension du câble	Temps de réponse, $t_{r5\%}$	< 3 s

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble  $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$  suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble  $S$  est  $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ , avec  $Y_S(p)$  la transformée

de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et  $Y_{\text{vague}}(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de  $B(p)$  dans la figure 1.12.

**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

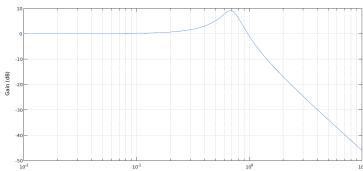


FIGURE 1.12 – ROV suspendu à la grue portique

## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (Figure 1.13).

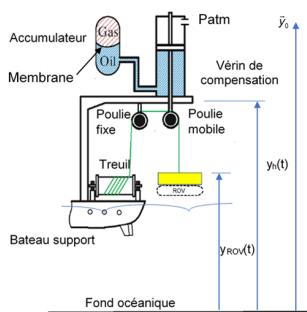


FIGURE 1.13 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression  $\Delta p_E(t)$  et  $\Delta p_G(t)$  autour du point d'équilibre peuvent être définies par  $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$  et  $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$ . Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left( \frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{\text{ROV}}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{r P_{G0} C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par  $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliquée à  $\Sigma$  se traduit par  $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{\text{ROV}}(t) + c(\dot{y}_{\text{ROV}}(t) - \dot{y}_h(t))$  (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par  $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$ .

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

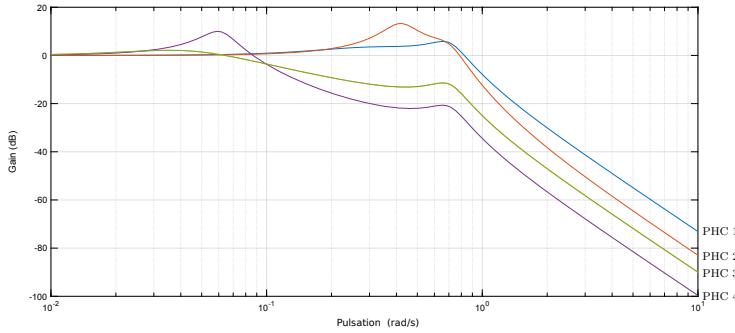
$H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . Exprimer  $\omega_0$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  en fonction des constantes définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation  $\tau\omega_0 = 2\zeta$ .

**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_{vague}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle  $\omega_c$  et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.



La Figure 1.14 donne les diagrammes du gain de la fonction  $G(p)$  de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz  $V_{G0}$  correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

**FIGURE 1.14 – Courbes de gain  $G(p)$  pour différents réglages du PHC**

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
$V_{G0}$ ( $\text{m}^3$ )	96	1	52	2

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à  $-14 \text{ dB}$ .

**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

### Éléments de correction

1.  $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$  et  $G_{dB}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$
2. ...
3.  $K_1 = \frac{S_r P_{G0}}{V_{G0}}$  et  $\tau = \frac{V_{G0}}{r P_{G0} C_{qR}}$ .
4.  $\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}, \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}, \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}$ .
5. .
6. .
7. PHC4.

**TABLE 1.2 – Volumes  $V_{G0}$  pour différents réglages du PHC**







## TD 5

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique—Sujet

Mines Ponts 2016.

B2-04

## Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC<sup>2</sup>E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure 1.15 décrit les exigences auxquelles est soumis l'asservissement du MC<sup>2</sup>E.

## Validation des performances de l'asservissement d'effort

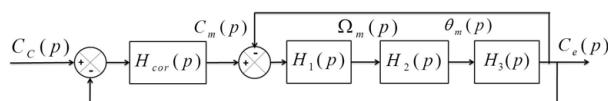
### Modèle de connaissance de l'asservissement

#### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ .

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

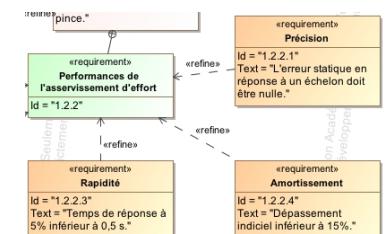
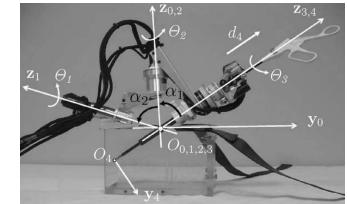


FIGURE 1.15 – Performances de l'asservissement.

On note :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

FIGURE 1.16 – Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;
- $C_c(p)$ , couple de consigne;
- $C_m(p)$ , couple moteur;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

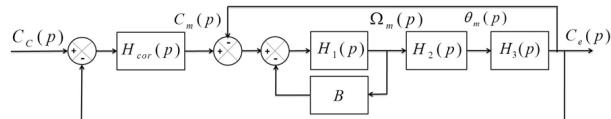


FIGURE 1.17 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 1.18.

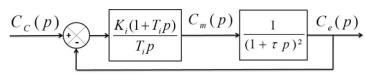


FIGURE 1.18 – Régulation avec correcteur PI.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de

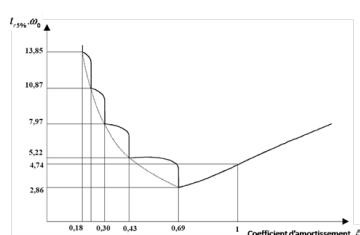
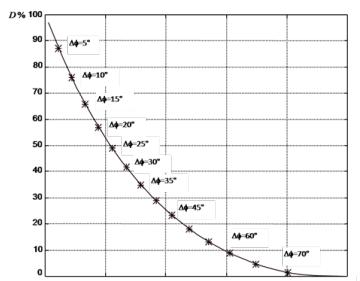
$$\text{transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : } \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}.$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne  $K_i = 1$ .

**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.



## Diagrammes de Bode

On prend  $K_i = 0,4$ ,  $T_i = 0,01$  s et  $\tau = 0,5$  s.

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i (1 + T_i p)}{T_i p (1 + \tau p)^2}$ .



## TD 6

# Gyropode à usage professionnel HUBLEX- Sujet

Concours CCINP – MP 2020.

## Présentation

B2-04

C2-03

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... lorsque ces lieux sont de grandes tailles.

## Étude de l'asservissement en intensité des moteurs



### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en intensité du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence « 1.7.1.1 » et ses sous-exigences.

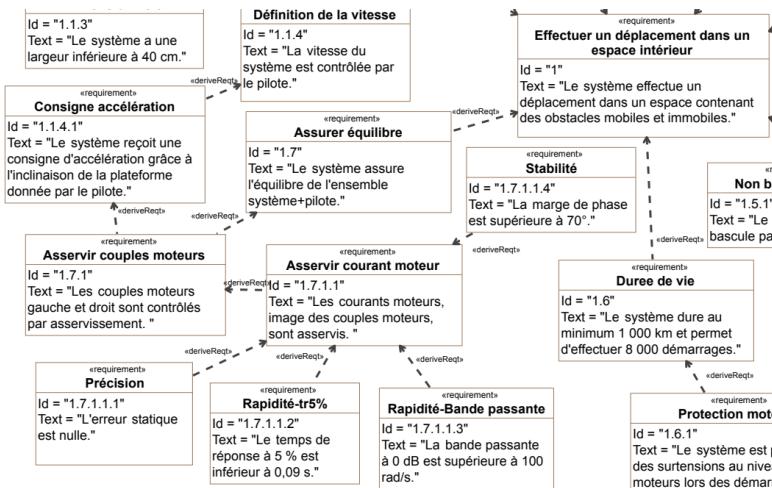


FIGURE 1.19 – Diagramme des exigences

## Modélisation du moteur

Le moteur brushless associé à son électronique de commande peut se modéliser par les équations d'une machine à courant continu.

On notera  $J_{eq}$  l'inertie équivalente des masses mobiles mises en jeu ramenée sur l'arbre moteur. On modélisera les différents frottements par un frottement visqueux générant

un couple résistant, rapporté à l'arbre moteur, proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre moteur et de coefficient  $f$  ( $f > 0$ ). On rappelle les équations caractéristiques associées :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K_e \omega_m(t)$ ;
- $C_m(t) = K_e i(t)$ ;
- $J_{\text{eq}} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - f \omega_m(t)$ .

**Question 1** Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

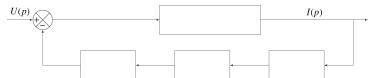


FIGURE 1.20 – Schéma-blocs

**Question 2** Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans Figure 1.20. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

**Question 3** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ . Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

## Asservissement du moteur en intensité

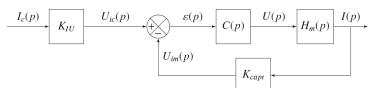


FIGURE 1.21 – Schéma-blocs

L'architecture retenue pour contrôler le couple moteur est un asservissement en intensité, image du couple moteur (voir équation précédente). Le schéma-blocs est représenté Figure 1.21. Un convertisseur IU fournit au calculateur une tension  $u_{\text{ic}}(t)$  image de l'intensité de consigne  $i_c(t)$ , proportionnelle à cette dernière de coefficient  $K_{\text{iu}}$ . De même, l'intensité réelle  $i(t)$ , mesurée par un capteur d'intensité de coefficient  $K_{\text{capt}}$ , a pour image  $u_{\text{im}}(t)$ . L'écart, noté  $\varepsilon(t) = u_{\text{ic}}(t) - u_{\text{im}}(t)$ , est traité par le correcteur de fonction de transfert  $C(p)$ , qui impose la tension  $u(t)$  aux bornes du moteur.

On donne la fonction de transfert du moteur :  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

**Question 4** Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à  $K_{\text{iu}}$ , caractéristique du convertisseur IU.

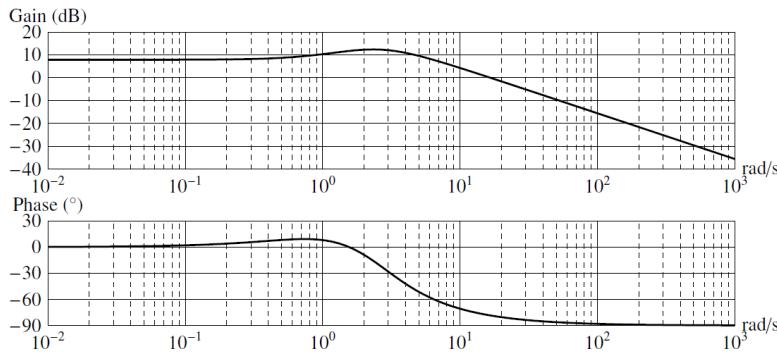
On prend, dans un premier temps, un correcteur purement proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

On en déduit la fonction de transfert  $H_I(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$  :

$$H_I(p) = \frac{K'}{1 + K'} \frac{1 + \tau_m p}{\frac{2z_m}{\omega_{0m}} + K' \tau_m} \frac{1}{1 + \frac{\omega_{0m}}{1 + K'} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2 (1 + K')} p^2}, \text{ avec } K' = K_{\text{iu}} K_p K_m.$$

**Question 5** Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée  $\mu_s$ , pour une entrée indicielle (i.e.  $I_c(p)$  est un échelon unitaire), en fonction de  $K_{\text{iu}}$ ,  $K_p$  et  $K_m$ .

La Figure 1.22 présente les diagrammes de Bode en boucle ouverte de l'asservissement étudié, en prenant  $K_p = 10$ .



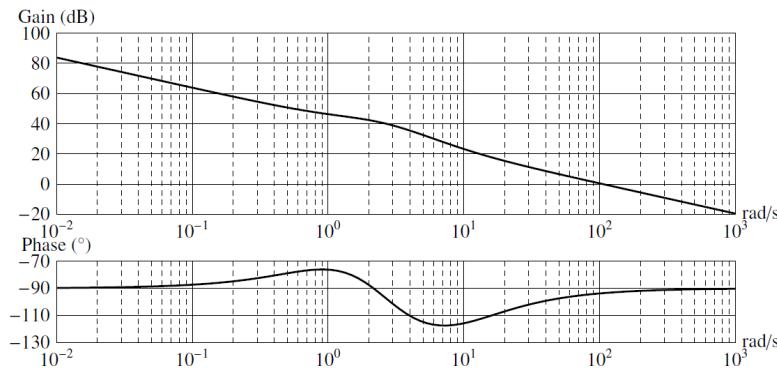
**FIGURE 1.22** – Diagrammes de Bode en boucle ouverte pour  $K_p = 10$

**Question 6** Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

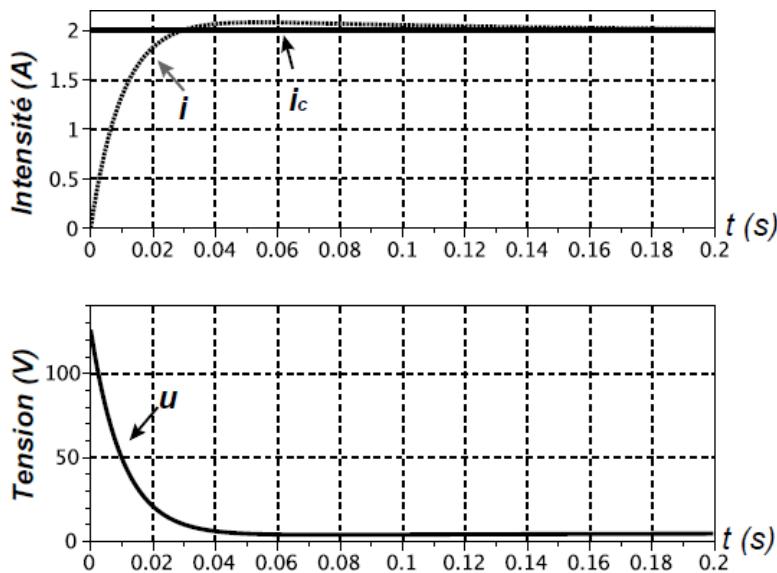
Dans un deuxième temps, il est décidé d'utiliser un correcteur de type proportionnel intégral. Sa fonction de transfert est notée :  $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour  $K_p = 10$  et  $K_i = 1000$ . On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

Une fois le correcteur réglé, on obtient les diagrammes de Bode en boucle ouverte (Figure 1.23) et les réponses temporelles (Figure 1.24), pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.



**FIGURE 1.23** – Diagrammes de Bode en boucle ouverte avec réglage du correcteur PI effectué



**FIGURE 1.24** – Réponses temporelles avec réglage du correcteur PI effectué

**Question 8** Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du système).

Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. Figure 1.25 présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.

**Question 9** Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

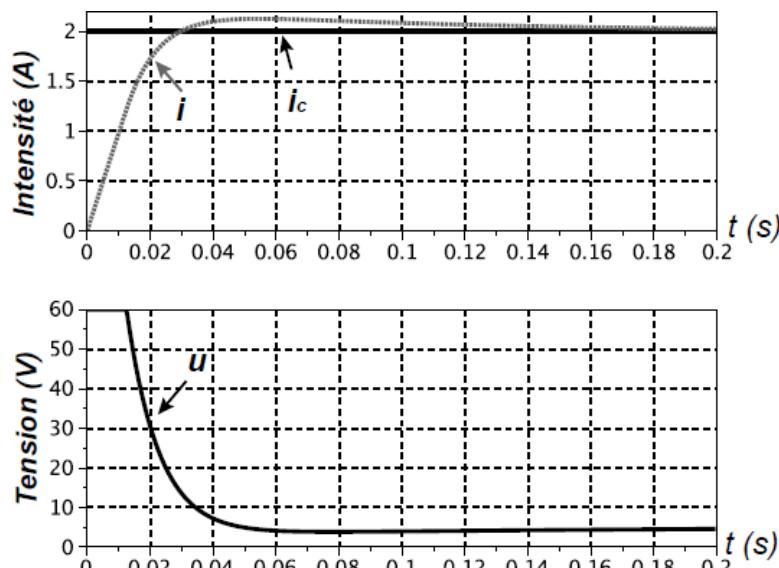


FIGURE 1.25 – Réponses temporelles du système finalement implanté

#### Éléments de correction

1.  $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$ ,  
 $E(p) = K_e \Omega_m(p)$ ,  $C_m(p) = K_e I(p)$ ,  $J_{eq}p\Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p)$ .
2. .
3.  $K_m = \frac{f}{Rf + K_e^2}$ ,  $\tau_m = \frac{J}{f}$ ,  
 $\omega_{0m} = \sqrt{\frac{Rf + K_e^2}{LJ}}$ ,  $z_m = \frac{Lf + RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K_e^2}}$ .
4.  $K_{capt} = K_{IU}$ .
5.  $\varepsilon_s = \frac{1}{1 + K_m K_P K_{Capt}}$ .
6. .
7. .
8. Saturation.

