

Application 0

Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs – Sujet

Centrale Supélec PSI 2013.

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.



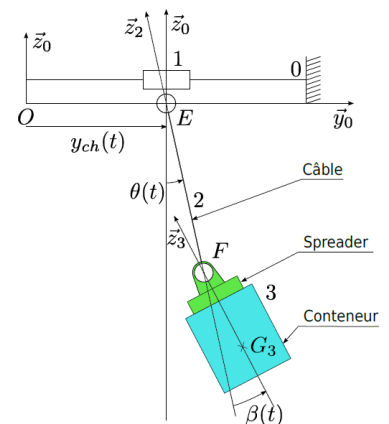
En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

Paramétrage

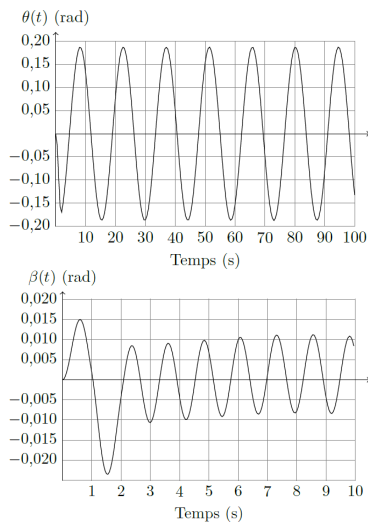
- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au portique fixe ; il est supposé galiléen avec \vec{z}_0 l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que $\vec{OE} = y_{ch}(t)\vec{y}_0$ est notée $y_{ch}(t)$; l'angle (\vec{z}_0, \vec{z}_2) d'inclinaison du câble $\theta(t)$ et l'angle (\vec{z}_2, \vec{z}_3) d'inclinaison du conteneur par rapport au câble $\beta(t)$.

Données

- $\mathcal{R}_1 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathcal{R}_2 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié au câble 2 ; $\ell_2 = 50$ m la longueur EF du câble ; la masse est négligée.
- $\mathcal{R}_3 = (F; \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur} ; $m_3 = 50$ tonnes la masse du solide 3 ; G_3 le centre de gravité du solide 3, tel que $\vec{G_3F} = h_3\vec{z}_3$ où $h_3 = 2,5$ m ; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit $I_3(G_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$ où $\begin{cases} A_3 = 52 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ B_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ C_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \end{cases}$.
- la motorisation M_D du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme $R(M_D \rightarrow 1) = F\vec{y}_0$;
- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée $\vec{R}(2 \rightarrow 3) = F_{23}\vec{z}_2$.



Question 1 Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?



Question 2 Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\overrightarrow{V}(G_3, 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 .

Question 3 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Question 4 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Question 5 En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.

Question 6 Proposer une simplification de la modélisation précédente.

Application 0

Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2013.

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.



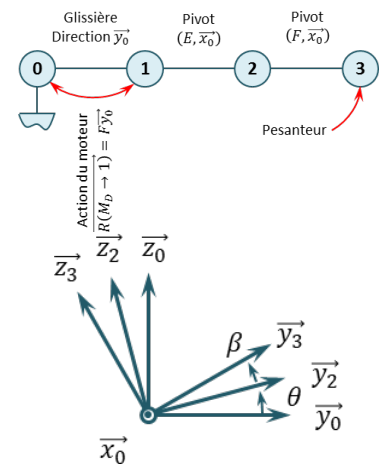
Question 1 Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

Correction

Le système a trois mobilités :

- ▶ la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- ▶ la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- ▶ la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.



Question 2 Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\overrightarrow{V}(G_3, 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 .

Correction

$$\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} - \ell_2\overrightarrow{z_2} - h_3\overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

- ▶ $\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}\overrightarrow{y_2};$
- ▶ $\left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{z_3} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{y_3};$
- ▶ $\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2};$
- ▶ $\left[\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{z_3}.$

$$\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \dot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\dot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{y_3}.$$

$$\overrightarrow{\Gamma}(G_3, 3/0) = \ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2\overrightarrow{z_3}.$$

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overrightarrow{\delta}(G_3, 3/0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} =$

$$\left[\frac{dA_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$$

$$\text{On a donc, } \{ \mathcal{D}(3/0) \} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

Question 3 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Correction

D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant \vec{z}_2 , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur \vec{y}_2 . Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\text{On a donc : } -M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = \left(M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_2$$

$$\Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc **(1+2+3)** et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_0 .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \vec{y}_0 : F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow F = \left(M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow F = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta))$$

Question 4 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Correction

Le TRD appliqué à 3 en projection suivant \vec{z}_2 se traduit par :

$$F - M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = \left(M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{z}_2$$

$$\Leftrightarrow F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta).$$

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant \vec{x}_0 se traduit par :

$$\overrightarrow{FG_3} \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \left(\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\Leftrightarrow -h_3 \vec{z}_3 \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$

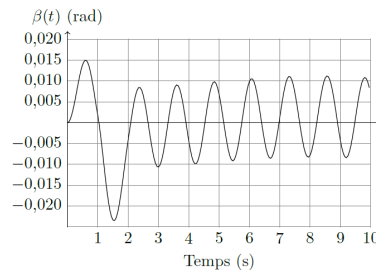
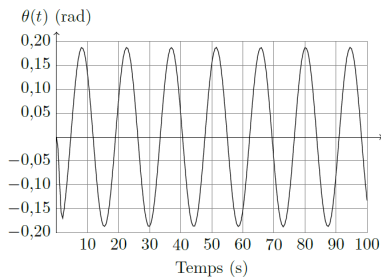
$$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}).$$

Question 5 En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Correction

- On a $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$. En linéarisant, on obtient $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}))$.
- On a : $F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta)$. En linéarisant, on obtient : $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta)$.
- On a : $M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$. En linéarisant, on obtient $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.



Question 6 Proposer une simplification de la modélisation précédente.

Correction

L'amplitude des oscillations de β est 10 fois inférieure aux oscillations de θ . En conséquences, on pourrait poser $\beta = 0$ et :

- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$.

Application 1

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route (0) est munie du repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme (1) a pour centre de gravité C. Le conducteur (2) a pour centre de gravité G. Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{y}_1) . L'ensemble $E = 1 + 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E . Il est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans \mathcal{R}_0 est R_C . Le repère lié à 1 est \mathcal{R}_1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

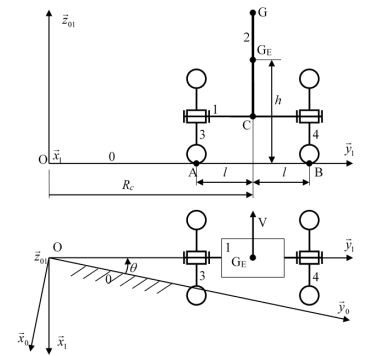
On donne $\vec{OG}_E = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

est : $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.



C1-05

C2-09



Hypothèse

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\vec{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ et $\vec{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_{01} . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(0 \rightarrow 3) = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$ et $\vec{R}(0 \rightarrow 4) = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$.
- On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 sont constants.
- L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Accélération de la pesanteur, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2$: $m_E = 134 \text{ kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35 \text{ cm}$, $h = 86 \text{ cm}$.

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C .

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_1 . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m .	Interdit

Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B .

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en projection sur \vec{x}_1 .

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , en projection sur \vec{x}_1 , écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ et des données du problème.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Application 1

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction

On a $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0) = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$. On a alors $V_L = R_C \dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C .

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \quad (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq f N_A$ et $T_B \leq f N_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f (N_A + N_B)$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

Correction

E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d}(E/\mathcal{R}_0) = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$ (pas de projection sur \vec{z}_0). On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- ▶ pesanteur sur E ;
- ▶ action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur \vec{z}_{01} , on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_1 . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage



C1-05

C2-09

dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Correction

En appliquant le TRD en projection sur \vec{y}_1 , on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$.
En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

La vitesse limite est donc de 10 m s^{-1} soient 36 km h^{-1} ce qui satisfait le cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Correction

Au centre d'inertie de E , on a $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$.
On a donc, $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \vec{x}_1 - D \dot{\theta} \vec{y}_1 + C \dot{\theta} \vec{z}_0$. On a donc $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$.
En conséquence, $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en projection sur \vec{x}_1 .

Correction

$\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h \vec{z}_0 - l \vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$.
 $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , en projection sur \vec{x}_1 , écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ et des données du problème.

Correction

On a :

$$\blacktriangleright \overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_0 = (-l \vec{y}_1 + h \vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_0 = l m_E g \vec{x}_1;$$

$$\blacktriangleright \vec{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1.$$

En appliquant le TMD en B suivant \vec{x}_1 , on a : $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

$$\text{Au final, } N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}.$$

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

Correction

Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

$$N_A \approx \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0. \text{ Ce qui est positif (pas de basculement).}$$

$$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0$$

$$\Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}. \text{ CDCF Validé.}$$

Application 2

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ ★ ★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route (0) est munie du repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme (1) a pour centre de gravité C. Le conducteur (2) a pour centre de gravité G. Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{y}_1) . L'ensemble $E = 1 + 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E . Il est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans \mathcal{R}_0 est R_C . Le repère lié à 1 est \mathcal{R}_1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

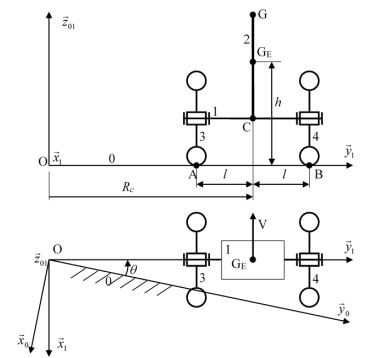
On donne $\vec{OG}_E = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

est : $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.



C1-05

C2-09



Hypothèse

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\vec{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ et $\vec{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_{01} . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(0 \rightarrow 3) = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$ et $\vec{R}(0 \rightarrow 4) = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$.
- On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 sont constants.
- L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Accélération de la pesanteur, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2$: $m_E = 134 \text{ kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35 \text{ cm}$, $h = 86 \text{ cm}$.

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de dérapage. Vérifier alors que l'exigence 1.1 est vérifiée.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m .	Interdit

Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B .

Question 3 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de basculement du Segway.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 4 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Application 2

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ ★ ★ – Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction

On a $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0) = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$. On a alors $V_L = R_C \dot{\theta}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \quad (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq f N_A$ et $T_B \leq f N_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$.

Correction

E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d}(E/\mathcal{R}_0) = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$ (pas de projection sur \vec{z}_0). On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur E ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur \vec{z}_{01} , on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Correction

En appliquant le TRD en projection sur \vec{y}_1 , on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$. En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Correction

La vitesse limite est donc de 10 m s^{-1} soient 36 km h^{-1} ce qui satisfait le cahier des charges.



C1-05

C2-09

Question 2 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de dérapage. Vérifier alors que l'exigence 1.1 est vérifiée.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Correction

Au centre d'inertie de E , on a $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$.

On a donc, $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta} \vec{x}_1 - D\dot{\theta} \vec{y}_1 + C\dot{\theta} \vec{z}_0$. On a donc $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1$.

En conséquence, $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$.

Correction

$\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h\vec{z}_0 - l\vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$. $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Correction

On a :

$$\blacktriangleright \overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = (-l\vec{y}_1 + h\vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = l m_E g \vec{x}_1;$$

$$\blacktriangleright \overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l\vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1.$$

En appliquant le TMD en B suivant \vec{x}_1 , on a : $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Au final, $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$.

Correction

Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

Question 3 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de basculement du Segway.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 4 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

$N_A \simeq \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$. Ce qui est positif (pas de basculement).

$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0$
 $\Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$. CDCF Validé.