

5 Hyperstatisme des mécanismes

5.1 Degrés de mobilité

Définition – Mobilité cinématique

On appelle $m_c = m_u + m_i$ le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

B2-16

- ▶ m_u : le nombre de mobilités dites **utile** ;
- ▶ m_i : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- ▶ $m_c = 0$: liaison complète ou rigide ;
- ▶ $m_c > 0$: liaison mobile à m_c degrés de liberté.

Remarque

- ▶ Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.
- ▶ Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.

Les mobilités utiles et internes peuvent être déterminées intuitivement. Cependant, il est possible de déterminer le nombre de mobilités analytiquement.

Méthode – Méthode cinématique

Il faut commencer par écrire la (ou les) fermetures de chaînes cinématiques. Une fermeture de chaîne permet d'écrire un système de 6 équations. On note r_c le rang du système d'équations cinématiques.

On a alors $m_c = I_c - r_c$.

Méthode – Méthode statique

Il faut commencer par appliquer le PFS à chacune des pièces du système. Un PFS permet d'écrire un système de 6 équations. On note r_s le rang du système d'équations statiques.

On a alors $m_c = E_S - r_s$.

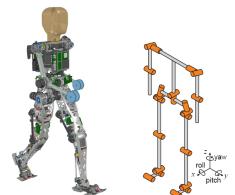


FIGURE 5.1 – Robot humanoïde Lola



FIGURE 5.2 – Simulateur de vol Lockheed Martin

5.2 Hyperstatisme

5.2.1 Définition

On appelle h le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme. Il traduit l'impossibilité à résoudre un problème de mécanique, par la redondance abusive des liaisons.



FIGURE 5.3 – Mickey, $h = M - I_c + E_y$



FIGURE 5.4 – Messi, $h = M - E_s + I_s$

Méthode – en cinématique

$$h = m_c - I_c + E_c$$

Méthode – en statique

$$h = m_c - E_s + I_s$$

- ▶ $h = 0$: liaison ou mécanisme **isostatique**;
- ▶ $h > 0$: liaison ou mécanisme **hyperstatique**;
- ▶ si $h < 0$ refaites vos calculs, ce n'est possible!

Définition – Notations

I_c et I_s sont respectivement les **nombres d'inconnues cinématiques et statiques** d'un système et ils dépendent du type de modélisation (2D ou 3D).

Méthode cinématique

On rappelle que le **nombre cyclométrique** γ est tel que $\gamma = L - S + 1$ (S nombre de classes d'équivalence et L le nombre de liaisons).

On note E_c le nombre d'équations cinématique :

- ▶ en 3D : $E_c = 6\gamma$;
- ▶ en 2D : $E_c = 3\gamma$.

Méthode statique

E_s est le nombre d'équations statique :

- ▶ en 3D : $E_s = 6(S - 1)$;
- ▶ en 2D : $E_s = 3(S - 1)$.

Remarques

- ▶ Un système en **chaîne ouverte** est toujours **isostatique**.
- ▶ Une liaison hélicoïdale a **5 inconnues statiques et 1 inconnue cinématique**.
- ▶ Le degré d'hyperstatisme d'une chaîne bouclé **simple** ne peut pas excéder 6.

5.2.2 Le système est hyperstatique... et alors ?

Tout d'abord, d'un point de vue calcul mécanique, l'intérêt d'un système isostatique est qu'il est possible de calculer les efforts dans chacune des liaisons. Un système isostatique sera de plus facile à assembler car le positionnement des pièces les unes avec les autres est « unique ».

Pour les systèmes hyperstatiques, il n'est pas possible de connaître chacun des efforts. En revanche, la détermination des lois de mouvement des systèmes reste possible. Les systèmes hyperstatiques sont plus rigides que des systèmes isostatiques mais nécessitent de prendre des précautions au montage ou à la fabrication des pièces :

- ▶ les dimensions des pièces fabriquées doivent être maîtrisées;
- ▶ le parallélisme dans l'espace entre des axes doit être maîtrisé;
- ▶ du jeu doit être prévu pour garantir l'assemblage;
- ▶ des dispositifs de réglage peuvent être proposés.

Un système hyperstatique peut donc être plus cher à réaliser, mais peut être plus rigide et d'une plus grande durée de vie.

Pour calculer les efforts dans un système hyperstatique, plusieurs solutions sont possibles : on peut par exemple faire des hypothèses sur une répartition d'efforts.

Méthode – Conditions de montage

Pour déterminer les conditions de montage, il est possible d'exploiter les équations $0 = 0$ issues des fermetures de chaînes cinématiques. En effet, ce nombre d'équations correspond au degré d'hyperstatisme :

- ▶ une équation de type $0 = 0$ issue de la fermeture des vecteurs taux de rotation impose de spécifier un parallélisme ;
- ▶ une équation de type $0 = 0$ issue de la fermeture des vecteurs vitesse impose de spécifier une distance.

Il est parfois demandé de diminuer le degré d'hyperstatisme d'un système. Pour cela, il faut rajouter des degrés de liberté à certaines liaisons, sans pour autant modifier le comportement du système.

Application 1 :

Pompe à pistons axiaux – Sujet

D'après É. Durif.

Présentation

On considère la pompe à pistons axiaux suivante. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti.

On note n le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici $n = 3$). Dans cette étude, on se place directement dans la base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ qui est en rotation par rapport à la base $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ avec le paramètre de rotation θ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$ qui est en rotation par rapport au repère $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe \vec{y}_0 avec le paramètre angulaire α . On introduit le repère $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$ directement obtenu à partir de R_{0*} par une rotation autour de \vec{z}_{0*} et d'angle θ . On donne également : $\overrightarrow{AB} = L_1 \vec{z}_0$, $\overrightarrow{BC} = -R \vec{x}_1$, $\overrightarrow{CD} = \lambda \vec{z}_1$, $\overrightarrow{DE} = h \vec{z}_{1*}$.

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : pousoir.

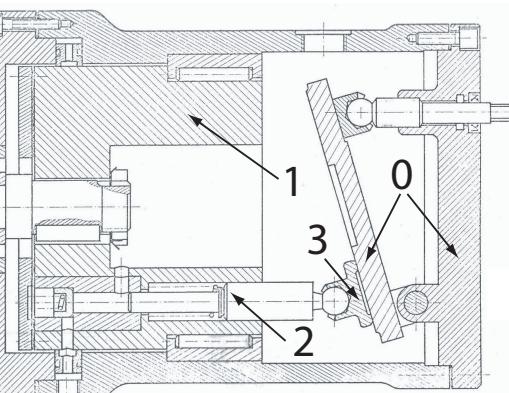


FIGURE 5.5 – Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central (C, \vec{z}_1) et qui a pour résultante en effort : $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

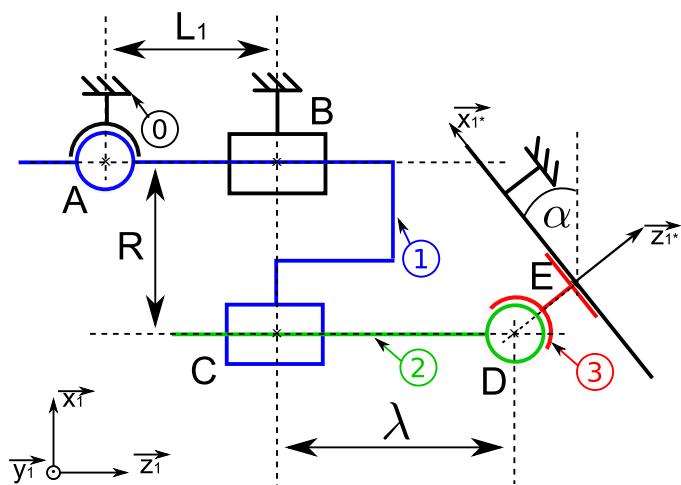


FIGURE 5.6 – Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

Etude préliminaire

Question 1 Tracer le graphe de structure du mécanisme.

Question 2 En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

Étude statique

Question 3 Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B, C et D.

Question 4 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Étude cinématique

Question 5 Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

Question 6 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Hyperstatisme

Question 7 Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

Question 8 Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

Application 1 :

Pompe à pistons axiaux – Corrigé

D'après É. Durif.

B2-16

Présentation

On considère, la pompe à pistons axiaux suivante. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti.

On note n le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici $n = 3$). Dans cette étude, on se place directement dans la base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ qui est en rotation par rapport à la base $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ avec le paramètre de rotation θ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$ qui est en rotation par rapport au repère $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe \vec{y}_0 avec le paramètre angulaire α . On introduit le repère $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$ directement obtenu à partir de R_{0*} par une rotation autour de \vec{z}_{0*} et d'angle θ . On donne également : $\vec{AB} = L_1 \vec{z}_0$, $\vec{BC} = -R \vec{x}_1$, $\vec{CD} = \lambda \vec{z}_1$, $\vec{DE} = h \vec{z}_{1*}$.

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : pousoir.

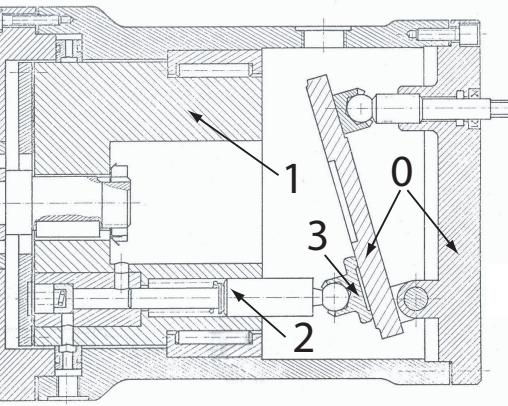


FIGURE 5.7 – Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central (C, \vec{z}_1) et qui a pour résultante en effort : $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

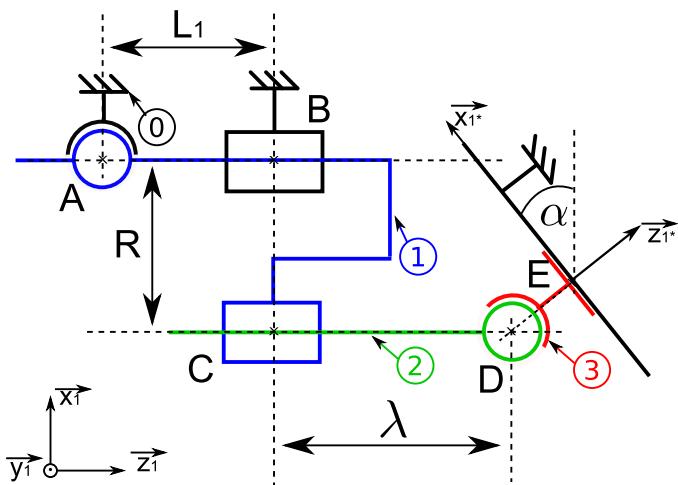


FIGURE 5.8 – Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

Etude préliminaire

Question 1 Tracer le graphe de structure du mécanisme.

Question 2 En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

Étude statique

Question 3 Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B, C et D.

Question 4 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Étude cinématique

Question 5 Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

Question 6 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Hyperstatisme

Question 7 Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

Question 8 Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point B :

► Action de 0 sur 1 en A :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

► Action de 0 sur 1 en B :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

► Action de 2 sur 1 en C :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point C :

► Action de 3 sur 2 en D :

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

► Action de 1 sur 2 en C :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

► Action de la pression en C :

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point D :

► Action de 2 sur 3 en D :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

► Action de 0 sur 3 en E :

$$\{\mathcal{T}(S0 \rightarrow S3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}}$$

Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

(1)résultante suivant \vec{x}_1	$X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$
(2)résultante suivant \vec{y}_1	$Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$
(3)résultante suivant \vec{z}_1	$Z_{A01} = 0$
(4)moment suivant (B, \vec{x}_1)	$L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$
(5)moment suivant (B, \vec{y}_1)	$-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$
(6)moment suivant (B, \vec{z}_1)	$-R Y_{C21} = 0$
(7)résultante suivant \vec{x}_1	$X_{D32} - X_{C21} = 0$
(8)résultante suivant \vec{y}_1	$Y_{D32} - Y_{C21} = 0$
(9)résultante suivant \vec{z}_1	$Z_{D32} + F_p = 0$
(10)moment suivant (C, \vec{x}_1)	$-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$
(11)moment suivant (C, \vec{y}_1)	$\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$
(12)moment suivant (C, \vec{z}_1)	$0 = 0$
(13)résultante suivant \vec{x}_1	$-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$
(14)résultante suivant \vec{y}_1	$-Y_{D32} = 0$
(15)résultante suivant \vec{z}_1	$-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(16)moment suivant $D\vec{x}_1$	$L_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(17)moment suivant $D\vec{y}_1$	$M_{E03} = 0$
(18)moment suivant $D\vec{z}_1$	$-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$

Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de $E_s = 18$ équations statiques.
- La modélisation comporte $I_s = 17$ inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :

- Équation (12) "0 = 0" : mobilité de rotation de piston autour de (C, \vec{z}_1) .
- Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du barillet autour de (B, \vec{z}_1) .
- Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de (E, \vec{z}_{1*}) .

Le système possède alors 3 mobilités cinématiques ($m_c = 3$).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec $r_s = 15$ équations significatives (rang du système d'équations statiques r_s) pour $I_s = 17$ inconnues. Nous avons donc un déficit de 2 équations ou encore 2 inconnues statiques de trop

pour résoudre le problème. Le système est donc **hyperconstraint**. On dit que la modélisation du système est **hyperstatique d'ordre 2**

$$\boxed{h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c)} \quad (5.1)$$

Étude cinématique

Objectifs

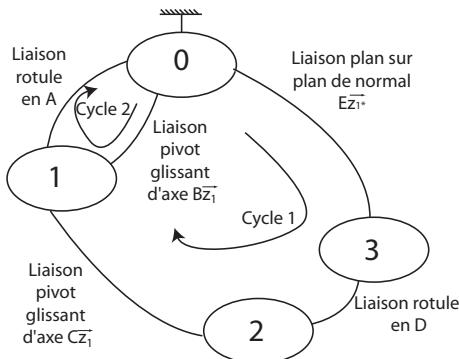
- ▶ La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- ▶ Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- ▶ Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- ▶ Chaîne 1 : {0 – 3 – 2 – 1 – 0}.
- ▶ Chaîne 2 : {0 – 1 – 0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

Fermeture de chaîne cinématique

Chaine cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :

► $\{\mathcal{V}(3/0)\}$:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(3/0)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{E,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & u_{30} \cos(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda & r_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & 0 \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}\end{aligned}$$

► $\{\mathcal{V}(3/2)\}$:

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} = \left\{ \begin{array}{ccc} p_{32} & -\lambda & q_{32} \\ q_{32} & \lambda & p_{32} \\ r_{32} & 0 & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

► $\{\mathcal{V}(2/1)\}$:

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

► $\{\mathcal{V}(1/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{array} \right\}_{B,R_1} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & r_{B10} \\ r_{B10} & 0 & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en A :

► $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

► $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaines :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^A \right\} - \left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^B \right\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (9) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ (10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ (11) & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ (12) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Approche cinématique

- ▶ Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de $E_c = 12$ équations.
- ▶ La modélisation comporte $I_c = 13$ inconnues cinématiques.
- ▶ Le rang du système vaut $r_c = 10$ car deux équations ((4) et (5)) donnent “0 = 0” et ne sont donc pas significatives.
- ▶ Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici $h = 2$)
- ▶ La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques (I_c) et le nombre d'équations significatives (r_c) : **ici** $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (5.2)$$

Application 2 :

Exercices d'application – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

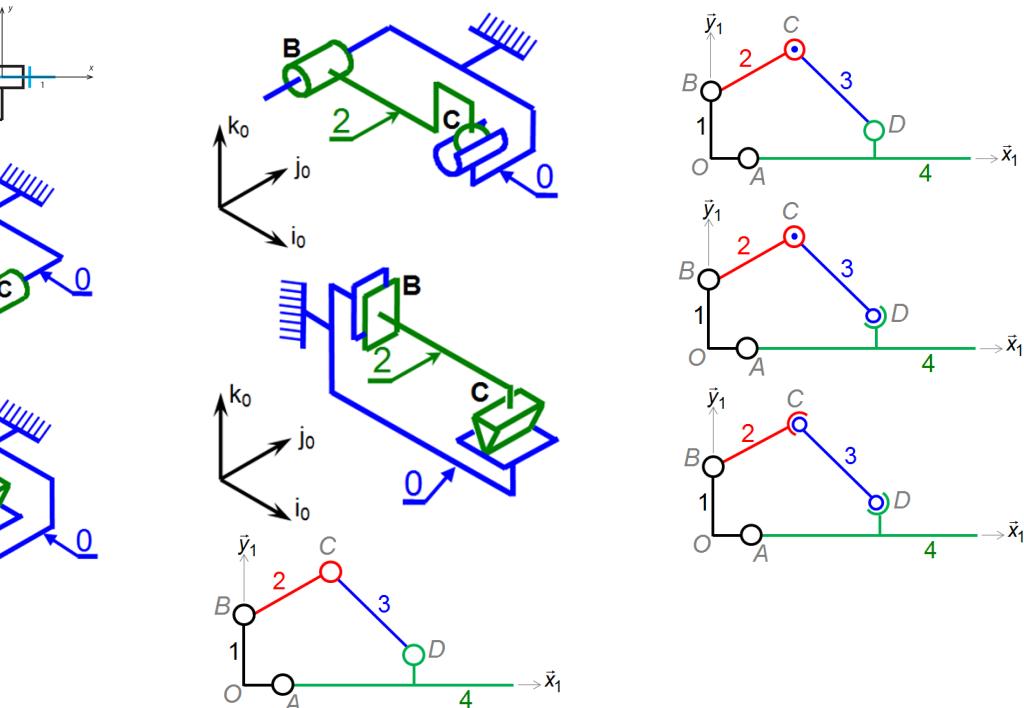
Exercice 1 –Applications directes

B2-16

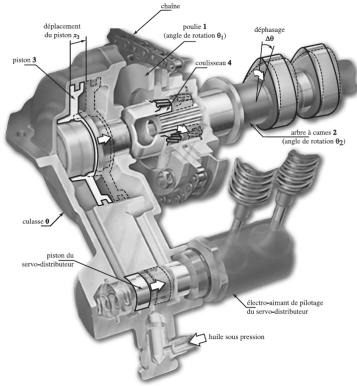
Question 1 Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

Question 2 Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

- des conditions d'assemblage (intuitivement);
- un modèle isostatique.



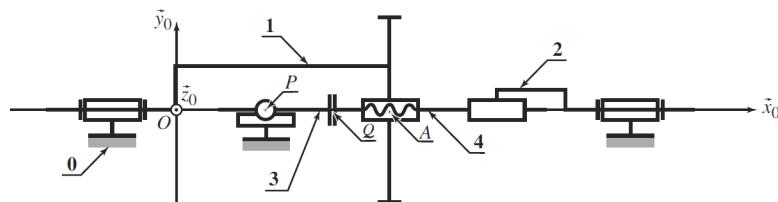
Banque PT SIA – 2008.



Exercice 2 – Déphasage d’arbre à cames

L’optimisation d’un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie 1 (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l’arbre à came 2 un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.

On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse 0, la poulie d’ entraînement 1, l’ arbre à cames 2, le piston 3 et le coulisseau 4.



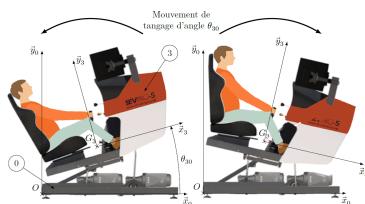
Question 3 Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

Question 4 Déterminer le degré d’hyperstatisme en précisant la démarche utilisée.
(On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

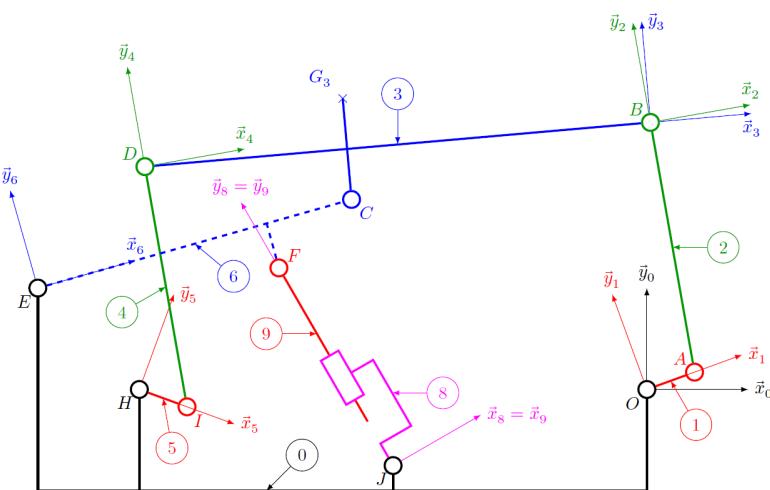
Centrale Supelec 2017 – PSI.

On s’intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d’assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres H et O.



On propose le modèle plan suivant (la pièce 6 est en traits pointillés pour la démarquer des autres pièces).

Question 5 Déterminer le degré d’hyperstatisme du modèle proposé.



Exercice 5 – Pousseur de tablier

Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».

Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.

On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.

Question 6 Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

Question 7 Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

Question 8 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

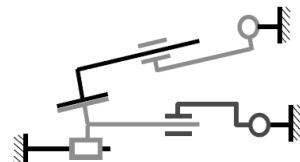
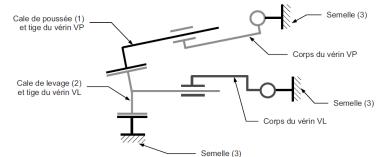
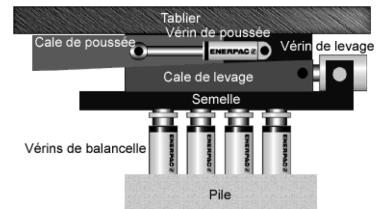
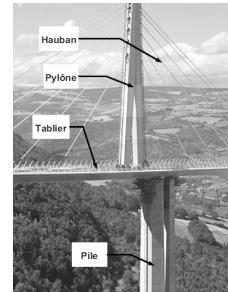
Question 9 Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

Question 10 Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix ? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique ?

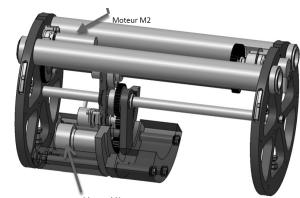
Exercice 6 – Planeur sous marin

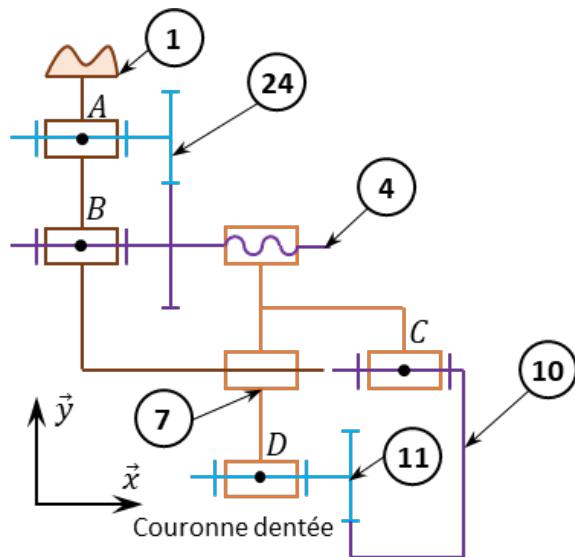
Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédéfini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement 24 et radialement 11.



Banque PT 2012 – SIC.





Question 11 Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

On supposera que la liaison entre deux roues dentées est une liaison ponctuelle.

Question 12 Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

Application 2 :

Exercices d'application – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

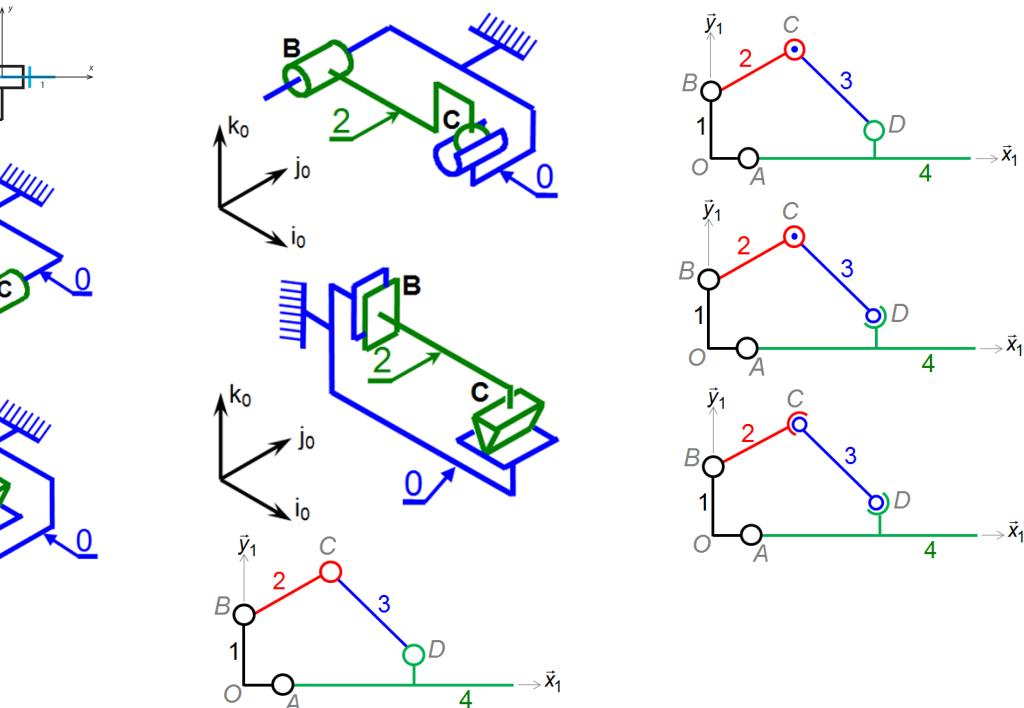
Exercice 1 – Applications directes

B2-16

Question 1 Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

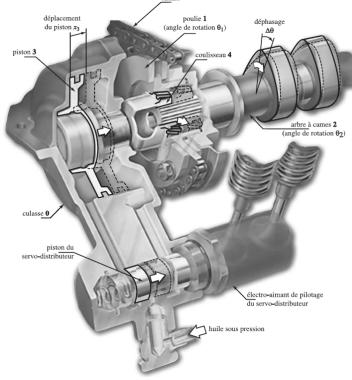
Question 2 Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

- des conditions d'assemblage (intuitivement);
- un modèle isostatique.



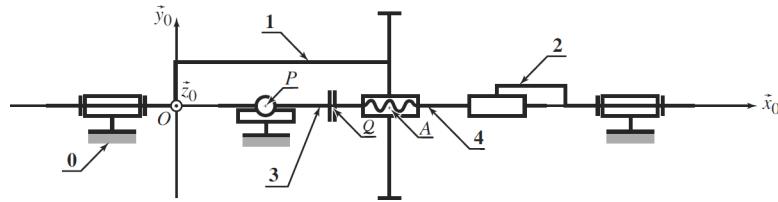
Banque PT SIA – 2008.

Exercice 2 – Déphasage d'arbre à cames



L'optimisation d'un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie **1** (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l'arbre à came **2** un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.

On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse **0**, la poulie d'entraînement **1**, l'arbre à cames **2**, le piston **3** et le coulisseau **4**.



Question 3 Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

Correction

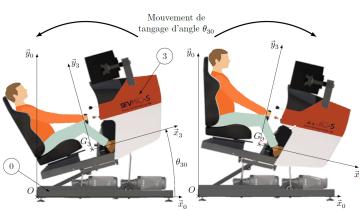
Question 4 Déterminer le degré d'hyperstatisme en précisant la démarche utilisée. (On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

Correction

Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

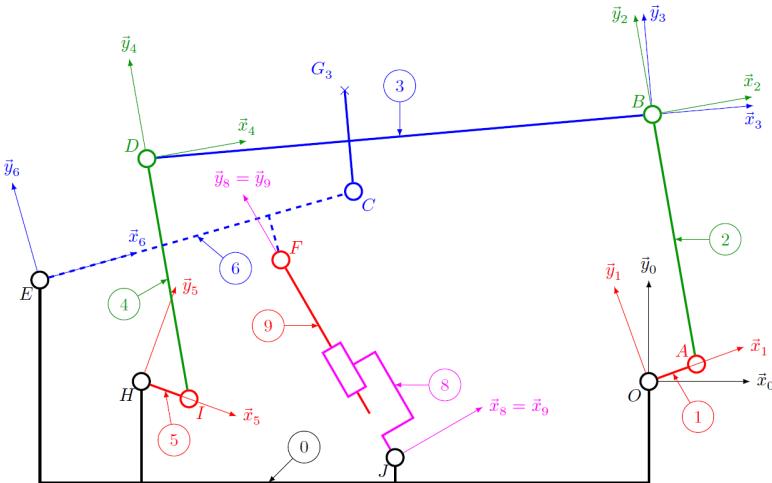
Centrale Supelec 2017 – PSI.

On s'intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d'assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres *H* et *O*.



On propose le modèle plan suivant (la pièce 6 est en traits pointillés pour la démarquer des autres pièces).

Question 5 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.



Exercice 5 – Pousseur de tablier

Banque PT 2008 – SIC.

Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».

Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.

On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.

Question 6 Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

Correction

Question 7 Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

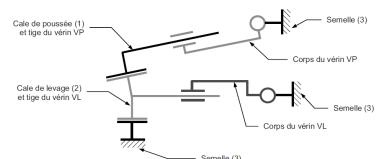
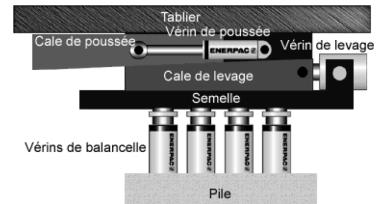
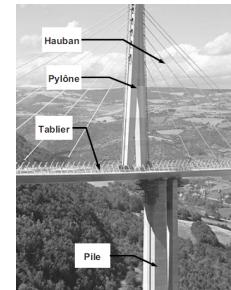
Correction

Question 8 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

Correction

Question 9 Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

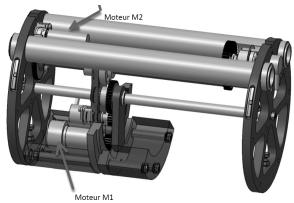
Correction



Question 10 Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix ? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique ?

Correction

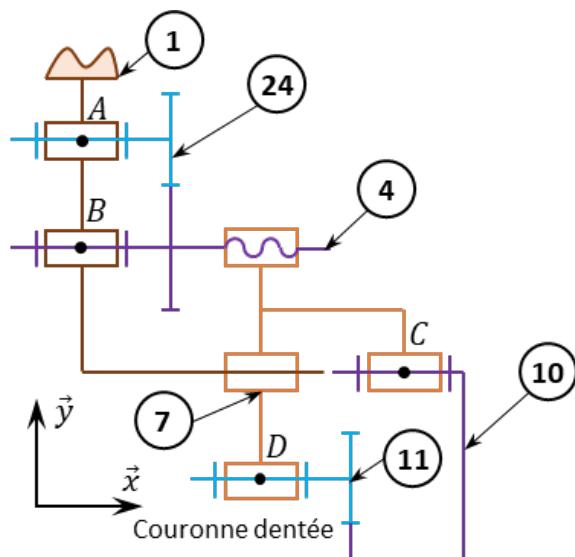
Banque PT 2012 – SIC.



Exercice 6 – Planeur sous marin

Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédefini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement 24 et radialement 11.



Question 11 Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

Correction

On supposera que la liaison entre deux roues dentées est une liaison ponctuelle.

Question 12 Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

Correction

TD 1 :

Suspension de l'AddBike – Sujet

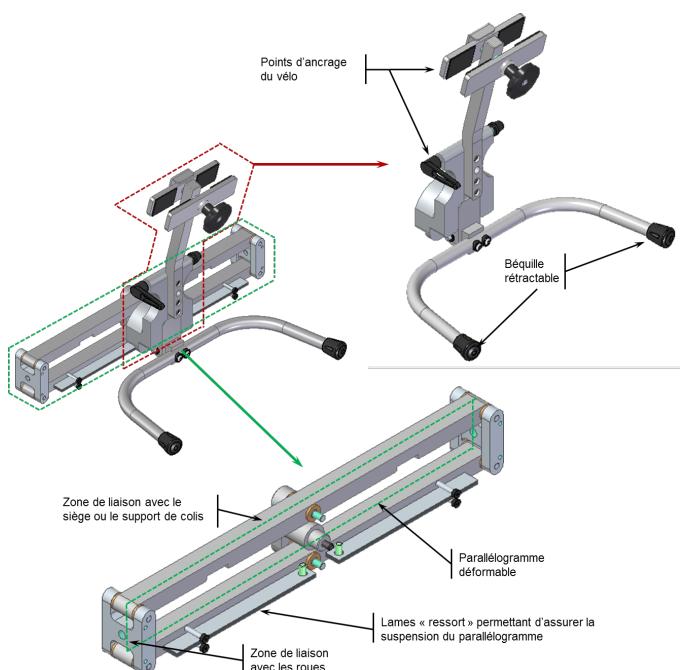
Présentation

L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

Agrégation Sciences Industrielles de l'Ingénieur – 2018.

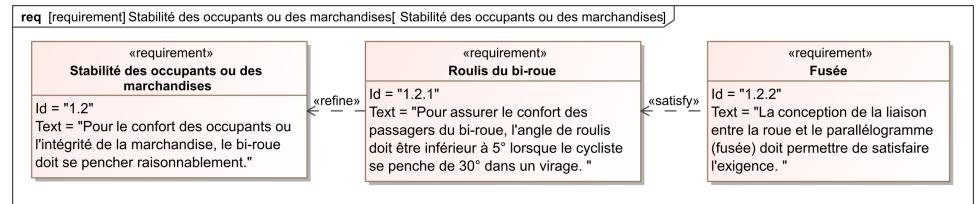
B2-16



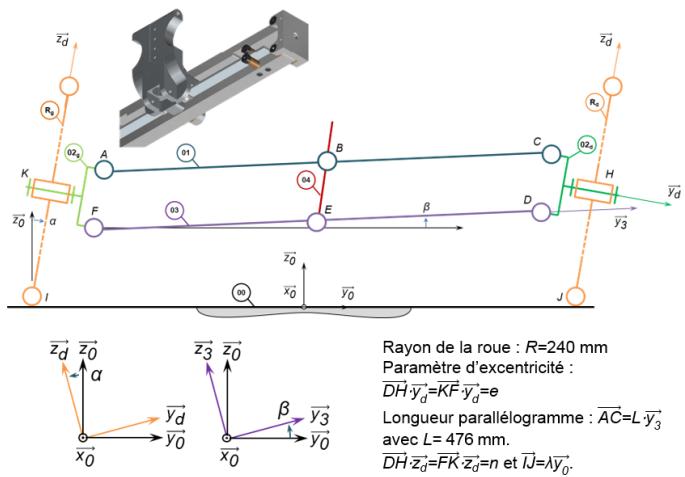
Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

Objectif

Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser $\beta = 5^\circ$ lorsque le cycliste penche le mât vertical de $\alpha = 30^\circ$.



Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme *ACDF* donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal \vec{x}_0 . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales ; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal \vec{x}_0 .



L'angle β correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

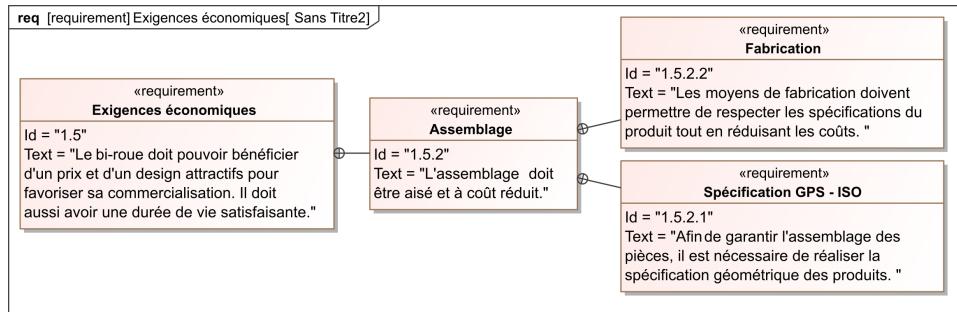
Question 1 En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle β et l'excentricité e des fusées 02g et 02d.

Question 2 En déduire une valeur de l'excentricité e permettant de valider l'exigence 1.2.1.

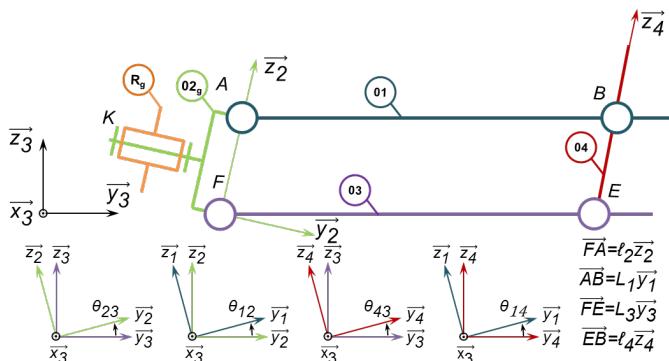
Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

Objectif

Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.



Question 3 Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.



Question 4 Donner les torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}(2/3)\}, \{\mathcal{V}(1/2)\}, \{\mathcal{V}(4/3)\}, \{\mathcal{V}(1/4)\}$.

Question 5 En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

Question 6 En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

Synthèse

Question 7 Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.

TD 1 : Suspension de l'AddBike – Corrigé

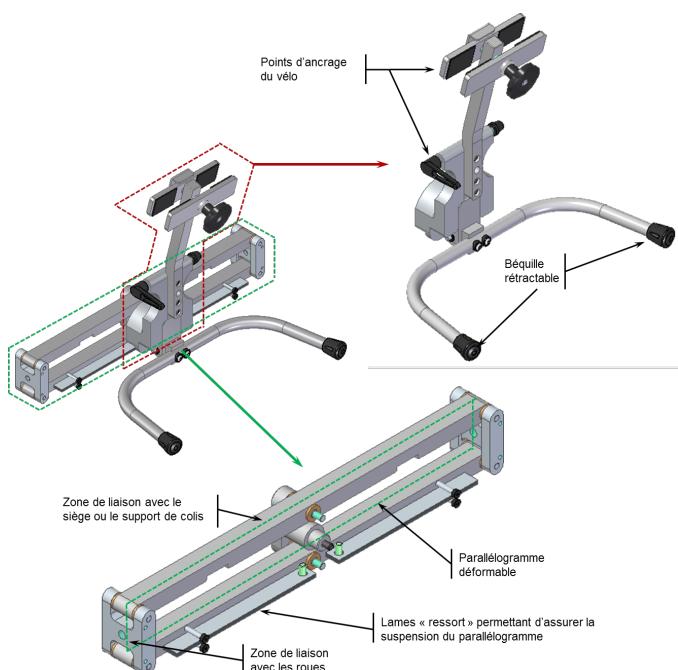
Présentation

L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

Agrégation Sciences Industrielles de l'Ingénieur – 2018.

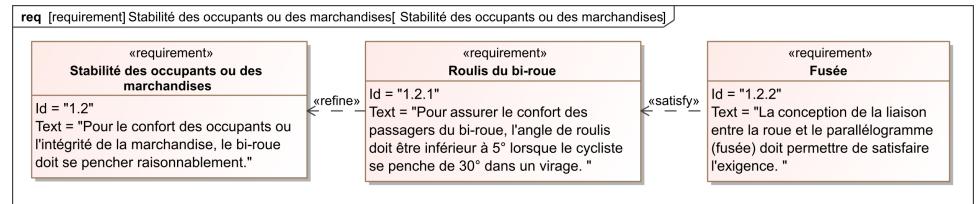
B2-16



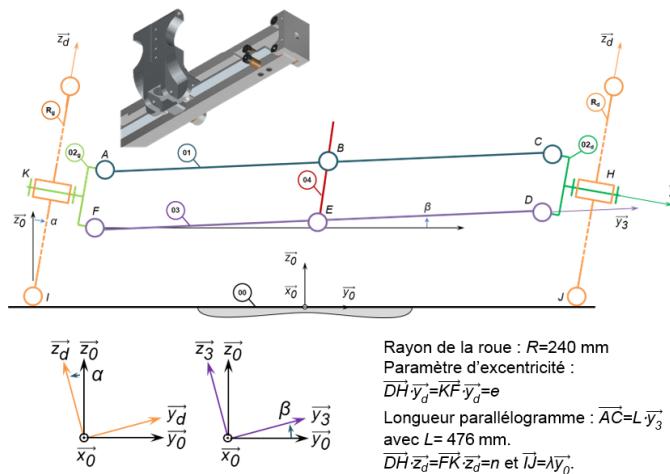
Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

Objectif

Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser $\beta = 5^\circ$ lorsque le cycliste penche le mât vertical de $\alpha = 30^\circ$.



Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme *ACDF* donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal \vec{x}_0 . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales ; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal \vec{x}_0 .



L'angle β correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

Question 1 En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle β et l'excentricité e des fusées 02g et 02d.

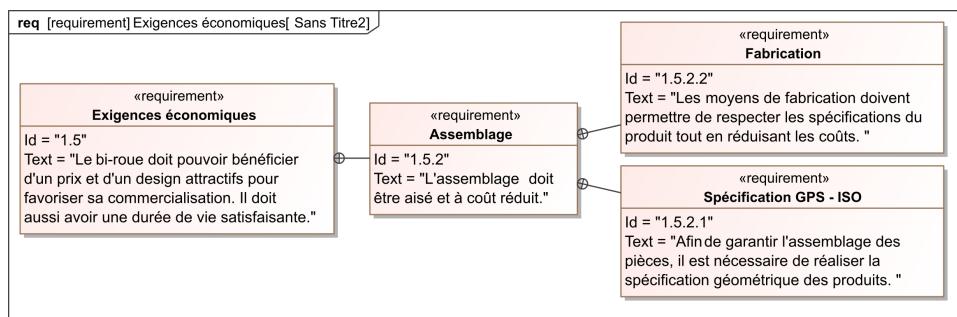
Question 2 En déduire une valeur de l'excentricité e permettant de valider l'exigence 1.2.1.

Correction

Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

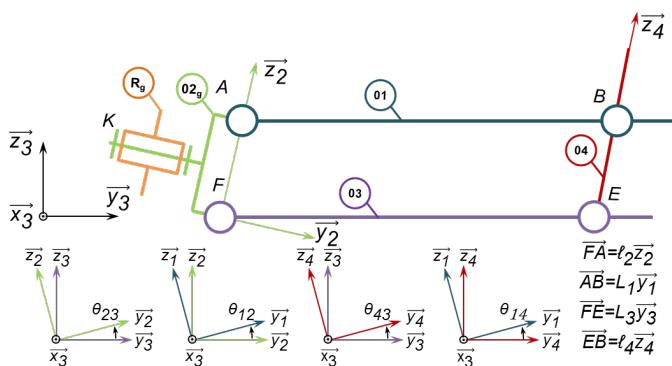
Objectif

Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.



Question 3 Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.

Correction



Question 4 Donner les torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}(2/3)\}, \{\mathcal{V}(1/2)\}, \{\mathcal{V}(4/3)\}, \{\mathcal{V}(1/4)\}$.

Correction

Question 5 En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

Correction

Question 6 En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

Correction

Synthèse

Question 7 Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.

Correction

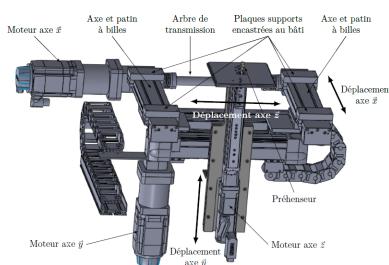
TD 2 :

Système de dépose de poudre – Sujet

Concours Centrale Supelec – TSI 2016.

Mise en situation

On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.



Objectif

L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe \vec{x} et de justifier certains choix technologiques.

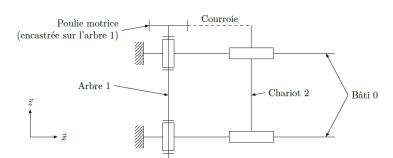
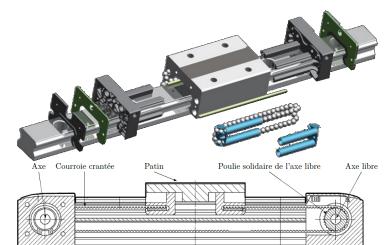
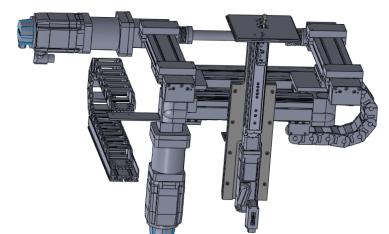
Le préhenseur repose sur des plaques support qui le lient en liaison encastrement au bâti. Les rails guidant le préhenseur suivant l'axe \vec{x} supportent les autres rails guidant les déplacement du préhenseur suivant les axes \vec{y} et \vec{z} .

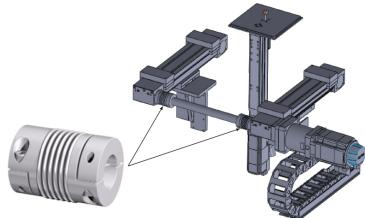
Le guidage est réalisé par deux axes munis de patins à billes.

Le moteur actionnant l'axe \vec{x} est lié à un réducteur qui entraîne deux ensembles poulies-courroies. Les poulies motrices sont guidées chacune par deux roulements à billes. Les deux poulies motrices sont liées par un arbre de transmission (Arbre 1). La figure suivante représente le schéma cinématique de l'ensemble.

Travail demandé

La courroie étant un élément déformable, on n'en tiendra pas compte dans l'étude suivante.





Question 1 Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

Pour lever l'hyperstatisme de cette liaison, le constructeur a mis en place deux soufflets métalliques en les implantant de part et d'autre de l'arbre de transmission (figure suivante).

Un soufflet métallique est un joint d'accouplement autorisant des défauts d'alignement radiaux, axiaux et angulaires. Ainsi, pour un soufflet liant deux solides S_1 et S_2 positionné en un point P et dont l'axe du soufflet est (P, \vec{u}) :

$$\blacktriangleright \text{ le torseur statique transmissible est de la forme } \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{P,(\vec{u},\vec{v},\vec{w})};$$

\blacktriangleright le torseur cinématique du mouvement de S_1 par rapport à S_2 est de la forme

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & v_{x12} \\ q_{12} & v_{y12} \\ r_{12} & v_{z12} \end{array} \right\}_{P,(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}.$$

L'introduction des deux soufflets métalliques impose de décomposer l'arbre 1 de la question 1 en 3 solides distincts 1_A , 1_B et 1_C , le solide 1_B étant lié aux deux solides 1_A et 1_C par les deux soufflets métalliques.

Question 2 Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

Question 3 Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

Question 4 En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

Éléments de correction

1. $h = 5$.
2. ...
3. $m = 6$.
4. $h = 0$.
5. ...

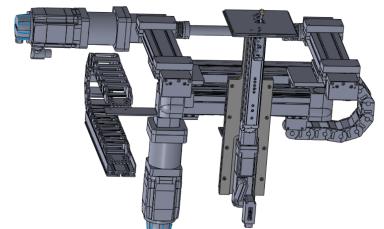
Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

TD 2 : Système de dépose de poudre – Corrigé

Concours Centrale Supelec – TSI 2016.

B2-16



Mise en situation

Objectif

L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe \vec{x} et de justifier certains choix technologiques.

Travail demandé

Question 1 Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

Correction

Méthode cinématique :

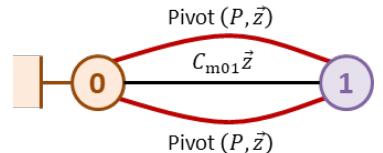
- ▶ mobilité utile : $m_u = 1$;
- ▶ mobilité interne : $m_i = 0$;
- ▶ nombre de cycles : $\gamma = 1$;
- ▶ nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6\gamma = 6$;
- ▶ nombres d'inconnues cinématiques : $I_c = 2 \cdot 1 = 2$.

Au final : $h = m - I_c + E_c = 1 - 2 + 6 = 5$.

Méthode statique

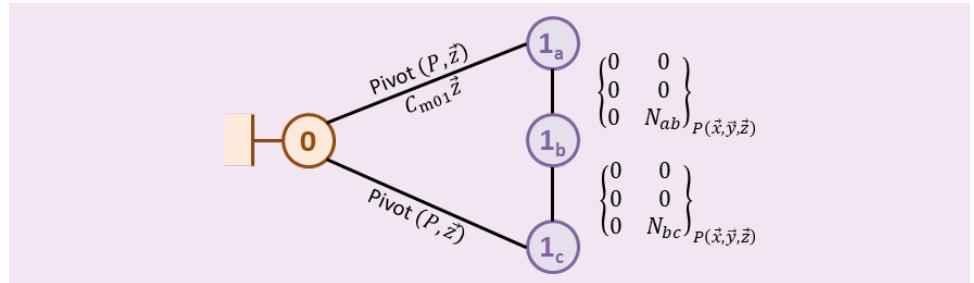
- ▶ mobilité utile : $m_u = 1$;
- ▶ mobilité interne : $m_i = 0$;
- ▶ nombre d'équations cinématiques : $E_s = 6(p - 1) = 6(2 - 1) = 6$;
- ▶ nombres d'inconnues cinématiques : $I_s = 2 \cdot 5 = 10$.

Au final : $h = m - E_s + I_s = 1 - 6 + 10 = 5$.



Question 2 Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

Correction



Question 3 Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

Correction

En réalisant une fermeture cinématique, on a $\{\mathcal{V}(1_a/0)\} + \{\mathcal{V}(1_b/1_a)\} + \{\mathcal{V}(1_c/1_b)\} = \{\mathcal{V}(1_c/0)\}$. Les torseurs étant considérés écrits au même point P , on a :

$$\begin{cases} p_{ba} + p_{cb} = 0 \\ q_{ba} + q_{cb} = 0 \\ r_{a0} = r_{c0} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xba} + v_{xcb} = 0 \\ v_{yba} + v_{ycb} = 0 \\ v_{zba} + v_{zcb} = 0 \end{cases} .$$

Il s'agit d'un système de rang 6 avec 12 inconnues. On a donc $m = I_c - r_c = 12 - 6 = 6$.

Question 4 En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

Correction

On a $h = m - I_c + E_c = 6 - 12 + 6 = 0$.

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

Correction

Le soufflet permet donc de rendre le système isostatique. Il est ainsi possible de monter le système sans avoir à imposer des contraintes géométriques sur le mécanisme.

TD 3

Tuyère à ouverture variable – Sujet

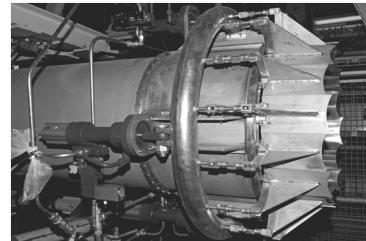
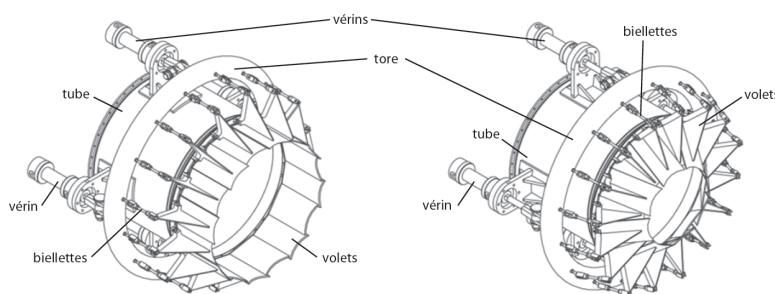
Banque PT – SIA 2011.

Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

C1-02

C2-04



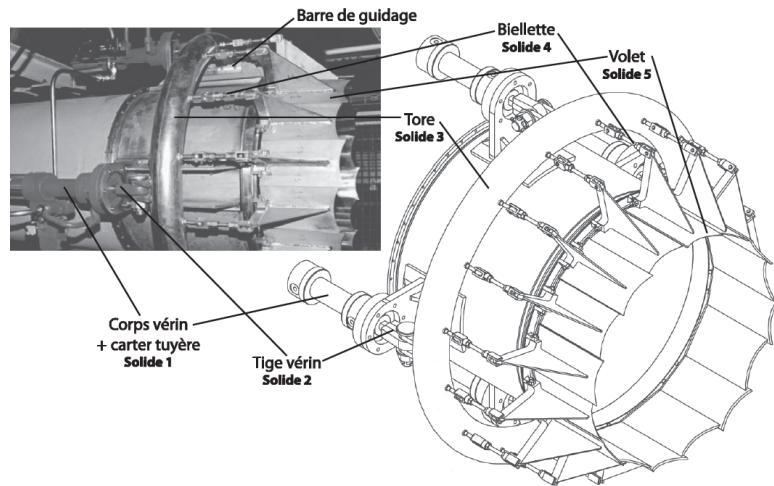
Objectif

L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- ▶ le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
 - position de l'axe de rotation : orthogonal ;
 - débattement angulaire : $40^\circ \pm 0,5^\circ$;
 - précision angulaire : $0,2^\circ$;
- ▶ commande simultanée des 16 volets :
 - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère ;
 - nombre d'actionneurs : minimum ;
 - rigidité globale : $\Delta x < 0,2 \text{ mm}$;
 - temps de montée en vitesse : inférieur à 0,1 s.
- ▶ adaptation aux efforts aérodynamiques :
 - résistance : 50% de la limite élastique ;
 - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.



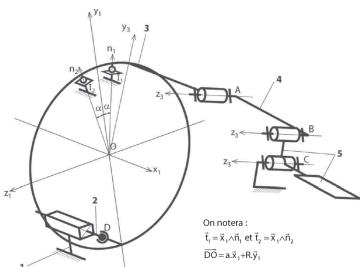
Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide i : $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison L_k , d'un solide j par rapport à un solide i (ou par rapport au référentiel \mathcal{R}_i lié à celui-ci) réduit en A , sera noté $\{\mathcal{V}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$ où $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée associée à la liaison L_k .

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison L_k du solide i sur le solide j , réduit en A sera noté $\{\mathcal{F}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$ où $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée associée à la liaison L_k .

Étude d'une commande avec un seul actionneur



Objectif

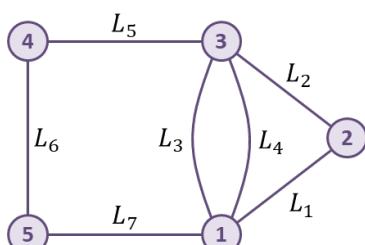
On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

On précise que le solide 2 représente la tige du vérin et que les liaisons en I_1 et I_2 représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.

Question 1 Compléter le graphe de structure.

Question 2 Le modèle proposé est-il isostatique ?

Question 3 Déterminer la liaison équivalente L_{eq34} aux deux liaisons L_3 et L_4 situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq34} .



Question 4 Déterminer la liaison équivalente L_{eq12} aux deux liaisons L_1 et L_2 situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq12} .

Question 5 Déterminer la liaison équivalente L_{eq12} aux deux liaisons L_{eq34} et L_{eq12} situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq} . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

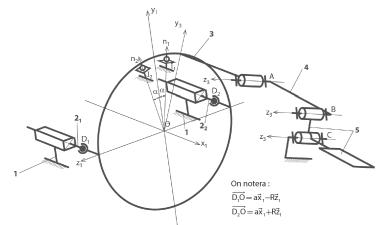
Étude d'une commande avec deux actionneurs

Objectif

On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.

Question 6 À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente L_{eq1} aux liaisons L_{11} , L_{21} et la liaison équivalente L_{eq2} aux liaisons L_{12} et L_{22} entre les solides 1 et 3.

Question 7 Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente L'_{eq1} aux deux liaisons L_{eq34} , L_{eq1} et L_{eq2} situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}'_{eq} puis le torseur cinématique cinématique \mathcal{V}'_{eq} . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins ?



Étude de la structure adoptée par le constructeur

Objectif

On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

Question 8 Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière ? Vous expliquerez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure ?

TD 3

Tuyère à ouverture variable – Corrigé

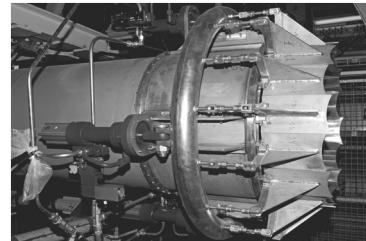
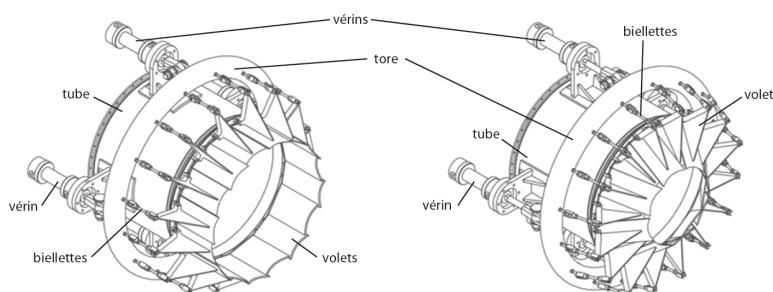
Banque PT – SIA 2011.

Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

C1-02

C2-04



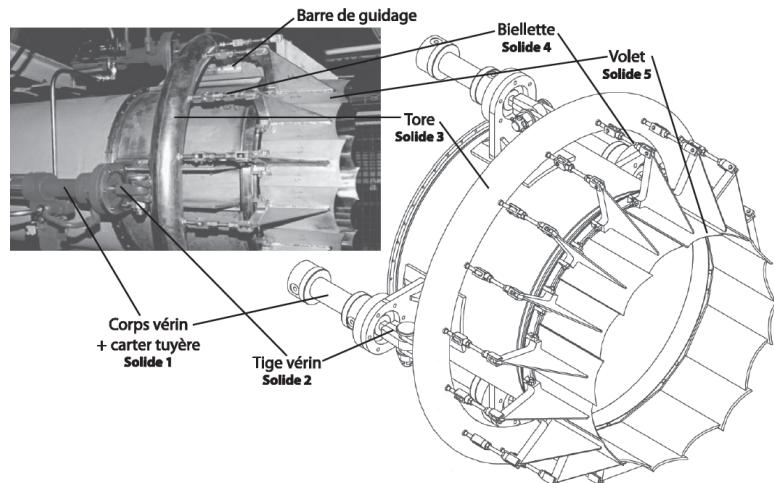
Objectif

L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- ▶ le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
 - position de l'axe de rotation : orthogonal ;
 - débattement angulaire : $40^\circ \pm 0,5^\circ$;
 - précision angulaire : $0,2^\circ$;
- ▶ commande simultanée des 16 volets :
 - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère ;
 - nombre d'actionneurs : minimum ;
 - rigidité globale : $\Delta x < 0,2 \text{ mm}$;
 - temps de montée en vitesse : inférieur à 0,1 s.
- ▶ adaptation aux efforts aérodynamiques :
 - résistance : 50% de la limite élastique ;
 - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.



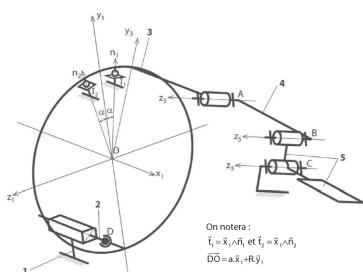
Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide i : $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison L_k , d'un solide j par rapport à un solide i (ou par rapport au référentiel \mathcal{R}_i lié à celui-ci) réduit en A , sera noté $\{\mathcal{V}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$ où $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée associée à la liaison L_k .

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison L_k du solide i sur le solide j , réduit en A sera noté $\{\mathcal{F}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$ où $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée associée à la liaison L_k .

Étude d'une commande avec un seul actionneur



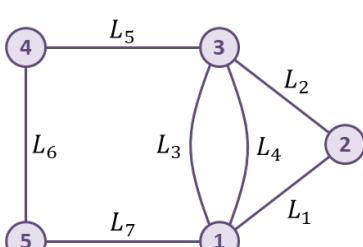
Objectif

On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

On précise que le solide 2 représente la tige du vérin et que les liaisons en I_1 et I_2 représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.

Question 1 Compléter le graphe de structure.

Correction



Liaison	Caractéristique	Torceur cinématique	Torseur statique
L_1	Glissière de direction \vec{x}_1	$\begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}$
L_2	Rotule de centre D \vec{x}_1	$\begin{Bmatrix} p_2 & 0 \\ q_2 & 0 \\ r_2 & 0 \end{Bmatrix}_D$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_D$
L_3	Sphère–plan de normale (I_1, \vec{n}_1)	$\begin{Bmatrix} p_3 & u_3 \\ q_3 & 0 \\ r_3 & w_3 \end{Bmatrix}_{I_1}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_1}$
L_4	Sphère–plan de normale (I_2, \vec{n}_2)	$\begin{Bmatrix} p_4 & u_4 \\ q_4 & 0 \\ r_4 & w_4 \end{Bmatrix}_{I_2}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_2}$
L_5	Pivot (A, \vec{z}_3)	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_5 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_5 & L_5 \\ Y_5 & M_5 \\ Z_5 & 0 \end{Bmatrix}_A$
L_6	Pivot (B, \vec{z}_3)	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_6 & 0 \end{Bmatrix}_B$	$\begin{Bmatrix} X_6 & L_6 \\ Y_6 & M_6 \\ Z_6 & 0 \end{Bmatrix}_B$
L_7	Pivot (C, \vec{z}_3)	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_7 & 0 \end{Bmatrix}_C$	$\begin{Bmatrix} X_7 & L_7 \\ Y_7 & M_7 \\ Z_7 & 0 \end{Bmatrix}_C$

Question 2 Le modèle proposé est-il isostatique ?

Question 3 Déterminer la liaison équivalente L_{eq34} aux deux liaisons L_3 et L_4 situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq34} .

Correction

Les liaisons sont en parallèles, on privilégie donc la méthode statique : $\mathcal{F}_{eq34} = \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_3})\} + \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_4})\} \mathcal{F}_{eq34} = \left\{ \begin{array}{c} Y_3 \vec{n}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{c} Y_4 \vec{n}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} Y_3 \vec{n}_1 + Y_4 \vec{n}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$. \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires. \vec{x}_1 est orthogonal à \vec{n}_1 et \vec{n}_2 . La liaison est donc une sphère cylindre d'axe (O, \vec{x}_1) .

Question 4 Déterminer la liaison équivalente L_{eq12} aux deux liaisons L_1 et L_2 situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq12} .

Correction

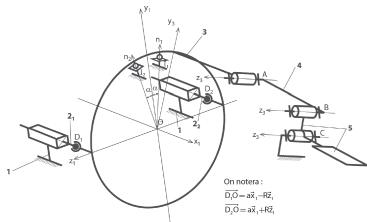
Question 5 Déterminer la liaison équivalente L_{eq12} aux deux liaisons L_{eq34} et L_{eq12} situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}_{eq} . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

Correction

Étude d'une commande avec deux actionneurs

Objectif

On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.



Question 6 À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente L_{eq1} aux liaisons L_{11} , L_{21} et la liaison équivalente L_{eq2} aux liaisons L_{12} et L_{22} entre les solides 1 et 3.

Correction

Question 7 Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente L'_{eq1} aux deux liaisons L_{eq34} , L_{eq1} et L_{eq2} situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles \mathcal{F}'_{eq} puis le torseur cinématique cinématique \mathcal{V}'_{eq} . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins ?

Correction

Étude de la structure adoptée par le constructeur

Objectif

On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

Question 8 Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière ? Vous expliquerez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure ?

Correction

TD 4 :

Robovolc – Sujet

X ENS – PSI 2017.

B2-16

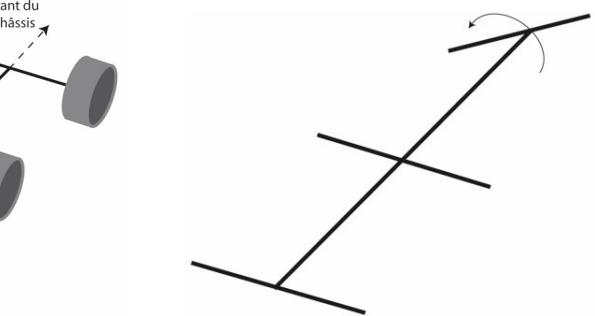
Mise en situation

Objectif

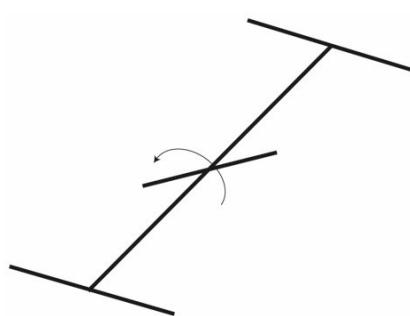
Dans cette sous-partie, on établit un modèle statique du châssis de ROBOVOLC.

La mobilité sur terrain accidenté est obtenue, en plus de par la motorisation indépendante des roues, par l'utilisation d'un châssis articulé. Celui-ci a une structure tubulaire avec des articulations passives (non actionnées) permettant à ROBOVOLC de s'adapter à toute surface non plane. Une illustration des cinq mouvements indépendants permis par les articulations est donnée sur la ??.

Mouvement 1 : rotation de l'essieu avant
autour de l'axe longitudinal

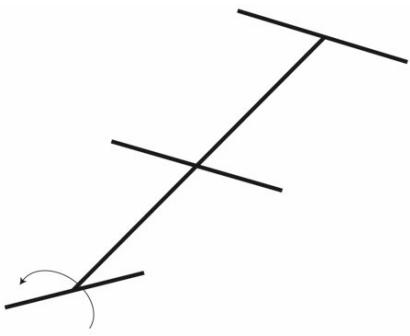


Mouvement 2 : rotation de l'essieu central
autour de l'axe longitudinal

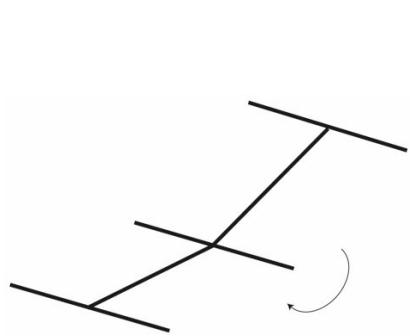


de l'essieu
longitudinal

Mouvement 4 : rotation de l'arbre
avant autour de l'axe transversal



Mouvement 5 : rotation de l'arbre
arrière autour de l'axe transversal



movements de déformation du châssis

Le châssis est composé de cinq parties orientables les unes par rapport aux autres (??) :

- ▶ l'essieu avant, noté EAV, reliant les roues avant 1 et 2;
- ▶ l'essieu central, noté EC, reliant les roues centrales 3 et 4;
- ▶ l'essieu arrière, noté EAR, reliant les roues arrière 5 et 6;
- ▶ l'arbre avant, noté AAV, connectant les essieux EAV et EC;
- ▶ l'arbre arrière, noté AAR, connectant les essieux EC et EAR.

On rappelle que l'empattement entre deux essieux successifs est noté a , et que la distance entre deux roues d'un même essieu est notée $2e$. Les différentes parties sont reliées entre elles par des articulations possédant une raideur en rotation imposée. Par la suite, on supposera cette raideur négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu. Un schéma cinématique de la plateforme (châssis+roues) est présenté sur la ??.

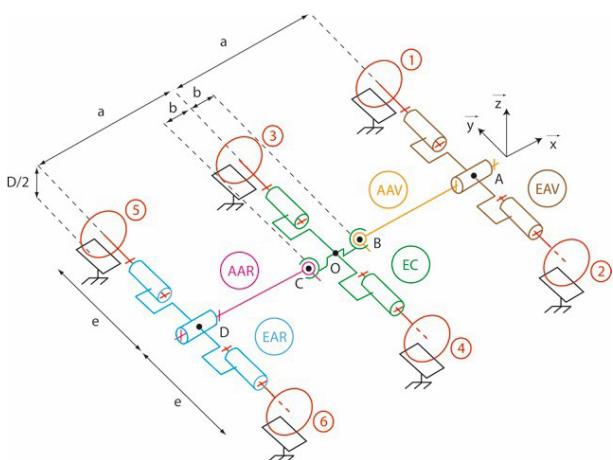


FIGURE 5.10 – Schéma cinématique de la plateforme

Les deux articulations EC-AAV et EC-AAR, situées à une distance longitudinale $\pm b$ de l'essieu EC, autorisent une rotation selon les directions \vec{x} et \vec{y} ; elles sont modélisées par des liaisons rotule à doigt de centres respectifs B et C . Les deux articulations EAV-AAV et EAR-AAR autorisent une rotation selon la direction \vec{x} seulement; elles sont modélisées par des liaisons pivot d'axe (O, \vec{x}) .

D'autre part, les six liaisons essieu-roue sont modélisées par des liaisons pivot d'axe (A, \vec{y}) (roues avant), (O, \vec{y}) (roues centrales) ou (D, \vec{y}) (roues arrière). De plus, le contact de chaque roue i avec le sol est modélisé en première approche par une liaison ponctuelle de normale (P_i, \vec{z}) .

On considère dans les questions ?? et ?? que les liaisons sont parfaites sans frottements.

Question 1 Déterminer le nombre de mobilités du modèle du système.

Question 2 Montrer que le modèle est isostatique. Conclure quant à la capacité du châssis à maintenir les roues au contact du sol en toute circonstance.

Question 3 Proposer un modèle de liaison parfaite pour le contact roue-sol qui permet de tenir compte, dans une étude de statique sans glissement, du frottement longitudinal et transversal. Peut-on calculer toutes les inconnues statiques de liaison dans ce cas ?

TD 4 :

Robovolc – Corrigé

X ENS – PSI 2017.

B2-16

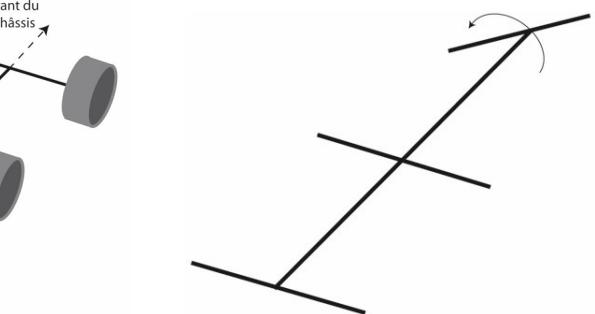
Mise en situation

Objectif

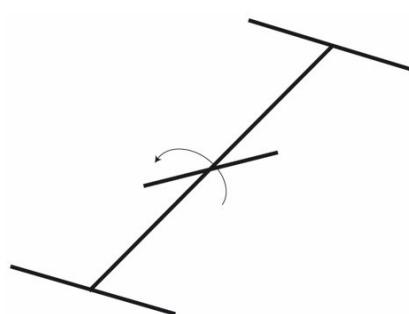
Dans cette sous-partie, on établit un modèle statique du châssis de ROBOVOLC.

La mobilité sur terrain accidenté est obtenue, en plus de par la motorisation indépendante des roues, par l'utilisation d'un châssis articulé. Celui-ci a une structure tubulaire avec des articulations passives (non actionnées) permettant à ROBOVOLC de s'adapter à toute surface non plane. Une illustration des cinq mouvements indépendants permis par les articulations est donnée sur la ??.

Mouvement 1 : rotation de l'essieu avant
autour de l'axe longitudinal

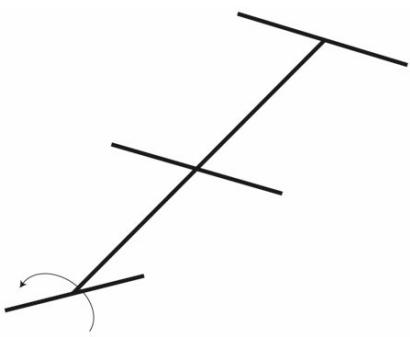


Mouvement 2 : rotation de l'essieu central
autour de l'axe longitudinal

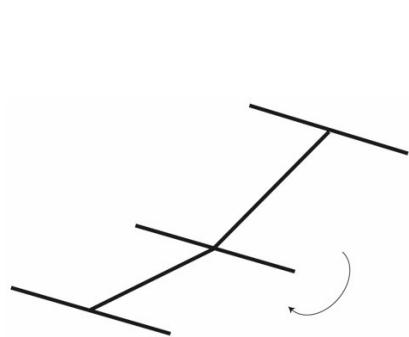


de l'essieu
longitudinal

Mouvement 4 : rotation de l'arbre
avant autour de l'axe transversal



Mouvement 5 : rotation de l'arbre
arrière autour de l'axe transversal



uvements de déformation du châssis

Le châssis est composé de cinq parties orientables les unes par rapport aux autres (??) :

- ▶ l'essieu avant, noté EAV, reliant les roues avant 1 et 2;
- ▶ l'essieu central, noté EC, reliant les roues centrales 3 et 4;
- ▶ l'essieu arrière, noté EAR, reliant les roues arrière 5 et 6;
- ▶ l'arbre avant, noté AAV, connectant les essieux EAV et EC;
- ▶ l'arbre arrière, noté AAR, connectant les essieux EC et EAR.

On rappelle que l'empattement entre deux essieux successifs est noté a , et que la distance entre deux roues d'un même essieu est notée $2e$. Les différentes parties sont reliées entre elles par des articulations possédant une raideur en rotation imposée. Par la suite, on supposera cette raideur négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu. Un schéma cinématique de la plateforme (châssis+roues) est présenté sur la ??.

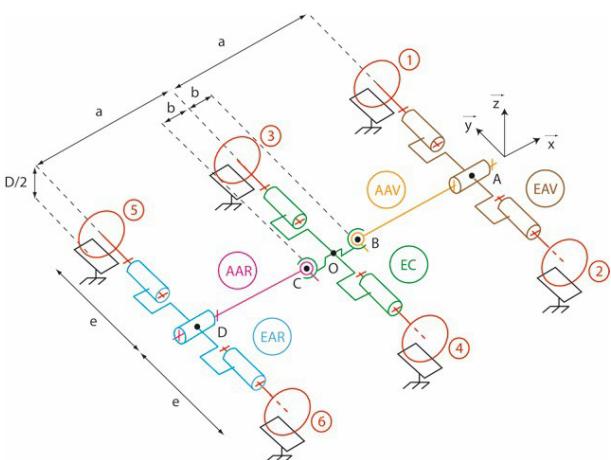


FIGURE 5.12 – Schéma cinématique de la plateforme

Les deux articulations EC-AAV et EC-AAR, situées à une distance longitudinale $\pm b$ de l'essieu EC, autorisent une rotation selon les directions \vec{x} et \vec{y} ; elles sont modélisées par des liaisons rotule à doigt de centres respectifs B et C . Les deux articulations EAV-AAV et EAR-AAR autorisent une rotation selon la direction \vec{x} seulement; elles sont modélisées par des liaisons pivot d'axe (O, \vec{x}) .

D'autre part, les six liaisons essieu-roue sont modélisées par des liaisons pivot d'axe (A, \vec{y}) (roues avant), (O, \vec{y}) (roues centrales) ou (D, \vec{y}) (roues arrière). De plus, le contact de chaque roue i avec le sol est modélisé en première approche par une liaison ponctuelle de normale (P_i, \vec{z}) .

On considère dans les questions ?? et ?? que les liaisons sont parfaites sans frottements.

Question 1 Déterminer le nombre de mobilités du modèle du système.

Question 2 Montrer que le modèle est isostatique. Conclure quant à la capacité du châssis à maintenir les roues au contact du sol en toute circonstance.

Question 3 Proposer un modèle de liaison parfaite pour le contact roue-sol qui permet de tenir compte, dans une étude de statique sans glissement, du frottement longitudinal et transversal. Peut-on calculer toutes les inconnues statiques de liaison dans ce cas ?

Colle 1

Pompe à chaleur à compresseur Scroll – Sujet

XENS – PSI – 2018.

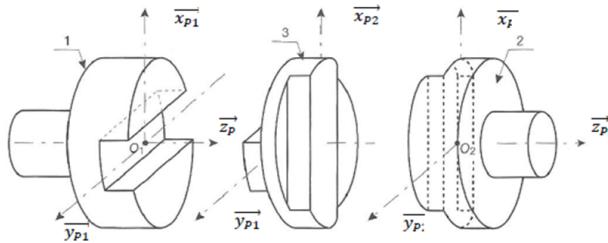
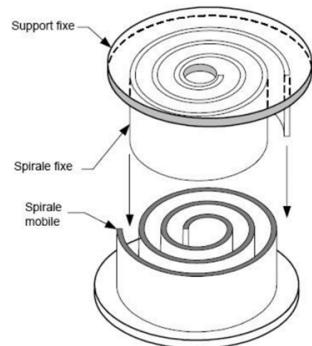
Présentation

Le compresseur Scroll utilise deux spirales de géométrie identique emboîtées l'une dans l'autre. L'une des spirales est fixe tandis que la seconde est mobile et mise en mouvement grâce à un arbre muni d'un excentrique.

Etude préliminaire d'un joint de Oldham

Le joint de Oldham est un accouplement utilisé en général entre 2 axes parallèles mais non-coaxiaux. La figure ci-après en donne les constituants de principe :

- ▶ un arbre d'entrée (noté 1) pouvant tourner autour de l'axe (O_1, \vec{z}_{p1}) par rapport à un bâti;
- ▶ un arbre de sortie (noté 2) pouvant tourner autour de l'axe (O_2, \vec{z}_{p2}) par rapport à un bâti;
- ▶ une pièce intermédiaire appelée en général « noix » ou « croix » (notée 3).

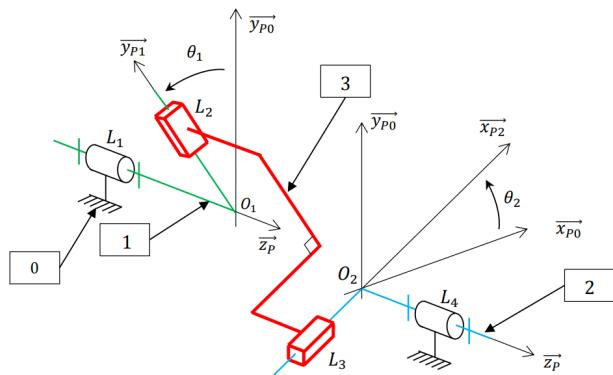


La transmission de la rotation de l'arbre 1 à l'arbre 2 est rendue possible par les caractéristiques des liaisons avec la noix 3 : il est nécessaire d'avoir deux glissières orthogonales au niveau de la noix. Ainsi, on retrouve :

- ▶ une glissière de direction \vec{y}_{p1} entre 1 et 3;
- ▶ une glissière de direction \vec{x}_{p2} entre 3 et 2.

Ces 2 glissières sont par construction constamment orthogonales.

La figure ci-après représente le paramétrage de ce même joint de Oldham avec $\mathcal{B}_0 (\vec{x}_{p0}, \vec{y}_{p0}, \vec{z}_{p0})$ la base fixe liée au bâti 0.



Paramétrage :

- $\overrightarrow{O_1 O_2} = -e \overrightarrow{x_{p1}} + h \overrightarrow{z_0}$;
- $\overrightarrow{L_1 O_1} = l_1 \overrightarrow{z_p}$;
- $\overrightarrow{O_1 L_2} = \lambda_2 \overrightarrow{y_{p1}}$;
- $\overrightarrow{O_2 L_4} = l_2 \overrightarrow{z_p}$
- $\overrightarrow{L_3 O_2} = \lambda_2 \overrightarrow{x_{p2}}$.

Les liaisons entre le bâti 0 et les pièces 1 et 2 sont toutes deux des liaisons pivots d'axes respectifs $(L_1, \overrightarrow{z_p})$ et $(L_4, \overrightarrow{z_p})$.

Question 1 Représenter la figure plane de calcul reliant la base $\mathcal{B}_1 (\overrightarrow{x_{p1}}, \overrightarrow{y_{p1}}, \overrightarrow{z_{p0}})$ à la base \mathcal{B}_0 ainsi que celle reliant la base $\mathcal{B}_2 (\overrightarrow{x_{p2}}, \overrightarrow{y_{p2}}, \overrightarrow{z_{p0}})$ à la base \mathcal{B}_0 . Exprimer $\overrightarrow{y_{p1}}$ et $\overrightarrow{x_{p2}}$ dans la base \mathcal{B}_0 en fonction respectivement de θ_1 et θ_2 .

Question 2 Étant donnée l'orthogonalité entre $\overrightarrow{y_{p1}}$ et $\overrightarrow{x_{p2}}$, montrer que $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$.

On note $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ et $\dot{\theta}_2 = \omega_2$.

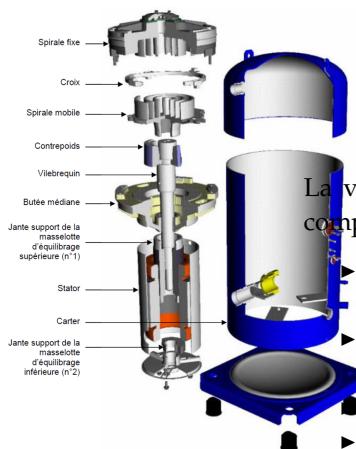
Question 3 Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0, ω_1 , et celle de 2 par rapport à 0, ω_2 , est constant dans le temps.

Question 4 Calculer le degré d'hyperstatisme de ce modèle d'accouplement à partir des grandeurs cinématiques.

Afin de baisser l'hyperstatisme de l'accouplement, une version alternative est proposée en remplaçant les liaisons L_2 et L_3 par des liaisons pivot-glissant toujours d'axes respectifs $(O_1, \overrightarrow{y_{p1}})$ et $(O_2, \overrightarrow{x_{p2}})$.

Question 5 Vérifier, à partir d'une analyse basée sur les grandeurs statiques, que le degré d'hyperstatisme a bien diminué suite à cette modification.

Question 6 Proposer une modification permettant de rendre le système isostatique en conservant sa fonctionnalité.

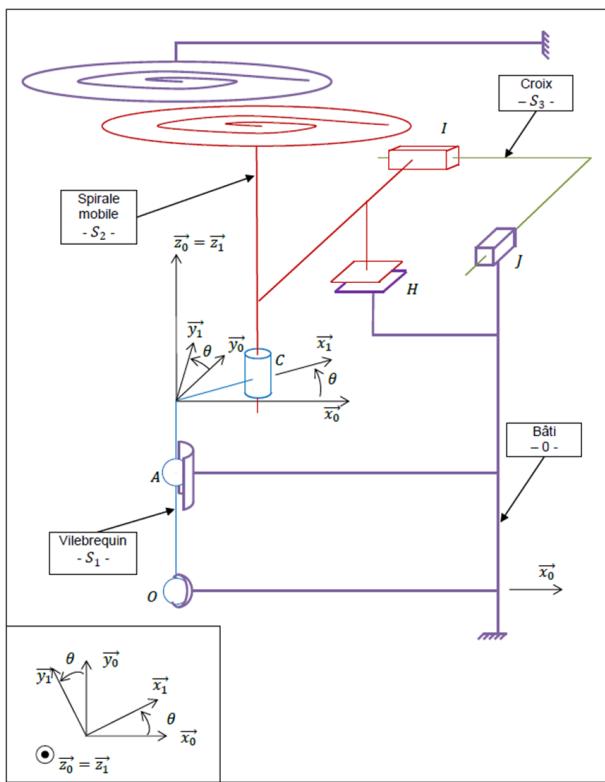


e cinématique du compresseur Scroll complet

La vue éclatée présentée sur la figure suivante permet d'identifier les différents composants du compresseur :

- le bâti fixe composé du carter extérieur, du stator du moteur électrique, de la butée médiane et de la spirale fixe placée en partie haute;
- l'axe principal composé d'un vilebrequin, du rotor moteur, du contrepoids et de masselottes d'équilibrage;
- la spirale mobile;
- la croix.

Le schéma cinématique proposé reprend les éléments précédents en conservant les ensembles cinématiques. Les contacts entre les spirales fixe et mobile sont négligés dans cette modélisation.



Paramétrage :

- $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère associé au bâti 0;
- $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est le repère associé au vilebrequin :

 - la rotation de S_1 par rapport à 0 est repérée par l'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
 - la vitesse de rotation est notée $\omega = \dot{\theta} = 3600 \text{ tr/min}$.

- $\overrightarrow{OA} = a\vec{z}_1$ avec $a = 340 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{AC} = R_{\text{orb}}\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$ avec $R_{\text{orb}} = 8 \text{ mm}$ et $d = 80 \text{ mm}$.

Liaisons supposées parfaites :

- entre le vilebrequin S_1 et le bâti 0 :
 - liaison rotule de centre O ;
 - liaison linéaire annulaire de centre A et d'axe $\overrightarrow{A}z_0$;
- entre le vilebrequin S_1 et la spirale mobile S_2 : liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{z}_0) ;
- entre la spirale mobile S_2 et la croix S_3 : liaison glissière de direction \vec{x}_0 ;
- entre la croix S_3 et le bâti 0 : liaison glissière de direction \vec{y}_0 .

Liaison non parfaite :

- entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0 :
 - liaison appui-plan avec frottement de normale \vec{z}_0 .

Question 7 Tracer le graphe des liaisons du système tel que modélisé sur la Figure précédente en faisant apparaître chaque liaison avec ses caractéristiques.

Question 8 Démontrer par le calcul que l'association des liaisons en O et en A entre le vilebrequin et le carter forme une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) .

Question 9 Indiquer la valeur de l'indice de mobilité du système dans cette modélisation à partir de l'analyse du schéma cinématique. Proposer une démarche qui, sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, permettrait de retrouver analytiquement cette valeur.

Il est intéressant de remarquer que la croix S_3 réalise un accouplement de type joint de Oldham entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0.

Question 10 Justifier alors que la vitesse de rotation de S_2 par rapport à 0 est nulle.

Question 11 Exprimer, dans la base \mathcal{B}_1 , la vitesse instantanée du point C appartenant à S_2 dans son mouvement par rapport à 0. Faire l'application numérique.

Question 12 Déduire des questions précédentes le type de mouvement de la spirale mobile S_2 dans son déplacement par rapport à 0 ainsi que ses qualificatifs et caractéristiques.

Colle 1

Pompe à chaleur à compresseur Scroll – Corrigé

XENS – PSI – 2018.

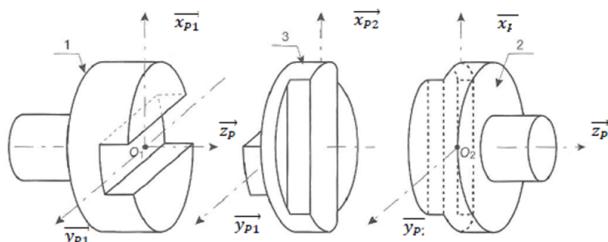
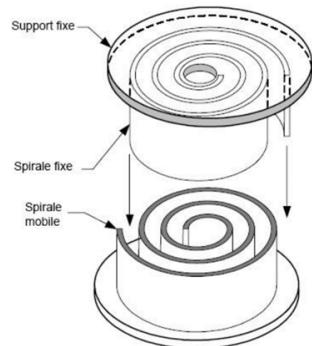
Présentation

Le compresseur Scroll utilise deux spirales de géométrie identique emboîtées l'une dans l'autre. L'une des spirales est fixe tandis que la seconde est mobile et mise en mouvement grâce à un arbre muni d'un excentrique.

Etude préliminaire d'un joint de Oldham

Le joint de Oldham est un accouplement utilisé en général entre 2 axes parallèles mais non-coaxiaux. La figure ci-après en donne les constituants de principe :

- ▶ un arbre d'entrée (noté 1) pouvant tourner autour de l'axe (O_1, \vec{z}_{p1}) par rapport à un bâti;
- ▶ un arbre de sortie (noté 2) pouvant tourner autour de l'axe (O_2, \vec{z}_{p2}) par rapport à un bâti;
- ▶ une pièce intermédiaire appelée en général « noix » ou « croix » (notée 3).

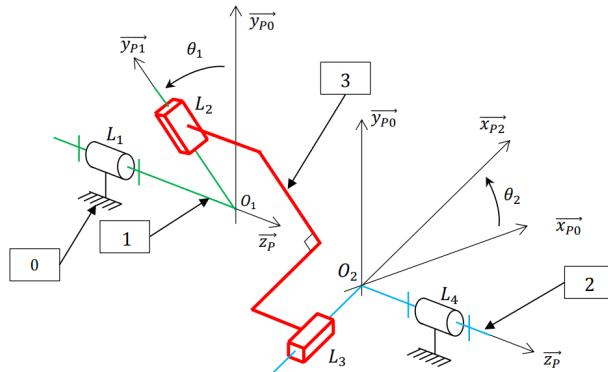


La transmission de la rotation de l'arbre 1 à l'arbre 2 est rendue possible par les caractéristiques des liaisons avec la noix 3 : il est nécessaire d'avoir deux glissières orthogonales au niveau de la noix. Ainsi, on retrouve :

- ▶ une glissière de direction \vec{y}_{p1} entre 1 et 3;
- ▶ une glissière de direction \vec{x}_{p2} entre 3 et 2.

Ces 2 glissières sont par construction constamment orthogonales.

La figure ci-après représente le paramétrage de ce même joint de Oldham avec $\mathcal{B}_0 (\vec{x}_{p0}, \vec{y}_{p0}, \vec{z}_{p0})$ la base fixe liée au bâti 0.



Paramétrage :

- $\overrightarrow{O_1 O_2} = -e \vec{x}_{p0} + h \vec{z}_0$;
- $\overrightarrow{L_1 O_1} = l_1 \vec{z}_p$;
- $\overrightarrow{O_1 L_2} = \lambda_2 \vec{y}_{p1}$;
- $\overrightarrow{O_2 L_4} = l_2 \vec{z}_p$
- $\overrightarrow{L_3 O_2} = \lambda_2 \vec{x}_{p2}$.

Les liaisons entre le bâti 0 et les pièces 1 et 2 sont toutes deux des liaisons pivots d'axes respectifs (L_1, \vec{z}_p) et (L_4, \vec{z}_p) .

Question 1 Représenter la figure plane de calcul reliant la base $\mathcal{B}_1 (\vec{x}_{p1}, \vec{y}_{p1}, \vec{z}_{p0})$ à la base \mathcal{B}_0 ainsi que celle reliant la base $\mathcal{B}_2 (\vec{x}_{p2}, \vec{y}_{p2}, \vec{z}_{p0})$ à la base \mathcal{B}_0 . Exprimer \vec{y}_{p1} et \vec{x}_{p2} dans la base \mathcal{B}_0 en fonction respectivement de θ_1 et θ_2 .

Question 2 Étant donnée l'orthogonalité entre \vec{y}_{p1} et \vec{x}_{p2} , montrer que $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$.

On note $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ et $\dot{\theta}_2 = \omega_2$.

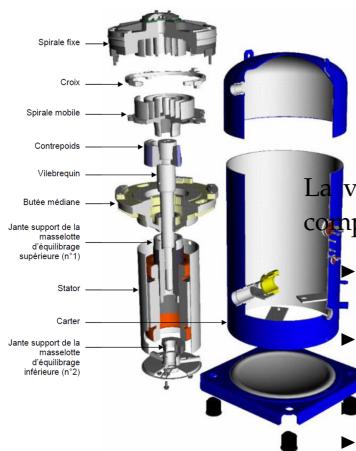
Question 3 Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0, ω_1 , et celle de 2 par rapport à 0, ω_2 , est constant dans le temps.

Question 4 Calculer le degré d'hyperstatisme de ce modèle d'accouplement à partir des grandeurs cinématiques.

Afin de baisser l'hyperstatisme de l'accouplement, une version alternative est proposée en remplaçant les liaisons L_2 et L_3 par des liaisons pivot-glissant toujours d'axes respectifs (O_1, \vec{y}_{p1}) et (O_2, \vec{x}_{p2}) .

Question 5 Vérifier, à partir d'une analyse basée sur les grandeurs statiques, que le degré d'hyperstatisme a bien diminué suite à cette modification.

Question 6 Proposer une modification permettant de rendre le système isostatique en conservant sa fonctionnalité.

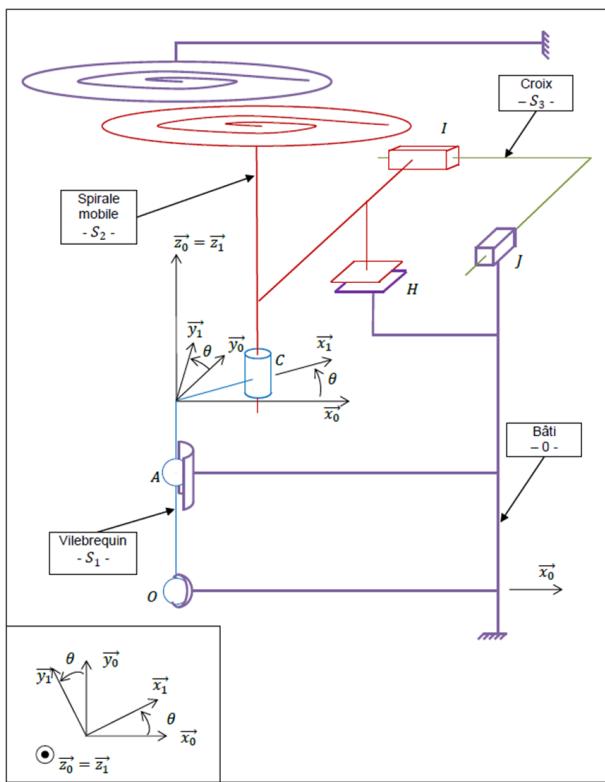


e cinématique du compresseur Scroll complet

La vue éclatée présentée sur la figure suivante permet d'identifier les différents composants du compresseur :

- le bâti fixe composé du carter extérieur, du stator du moteur électrique, de la butée médiane et de la spirale fixe placée en partie haute;
- l'axe principal composé d'un vilebrequin, du rotor moteur, du contrepoids et de masselottes d'équilibrage;
- la spirale mobile;
- la croix.

Le schéma cinématique proposé reprend les éléments précédents en conservant les ensembles cinématiques. Les contacts entre les spirales fixe et mobile sont négligés dans cette modélisation.



Paramétrage :

- $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère associé au bâti 0;
- $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est le repère associé au vilebrequin 1 :
 - la rotation de S_1 par rapport à 0 est repérée par l'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
 - la vitesse de rotation est notée $\omega = \dot{\theta} = 3600 \text{ tr/min}$.
- $\overrightarrow{OA} = a\vec{z}_1$ avec $a = 340 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{AC} = R_{\text{orb}}\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$ avec $R_{\text{orb}} = 8 \text{ mm}$ et $d = 80 \text{ mm}$.

Liaisons supposées parfaites :

- entre le vilebrequin S_1 et le bâti 0 :
 - liaison rotule de centre O ;
 - liaison linéaire annulaire de centre A et d'axe $\overrightarrow{A}z_0$;
- entre le vilebrequin S_1 et la spirale mobile S_2 : liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{z}_0) ;
- entre la spirale mobile S_2 et la croix S_3 : liaison glissière de direction \vec{x}_0 ;
- entre la croix S_3 et le bâti 0 : liaison glissière de direction \vec{y}_0 .

Liaison non parfaite :

- entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0 :
 - liaison appui-plan avec frottement de normale \vec{z}_0 .

Question 7 Tracer le graphe des liaisons du système tel que modélisé sur la Figure précédente en faisant apparaître chaque liaison avec ses caractéristiques.

Question 8 Démontrer par le calcul que l'association des liaisons en O et en A entre le vilebrequin et le carter forme une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) .

Question 9 Indiquer la valeur de l'indice de mobilité du système dans cette modélisation à partir de l'analyse du schéma cinématique. Proposer une démarche qui, sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, permettrait de retrouver analytiquement cette valeur.

Il est intéressant de remarquer que la croix S_3 réalise un accouplement de type joint de Oldham entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0.

Question 10 Justifier alors que la vitesse de rotation de S_2 par rapport à 0 est nulle.

Question 11 Exprimer, dans la base \mathcal{B}_1 , la vitesse instantanée du point C appartenant à S_2 dans son mouvement par rapport à 0. Faire l'application numérique.

Question 12 Déduire des questions précédentes le type de mouvement de la spirale mobile S_2 dans son déplacement par rapport à 0 ainsi que ses qualificatifs et caractéristiques.