

Application 1

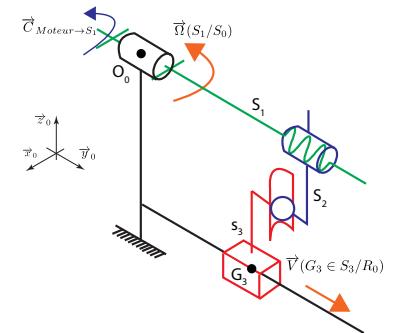
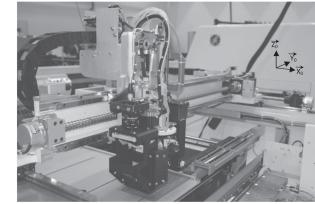
Système de dépose de composants électroniques – Sujet

Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée \vec{y}_0) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

Hypothèses :

- ▶ le référentiel associé au repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen;
 - ▶ les solides seront supposés indéformables;
 - ▶ on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe (O_0, \vec{y}_0) : $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$;
 - ▶ on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3 ;
 - ▶ la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
 - ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r);
 - ▶ seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.
-
- ▶ S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
 - ▶ S_1 : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
 - ▶ S_2 : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
 - ▶ S_3 : chariot supportant la tête de dépose (masse M_3).



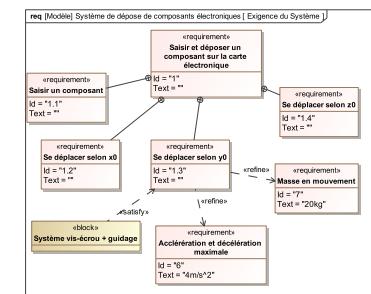
Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à S_1 : $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$;
- ▶ vitesse de rotation de S_1 : $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :

- ▶ masse : M_3 ;
- ▶ cinématique de S_3 : $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$.



Données numériques associées au système :

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0,1$.
- ▶ Pas de la vis à billes : $p = 20 \text{ mm}$.
- ▶ Diamètre de la vis à billes : $D = 25 \text{ mm}$.
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe \vec{y}_0 : $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$.
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $C_r = 3 \text{ Nm}$.
- ▶ l , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm .

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- ▶ couple maximal, $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$;
- ▶ fréquence de rotation maximale, $N_m = 6000 \text{ tr/min}$;
- ▶ moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe \vec{y}_0 , $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

On considère l'ensemble $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$.

Question 1 Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

Question 2 Déterminer l'expression de $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

Question 3 Calculer $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ en fonction des données du problème.

Question 4 Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble E : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$.

Question 5 Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0

Question 6 Déterminer la mobilité du système.

Question 7 Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

Question 8 Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe (O_0, \vec{y}_0) et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.

Question 9 Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction \vec{y}_0 et du paramètre $\dot{y}(t)$.

Question 10 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E .

Question 11 Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.

Question 12 Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2 . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Question 13 En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.

Question 14 On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2 . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Question 15 Déterminer dans ces conditions les dissipations.

Application 2

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E) – Sujet

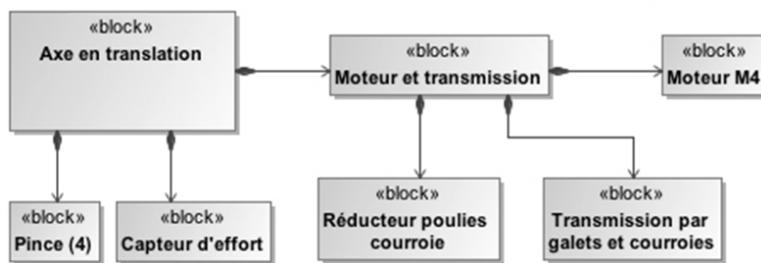
Concours Commun Mines Ponts 2016.

Mise en situation

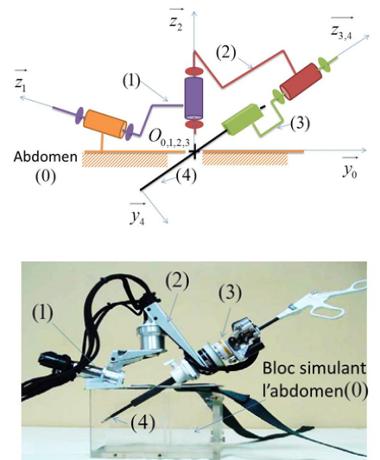
Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moteur réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).



Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

Équation de mouvement

Hypothèses

- ▶ La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- ▶ Les axes de rotation du MC²E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- ▶ L'instrument chirurgical est vertical.
- ▶ Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- ▶ Tous les galets G_i ont même rayon noté R_g et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points I_1 à I_6 .

Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

- ▶ La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primitif pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Modélisation simplifiée du problème

- ▶ La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée $\omega_m(t)\vec{x}_0$ où $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$ (vitesse de rotation avant réduction de rapport r).
- ▶ La poulie motrice a un rayon R_i et tourne à la vitesse $\omega_i(t)$ (vitesse de rotation après réduction de rapport r).
- ▶ La poulie réceptrice a un rayon R_e et tourne à la vitesse $\omega_e(t)$.
- ▶ Les deux pignons en contact ont même rayon primitif, supposé égal à R_e .
- ▶ Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$.
- ▶ L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{ressort} \rightarrow 4)} = -kz(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_4}$ où O_4 est le point de contact entre la pince (4) et le ressort, k la raideur du ressort et $z(t)$ la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.
- ▶ On note $\overrightarrow{V(O_4, 4/0)} = v(t)\vec{z}_0 = \frac{dz(t)}{dt}\vec{z}_0$.
- ▶ Les masses des courroies sont négligées.

Données

- ▶ I_m , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_r , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- ▶ I_i , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_i , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_e , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_p , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ I_g , moment d'inertie de chaque galet G_i , de rayon R_g , par rapport à son axe de rotation.
- ▶ m_4 , masse de la pince (4).
- ▶ $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$, rapport de réduction constant du motoréducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- ▶ J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- ▶ $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

Travail demandé

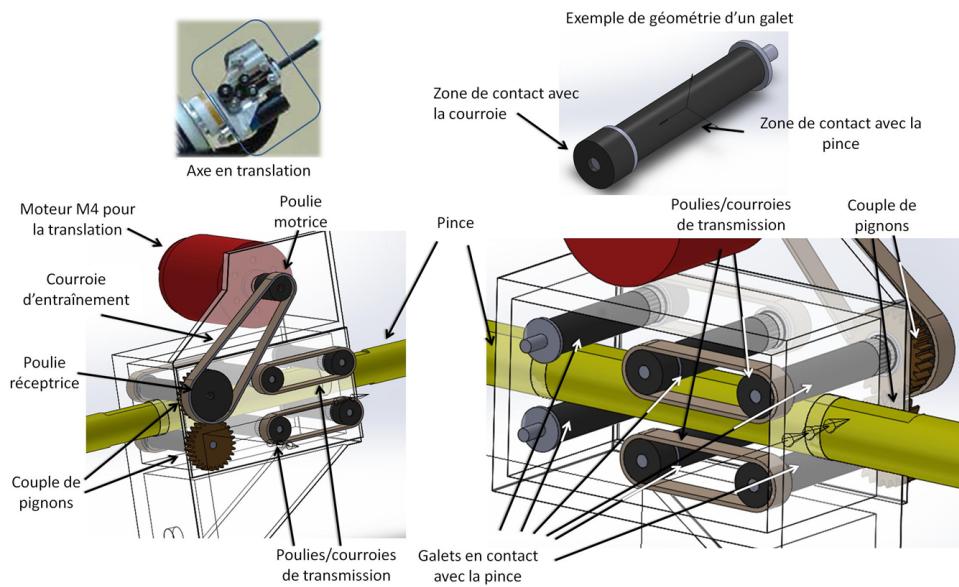
Question 1 Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.

Question 2 Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

Question 3 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.

Question 4 Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

Question 5 Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0), déterminer l'expression du terme $C_e(t)$ en fonction des données du problème et de $\theta_m(t)$.



Application 3

Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Sujet

Centrale MP 2004.

Mise en situation

Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.

Détermination de la motorisation

Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Faire monter ou descendre l'ascenseur

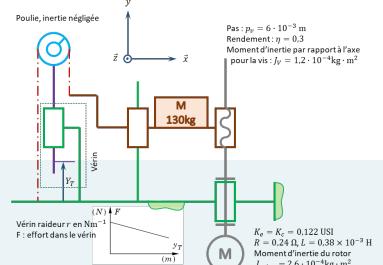
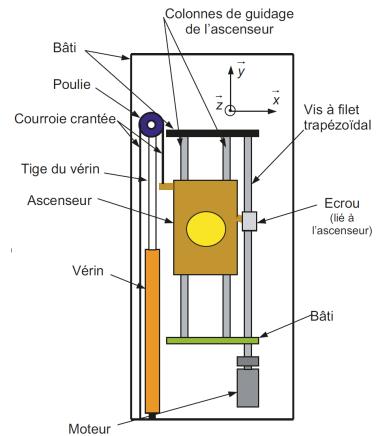
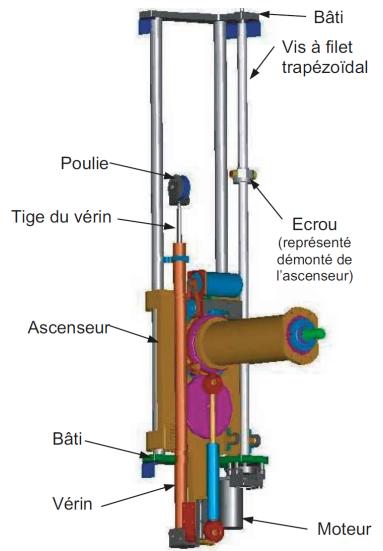
Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente V_L lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	course = $0,8 \text{ m}$ $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide V_R : respecter la durée t_a de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s}$ (mini)

Question 1 Déterminer la fréquence de rotation du moteur ω en fonction de la vitesse de déplacement V de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum ω_{\max} que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

1. départ en position basse ($y = 0$ à l'instant $t = 0$);

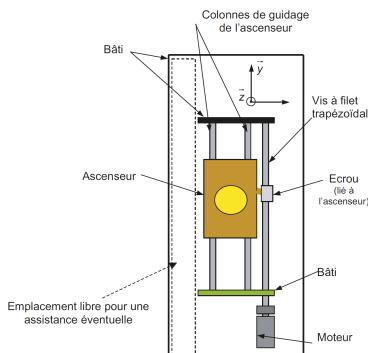
C1-05
C2-08



2. mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante a pour atteindre la vitesse V_R rapide en respectant les contraintes du cahier des charges;
3. arrêt de l'ascenseur à la position $y = 0,8\text{ m}$ (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à t_a).

Question 2 Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement y de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

Solution sans assistance



On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé Σ (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.

On notera :

- $\vec{g} = -g \vec{y}$ l'accélération de la pesanteur. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- C le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$, du système isolé. Mettre $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ sous la forme : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}M_eV^2$. Donner l'expression littérale de la masse équivalente M_e et faire l'application numérique.

Question 4 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Question 5 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire P_0 de ce moteur.

Question 6 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

Question 7 Faire un schéma de principe de ce dispositif.

Question 8 Donner l'expression littérale de la masse équivalente M'_e et faire l'application numérique.

Question 9 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Question 10 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur.

Question 11 En déduire la puissance nécessaire P du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Question 12 Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$ et de hauteur $1,4 \text{ m}$. Cette solution est-elle envisageable ?

Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

Question 13 Faire un schéma de principe du dispositif.

Question 14 L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum $F_{c \text{ maxi}}$ qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement y de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal D supérieur à $0,1 \text{ m}$. Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$ et de module de Coulomb $G = 82\,000 \text{ MPa}$. On prendra un coefficient de sécurité $s = 2$. Pour que le ressort résiste à l'effort maximal

$$F_{c \text{ maxi}}, \text{ il doit avoir un diamètre } d \geq \sqrt[3]{\frac{8F_{c \text{ maxi}}Ds}{\pi R_{eg}}}, \text{ c'est-à-dire } d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c \text{ maxi}}}.$$

Pour obtenir un ressort de raideur r il faut un nombre de spires $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$, c'est-à-dire $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$.

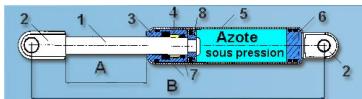
Question 15 La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

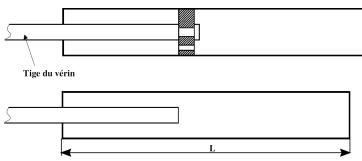
Question 16 Déterminer la relation existant entre le déplacement y de l'ascenseur et le déplacement y_T de la tige du vérin. En déduire la course Δy_T nécessaire de la tige du vérin à gaz.

Question 17 Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté F_c . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existante entre l'effort F développé par le vérin et l'effort de compensation F_c . En déduire l'effort minimum F_{\min} développé par le vérin.



Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-contre.

Question 18 Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.



Question 19 Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre $d = 15 \times 10^{-3}$ m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée p_2 .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand $D = 57 \times 10^{-3}$ m. L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale $L = 1$ m. Soient p_1 , F_1 , V_1 la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et p_2 , F_{\min} , V_2 pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

Question 20 Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de F_1 , F_{\min} et Δy_T . Exprimer F_{\min} en fonction de p_2 et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer F_1 en fonction de p_1 et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur r de ce vérin à gaz en fonction de F_{\min} , d , D , L et Δy_T .

Question 21 On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur L et calculer la raideur r .

On prendra $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$ pour la suite du problème.

Question 22 Déterminer l'effort maximal F_{\max} développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de F .

Question 23 Déterminer la relation $F = F(y_T)$.

On considérera dans cette question que l'effort de compensation F_c est constant.

Question 24 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de a , M_e , F_c , M ...

Question 25 Exprimer ensuite a en fonction de C , M_e , F_c , M ...

Question 26 En déduire la valeur du couple maximum C_{\max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur (prendre $F_c = 1300 \text{ N}$).

Question 27 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Synthèse

Question 28 On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

Application 4

Mesure d'inertie – Sujet

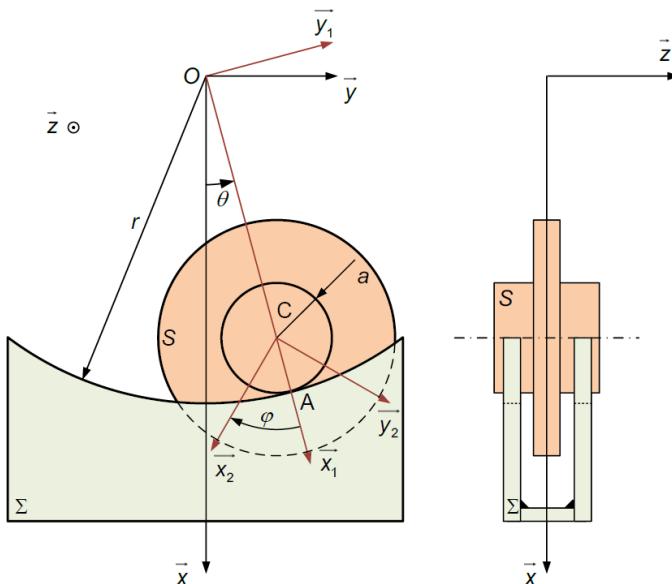
Un classique ...

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .

C1-05

C2-08



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- ▶ soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5$ s.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .