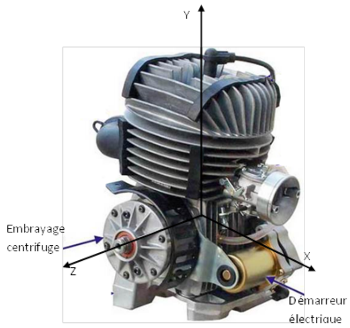
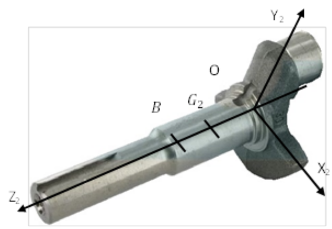
Application 1
Kart – Sujet

C. Gamelon & P. Dubois.

C1-05

C2-09





Au démarrage, le kart est bridé au sol. Le démarreur électrique exerce un couple de $C_m = 1\,\mathrm{N\,m}$ sur le vilebrequin et lorsque la vitesse de rotation atteint 1200 tr/min, la combustion du mélange air essence commence et le moteur thermique démarre. Dans cette phase de démarrage l'embrayage est ouvert et ne transmet pas de mouvement. Le vilebrequin est guidé en rotation par rapport au carter moteur. Ce guidage est modélisé par une liaison rotule en O et linéaire annulaire en B d'axe $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$. $\overrightarrow{OB} = a\overrightarrow{z}$.

Le vilebrequin est de masse m_2 et de centre de gravité G_2 avec $\overrightarrow{OG_2} = l_2\overrightarrow{z}$. On a : $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

Question 1 Faire un graphe de liaison correspondant à la situation de démarrage.

Question 2 Déterminer le temps de démarrage du moteur (équation du mouvement) et les actions dans le guidage en rotation.

Nouvelle situation de démarrage : le kart de masse m_1 et centre inertie G_1 n'est plus bridé et peut de déplacer horizontalement. $\overrightarrow{O_0G_1} = \lambda\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{OG_1} = b\overrightarrow{y}$.

Question 3 Faire un graphe de liaison correspondant à la nouvelle situation de démarrage.

Question 4 Déterminer les déplacements du kart au démarrage.

Question 5 Identifier les modifications des résultats si $\overrightarrow{OG_2} = l_2\overrightarrow{z} + e\overrightarrow{y_2}$.

Application 1
Kart – Corrigé

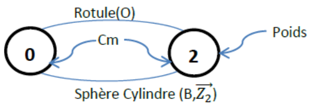
C. Gamelon & P. Dubois.

C1-05

C2-09

Eléments de corrigé:

Question 1:



$$\begin{Bmatrix} X_o.\overrightarrow{X_2}+Y_0.\overrightarrow{Y_2}+Z_0.\overrightarrow{Z_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O ; \begin{Bmatrix} X_B.\overrightarrow{X_2}+Y_B.\overrightarrow{Y_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_B.\overrightarrow{X_2}+Y_B.\overrightarrow{Y_2} \\ a\left(X_B.\overrightarrow{Y_2}-Y_B.\overrightarrow{X_2}\right) \end{Bmatrix}_O$$

Question 2 :

On isole 2: BAME: Torseurs de 0 → 2 et Cm: $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m.\vec{Z} \end{Bmatrix}_0$; poids: $\begin{Bmatrix} m_2.g\,\vec{Y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} m_2.g\,\vec{Y} \\ m_2.g.l_2.\vec{X} \end{Bmatrix}_0$

Calcul du torseur cinétique:

$$\{C(2/R)\} = \begin{Bmatrix} m_2\overrightarrow{VG\in 2/0} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)} \end{Bmatrix}_G ; \overrightarrow{\mathrm{VG}\in 2/0}=\vec{0}; \overrightarrow{\sigma(G_2;2/0)} = I(G_2,2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = -D.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{Y_2}+C\dot{\theta}_2.\vec{Z}$$

Calcul du torseur dynamique:

$$\{D(2/R)\} = \begin{Bmatrix} m_2\overrightarrow{\Gamma G\in 2/0} \\ \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} \end{Bmatrix}_G ; \overrightarrow{\Gamma\mathrm{G}\in 2/0}=\vec{0}; \overrightarrow{\delta(G_2;2/0)} = -D.\ddot{\theta}_2.\overrightarrow{Y_2}+D\dot{\theta}_2^2.\overrightarrow{X_2}+C\ddot{\theta}_2.\vec{Z}$$

PFS en O dans la base 2:

$$Sur\ \overrightarrow{X_2} : X_O + X_B = 0$$

$$Sur\ \overrightarrow{Y_2} : Y_O + Y_B = 0$$

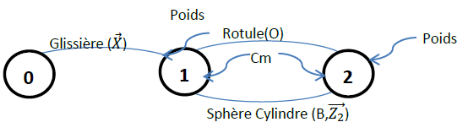
$$Sur\ \vec{Z} : Z_0 = 0$$

$$Sur\ \overrightarrow{X_2} : -a.Y_B + m_2.g.l_2.\cos(\theta_2) = D\dot{\theta}_2^2$$

$$Sur\ \overrightarrow{Y_2} : a.X_B - m_2.g.l_2.\sin(\theta_2) = -D.\ddot{\theta}_2$$

$$Sur\ \vec{Z} : C_m = C\ddot{\theta}_2$$

Question 3:



Question 4:

On isole {1+2} BAME: $\begin{Bmatrix} Y_{01}.\vec{Y}+Z_{01}.\vec{Z} \\ L_{01}.\vec{X}+M_{01}\vec{Y}+N_{01}.\vec{Z} \end{Bmatrix}_O$

$$\{C(1+2/R)\} = \{C(1/R)\} + \{C(2/R)\}$$

$$\{C(1/R)\} = \begin{Bmatrix} m_1.\overrightarrow{V(G \in 1/0)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} m_1.\dot{\lambda}.\vec{X} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_0$$

$$\{C(2/R)\} = \begin{Bmatrix} m_2\overrightarrow{VG \in 2/0} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)} \end{Bmatrix}_G ; \overrightarrow{VG \in 2/0} = \dot{\lambda}.\vec{X};$$

$$\overrightarrow{\sigma(G_2; 2/0)} = I(0,2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = -D.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{Y_2} + C\dot{\theta}_2.\vec{Z}$$

Torseur dynamique:

$$\{D(1+2/R)\} = \{D(1/R)\} + \{D(2/R)\}$$

$$\{D(2/R)\} = \begin{Bmatrix} m_2\overrightarrow{\Gamma G \in 2/0} \\ \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} \end{Bmatrix}_G ; \overrightarrow{\Gamma G \in 2/0} = \ddot{\lambda}.\vec{X};$$

$$\overrightarrow{\delta(G_2; 2/0)} = -D.\ddot{\theta}_2.\overrightarrow{Y_2} + D\dot{\theta}_2^2.\overrightarrow{X_2} + C\ddot{\theta}_2.\vec{Z}$$

$$\overrightarrow{\delta(O; 2/0)} = \overrightarrow{\delta(G_2; 2/0)} + \overrightarrow{OG_2}\wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta(O; 2/0)} == -D.\ddot{\theta}_2.\overrightarrow{Y_2} + D\dot{\theta}_2^2.\overrightarrow{X_2} + C\ddot{\theta}_2.\vec{Z} + l_2.\vec{Z}\wedge m_2.\ddot{\lambda}.\vec{X}$$

$$\overrightarrow{\delta(O; 2/0)} == -D.\ddot{\theta}_2.\overrightarrow{Y_2} + D\dot{\theta}_2^2.\overrightarrow{X_2} + C\ddot{\theta}_2.\vec{Z} + l_2.m_2.\ddot{\lambda}.\vec{Y}$$

PFS à {1+2}:

$$Sur\ \overrightarrow{X_0} : 0 = (m_1 + m_2).\ddot{\lambda}$$

$$Sur\ \overrightarrow{Y_0} : Y_{01} = m_1 g + m_2 g$$

$$Sur\ \vec{Z} : Z_0 = 0$$

$$Sur\ \overrightarrow{X_0} : L_{01} = D\dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2) + D.\ddot{\theta}_2 \sin(\theta_2)$$

$$Sur\ \overrightarrow{Y_0} : M_{01} = D\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) - D.\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + m_2.l_2.\ddot{\lambda}$$

$$Sur\ \vec{Z} : N_{01} = 0$$

Question 5:

Idem question 4 mais ajouter tous les termes complémentaires.

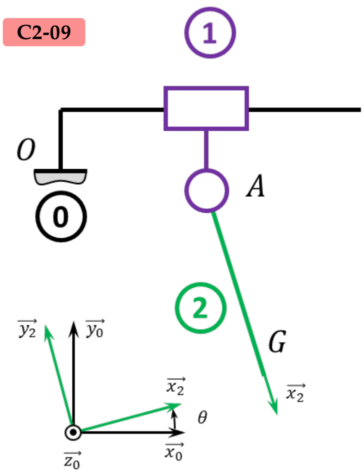
Application 2
Pendule – Sujet

Mise en situation

C1-05

C2-09

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.



- On note 1 la pièce de masse M_1 et de centre de gravité G_1. $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - h\overrightarrow{y_0}$.
- On note 2 la pièce de masse M_2 et de centre de gravité G et de matrice d'inertie $I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$. On a $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{x_2}$

Travail à réaliser

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$ en utilisant deux méthodes différentes.

Question 2 En déduire le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$.

Question 3 Isoler 2 et écrire le théorème du moment dynamique en A en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

Question 4 Isoler {1+2} et écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

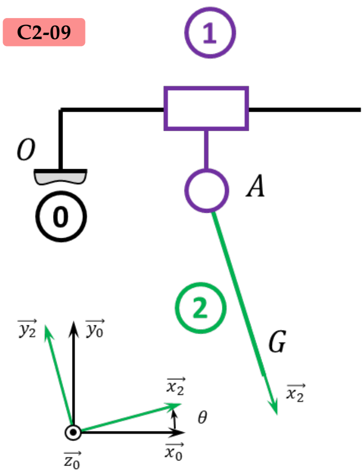
Application 2
Pendule – Corrigé

Mise en situation

C1-05

C2-09

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.



- On note 1 la pièce de masse M_1 et de centre de gravité G_1. $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - h\overrightarrow{y_0}$.
- On note 2 la pièce de masse M_2 et de centre de gravité G et de matrice d'inertie $I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$. On a $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{x_2}$

Travail à réaliser

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$ en utilisant deux méthodes différentes.

Correction

Cinématique

On a $\overrightarrow{V(G, 2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{OG}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lambda\overrightarrow{x_0} - h\overrightarrow{y_0} + L\overrightarrow{x_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{x_0} + L\dot{\theta}\overrightarrow{y_2}$.

On a $\overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(G, 2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{x_0} + L\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} - L\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_2}$.

Cinétique & dynamique

On a $\overrightarrow{\delta(G, 2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$

Question 2 En déduire le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$.

Correction

Question 3 Isoler 2 et écrire le théorème du moment dynamique en A en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

Correction

Question 4 Isoler {1+2} et écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

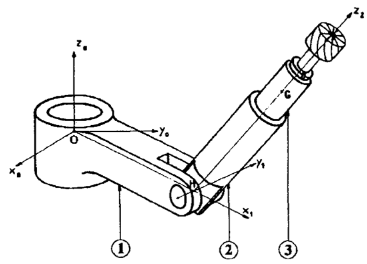
Correction

Colle 1
Porte outil – Sujet

C1-05

C2-09

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides **1**, **2** et **3**.



Le repère $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, avec $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ vertical ascendant, est lié au bâti **0** de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère $\mathcal{R}_1 = \left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au support tournant **1** en liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec le bâti **0**. La position de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ est repérée par $\alpha = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.

On note I_1 le moment d'inertie de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et H le point tel que $\overrightarrow{OH} = hx_1$.

Le repère $\mathcal{R}_2 = \left(H;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au bras pivotant **2** en liaison pivot d'axe $\left(H,\overrightarrow{y_1}\right)$ avec **1**. La position de **2** est repérée par $\beta = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)$.

On note m_2 la masse de **(2)**, de centre d'inertie H de matrice d'inertie $I_H(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

Le repère $\mathcal{R}_3 = \left(G;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au porte-outil **(3)** (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe $\left(H,\overrightarrow{z_2}\right)$ avec **(2)**.

La position de **(3)** est repérée par $\gamma = \left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}\right) = \left(\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_3}\right)$ et par $\overrightarrow{HG} = \lambda\overrightarrow{z_2}$.

On note m_3 la masse de **(3)**, de centre d'inertie G de matrice d'inertie $I_G(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$.

Question 1 Justifier la forme de la matrice de la pièce **(3)**.

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(G,3/0)}$.

Question 3 Indiquer la méthode permettant de calculer le torseur dynamique en G de **(3)** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_2}$.

Question 4 Calculer le moment dynamique en H appliqué à l'ensemble **{2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{y_1}$.

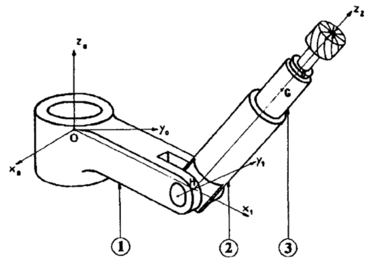
Question 5 Calculer le moment dynamique en O appliqué à l'ensemble **{1, 2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

Colle 1
Porte outil – Corrigé

C1-05

C2-09

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides **1**, **2** et **3**.



Le repère $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, avec $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ vertical ascendant, est lié au bâti **0** de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère $\mathcal{R}_1 = \left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au support tournant **1** en liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec le bâti **0**. La position de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ est repérée par $\alpha = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.

On note I_1 le moment d'inertie de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et H le point tel que $\overrightarrow{OH} = hx_1$.

Le repère $\mathcal{R}_2 = \left(H;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au bras pivotant **2** en liaison pivot d'axe $\left(H,\overrightarrow{y_1}\right)$ avec **1**. La position de **2** est repérée par $\beta = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)$.

On note m_2 la masse de **(2)**, de centre d'inertie H de matrice d'inertie $I_H(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

Le repère $\mathcal{R}_3 = \left(G;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au porte-outil **(3)** (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe $\left(H,\overrightarrow{z_2}\right)$ avec **(2)**.

La position de **(3)** est repérée par $\gamma = \left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}\right) = \left(\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_3}\right)$ et par $\overrightarrow{HG} = \lambda\overrightarrow{z_2}$.

On note m_3 la masse de **(3)**, de centre d'inertie G de matrice d'inertie $I_G(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$.

Question 1 Justifier la forme de la matrice de la pièce **(3)**.

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(G,3/0)}$.

Question 3 Indiquer la méthode permettant de calculer le torseur dynamique en G de **(3)** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_2}$.

Question 4 Calculer le moment dynamique en H appliqué à l'ensemble **{2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{y_1}$.

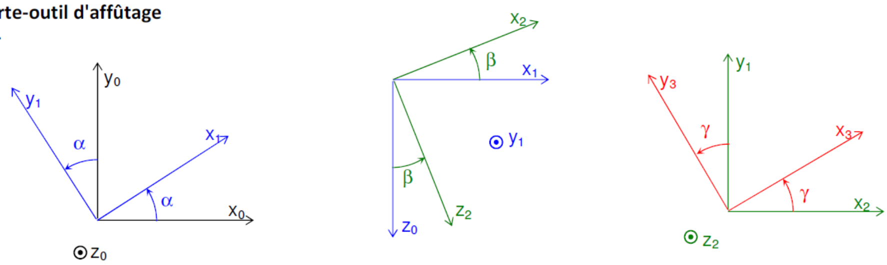
Question 5 Calculer le moment dynamique en O appliqué à l'ensemble **{1, 2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

1. $\{\mathcal{V}(3/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} + \dot{\beta}\overrightarrow{y_1} + \dot{\gamma}\overrightarrow{z_2} \\ r\dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + (h + r\sin\beta)\,\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \dot{r}\overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$.

2. $\overrightarrow{\Gamma(G,3/\mathcal{R}_0)} = \left(2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{x_2}$
$+ \left[2\dot{\alpha}\left(\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta\right) + (h + r\sin\beta)\,\ddot{\alpha}\right]\overrightarrow{y_1}$
$- (h + r\sin\beta)\,\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1}$
$+ \left(\ddot{r} - r\dot{\beta}^2\right)\overrightarrow{z_2}.$

Porte-outil d'affûtage

1 –



Torseur cinématique de **3** / R_0: $\mathcal{V}(3/R_0) = \left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(3/R_0) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0)\\ \vec{V}(G\in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0}\end{array}\right\}_G$

$\overrightarrow{OG} = h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2$

$\vec{V}(G\in 3/R_0) = h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2 + r\left[\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0}$ avec $\left[\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{z}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0)\wedge\vec{z}_2 = \dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1$

$$\boxed{\mathcal{V}(3/R_0) = \left\{\begin{array}{c}\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\,\vec{z}_2\\ r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2\end{array}\right\}_G}$$

2 – Accélération de $G\in 3/R_0$: $\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\vec{V}(G\in 3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$

$= \dot{r}\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + r\ddot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{r}\dot{\beta}\left[\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} + (\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + (h + r\sin\beta)(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1) + \ddot{r}\,\vec{z}_2 + \dot{r}(\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1)$

avec $\left[\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{x}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0)\wedge\vec{x}_2 = -\dot{\beta}\,\vec{z}_2 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0) = (2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta})\,\vec{x}_2 + [2\dot{\alpha}(\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta) + (h + r\sin\beta)\ddot{\alpha}]\,\vec{y}_1 - (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2)\,\vec{z}_2}$$

3 – Pour déterminer F_{23} et C_{23}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **3**:

Liaison pivot glissant d'axe $(G, \vec{z}_2)$ entre **2** et **3**: $\mathcal{T}(2\rightarrow 3) = \left\{\begin{array}{c}X_{23}\,\vec{x}_2 + Y_{23}\,\vec{y}_1\\ L_{23}\,\vec{x}_2 + M_{23}\,\vec{y}_1\end{array}\right\}_G$

Action de l'actionneur M_{23}: $\mathcal{T}(M_{23}\rightarrow 3) = \left\{\begin{array}{c}F_{23}\,\vec{z}_2\\ C_{23}\,\vec{z}_2\end{array}\right\}_H$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur}\rightarrow 3) = \left\{\begin{array}{c}-m_3\,g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$

Pour déterminer F_{23}, il faut appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide **3** en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_2$:

$m_3\ \bar{\Gamma}(G\in 3/R_0).\bar{z}_2 = F_{23} - m_3\, g\, \bar{z}_0.\bar{z}_2$

$m_3(-(h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\ \bar{x}_1.\bar{z}_2 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2)\ ) = F_{23} - m_3\, g\, \cos\beta$

$$\boxed{F_{23} = m_3(\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2(h + r\sin\beta)\sin\beta + g\cos\beta)}$$

Pour déterminer C_{23}, il faut appliquer le théorème du moment dynamique au solide **3**, en mouvement par rapport à R_0, en G (la matrice d'inertie de **3** est donnée en G) en projection sur $\bar{z}_2$:

$$\bar{\delta}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = C_{23} + \overrightarrow{GH}\wedge F_{23}\bar{z}_2 = C_{23} - r\bar{z}_2 \wedge F_{23}\bar{z}_2 = C_{23}$$

$$\bar{\delta}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = \left[\frac{d\bar{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\bar{z}_2 = \frac{d[\bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_2]}{dt} - \bar{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\bar{z}_2}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\bar{\sigma}_G(3/R_0) = \mathcal{I}_G(3)\,\bar{\Omega}(3/R_0) \qquad \text{avec } \bar{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\,\bar{z}_0 + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 + \dot{\gamma}\,\bar{z}_2$$

La matrice d'inertie du solide **3** est donnée sur le repère R_3 mais l'axe (G, $\bar{z}_2$) étant de révolution (voir l'allure de la matrice), elle est identique sur le repère R_2. Il est plus simple d'exprimer $\bar{\Omega}(3/R_0)$ sur R_2 que sur R_3:

$$\bar{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\ (\cos\beta\,\bar{z}_2 - \sin\beta\,\bar{x}_2) + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 + \dot{\gamma}\bar{z}_2 = -\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\bar{z}_2$$

$$\bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta \end{pmatrix}.\bar{z}_2 = \left[-D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + D\dot{\beta}\,\bar{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\bar{z}_2\right].\bar{z}_2$$

soit $\quad \bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)$

$$\bar{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\bar{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = (-D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + D\dot{\beta}\,\bar{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\bar{z}_2)(\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{y}_1) = 0$$

d'où $\quad C_{23} = \dfrac{d[E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta]}{dt}$ $\qquad \boxed{C_{23} = E(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}\ \cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\ \sin\beta)}$

Pour déterminer C_{12}, le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **2** fait intervenir les actions de **3** sur **2** et celles de **1** sur **2**.
La liaison entre **1** et **2** étant une liaison pivot d'axe (H, $\bar{y}_1$), la seule équation ne faisant pas intervenir d'inconnues de cette liaison est la projection du théorème du moment dynamique sur l'axe (H, $\bar{y}_1$) mais celle-ci va faire intervenir les inconnues de la liaison **3/2.** Il faut donc isoler l'ensemble {**2**, **3**}.

Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble {**2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (H, $\bar{y}_1$) entre **1** et **2**: $\mathcal{T}(1 \rightarrow 2) = \left\{\begin{matrix} X_{12}\,\bar{x}_1 + Y_{12}\,\bar{y}_1 + Z_{12}\bar{z}_0 \\ L_{12}\,\bar{x}_1 + N_{12}\,\bar{z}_0 \end{matrix}\right\}_G$

Action du moteur M_{12}: $\mathcal{T}(M_{12} \rightarrow 2) = \left\{\begin{matrix} \bar{0} \\ C_{12}\,\bar{y}_1 \end{matrix}\right\}_H$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow 2+3) = \left\{\begin{matrix} -m_3\,g\,\bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{matrix}\right\}_G + \left\{\begin{matrix} -m_2\,g\,\bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{matrix}\right\}_H$

Théorème du moment dynamique en H appliqué à l'ensemble {**2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{y}_1$:

$$\vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1+\vec{\delta}_H(3/R_0).\vec{y}_1=C_{12}+(\overrightarrow{HG}\wedge -m_3g\vec{z}_0).\vec{y}_1=C_{12}-(r\vec{z}_2\wedge m_3g\vec{z}_0).\vec{y}_1=C_{12}+r\,m_3\,g\sin\beta$$

$$*\ \vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1=\left[\frac{d\vec{\sigma}_H(2/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{y}_1=\frac{d[\vec{\sigma}_H(2/R_0).\vec{y}_1]}{dt}-\vec{\sigma}_H(2/R_0).\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}\quad \text{avec}\ \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}=-\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$$

$$\vec{\sigma}_H(2/R_0)=\mathcal{I}_H(2)\,\vec{\Omega}(2/R_0)\qquad \text{avec}\ \vec{\Omega}(2/R_0)=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0+\dot{\beta}\,\vec{y}_1=\dot{\alpha}(\cos\beta\,\vec{z}_2-\sin\beta\,\vec{x}_2)+\dot{\beta}\,\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_H(2/R_0)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dot{\alpha}\sin\beta\\ \dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}=-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2+B\dot{\beta}\,\vec{y}_1+C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$

d'où $\quad \vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1=\dfrac{d(B\dot{\beta})}{dt}-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\dot{\alpha}\,\vec{x}_1+C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2.\dot{\alpha}\,\vec{x}_1=B\ddot{\beta}+(C-A)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$

$$*\ \vec{\delta}_H(3/R_0).\vec{y}_1=\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{y}_1+\left[\overrightarrow{HG}\wedge m_3\,\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)\right]\vec{y}_1$$

$$=\frac{d[\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{y}_1]}{dt}-\vec{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}+\left[r\vec{z}_2\wedge m_3\,\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)\right]\vec{y}_1$$

$$=\frac{d(D\dot{\beta})}{dt}-D\dot{\alpha}^2\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{x}_1+E\dot{\alpha}(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2.\vec{x}_1+r\,m_3\,(\vec{y}_1\wedge\vec{z}_2).\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)$$

$$=D\ddot{\beta}-D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta+E\dot{\alpha}(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta+r\,m_3\,[2\dot{r}\dot{\beta}+r\ddot{\beta}-(h+r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1.\vec{x}_2]$$

d'où $\quad C_{12}=-r\,m_3\,g\sin\beta+B\ddot{\beta}+(C-A)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$

$$+D\ddot{\beta}-D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta+E\dot{\alpha}(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta+r\,m_3\,[2\dot{r}\dot{\beta}+r\ddot{\beta}-(h+r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\cos\beta]$$

$$\boxed{C_{12}=\ddot{\beta}(B+D+m_3r^2)+\dot{\alpha}^2[(C-A-D+E+m_3r^2)\sin\beta-hrm_3\,]\cos\beta+E\,\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\sin\beta+r\,m_3\,(2\dot{r}\dot{\beta}-g\sin\beta)}$$

Pour déterminer C_{01}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}_0$) entre **0** et **1**: $\mathcal{T}(0\to 1)=\left\{\begin{matrix}X_{01}\,\vec{x}_0+Y_{01}\,\vec{y}_0+Z_{01}\vec{z}_0\\ L_{01}\,\vec{x}_0+M_{01}\,\vec{y}_0\end{matrix}\right\}_O$

Action du moteur M_{01}: $\mathcal{T}(M_{01}\to 1)=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ C_{01}\,\vec{z}_0\end{matrix}\right\}_O$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur}\to 1+2+3)=\left\{\begin{matrix}-m_3\,g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G+\left\{\begin{matrix}-m_2\,g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_H+\left\{\begin{matrix}-m_1\,g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_O$

Théorème du moment dynamique en O appliqué à l'ensemble {**1**, **2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\vec{\delta}_O(1/R_0).\vec{z}_0+\vec{\delta}_O(2/R_0).\vec{z}_0+\vec{\delta}_O(3/R_0).\vec{z}_0=C_{01}+(\overrightarrow{OG}\wedge -m_3g\vec{z}_0+\overrightarrow{OH}\wedge -m_2g\vec{z}_0).\vec{z}_0=C_{01}$$

$$=\frac{d[\vec{\sigma}_O(1/R_0).\vec{z}_0+\vec{\sigma}_O(2/R_0).\vec{z}_0+\vec{\sigma}_O(3/R_0).\vec{z}_0]}{dt}$$

* $\vec{\sigma}_O(1/R_0).\vec{z}_0 = I_1\,\dot{\alpha}$ car **1/0 =** rotation autour de l'axe (O, $\vec{z}_0$) fixe dans R_0

* $\vec{\sigma}_O(2/R_0).\vec{z}_0 = \vec{\sigma}_H(2/R_0).\vec{z}_0 + [\overrightarrow{OH}\wedge m_2\vec{V}(H\in 2/R_0)].\vec{z}_0$

$$= -A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{z}_0 + B\dot{\beta}\,\vec{y}_1.\vec{z}_0 + C\dot{\alpha}\,\cos\beta\,\vec{z}_2.\vec{z}_0 + (h\,\vec{x}_1\wedge m_2 h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1).\vec{z}_0$$

$$= A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\,\cos^2\beta + m_2h^2\,\dot{\alpha}$$

* $\vec{\sigma}_O(3/R_0).\vec{z}_0 = \vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_0 + [\overrightarrow{OG}\wedge m_3\vec{V}(G\in 3/R_0)].\vec{z}_0$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_0 = -D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{z}_0 + D\dot{\beta}\,\vec{y}_1.\vec{z}_0 + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\,\cos\beta)\,\vec{z}_2.\vec{z}_0$$

$$= D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\,\cos\beta)\cos\beta$$

$$[\overrightarrow{OG}\wedge m_3\vec{V}(G\in 3/R_0)].\vec{z}_0 = m_3[(h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2)\wedge(r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h+r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)].\vec{z}_0$$

$$= m_3[\vec{z}_0\wedge(h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2)].[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h+r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h+r\sin\beta)\vec{y}_1.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h+r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h+r\sin\beta)\vec{y}_1.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h+r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h+r\sin\beta)^2\dot{\alpha}$$

d'où $C_{01} = \dfrac{d}{dt}\left[I_1\,\dot{\alpha} + A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\,\cos^2\beta + m_2h^2\,\dot{\alpha} + D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\,\cos\beta)\cos\beta m_3(h+r\sin\beta)^2\dot{\alpha}\right]$

$$\boxed{C_{01} = \frac{d}{dt}\left[(I_1 + (A+D)\sin^2\beta + (C+E)\cos^2\beta + m_2h^2 + m_3(h+r\sin\beta)^2)\dot{\alpha} + E\,\dot{\gamma}\cos\beta\right]}$$

Nota: si on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}, on va trouver une relation liant C_{01}, C_{12}, C_{23} et F_{23}. En effet:

$$P(M_{01}\to 1/R_0) + P(0\to 1/R_0) + P(\text{pesanteur}\to 1+2+3/R_0) + \sum P_{int} = \frac{d}{dt}T(1+2+3/R_0)$$

avec $P(M_{01}\to 1/R_0) = C_{01}\,\dot{\alpha}$

$P(0\to 1/R_0) = 0$ (liaison parfaite)

$P(\text{pesanteur}\to 1/R_0) = 0$ car le centre de gravité O de **1** est fixe dans R_0

$P(\text{pesanteur}\to 2/R_0) = 0$ car la vitesse du centre de gravité H de **2** est perpendiculaire au poids

$P(\text{pesanteur}\to 3/R_0) = -m_3\,g\,\vec{z}_0.\vec{V}(G\in 3/R_0) = -m_3\,g\,\vec{z}_0.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h+r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2]$

$$= m_3\,g\,(r\dot{\beta}\sin\beta - \dot{r}\cos\beta)$$

$\sum P_{int} = P_i(1,2) + P_i(2,3)$

$$= [\mathcal{T}(1\to 2) + \mathcal{T}(M_{12}\to 2)]\otimes\mathcal{V}(2/1) + [\mathcal{T}(2\to 3) + \mathcal{T}(M_{23}\to 3)]\otimes\mathcal{V}(3/2)$$

$$= \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ C_{12}\,\vec{y}_1\end{matrix}\right\}_H \otimes \left\{\begin{matrix}\dot{\beta}\,\vec{y}_1\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_H + \left\{\begin{matrix}F_{23}\,\vec{z}_2\\ C_{23}\,\vec{z}_2\end{matrix}\right\}_H \otimes \left\{\begin{matrix}\dot{\gamma}\,\vec{z}_2\\ \dot{r}\,\vec{z}_2\end{matrix}\right\}_H = C_{12}\,\dot{\beta} + C_{23}\,\dot{\gamma} + F_{23}\,\dot{r}$$

$$T(1/R_0) = \frac{1}{2}I_1\,\dot{\alpha}^2$$

$$T(2/R_0) = \frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(H\in 2/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(2/R_0).\vec{\sigma}_H(2/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_2h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1)(-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\,\vec{y}_1 + C\dot{\alpha}\,\cos\beta\,\vec{z}_2)$$

$$= \frac{1}{2}m_2h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(A\,\dot{\alpha}^2\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + B\dot{\beta}^2)$$

$$T(3/R_0) = \frac{1}{2}m_3\vec{V}^2(G\in 3/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(3/R_0).\vec{\sigma}_G(3/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_3[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h+r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2]^2$$

$$+\frac{1}{2}[-\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + (\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\,\cos\beta)\vec{z}_2]\left[-D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + D\dot{\beta}\,\vec{y}_1 + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\,\cos\beta)\vec{z}_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m_3[r^2\dot{\beta}^2 + (h+r\sin\beta)^2\dot{\alpha}^2 + \dot{r}^2] + \frac{1}{2}\left[D(\dot{\alpha}^2\sin^2\beta + \dot{\beta}^2) + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\,\cos\beta)^2\right]$$

soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}[I_1 + m_2h^2 + (A+D)\sin^2\beta + (C+E)\cos^2\beta + m_3(h+r\sin\beta)^2]\dot{\alpha}^2\\ +[B+D+m_3r^2]\dot{\beta}^2 + m_3\dot{r}^2 + E\dot{\gamma}^2 + 2E\,\dot{\gamma}\dot{\alpha}\,\cos\beta\end{matrix}\right\}$$

$$= C_{01}\,\dot{\alpha} + C_{12}\,\dot{\beta} + C_{23}\,\dot{\gamma} + F_{23}\,\dot{r} + m_3\,g\,(r\dot{\beta}\sin\beta - \dot{r}\cos\beta)$$

Colle 2
Disque déséquilibré – Sujet

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

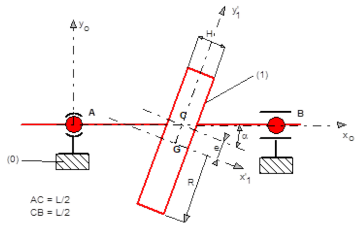
Soit le rotor **(1)** défini ci-contre. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathcal{R}_1' = \left(G;\overrightarrow{x_1'},\overrightarrow{y_1'},\overrightarrow{z_1'}\right)$ est attaché à ce solide.

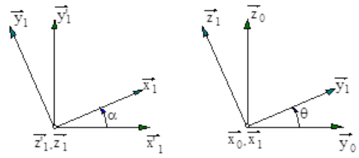
La base $\mathcal{B}_1' = \left(\overrightarrow{x_1'},\overrightarrow{y_1'},\overrightarrow{z_1'}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_1'}$.

La base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Enfin, le rotor **1** est entrainé par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté $C_m\overrightarrow{x_0}$. Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.





Question 1 Déterminer la forme de la matrice d'inertie du cylindre en C dans la base $\mathcal{B}_1'$.

Question 2 Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de **(1)** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Question 3 Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.

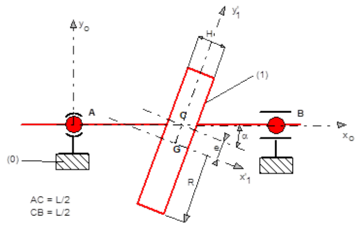
Colle 2
Disque déséquilibré – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

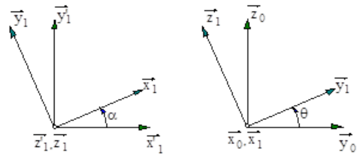
C1-05

C2-09

Soit le rotor **(1)** défini ci-contre. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathcal{R}_1' = \left(G; \overrightarrow{x_1'}, \overrightarrow{y_1'}, \overrightarrow{z_1'}\right)$ est attaché à ce solide.



La base $\mathcal{B}_1' = \left(\overrightarrow{x_1'}, \overrightarrow{y_1'}, \overrightarrow{z_1'}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_1'}$.



La base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Enfin, le rotor **1** est entrainé par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté $C_m \overrightarrow{x_0}$. Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.

Question 1 Déterminer la forme de la matrice d'inertie du cylindre en C dans la base $\mathcal{B}_1'$.

Question 2 Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de **(1)** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Question 3 Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.

CORRIGE

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $\tilde{\tilde{I}}(G,1) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = - e\ \vec{y'_1}$

$$\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \tilde{\tilde{I}}(G,1) + m \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Ainsi : $\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{2}+e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \begin{Bmatrix} m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) \end{Bmatrix}_C$$

Résultante cinétique : $m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) = - m\, e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z_1}$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\ c\alpha \\ \dot{\theta}\ s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\ (A\ c\alpha\ \vec{x'_1} + B\ s\alpha\ \vec{y'_1})$

Or : $\vec{x'_1} = c\alpha\ \vec{x_1} - s\alpha\ \vec{y_1}$ et $\vec{y'_1} = c\alpha\ \vec{y_1} + s\alpha\ \vec{x_1}$

$$\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{\ (A\ c^2\alpha + Bs^2\alpha)\,\vec{x}_1 + (B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y}_1\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)$$

$$\boxed{\{C\ (1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} m\,\overrightarrow{V}\ (G/R_0) = -\ m\ e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z}_1 \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{\ (A\ c^2\alpha + Bs^2\alpha)\,\vec{x}_1 + (B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y}_1\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) \end{array}\right\}_C}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D\ (1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} M\,\overrightarrow{\Gamma}\ (G/R_0) \\ \vec{\delta}\ (C,1/R_0) \end{array}\right\}_C$$

Résultante dynamique : $M\,\overrightarrow{\Gamma}\ (G/R_0) = -\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1)$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}\ (C,1/R_0) = \dfrac{d\,\vec{\sigma}\ (C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}\ (C,1/R_0) = \frac{d\ \{\dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)\}}{dt/R_0} = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1$$

Car $\dfrac{d\ \vec{y}_1}{dt/R_0} = \dfrac{d\ \vec{y}_1}{dt/R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{y}_1 = \dot{\theta}\ \vec{x}_1\wedge\vec{y}_1 = \dot{\theta}\ \vec{z}_1$

$$\boxed{\{D\ (1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} M\,\overrightarrow{\Gamma}\ (G/R_0) = -\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1) \\ \vec{\delta}\ (C,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1 \end{array}\right\}_C}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{\delta}\ (C,1/R_0) + \overrightarrow{AC}\wedge m\,\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1 + \overrightarrow{AC}\wedge(-\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1)$$

Or : $\overrightarrow{AC} = \dfrac{L}{2}\ \vec{x}_1$

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1 + m\ e\ \cos\alpha\ \frac{L}{2}\ (\ddot{\theta}\ \vec{y}_1 + \dot{\theta}^2\ \vec{z}_1)$$

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\ (B' + m\ e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )\ddot{\theta} + \vec{z}_1(B' + m\ e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$$\{D\,(1/R_0)\} = \begin{Bmatrix} M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\,\vec{y}_1) \\ \vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\,(B' + m\,e\dfrac{L}{2}\cos\alpha\,)\ddot{\theta} + \vec{z}_1(B' + m\,e\,\dfrac{L}{2}\cos\alpha)\,\dot{\theta}^2 \end{Bmatrix}_A$$

Q4- Déterminer l'énergie cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

C étant fixe dans R_0 : $2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0).\,[\tilde{I}(C,S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)]$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}(C,S/R_0)$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_1\,.\,\dot{\theta}(A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + Bs^2\alpha)\dot{\theta}^2$

$$\boxed{2\,T(S/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + Bs^2\alpha)\dot{\theta}^2}$$

Q5- Les liaisons en A et B sont supposées parfaites. Le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$. Déterminer les actions de liaison en A et B et le couple moteur nécessaire C_m pour obtenir ce mouvement

On isole 1 et on lui applique le PFD : $\{D\,(1/R_0)\} = \{\bar{1} \rightarrow 1\}$

Or : $\{D\,(1/R_0)\} = \{A \rightarrow 1\} + \{B \rightarrow 1\} + \{\text{Poids} \rightarrow 1\} + \{Cm\}$

$$\{\bar{1} \rightarrow 1\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + \begin{Bmatrix} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

On réduit tout en A dans la base B_0 :

LA en B : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R} = L\,\vec{x}_0 \wedge (X_B\,\vec{x}_0 + Y_B\,\vec{y}_0 + Z_B\,\vec{z}_0) = L(Y_B\,\vec{z}_0 - Z_B\,\vec{y}_0)$

Pesanteur : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} = (\dfrac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge -mg\,\vec{y}_0 = -mg\dfrac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0$

Or : $\vec{y'}_1 = c\alpha\,\vec{y}_1 + s\alpha\,\vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0$

$\vec{y'}_1 = c\alpha\,(c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0) + s\alpha\,\vec{x}_0 = s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0$

$\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0 = (s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0) \wedge \vec{y}_0 = s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0$

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} = (\dfrac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge -mg\,\vec{y}_0 = -mg\dfrac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,(s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0)$

$$\overrightarrow{M_A} = - e\,m\,g\ c\alpha\, s\theta\ \vec{x_0} + mg\,(e\, s\alpha - \frac{L}{2})\,\vec{z_0}$$

Résultante dynamique

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1} - \dot{\theta}^2\ \vec{y_1})$$

$\vec{y_1} = c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0}$ et $\vec{z_1} = c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0}$

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\ \{\ddot{\theta}\ (c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0}) - \dot{\theta}^2\,(c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0})\}$$

$$\boxed{M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = m\,e\,\cos\alpha\ \{\vec{y_0}(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) - \vec{z_0}(\ddot{\theta}\ c\theta - \dot{\theta}^2\,s\theta)\}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{x_0}(A'\ddot{\theta}) + \vec{y_1}\ (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )\ddot{\theta}\ +\ \vec{z_1}(B' + m\,e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$\vec{y_1} = c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0}$ et $\vec{z_1} = c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0}$

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{x_0}(A'\ddot{\theta}) + (c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0})\ (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )\ddot{\theta}\ +\ (c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0})(B' + m\,e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = {} & \vec{x_0}(A'\ddot{\theta}) \\ & + (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )(\ddot{\theta}\ c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\ \vec{y_0} \\ & + (B' + m\,e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ (c\theta\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\ s\theta)\ \vec{z_0}\end{aligned}}$$

En définitive : $\{\bar{1} \rightarrow 1\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} X_A & Cm - e\,m\,g\,c\alpha\ s\theta \\ Y_A + Y_B - mg & -L\ Z_B \\ Z_A + Z_B & LY_B\ + mg\ (e\ s\alpha - \frac{L}{2}) \end{array}\right\}_{B_0}$

$$\{D\,(1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & A'\ddot{\theta} \\ m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta+\dot{\theta}^2\,c\theta) & (B'+m\,e\dfrac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta-\dot{\theta}^2 s\theta) \\ m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta+\dot{\theta}^2\,s\theta) & (B'+m\,e\,\dfrac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2+\ddot{\theta}\,s\theta) \end{array} \right\}_{A\,,\,B_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta+\dot{\theta}^2\,c\theta) \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta+\dot{\theta}^2\,s\theta) \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = A'\ddot{\theta} \\ Z_B = -\dfrac{1}{L}\{(B'+m\,e\dfrac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta-\dot{\theta}^2 s\theta)\} \\ Y_B = \dfrac{1}{L}\{m\,g\,(\dfrac{L}{2}-e\,s\alpha)+(B'+m\,e\,\dfrac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2+\ddot{\theta}\,s\theta)\} \end{array}}$$

Si $\dot{\theta} = \omega = cste$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,c\theta \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,s\theta \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = 0 \\ Z_B = -\dfrac{1}{L}(B'+m\,e\dfrac{L}{2}\cos\alpha\,)\,\omega^2\,s\theta \\ Y_B = \dfrac{1}{L}\{\,m\,g\,(\dfrac{L}{2}-e\,s\alpha)+(B'+m\,e\,\dfrac{L}{2}\cos\alpha)\,\omega^2\,c\theta\} \end{array}}$$

ZA et ZB sont non nulles. Si tout était équilibré elles seraient nulles

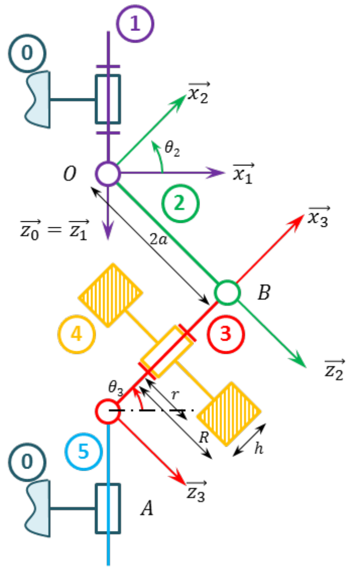
Le mouvement est imposé. La recherche des composantes de liaisons donne lieu à des équations algébriques

Colle 3
Régulateur – Sujet

C1-05

C2-09

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti **(0)**. Les solides **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(5)** sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en O, A ou B de manière à demeurer dans un même plan noté $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}\right)$. Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de $\overrightarrow{z_1}$. On repère sa position angulaire par le paramètre ψ.



Au bâti **(0)**, on associé le repère fixe $\mathcal{R}_0$.

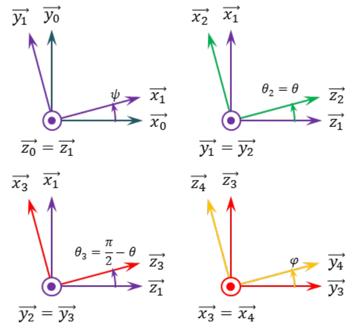
À chaque S_i on associe une base $\mathcal{B}_i\left(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i}\right)$. Les repère $\mathcal{R}_i$ sont d'origine O ou A selon le cas.

Les rotations internes sont définies par θ_2 autour de $\left(O, \overrightarrow{y_1}\right)$ et θ_3 autour de $\left(A, \overrightarrow{y_1}\right)$.

Les barres **(2)** et **(3)** sont identiques, de longueur $2a$ et de masse $m_2 = m_3 = m$.

Les barres **(1)** et **(5)** ont une masse m_i et des longueurs ℓ_i. **(4)** est un volant d'inertie de masse M qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $\left(G, \overrightarrow{x_3}\right)$ avec la barre **(3)**. Un repère $\mathcal{R}_4$ est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire φ.

On donne le paramétrage suivant.



Question 1 Proposer une matrice d'inertie pour chacun des solides.

Question 2 Déterminer les torseurs cinétiques suivants : $\{\mathcal{C}\,(1/0)\}_O$, $\{\mathcal{C}\,(2/0)\}_O$.

Question 3 Déterminer les torseurs dynamiques suivants : $\{\mathcal{D}\,(1/0)\}_O$, $\{\mathcal{D}\,(2/0)\}_O$. En déduire $\{\mathcal{D}\,(1 \cup 2/0)\}_O$

Question 4 Déterminer les torseur dynamique $\{\mathcal{D}\,(4/0)\}_G$.

Question 5 Déterminer les torseur dynamique $\{\mathcal{D}\,(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5/0)\}_O$.

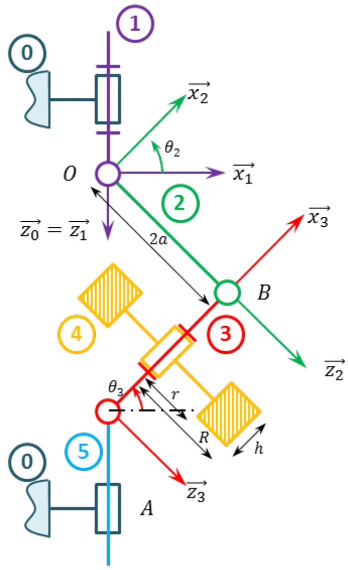
Question 6 Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.

Colle 3
Régulateur – Corrigé

C1-05

C2-09

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti **(0)**. Les solides **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(5)** sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en O, A ou B de manière à demeurer dans un même plan noté $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}\right)$. Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de $\overrightarrow{z_1}$. On repère sa position angulaire par le paramètre ψ.



Au bâti **(0)**, on associé le repère fixe $\mathcal{R}_0$.

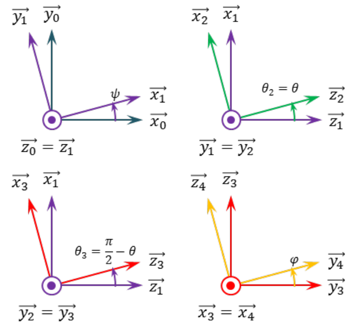
À chaque S_i on associe une base $\mathcal{B}_i\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i}\right)$. Les repère $\mathcal{R}_i$ sont d'origine O ou A selon le cas.

Les rotations internes sont définies par θ_2 autour de $\left(O,\overrightarrow{y_1}\right)$ et θ_3 autour de $\left(A,\overrightarrow{y_1}\right)$.

Les barres **(2)** et **(3)** sont identiques, de longueur $2a$ et de masse $m_2=m_3=m$.

Les barres **(1)** et **(5)** ont une masse m_i et des longueurs ℓ_i. **(4)** est un volant d'inertie de masse M qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $\left(G,\overrightarrow{x_3}\right)$ avec la barre **(3)**. Un repère $\mathcal{R}_4$ est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire φ.

On donne le paramétrage suivant.



Question 1 Proposer une matrice d'inertie pour chacun des solides.

Question 2 Déterminer les torseurs cinétiques suivants : $\{\mathscr{C}(1/0)\}_O$, $\{\mathscr{C}(2/0)\}_O$.

Question 3 Déterminer les torseurs dynamiques suivants : $\{\mathscr{D}(1/0)\}_O$, $\{\mathscr{D}(2/0)\}_O$. En déduire $\{\mathscr{D}(1\cup 2/0)\}_O$

Correction

Détermination de $\{\mathscr{C}(1/0)\}_O$ O est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathscr{C}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c}m_1\overrightarrow{V(G_1,1/0)}\\ \overrightarrow{\sigma(O_1,1/0)}=I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\end{array}\right\}_O$$

(1) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_0}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_O(1)=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ avec $A_1=\dfrac{m_1 l_1^2}{3}$. De plus, $\{\mathscr{V}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\dot{\psi}\overrightarrow{z_1}\\ \overrightarrow{V(O,1/0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$. On a donc $I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}=\overrightarrow{0}$. Au final :

$$\{\mathscr{C}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$$

Détermination de $\{\mathscr{C}(2/0)\}_O$ O est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} m_2\overrightarrow{V(G_2,2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(O,2/0)} \end{array}\right\}_O$$

(2) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_2}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{O_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$ avec $A_2 = \dfrac{4ma^2}{3}$ =. De plus, $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{V(G_2,2/0)} \end{array}\right\}_{G_2}$.

$\overrightarrow{V(G_2,2/0)} = \overrightarrow{V(O,2/0)} + \overrightarrow{G_2O} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = -a\overrightarrow{z_2} \wedge \left(\dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{y_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}\left(\cos\theta\overrightarrow{x_1} - \sin\theta\overrightarrow{z_1}\right)\right)$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}.$$

Au final :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2} \end{array}\right\}_O = \left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1} \end{array}\right\}_O$$

Détermination de $\{\mathscr{C}(3/0)\}_O$ ****************** Au point G_3, on a :

$$\{\mathscr{C}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{c} m_3\overrightarrow{V(G_3,3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)} \end{array}\right\}_O$$

(3) est une tige d'axe $\overrightarrow{x_3}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$ avec $A_4 = \dfrac{4ma^2}{3}$ =. De plus, $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{V(G_3,3/0)} \end{array}\right\}_{G_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3,3/0)}$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}.$$

Au final :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2} \end{array}\right\}_O = \left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1} \end{array}\right\}_O$$

Question 4 Déterminer les torseur dynamique $\{\mathscr{D}(4/0)\}_G$.

Correction

Question 5 Déterminer les torseur dynamique $\{\mathscr{D}(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5/0)\}_O$.

Correction

Question 6 Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.

Correction

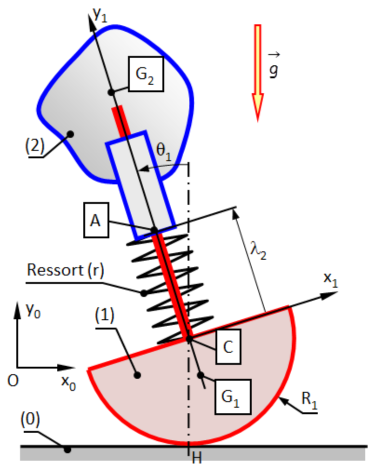
Colle 4
Culbuto – Sujet

Équipe PT – PT⋆ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

Le schéma de la figure ci-contre représente un jouet d'enfant constitué d'un premier solide **(1)**, assemblage d'un demi disque de rayon R_1 et d'une tige, et d'un solide **(2)**, guidé par une glissière de centre A sur la tige de **(1)**. Un ressort **(r)**, de raideur k et de longueur libre L_0, est interposé entre les deux solides. Le disque **(1)** est en contact ponctuel en H avec le sol **(0)**. On suppose qu'il y a roulement sans glissement en H entre **(0)** et **(1)**.



Paramétrage et éléments d'inertie

- Le repère $\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ lié au bâti est supposé galiléen. Le repère $\left(C;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est lié au disque **(1)**.
- La liaison glissière entre **(1)** et **(2)** est supposée sans frottement.
- On note : $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\theta_1$, $\overrightarrow{CA}=\lambda_2\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{HC}=R_1\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{CG_1}=-a_1\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{AG_2}=a_2\overrightarrow{y_1}$.
- **(1)** : masse m_1, $I_{G_1}(1)=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & C_1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- **(2)** : masse m_2, $I_{G_2}(2)=\begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & C_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

.

Question 1 Déterminer les équations différentielles du mouvement de **(1)** et de **(2)** par rapport au bâti **(0)**.

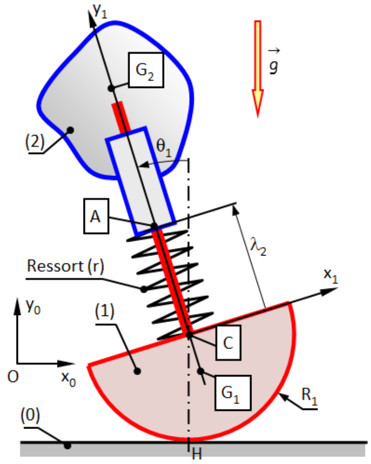
Colle 4
Culbuto – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

Le schéma de la figure ci-contre représente un jouet d'enfant constitué d'un premier solide **(1)**, assemblage d'un demi disque de rayon R_1 et d'une tige, et d'un solide **(2)**, guidé par une glissière de centre A sur la tige de **(1)**. Un ressort **(r)**, de raideur k et de longueur libre L_0, est interposé entre les deux solides. Le disque **(1)** est en contact ponctuel en H avec le sol **(0)**. On suppose qu'il y a roulement sans glissement en H entre **(0)** et **(1)**.



Paramétrage et éléments d'inertie

- Le repère $\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ lié au bâti est supposé galiléen. Le repère $\left(C;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est lié au disque **(1)**.
- La liaison glissière entre **(1)** et **(2)** est supposée sans frottement.
- On note : $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\theta_1$, $\overrightarrow{CA}=\lambda_2\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{HC}=R_1\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{CG_1}=-a_1\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{AG_2}=a_2\overrightarrow{y_1}$.
- **(1)** : masse m_1, $I_{G_1}(1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- **(2)** : masse m_2, $I_{G_2}(2)=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

.

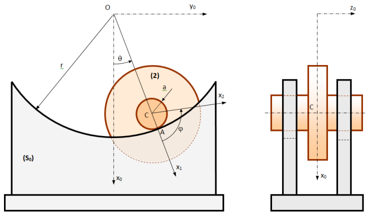
Question 1 Déterminer les équations différentielles du mouvement de **(1)** et de **(2)** par rapport au bâti **(0)**.

Colle 5
Mesure de moment d'inertie – Sujet

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09



La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie I d'un solide de révolution **(2)** par rapport à son axe. Soit R_0 un repère galiléen lié au bâti **(**S_0**)** tel que l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$ soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide **(2)** sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et de rayon r. Le solide **(2)**, de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a. Soit f le coefficient de frottement entre **(2)** et **(**S_0**)**. L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :

- le tourillon de **(2)**, de centre C, roule sans glisser en A sur la portée cylindrique de **(**S_0**)** ;
- R_1 est un repère tel que $\overrightarrow{OA}=r\overrightarrow{x_1}$ et on pose $\theta=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- R_2 est un repère lié à 2 avec $\varphi=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose que $\varphi=0$ lorsque $\theta=0$.

Question 1 Donner la relation entre φ et θ.

Question 2 Déterminer l'équation du mouvement de **(2)** par rapport à **(**S_0**)** en fonction de θ.

Question 3 On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période T des oscillations de **(2)**.

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de **(S)** sachant que : $T=5\,\text{s}$; $a=12{,}5\,\text{mm}$; $r=141{,}1\,\text{mm}$; $g=9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m=7217\,\text{g}$; $f=0,15$.

Question 5 Déterminer l'angle θ_0 maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en A. Faire l'application numérique.

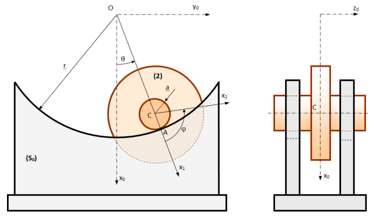
Colle 5
Mesure de moment d'inertie – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie I d'un solide de révolution **(2)** par rapport à son axe. Soit R_0 un repère galiléen lié au bâti (S_0) tel que l'axe $\left(O, \overrightarrow{x_0}\right)$ soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide **(2)** sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe $\left(O, \overrightarrow{z_0}\right)$ et de rayon r. Le solide **(2)**, de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a. Soit f le coefficient de frottement entre **(2)** et (S_0). L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :



- le tourillon de **(2)**, de centre C, roule sans glisser en A sur la portée cylindrique de (S_0) ;
- R_1 est un repère tel que $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{x_1}$ et on pose $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$;
- R_2 est un repère lié à 2 avec $\varphi = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose que $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Question 1 Donner la relation entre φ et θ.

Question 2 Déterminer l'équation du mouvement de **(2)** par rapport à (S_0) en fonction de θ.

Question 3 On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période T des oscillations de **(2)**.

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de **(S)** sachant que : $T = 5\,\text{s}$; $a = 12{,}5\,\text{mm}$; $r = 141{,}1\,\text{mm}$; $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m = 7217\,\text{g}$; $f = 0,15$.

Question 5 Déterminer l'angle θ_0 maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en A. Faire l'application numérique.

<u>Dispositif de mesure de moment d'inertie.</u> 1/2

1 - RSG en A $\overrightarrow{V}(A\in S/R_0) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{V}(C\in S/R_0) + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$

$$\Leftrightarrow (r-a)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} - a\,\overrightarrow{x_1} \wedge (\dot{\varphi}+\theta)\,\overrightarrow{z_0}$$

$$\Leftrightarrow r\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$$ en intégrant avec $c_1 = 0$: $\boxed{r\theta + a\varphi = 0}$

2 - <u>Isolons $\{S\}$</u>

$$\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to S) = {}_C\left\{\begin{array}{c} mg\,\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(S_0 \to S) = {}_A\left\{\begin{array}{c} N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

<u>Appliquons le th de l'énergie cinétique</u> $P(\text{ext} \to S/S_0) = \dfrac{d\,E_c(S/S_0)}{dt}$

- $$E_c(S/S_0) = \frac{1}{2}\,m\,\left[(r-a)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}\,I\,(\dot{\theta}+\varphi)^2 = \frac{1}{2}m(r-a)^2\theta^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\dot{\theta}^2$$
$$= \frac{(r-a)^2}{2}\left[m + \frac{I}{a^2}\right]\dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_c(S/S_0)}{dt} = (r-a)^2\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\dot{\theta}\,\ddot{\theta}$$

- $$P(\text{ext} \to S/S_0) = \mathcal{T}(\text{pesanteur} \to S) \otimes \mathcal{V}(S/R_0) + \mathcal{T}(S_0 \to S) \otimes \mathcal{V}(S/R_0)$$
$$= {}_C\left\{\begin{array}{c} mg\,\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} \otimes {}_C\left\{\begin{array}{c} (\theta+\dot{\varphi})\,\overrightarrow{z_0} \\ (r-a)\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} \end{array}\right\} + {}_A\left\{\begin{array}{c} N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c} (\theta+\dot{\varphi})\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$
$$= -mg(r-a)\dot{\theta}\sin\theta$$

d'où $$(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(r-a)(ma^2 + I)\,\theta + mg\,a^2\sin\theta = 0} \qquad (1)$$

<u>Autre solution</u> : PFD appliqué à $\{S\}$ en A :

$$\left\{\begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma}(C\in S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta_A}(S/R_0) \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} mg\,\overrightarrow{x_0} + N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1} \\ mga\sin\theta\,\overrightarrow{z_0} \end{array}\right\}$$

avec $\overrightarrow{\delta_A}(S/R_0) = \overrightarrow{\delta_C}(S/R_0) + \overrightarrow{AC} \wedge m\overrightarrow{\Gamma}(C\in S/R_0)$ 2/2

$$= \frac{d}{dt}\left[\underbrace{J_C(S)\,\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}_{I(\dot\theta+\dot\varphi)\vec{z_0}}\right] - ma\vec{x_1}\wedge\left[(r-a)\ddot\theta\,\vec{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\vec{x_1}\right]$$

$$= \left[I\left(1-\frac{r}{a}\right)\ddot\theta - ma(r-a)\ddot\theta\right]\vec{z_0}$$

TMD en A / $\vec{z_0}$ $\quad (r-a)\left[I+ma^2\right]\ddot\theta + mga^2\sin\theta = 0 \qquad (1)$

3_ θ petit $\Rightarrow$ $\sin\theta \simeq \theta$ d'où l'éq diff du 2^{nd} ordre :

$$\ddot\theta + \frac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\theta = 0$$

Le coef de θ étant positif, on a un phénomène périodique de période $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2}}}$

4_ $T^2 = 4\pi^2\dfrac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2} \iff I = \dfrac{T^2 . mga^2}{4\pi^2(r-a)} - ma^2$

A.N $\quad I = \dfrac{25 \cdot 7{,}217 \;\; 9{,}81 \;\; 12{,}5^2\;10^{-6}}{4\pi^2\,(141{,}1-12{,}5)\,10^{-3}} - 7{,}217 \;\; 12{,}5^2\;10^{-6} = \boxed{53{,}3 . 10^{-3}\ kg\ m^2}$

5_ Th de la résultante dynamique appliqué à $\{S\}$: $m\left[(r-a)\ddot\theta\,\vec{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\vec{x_1}\right] = mg\vec{x_0} + N\vec{x_1} + T\vec{y_1}$

$/\vec{x_1} \quad -m(r-a)\dot\theta^2 = mg\cos\theta + N \iff N = -m(r-a)\dot\theta^2 - mg\cos\theta$

$/\vec{y_1} \quad m(r-a)\ddot\theta = T - mg\sin\theta \iff T = m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta$

pas de glissement $\Rightarrow \|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \iff \left|m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta\right| < f\left(m(r-a)\dot\theta^2 + mg\cos\theta\right)$

de (1) $\quad \ddot\theta = \dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\cdot\sin\theta \quad$ et $\dot\theta_0 = 0$ car il y a risque de glissement quand θ est max, (ici θ_0)

d'où : $\quad m(r-a)\dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\sin\theta_0 + mg\sin\theta_0 < f\,mg\cos\theta_0$

$\iff \boxed{\tan\theta_0 < f\cdot\left(1+\dfrac{ma^2}{I}\right)}$

A.N. $\boxed{\theta_0 < 8{,}7°}$