

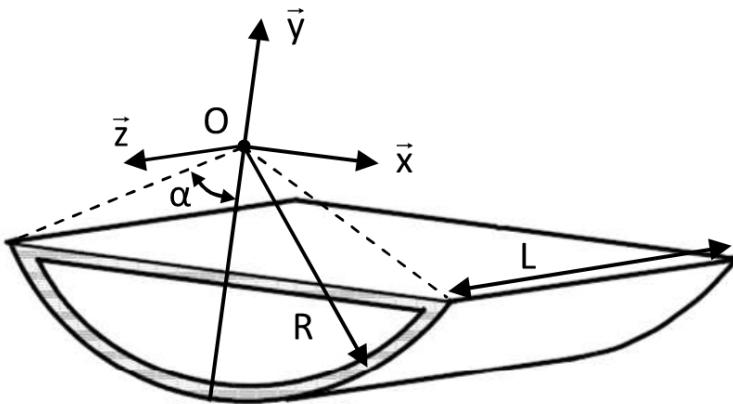
Application 1

Barrière sur la Tamise – Sujet

Florestan Mathurin.

B2-10

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



Question 1 Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_P de la plaque;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_C de la portion cylindrique;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G de la porte.

Question 2 Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque P en G_P ;
2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre C en G_C ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte P en G .

Question 3 Déterminer le moment d'inertie de la porte par rapport à (O, \vec{z}) .

On donne :

- $L = 58 \text{ m}$ la longueur de la porte;
- $R = 12,4 \text{ m}$ le rayon de la porte;
- $e = 0,05 \text{ m}$ l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant R ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$;
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

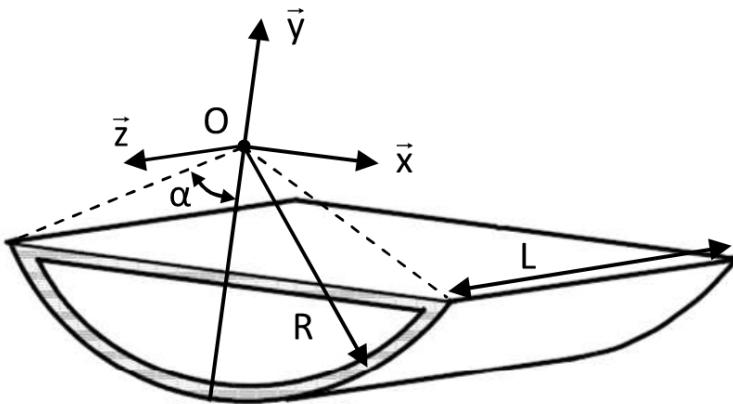
Application 1

Barrière sur la Tamise – Corrigé

Florestan Mathurin.

B2-10

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



Question 1 Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_P de la plaque ;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_C de la portion cylindrique ;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie G de la porte.

Correction

Coordonnées de G_P On a $\overrightarrow{OG_P} = -\cos \alpha \vec{y} - \frac{L}{2} \vec{z}$.

Coordonnées de G_C Pour des raisons de symétrie, on a $\overrightarrow{OG_C} = Y_C \vec{y} - \frac{L}{2} \vec{z}$.

Par définition, on a alors $m_c Y_C = \int y_p dm$.

On a, en coordonnées cylindriques, $Y_p = -R \cos \theta$, $dm = \rho L R d\theta$ avec θ variant de $-\alpha$ à α .

Par suite, $m_c Y_C = - \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta \rho L R d\theta = -\rho R^2 L [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = -2\rho R^2 L \sin \alpha$.

Or, $m_c = 2R\alpha L\rho$. En conséquences, $2R\alpha L\rho Y_C = -2L\rho R^2 \sin \alpha$ et $Y_C = -R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

Coordonnées de G En utilisant la définition du barycentre, on a $m \overrightarrow{OG} = m_P \overrightarrow{OG_P} + m_C \overrightarrow{OG_C}$.

Question 2 Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

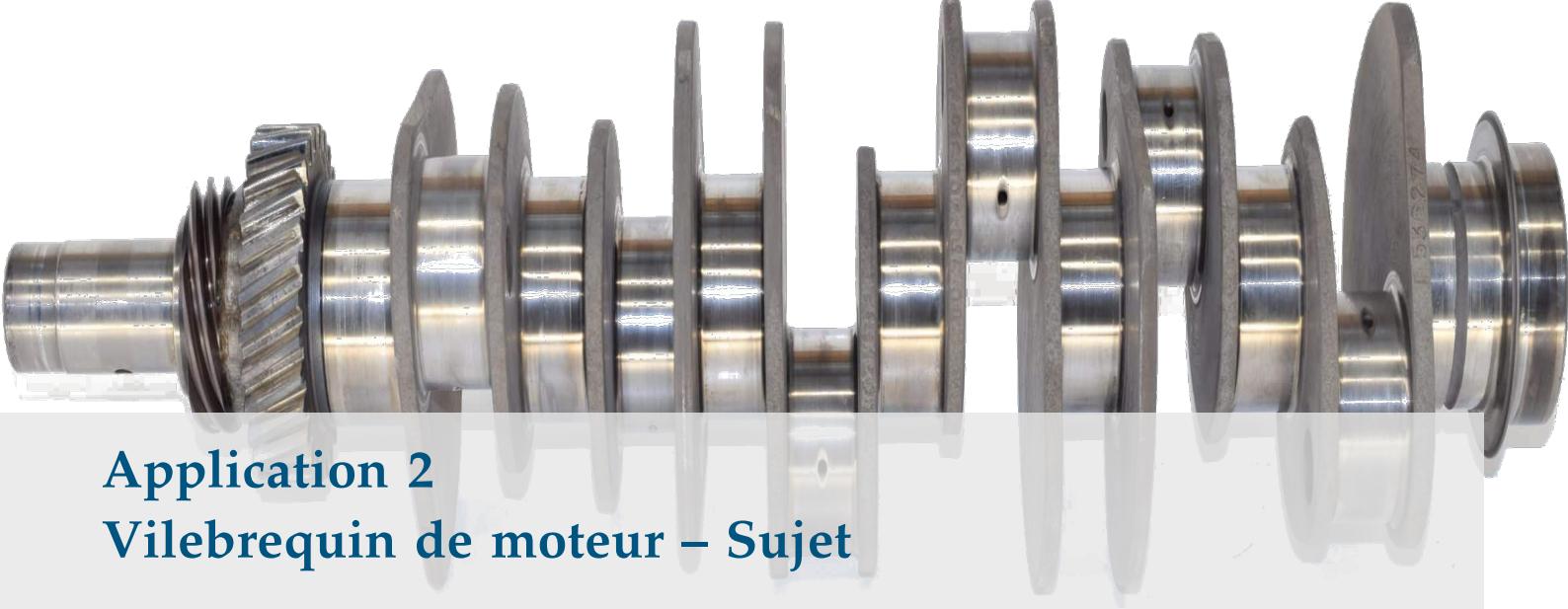
1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque P en G_P ;

On donne :

- $L = 58 \text{ m}$ la longueur de la porte ;
- $R = 12,4 \text{ m}$ le rayon de la porte ;
- $e = 0,05 \text{ m}$ l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant R ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$;
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre C en G_C ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte P en G .

Question 3 Déterminer le moment d'inertie de la porte par rapport à (O, \vec{z}) .



Application 2 Vilebrequin de moteur – Sujet

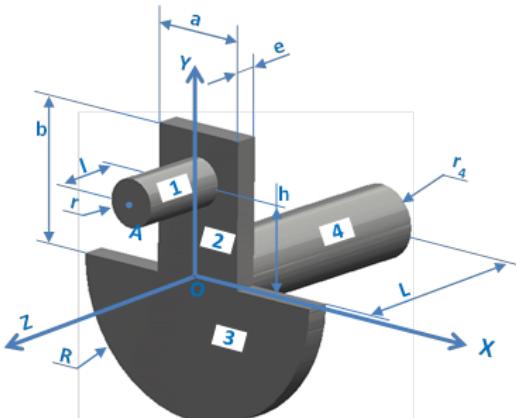
C. Gamelon & P. Dubois.

B2-10



On note :

- $\rho = 7200 \text{ kg m}^{-3}$ la masse volumique du matériau;
- $a = 20 \text{ mm}$;
- $b = 30 \text{ mm}$;
- $e = 5 \text{ mm}$;
- $l = 20 \text{ mm}$;
- $r = 5 \text{ mm}$;
- $L = 50 \text{ mm}$;
- $r_4 = 7,5 \text{ mm}$;
- $h = 20 \text{ mm}$.



L'origine O repère \mathcal{R} est située dans le plan de contact du cylindre 1 et du parallélépipède 2.

Question 1 Calculer les masses des différentes pièces : m_1 , m_2 , m_3 et m_4 .

Question 2 Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

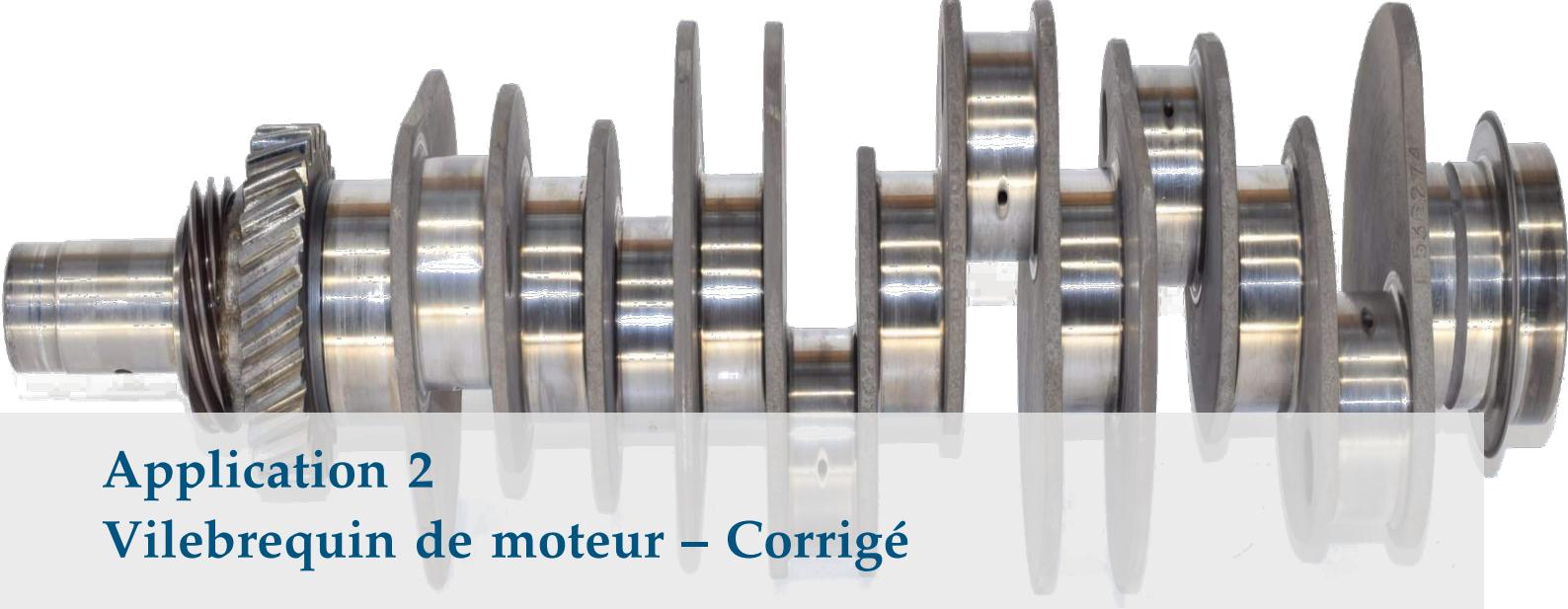
Question 3 Déterminer la valeur de R afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

Question 4 Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Question 5 Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

Question 6 Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe \overrightarrow{OA} .



Application 2 Vilebrequin de moteur – Corrigé

C. Gamelon & P. Dubois.

B2-10

Question 1 Calculer les masses des différentes pièces : m_1 , m_2 , m_3 et m_4 .

Correction

On a :

- $m_1 = \mu\pi r_1^2 l_1$;
- $m_2 = \mu abe$
- $m_3 = \mu \frac{1}{2}\pi R^2 e$;
- $m_4 = \mu\pi r_3^2 L$.



Question 2 Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

Correction

On a :

- $\overrightarrow{OG_1} = h\vec{y} + \frac{l_1}{2}\vec{z}$;
- $\overrightarrow{OG_2} = \frac{b}{2}\vec{y} - \frac{e}{2}\vec{z}$;
- $\overrightarrow{OG_4} = -\left(e + \frac{L}{2}\right)\vec{z}$.

Le solide 3 a deux plans de symétrie : (\vec{x}, \vec{y}) et (\vec{y}, \vec{z}) . On ne cherche donc la composante du centre d'inertie que dans la direction \vec{y} .

$m_3 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = \int \overrightarrow{OP} \vec{y} dm$ avec $dm = \mu\rho d\rho d\theta e$ (ρ variant de 0 à R et θ variant de $-\pi$ à 0) et $\overrightarrow{OP} = \rho (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y})$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \mu \frac{1}{2}\pi R^2 e \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} &= \int \rho (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \vec{y} \mu e \rho d\rho d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} &= \int \rho^2 \sin \theta \vec{y} \rho d\rho d\theta \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = -\frac{R^3}{3} [\cos \theta]_{-\pi}^0 \vec{y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} &= -2\frac{R}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = -4\frac{R}{3\pi} \vec{y} \end{aligned}$$

Au final : $\overrightarrow{OG_3} = -\frac{4R}{3\pi} \vec{y} - \frac{e}{2} \vec{z}$

Question 3 Déterminer la valeur de R afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

Correction

$$\begin{aligned}
& \text{On a } (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\
& \Leftrightarrow m_1 \overrightarrow{OG}_1 \cdot \overrightarrow{y} + m_2 \overrightarrow{OG}_2 \cdot \overrightarrow{y} + m_3 \overrightarrow{OG}_3 \cdot \overrightarrow{y} + m_4 \overrightarrow{OG}_4 \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left(\mu \pi r_1^2 l_1 \right) h + (\mu a b e) \frac{b}{2} - \left(\mu \frac{1}{2} \pi R^2 e \right) \frac{4R}{3\pi} + \left(\mu \pi r_3^2 L \right) \cdot 0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h + a b e \frac{b}{2} - \frac{1}{2} R^2 e \frac{4R}{3} = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2} + a b^2 e \frac{3}{4} = R^3 e \Leftrightarrow R^3 = \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2e} + a b^2 \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Question 4 Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$.

Correction

$$\begin{aligned}
I_{G_1}(S_1) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R & I_{G_2}(S_2) &= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R & I_{G_3}(S_3) &= \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R \\
I_{G_4}(S_4) &= \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R
\end{aligned}$$

Question 5 Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en O dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$.

Correction

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG}_1 &= h \overrightarrow{y} + \frac{l_1}{2} \overrightarrow{z} \\
I_O(S_1) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R + m_1 \begin{pmatrix} h^2 + \frac{l_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_1^2}{4} & -\frac{hl_1}{2} \\ 0 & -\frac{hl_1}{2} & h^2 \end{pmatrix}_R \\
\overrightarrow{OG}_2 &= \frac{b}{2} \overrightarrow{y} - \frac{e}{2} \overrightarrow{z} \\
I_O(S_2) &= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R + m_2 \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{be}{4} \\ 0 & -\frac{be}{4} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_R \\
\overrightarrow{OG}_3 &= -\frac{4R}{3\pi} \overrightarrow{y} - \frac{e}{2} \overrightarrow{z} \\
I_O(S_3) &= \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R + m_3 \begin{pmatrix} \frac{16R^2}{9\pi^2} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{4R}{3\pi} \frac{e}{2} \\ 0 & -\frac{4R}{3\pi} \frac{e}{2} & \frac{16R^2}{9\pi^2} \end{pmatrix}_R \\
\overrightarrow{OG}_4 &= -\left(e + \frac{L}{2} \right) \overrightarrow{z}.
\end{aligned}$$

$$I_O(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R + m_4 \begin{pmatrix} \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_R$$

On a :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R$$

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

Question 6 Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe \overrightarrow{OA} .

Correction

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{L_1 \vec{z} + h \vec{y}}{\sqrt{L_1^2 + h^2}}$$

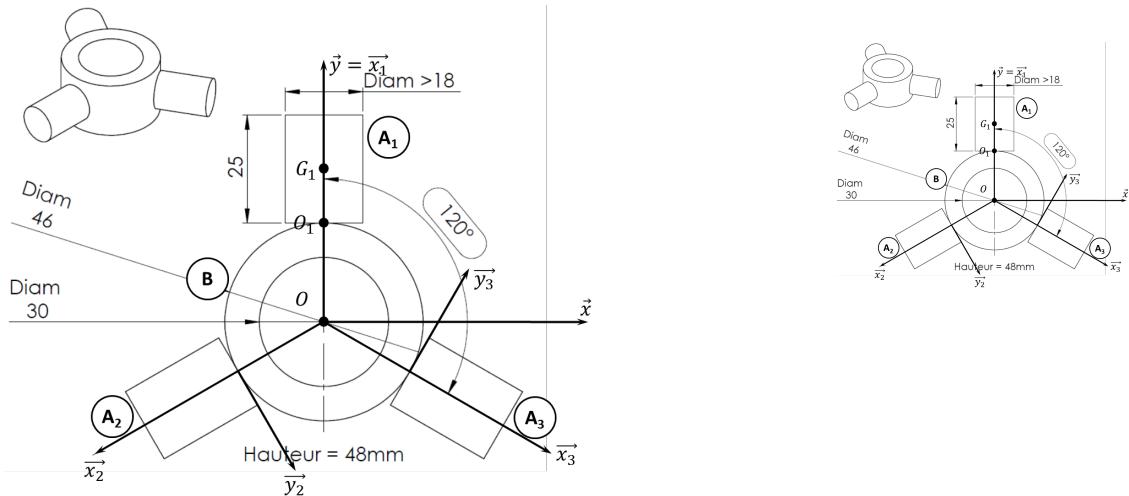
$$J_\Delta = (0 \quad u_y \quad u_z) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = (0 \quad u_y \quad u_z) \begin{pmatrix} 0 \\ Bb - Dc \\ -Db + Cc \end{pmatrix}$$

$$J_\Delta = (Bb - Dc) u_y + (-Db + Cc) u_z$$

Application 3 Triaxe – Sujet

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M . On note T l'ensemble.

B2-10



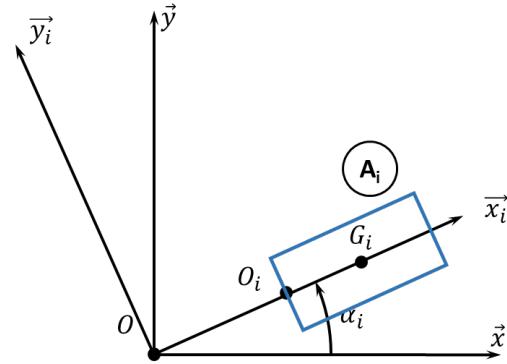
On note :

- \vec{z} l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie (O, \vec{x}, \vec{y}) ;
- \mathcal{R}_i le repère $(O_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ et \mathcal{B}_i la base associée.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTERALE!

- $D_1 = 18 \text{ mm}$ et $H_1 = 25 \text{ mm}$.
- $D = 46 \text{ mm}$, $d = 30 \text{ mm}$ et $H = 48 \text{ mm}$.
- $\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = 90^\circ$, $\alpha_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = -150^\circ$ et $\alpha_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = -30^\circ$.

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe A_i .



Question 1 Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.

Question 2 Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_i du solide A_i dans le repère \mathcal{R}_i .

Question 3 Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.

Question 4 Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_i en G_i dans \mathcal{R}_i . On note $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$ où les constantes seront à déterminer littéralement.

Question 5 Déterminer $I_{G_i}(A_i)$ dans la base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ puis $I_O(A_i)$ dans la base \mathcal{B} .

Question 6 Déterminer $I_O(B)$ dans la base \mathcal{B} .

Question 7 Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base \mathcal{B} .

Question 8 Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base \mathcal{B} .

Question 9 Déterminer $I_O(M)$ la matrice d'inertie du moyeu M .

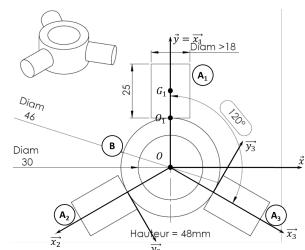
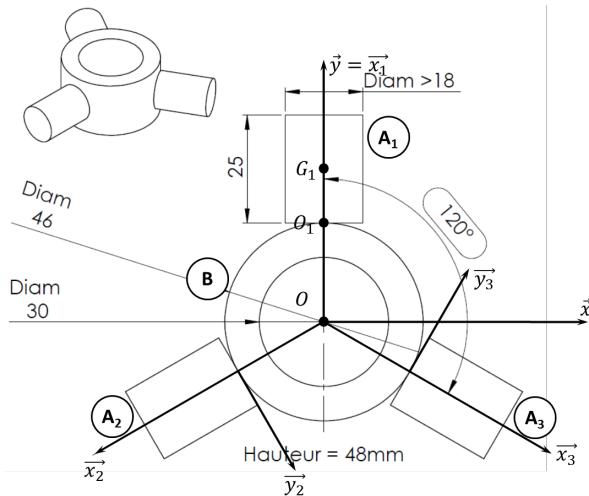
Question 10 Déterminer $I_O(T)$ la matrice d'inertie du triaxe T .

Application 3

Triaxe – Corrigé

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M . On note T l'ensemble.

B2-10



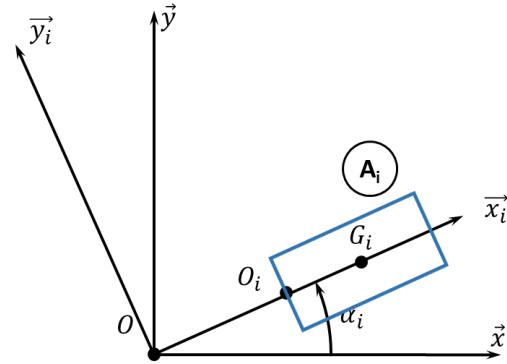
On note :

- \vec{z} l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie (O, \vec{x}, \vec{y}) ;
- \mathcal{R}_i le repère $(O_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ et \mathcal{B}_i la base associée.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTERALE!

- $D_1 = 18 \text{ mm}$ et $H_1 = 25 \text{ mm}$.
- $D = 46 \text{ mm}$, $d = 30 \text{ mm}$ et $H = 48 \text{ mm}$.
- $\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = 90^\circ$, $\alpha_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = -150^\circ$ et $\alpha_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = -30^\circ$.

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe A_i .



Question 1 Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.

Correction

Le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) est plan de symétrie du triaxe; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{z} = 0$

Le plan (O, \vec{y}, \vec{z}) est plan de symétrie du triaxe; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{x} = 0$

Reste la coordonnée selon \vec{y} .

Les plans (O, \vec{z}, \vec{x}_2) et (O, \vec{z}, \vec{x}_3) étant plans de symétrie, on a $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{y}_2 = 0$ et $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{y}_3 = 0$.

Or $\overrightarrow{OG} = y_g \vec{y} = y_g \cos \alpha_2 \vec{y}_2 - y_g \sin \alpha_2 \vec{x}_2$. Il en résulte que $y_g \cos \alpha_2 = 0$ et donc nécessairement $y_g = 0$ car $\alpha_2 \neq 0$.

Question 2 Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_i du solide A_1 dans le repère \mathcal{R}_i .

Correction

On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

$$\blacktriangleright M_1 = \mu H_1 \pi \frac{D_1^2}{4};$$

► en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{O_i P_i} = x \vec{x}_i + \rho \cos \theta \vec{y}_i + \rho \sin \theta \vec{z}_i$ et $dV = \rho d\rho d\theta dx$ avec $x \in [0, H_1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, D_1/2]$;

$$\blacktriangleright m_i x_{G_i} = \mu \iiint x_P dV = \mu \iiint x \rho d\rho d\theta dx = \mu \frac{H_1^2}{2} 2\pi \frac{D_1^2}{8};$$

$$\blacktriangleright m_i y_{G_i} = \mu \iiint y_P dV = \mu \iiint \rho \cos \theta d\rho d\theta dx = 0;$$

$$\blacktriangleright m_i z_{G_i} = \mu \iiint z_P dV = \mu \iiint \rho \sin \theta d\rho d\theta dx = 0.$$

$$\text{Au final, } \mu H_1 \pi \frac{D_1^2}{4} x_{G_1} = \mu \frac{H_1^2}{2} 2\pi \frac{D_1^2}{8} \Leftrightarrow x_{G_1} = \frac{H_1}{2}.$$

Question 3 Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.

Correction

Le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) est plan de symétrie du triaxe; donc $E = \iiint xz dm = 0$ et $D = \iiint yz dm = 0$.

Le plan (O, \vec{y}, \vec{z}) est plan de symétrie du triaxe; donc $E = \iiint xz dm = 0$ et $F = \iiint xy dm = 0$.

La matrice est donc diagonale et de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Question 4 Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_i en G_i dans \mathcal{R}_i . On note $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$ où les constantes seront à déterminer littéralement.

Correction

Le solide étant axisymétrique, on a : $D_i = E_i = F_i = 0$ et $C_i = B_i$. D'où $I_{G_i}(A_1) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & B_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$.

$$\text{Calculons } A_i = \iiint (y^2 + z^2) dm = \mu \iiint (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta dx$$

$$= \mu \iiint \rho^3 d\rho d\theta dz = \mu \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{D_1/2} 2\pi H_1 = \mu \frac{D_1^4}{16 \cdot 4} 2\pi H_1 = M_1 \frac{D_1^2}{8}.$$

$$\text{Calculons } B_i = \iiint (x^2 + z^2) dm = \mu \iiint (x^2 + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta dx$$

$$B_x = \mu \iiint x^2 \rho d\rho d\theta dx + \mu \iiint \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta dx = \mu \iiint x^2 \rho d\rho d\theta dx = \mu \frac{H_1^3}{4 \cdot 3} \frac{D_1^2}{8} 2\pi = M \frac{H_1^2}{12}$$

$$B_z = \mu \iiint \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta dx = \mu \iiint \rho^3 \frac{1 - \cos 2x}{2} \theta d\rho d\theta dx = \mu \iiint \frac{\rho^3}{2} \theta d\rho d\theta dx = \mu \frac{D_1^4}{2 \cdot 16 \cdot 4} 2\pi H_1 = M \frac{D_1^2}{16}.$$

$$\text{Au final, } A_i = M_1 \frac{D_1^2}{8} \text{ et } B_i = M \left(\frac{H_1^2}{12} + \frac{D_1^2}{16} \right).$$

Question 5 Déterminer $I_{G_i}(A_i)$ dans la base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ puis $I_O(A_i)$ dans la base \mathcal{B} .

Correction

On a $\vec{x}_i = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$, $\vec{y}_i = \cos \alpha \vec{y} - \sin \alpha \vec{x}$. En conséquences, on a : $P_{10} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}} = P_{10}^{-1} I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}_1} P_{10}$.

$$\begin{aligned} I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos \alpha & -A_1 \sin \alpha & 0 \\ B_1 \sin \alpha & B_1 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha & -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & A_1 \sin^2 \alpha + B_1 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{OG_i} = \frac{H+D}{2} \vec{x}_i = \frac{H+D}{2} (\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}); \text{ donc :}$$

$$I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right)^2 & \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)\left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right) & \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)^2 \\ \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)\left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right) & 0 & \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right)^2 & \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha & \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Au final, $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} =$

$$\begin{pmatrix} A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right)^2 & (B_1 - A_1) \sin \alpha \cos \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ (B_1 - A_1) \sin \alpha \cos \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha & A_1 \sin^2 \alpha + B_1 \cos^2 \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} f(\alpha) & fg(\alpha) & 0 \\ fg(\alpha) & g(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & h(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Question 6 Déterminer $I_O(B)$ dans la base \mathcal{B} .

Question 7 Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base \mathcal{B} .

Question 8 Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base \mathcal{B} .

Correction

Question 9 Déterminer $I_O(M)$ la matrice d'inertie du moyeu M .

Correction

Question 10 Déterminer $I_O(T)$ la matrice d'inertie du triaxe T .

Correction