

5.1 Intégration numérique

5.1	Intégration numérique	1
5.2	Algorithmes dichotomiques	5

Hypothèse

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$. On note $I = \int_a^b f(x)dx$.

5.1.1 Principe des méthodes des rectangles

Définition –

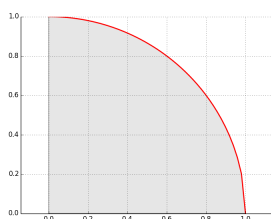
Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 0, à savoir une fonction constante. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un rectangle. Plusieurs choix sont possibles.

Rectangles à gauche $I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b - a) f(a)$

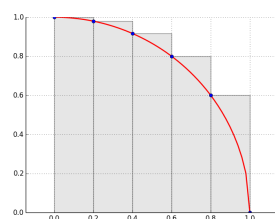
Point milieu $I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right)$

Rectangles à droite $I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b - a) f(b)$

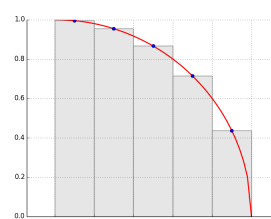
5.1.2 Interprétation graphique



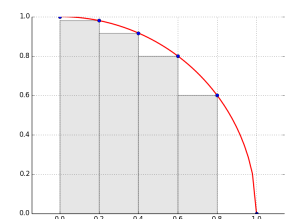
Calcul intégral



Rectangles à gauche



Point milieu

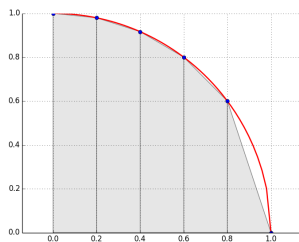


Rectangles à droite

5.1.3 Principe des méthodes des trapèzes

Définition –

Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 1, à savoir une fonction affine. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un trapèze : $I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$



Notion d'erreur d'intégration

Résultat –

Dans chaque cas, on intègre f sur n subdivisions régulières de I .

Erreur sur la méthode des rectangles à gauche et à droite

Soit f fonction dérivable sur $I = [a, b]$ et dont f' est continue sur I . Soit M_1 un majorant de f' sur I . L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles à droite ou à gauche est telle que $\varepsilon \leq \frac{M_1}{2n}$.

Erreur sur la méthode des rectangles – point milieu

Si de plus f est deux fois dérivable sur $I = [a, b]$ et f'' est continue sur I , on note M_2 un majorant de f'' sur I . L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles – point milieu est telle que $\varepsilon \leq \frac{M_2}{12n^2}$.

Erreur sur la méthode des trapèzes

L'erreur commise ε est telle qu'il existe un entier M tel que $\varepsilon \leq \frac{M}{12n^2}$.

Bibliothèque Python

Il est possible d'intégrer une fonction en utilisant les modules de la bibliothèque `scipy` :

```
1 from scipy.integrate import quad
2 from math import sin
3 # Définition des bornes de gauche et de droite
4 g,d = -1,1
5 def f(x):
6     return sin(x)
7
8 I,erreur = quad(f,g,d)
9 print(I,erreur)
```

5.1.4 Implémentation des algorithmes d'intégration

Méthode des rectangles à gauche

```
1 def integrale_rectangles_gauche(f,a,b,nb):
2     """
3     Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la
4     méthode des rectangles à gauche.
5     Keywords arguments :
6     f -- fonction à valeur dans IR
7     a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
```

```

8  b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
9  nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
10  """
11  res = 0
12  pas = (b-a)/nb
13  x = a
14  while x<b:
15      res = res + f(x)
16      x = x + pas
17  return res*pas

```

Méthode des rectangles à droite

```

1  def integrale_rectangles_droite(f,a,b,nb):
2      """
3      Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la
4      méthode des rectangles à droite.
5      Keywords arguments :
6      f -- fonction à valeur dans IR
7      a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
8      b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
9      nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
10     """
11     res = 0
12     pas = (b-a)/nb
13     x = a+pas
14     while x<=b:
15         res = res + f(x)
16         x = x + pas
17     return res*pas

```

Méthode des rectangles – Point milieu

```

1  def integrale_rectangles_milieu(f,a,b,nb):
2      """
3      Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la m
4      éthode du point milieu.
5      Keywords arguments :
6      f -- fonction à valeur dans IR
7      a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
8      b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
9      nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
10     """
11     res = 0
12     pas = (b-a)/nb
13     x = a+pas/2
14     while x<b:
15         res = res + f(x)
16         x = x + pas
17     return res*pas

```

Méthode des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment

```

1  def integrale_trapeze(f,a,b,nb):
2      """

```

```
3  Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de f(x) entre a et b par la m
   éthode des trapèzes.
4  Keywords arguments :
5  f -- fonction à valeur dans IR
6  a -- flt, borne inférieure de l'intervalle d'intégration
7  b -- flt, borne supérieure de l'intervalle d'intégration
8  nb -- int, nombre d'échantillons pour le calcul
9  """
10 res = 0
11 pas = (b-a)/nb
12 x = a+pas
13 while x<b:
14     res = res + f(x)
15     x = x + pas
16 res = pas*(res+(f(a)+f(b))/2)
17 return res
```

5.2 Algorithmes dichotomiques

5.2.1 Introduction

Les méthodes de résolutions par un algorithme dichotomique font partie des algorithmes basés sur le principe de « diviser pour régner ». Elles utilisent la définition du terme **dichotomie** qui signifie diviser un tout en deux parties « opposées ». Certains algorithmes de tris sont basés sur ce principe de diviser pour régner.

Ce cours vous présente deux algorithmes dichotomiques :

- ▶ la recherche d'un élément dans une liste triée ;
- ▶ la détermination de la racine d'une fonction quand elle existe.

5.2.2 Recherche dichotomique dans une liste triée

Lorsque vous cherchez le mot « hippocampe » dans le dictionnaire, vous ne vous amusez pas à parcourir chaque page depuis la lettre a jusqu'à tomber sur le mot « hippocampe »...

Dans une liste triée, il y a plus efficace ! Par exemple dans le dictionnaire, vous ouvrez à peu près au milieu, et suivant si le mot trouvé est « inférieur » ou « supérieur » à « hippocampe » (pour l'ordre alphabétique), vous poursuivez votre recherche dans l'une ou l'autre moitié du dictionnaire.

Propriété –

On se donne une liste L de nombres de longueur n , triée dans l'ordre croissant, et un nombre x_0 .

Pour chercher x_0 , on va couper la liste en deux moitiés et chercher dans la moitié intéressante et ainsi de suite.

On appelle g l'indice de l'élément du début de la sous-liste dans laquelle on travaille et d l'indice de l'élément de fin.

Au début, $g = 0$ et $d = n-1$

On souhaite construire un algorithme admettant l'invariant suivant :

si x_0 est dans L alors x_0 est dans la sous-liste $L[g:d]$ (g inclus et d exclu).

On va utiliser la méthode suivante.

- ▶ On compare x_0 à « l'élément du milieu » : c'est $L[m]$ où $m = (g+d)//2$ son indice est $m = n//2$ (division euclidienne)
- ▶ Si $x_0 = L[m]$, on a trouvé x_0 , on peut alors s'arrêter.
- ▶ Si $x_0 < L[m]$, c'est qu'il faut chercher dans la première moitié de la liste, entre $L[g]$ et $L[m-1]$ ($L[m]$ exclu).
- ▶ Si $x_0 > L[m]$, c'est qu'il faut chercher dans la seconde moitié de la liste, entre $L[m+1]$ et $L[d]$ ($L[m]$ exclu).

On poursuit jusqu'à ce qu'on a trouvé x_0 ou lorsque l'on a épuisé la liste L .

Exemples d'application

Cas 1 : $\begin{cases} g = 0 \\ d = 8 \\ m = 4, L[m] > x_0 \end{cases}$

$\begin{cases} g = 0 \\ d = 3 \\ m = 1, L[m] = x_0 \end{cases}$.
C'est fini, on a bien trouvé x_0 dans la liste.

Cas 2 : $\begin{cases} g = 0 \\ d = 8 \\ m = 4, L[m] < x_0 \end{cases}$,

$\begin{cases} g = 5 \\ d = 8 \\ m = 6, L[m] > x_0 \end{cases}$,
 $\begin{cases} g = 5 \\ d = 5 \\ m = 5, L[m] < x_0 \end{cases}$ $\begin{cases} g = 6 \\ d = 5 \end{cases}$.
C'est fini, on a épuisé la liste L et on n'a pas trouvé x_0 .

Indiquer pour les deux exemples suivants les valeurs successives de g et d :

1. $x_0 = 5$ et $L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -3 & 5 & 7 & 10 & 11 & 14 & 17 & 21 & 30 \\ \hline \end{array}$
2. $x_0 = 11$ et $L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -2 & 1 & 2 & 7 & 8 & 10 & 13 & 16 & 17 \\ \hline \end{array}$

Implémentation en Python

La fonction `recherche_dichotomie` d'arguments une liste L et un élément x renvoyant un booléen disant si x est dans la liste L est proposée :

```

1 def recherche_dichotomie(L:list, x:int)-> bool:
2     n = len(L)
3     g = 0 # c'est l'indice de gauche
4     d = n - 1 # c'est l'indice de droite
5     rep = False
6     while g <= d and rep == False :
7         # si x est dans L alors L[g] <= x <= L[d]      {invariant}
8         m = (g+d) // 2
9         if x == L[m]:
10             rep = True
11         elif x < L[m]:
12             d = m - 1
13         else:
14             g = m + 1
15         # si x est dans L alors L[g] <= x <= L[d]      {invariant}
16     return(rep)

```

Remarque : La terminaison de l'algorithme est obtenue avec $d - g$ qui est un entier positif qui décroît strictement à chaque passage dans la boucle `while` et joue le rôle de variant.

Implémentation récursive

```

1 def recherche_dichotomique_recursive(L:[int], x0:int, g:int, d:int) -> bool:
2     if g>d :
3         return False # ou -1
4     m = (g+d)//2
5     if L[m] == x0 :
6         return True # ou m
7     elif L[m] > x0 :
8         return recherche_dichotomique_recursive(L, x0, g, d-1)
9     else :
10        return recherche_dichotomique_recursive(L, x0, g+1, d)

```

Terminaison (Implémentation non récursive)

Prenons comme variant de boucle la longueur de la zone de recherche, à savoir, à la n^{e} itération, $\ell_n = d_n - g_n$.

À l'itération suivante, $m_{n+1} = \left\lfloor \frac{g_n + d_n}{2} \right\rfloor$

► ou bien $L[m]==x_0$ et l'algorithme s'arrête;

- ▶ ou bien $g_{n+1} = g_n$ et $d_{n+1} = m_{n+1} - 1$. Ainsi, $\ell_{n+1} = \left\lfloor \frac{g_n + d_n}{2} \right\rfloor - 1 - g_n$ et $\ell_{n+1} \leq \frac{g_n + d_n}{2} - 1 - g_n \leq \frac{g_n + d_n - 2 - 2g_n}{2} \leq \frac{\ell_n - 2}{2} < \ell_n$;
- ▶ ou bien $g_{n+1} = m_{n+1} + 1$ et $d_{n+1} = d_n$. Ainsi, $\ell_{n+1} = d_n - \left\lfloor \frac{g_n + d_n}{2} \right\rfloor - 1$ et $\ell_{n+1} \leq d_n - \frac{g_n + d_n}{2} - 1 \leq \frac{2d_n - g_n - d_n}{2} - 1 < \ell_n$.

La longueur ℓ_n est donc strictement décroissante. L'algorithme terminera donc.

Preuve de correction (Implémentation non récursive)

Montrons que $x \in L \Rightarrow x \in [g:d+1]$.¹

1: Cela signifie que $x \in \llbracket g, d \rrbracket$.

- ▶ En entrant dans la boucle, $g = 0$ et $d + 1 = n - 1 + 1 = n$. Si $x \in L$ alors, $x \in [0:n]$. La propriété d'invariance est donc vérifiée.
- ▶ Considérons la propriété $x \in L \Rightarrow x \in [g:d+1]$ est vraie à la e itération.
- ▶ On calcule m .
- ▶ Si $x = L[m]$, on a bien $x \in [g:d+1]$. La propriété d'invariance est vérifiée à la fin de l'itération et on sort de la boucle (car `rep` est `True`).
- ▶ Si $x < L[m]$, on a déjà vérifié que x était différent de $L[m]$ et alors $d = m - 1$. Donc $g = g$ et $d + 1 = m - 1 + 1 = m$. $x \in L$ alors $x \in [g:m]$. La propriété d'invariance est donc vérifiée.
- ▶ Si $x > L[m]$, on a déjà vérifié que x était différent de $L[m]$ et alors $g = m + 1$. Donc $g = m + 1$ et $d + 1$ est inchangé. Donc si $x \in L$ alors $x \in [m+1:d+1]$. La propriété d'invariance est donc vérifiée.

Dans chacun des cas, la propriété d'invariance est vérifiée à la fin de la e itération. C'est donc bien un invariant de boucle.

5.2.3 Analyse de la complexité

Dans le pire des cas, le terme recherché n'est pas dans la liste. On divise donc la taille du tableau par 2 tant que la taille est supérieure ou égale à 1.

On note n la taille du tableau. On cherche k le nombre de fois qu'on peut diviser la taille

$$\text{du tableau par 2 : } n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^k \geq \frac{1}{n} \Rightarrow k \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geq \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow k \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

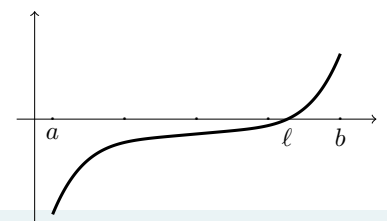
$\Rightarrow k \geq \frac{\ln n}{\ln 2}$. Il y aura donc dans le pire des cas $\log_2 n$ opérations. L'algorithme de recherche dichotomique est donc en $\mathcal{O}(\log_2(n))$.

5.2.4 Détermination de la racine d'une fonction par dichotomie

Principe théorique de la méthode par dichotomie

On considère une fonction f vérifiant :

f continue sur $[a, b]$; $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés.



Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f possède au moins un zéro ℓ entre a et b . La preuve, vue en cours de mathématiques, repose sur la méthode de dichotomie. Prenons le cas $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et posons $g_0 = a$, $d_0 = b$.

On considère $m_0 = \frac{g_0 + d_0}{2}$ et on évalue $f(m_0)$:

- ▶ Si $f(m_0) \geq 0$, on va poursuivre la recherche d'un zéro dans l'intervalle $[g_0, m_0]$
On pose donc : $g_1 = g_0$; $d_1 = m_0$
- ▶ Sinon, la recherche doit se poursuivre dans l'intervalle $[m_0, d_0]$
On pose donc : $g_1 = m_0$; $d_1 = d_0$
- ▶ On recommence alors en considérant $m_1 = \frac{g_1 + d_1}{2}$...

Implémentation en Python et avec scipy

Écrivons une fonction `zero_dichotomie(f:callable, a:float, b:float, epsilon:float)` -> `float` d'arguments une fonction f , des flottants a et b (tels que $a < b$), et la précision voulue ϵ (flottant strictement positif). Cette fonction renverra une valeur approchée à ϵ près d'un zéro de f , compris entre a et b , obtenue par la méthode de dichotomie.

```
1 def zero_dichotomie(f:callable, a:float, b:float, epsilon:float) -> float:
2     g = a # c'est un flottant
3     d = b # c'est un flottant
4     while d-g > 2*epsilon :
5         m = (g + d) / 2
6         if f(g)*f(m) <= 0:
7             d = m
8         else:
9             g = m
10    return ((g + d)/2)
```

Effectuons un test avec la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1, 2]$, avec une précision de 10^{-6} :

```
1 def f(x):
2     return(x ** 2 - 2)
3 print (zero_dichotomie(f, 1, 2, 10**(-6)))
4
5 # il s'affichera : 1.4142141342163086
```

Une telle fonction est déjà prédéfinie dans la bibliothèque `scipy.optimize`, la fonction `bisect`² :

```
1 import scipy.optimize as spo
2 print (spo.bisect(f, 1, 2))
3 # il s'affichera : 1.4142135623724243
```

La précision est un argument optionnel (à mettre après f , a et b) et vaut 10^{-12} par défaut.

2: La méthode de dichotomie s'appelle aussi la méthode de la *bisection*.