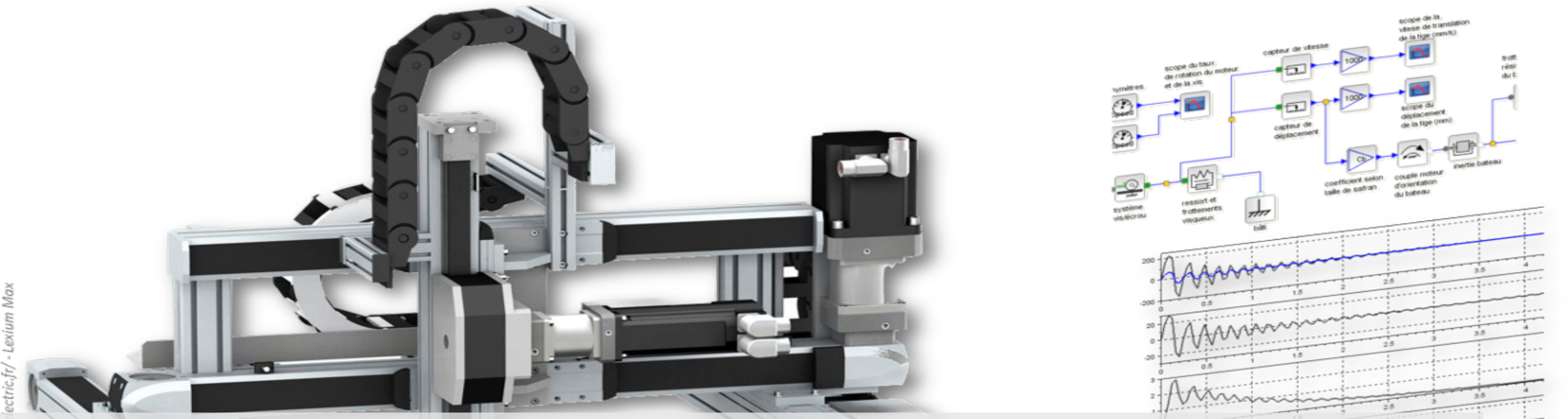


2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

C1-01

C2-03

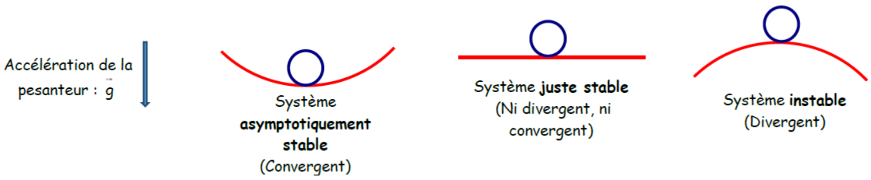
Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.
Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse http://florestan.mathurin.free.fr/.

2.1 Stabilité des systèmes asservis

2.1.1 Notion de stabilité

Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



Premières définitions

Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre ;
- son régime transitoire finit par disparaître ;
- sa sortie finit par ressembler à l'entrée ;
- sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

Remarque

La stabilité d'un système **est indépendante** de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionnelle.

Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro au cours du temps.

Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles $p_i$de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p+z_m)\cdot(p+z_{m-1})\ldots}{(p+p_n)\cdot(p+p_{n-1})\ldots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle.

- les pôles réels (de type $p = -a$) induisent des modes du type e^{-at} ;
- les pôles complexes conjugués (de type $p = -a \pm j\omega$) induisent des modes du type $e^{-at} \sin \omega t$.

On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

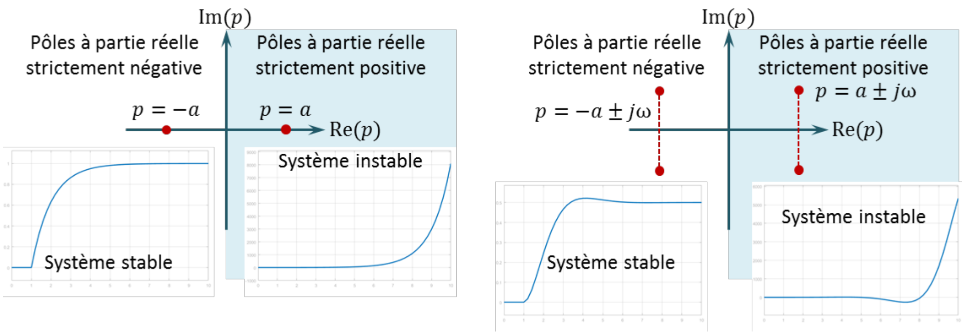


FIGURE 2.1 – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.

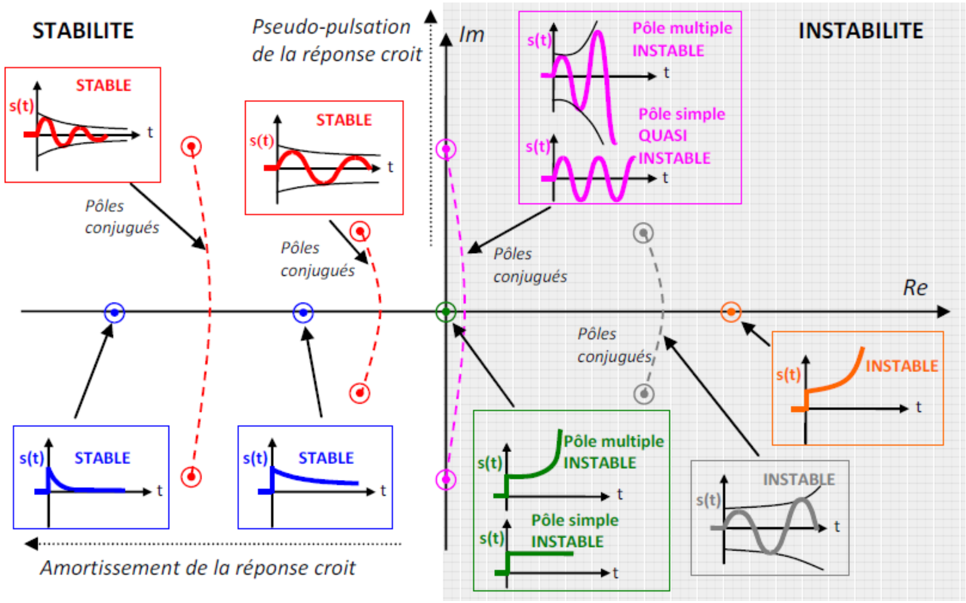


FIGURE 2.2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [**F. Mathurin**].

Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

Remarque

On peut montrer que :

- **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2 a_1 > a_3 a_0$.

Pôles dominants [1]

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

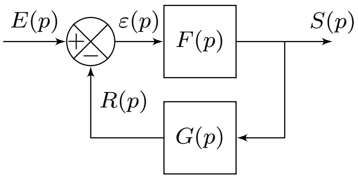
Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

2.1.2 Marges de stabilité

Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO}(p) = \dfrac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$.



La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{F(p)}{1+F(p)G(p)} = \dfrac{F(p)}{1+H_{BO}(p)}$.

Définition – Équation caractéristique

Soit $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p) = 0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1 + H_{BO}(p) = 0$.

Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1 + H_{BO}(p) = 0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p) = -1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1;0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de $-180°$.

Résultat –

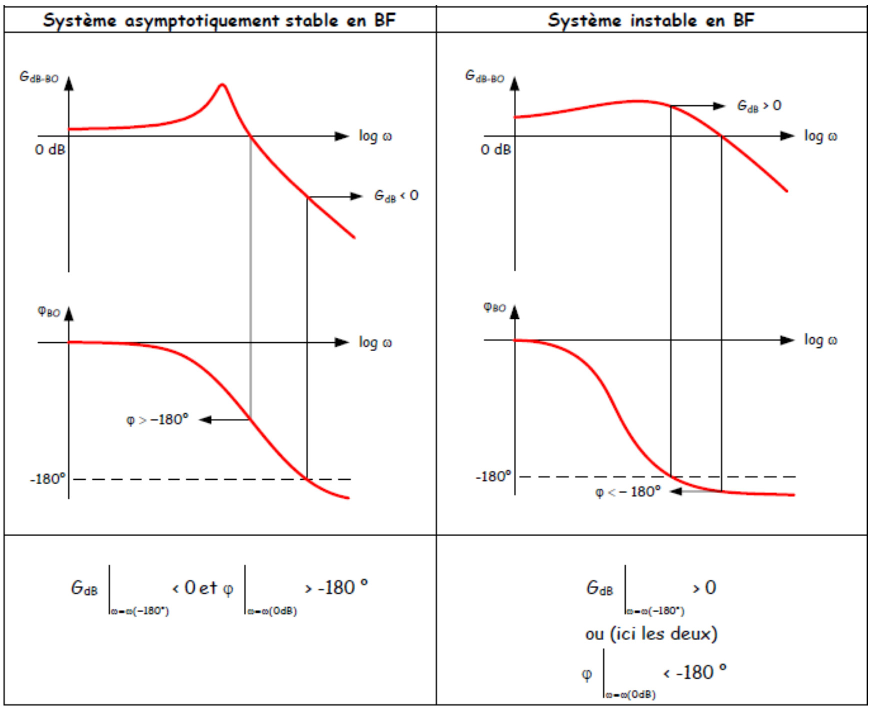
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a** :

$$G_{\text{dB}}\big|_{\omega=\omega_{-180°}} < 0_{\text{dB}} \quad \text{et} \quad \varphi\big|_{\omega=\omega_{0\text{dB}}} > -180°.$$

En notant $\omega_{-180°}$ la pulsation pour laquelle la phase vaut $-180°$ et $\omega_{0\text{dB}}$ la pulsation pour laquelle le gain est nul.

Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens ou le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

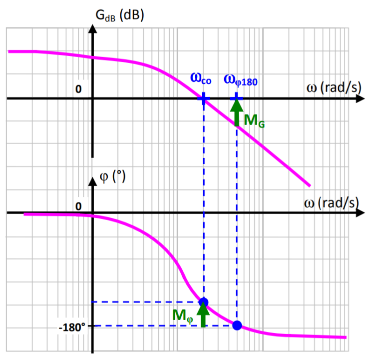
Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considèrera, dans le cas général que le système est stable si :

- la marge de gain est supérieure à 10 dB ;
- la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\varphi = 180° + \arg\left(\text{FTBO}(j\omega_{c0})\right)$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle $20\log\left|\text{FTBO}\left(j\omega_{c0}\right)\right| = 0\,\text{dB}$.



Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20\log\left|\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})\right|$ où $\omega_{\varphi180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180\,°$.

La marge de gain permet compte de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

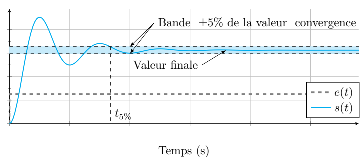
- la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système ;
- le système n'est pas invariant au cours du temps ;
- on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire ;
- certaines non linéarités sont ignorées.

2.2 Rapidité des systèmes asservis

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.
Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse http://florestan.mathurin.free.fr/.

2.2.1 Rappel : critère de rapidité dans le domaine temporel

Temps de réponse à 5%



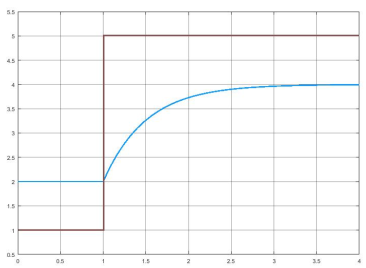
Méthode – Détermination du temps de réponse

En pratique, on détemine le temsp de réponse à 5%.

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

Résultat –

Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.



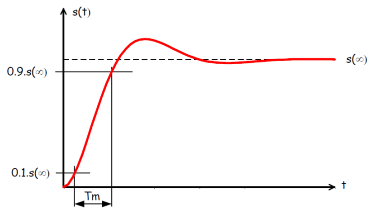
Exemple – Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

Les pièges du temps de réponse à 5% :

- le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini** ;
- si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$;
- si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractériser la « vivacité » d'un système.



2.2.2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par 3τ.

Résultat –

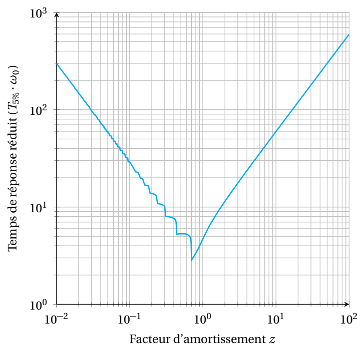
Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par $\text{FTBF}(p) = \dfrac{K}{1+\tau p+K}$. La constante de temps est alors $\tau_{\text{BF}} = \dfrac{\tau}{1+K}$.

Résultat –

Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

Systèmes d'ordre 2



Résultat –

Pour un système du second, à ξ constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient $K_{\text{BF}} = \dfrac{K}{1+K}$, $\omega_{\text{BF}} = \omega_0\sqrt{1+K}$, $\xi_{\text{BF}} = \dfrac{\xi}{\sqrt{1+K}}$.

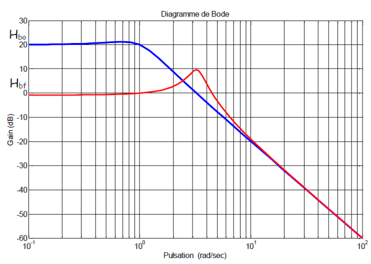
Résultat –

- L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de ξBF le système peut devenir plus ou moins rapide.

2.2.3 Résultats dans le diagramme de Bode

Résultat –

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.



Résultat –

Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.

2.3 Précision des systèmes asservis

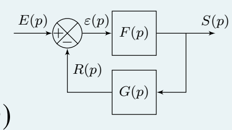
2.3.1 Système non perturbé

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.
Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse http://florestan.mathurin.free.fr/.

Définition –

La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.
Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :



$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p)$$

Définition –

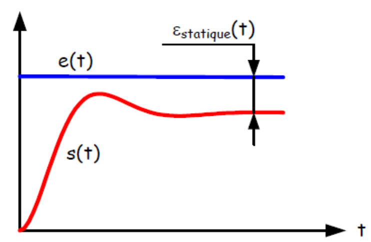
Un système est précis pour une entrée lorsque $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$.

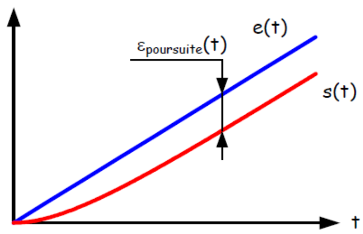
Définition –

~

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

- écart statique, système sollicité par une entrée échelon : $e(t) = E_0$ et $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$;
- écart en vitesse ou en poursuite, système sollicité par une rampe : $e(t) = Vt$ et $E(p) = \dfrac{V}{p^2}$;
- écart en accélération : système sollicité par une parabole, $e(t) = At^2$ et $E(p) = \dfrac{A}{p^3}$.





Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a : $\varepsilon(p) = E(p)-R(p) = E(p)-\varepsilon(p)F(p)G(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = E(p)-\varepsilon(p)F(p)G(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p)\left(1+F(p)G(p)\right) = E(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+F(p)G(p)}$.

Résultat –

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+\text{FTBO}(p)}$$

Poursuivons ...

On a $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p^\alpha\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}$ avec $m<n$.

FTBO de classe nulle

- Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{E_0}{p}\dfrac{1}{1+\text{FTBO}(p)} = \dfrac{E_0}{1+K_{BO}}$.
- Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{V}{p^2}\dfrac{1}{1+\text{FTBO}(p)} = +\infty$.
- Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{A}{p^3}\dfrac{1}{1+\text{FTBO}(p)} = +\infty$.

FTBO de classe 1

- Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{E_0}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = 0$.
- Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{V}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = \dfrac{V}{K_{BO}}$.
- Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{A}{p^3}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = +\infty$.

FTBO de classe 2

- Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{E_0}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p^2\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = 0$.
- Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{V}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p^2\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = 0$.
- Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{A}{p^3}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p^2\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = \dfrac{A}{K_{BO}}$.

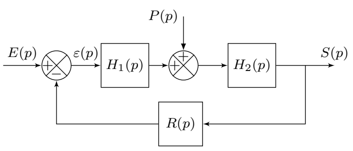
Résultat –

Classe	Consigne échelon $e(t) = E_0$ $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$	Consigne en rampe $e(t) = Vt$ $E(p) = \dfrac{V}{p^2}$	Consigne parabolique $e(t) = At^2$ $E(p) = \dfrac{A}{p^3}$
0	$\varepsilon_S = \dfrac{E_0}{1 + K_{BO}}$	$\varepsilon_V = +\infty$	$\varepsilon_A = +\infty$
1	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = \dfrac{V}{K_{BO}}$	$\varepsilon_A = +\infty$
2	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = 0$	$\varepsilon_A = \dfrac{A}{K_{BO}}$

Remarque

L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

2.3.2 Système perturbé

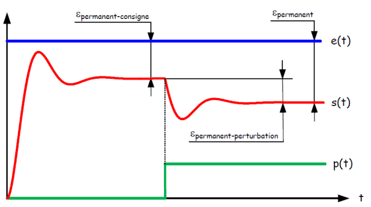


Soit le schéma-blocs ci-contre.

L'écart est caractérisé par le soustracteur principal, c'est-à-dire celui situé le plus à gauche du schéma-blocs.

Par lecture directe, on a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)\left(H_2(p)\left(P(p) + \varepsilon(p)H_1(p)\right)\right)$ $\Longleftrightarrow \varepsilon(p) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + R(p)H_1(p)H_2(p)\right) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)} - \dfrac{R(p)H_2(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p)$.

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\frac{R(p)H_2(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$$



Résultat –

Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain K_1 important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.

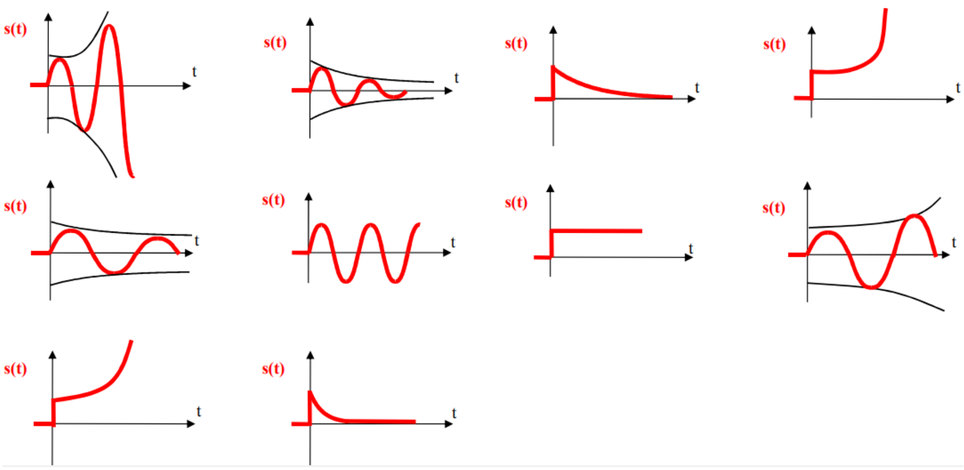
Application 1
Stabilité des systèmes – Sujet

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03



Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

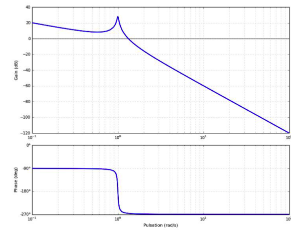
1. $-1, -2$;
2. $-3, -2, 0$;
3. $-2+j, -2-j, 2j, -2j$;
4. $-2+3j, -2-3j, -2$;
5. $-j, j, -1, 1$;
6. $-1, +1$;
7. $-1+j, -1-j$;
8. $2, -1, -3$;
9. $-6, -4, 7$.

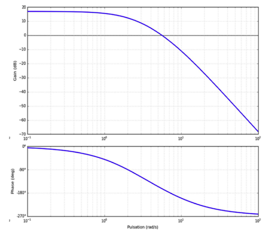
Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

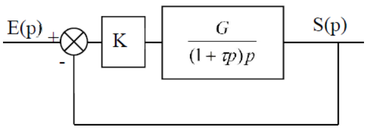




Exercice 4 – Étude de la stabilité

Objectif

- Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45 °.



On donne le schéma ci-contre.

On a $K = 1$, $\tau = 0,1$ et $G = 20$.

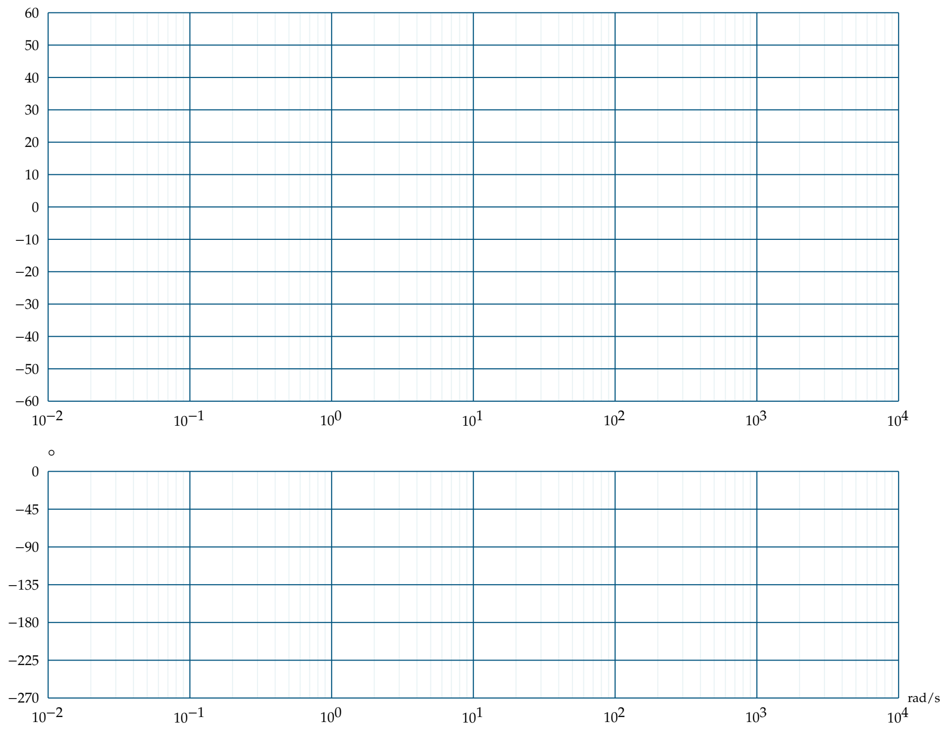
Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.



Application 1
Stabilité des systèmes – Corrigé

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

Exercice 4 – Étude de la stabilité

Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

Correction

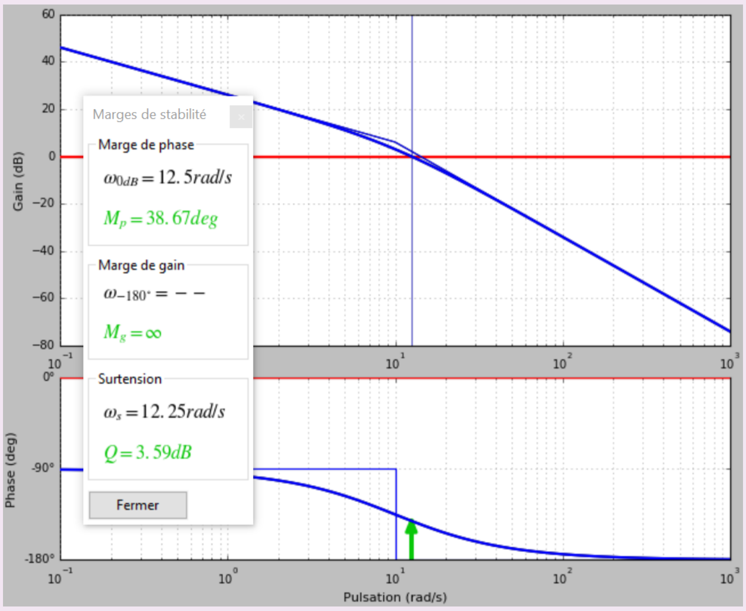
Ici on a $\varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+\text{FTBO}(p)}$.

Erreur statique (entrée échelon) : $\varepsilon_s = \lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{20}{(1+0,1p)p}} =$ 0

Erreur trainage (entrée rampe) : $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{20}{(1+0,1p)p}} =$ 1/20

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Correction



Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Correction

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Correction

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{\text{dB}}(\omega_c) = 0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c) - (-180)$.

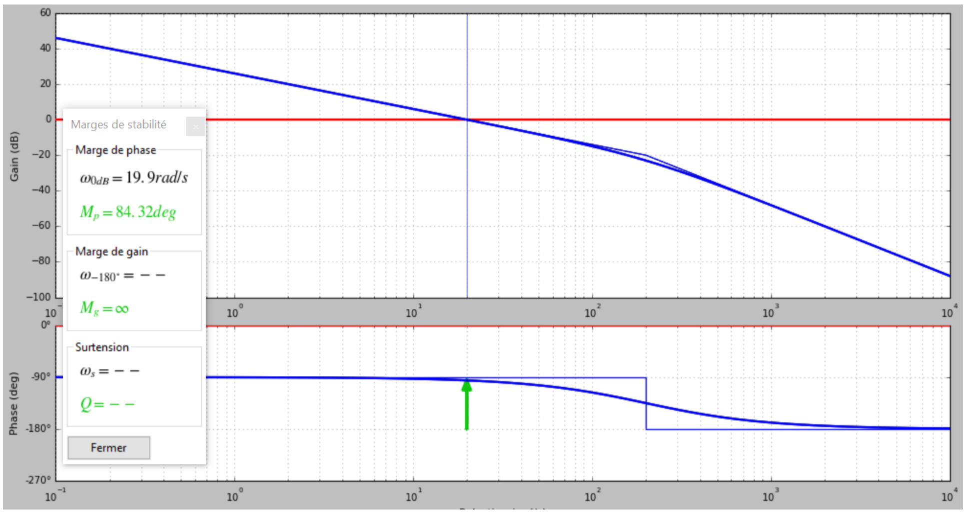
Cherchons ω_c tel que $G_{\text{dB}}(\omega_c) = 0$. On a $\text{FTBO}(j\omega) = \dfrac{20}{(1+0,1j\omega)j\omega} = \dfrac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$.
$20\log|\text{FTBO}(j\omega)| = 20\log 20 - 20\log\sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20\log 20 - 20\log\omega\sqrt{1+0,01\omega^2}$.
$G_{\text{dB}}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c\sqrt{1+0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2\left(1+0,01\omega_c^2\right)$ On pose $x = \omega_c^2$ et on a :
$400 = x\left(1+0,01x\right) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$. On a donc $\Delta = 412,3^2$ et $x_{1,2} = \dfrac{-100 \pm 412,3}{2}$
on conserve la racine positive et $x_1 = 156,15$ et $\omega_c = 12{,}5\,\text{rad s}^{-1}$.
$\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg\left(1 + 0,1j\omega_c\right) = 0 - 90 - \arctan\left(0,1\omega_c\right) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34°$.
La marge de phase est donc de 38,66°.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.

Correction

Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau = 0,005$



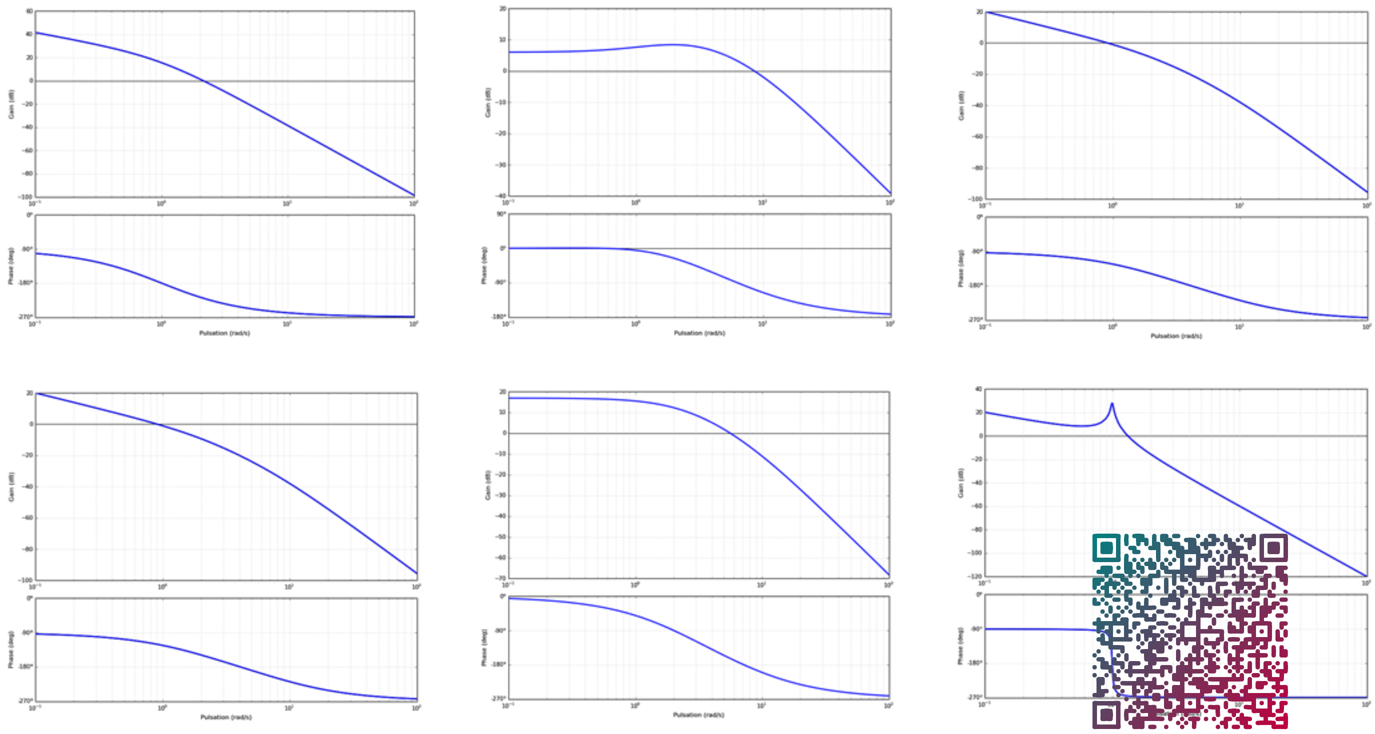
Application 2
Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

C2-03

P. Dupas ?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.



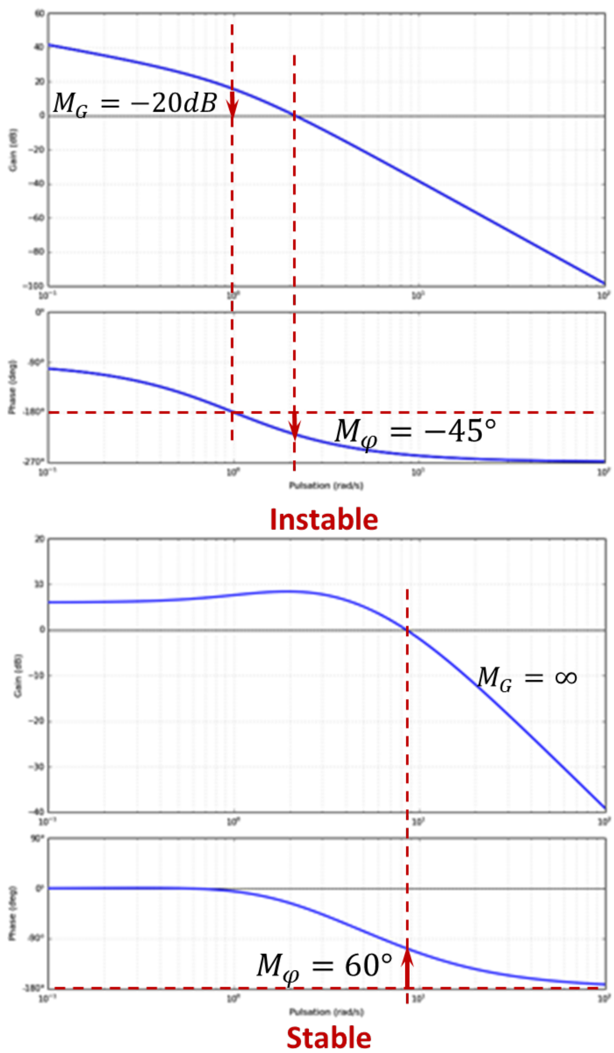
Application 2
Stabilité des systèmes – Corrigé

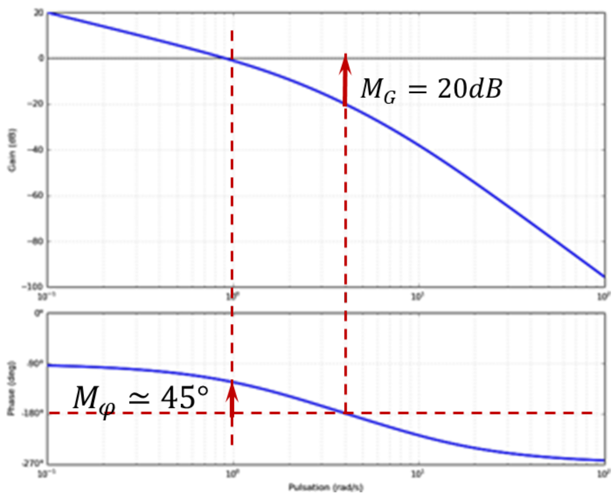
C1-01

C2-03

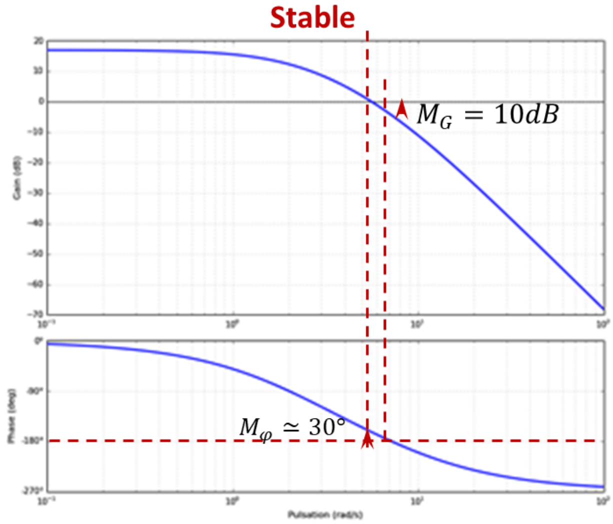
P. Dupas ?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

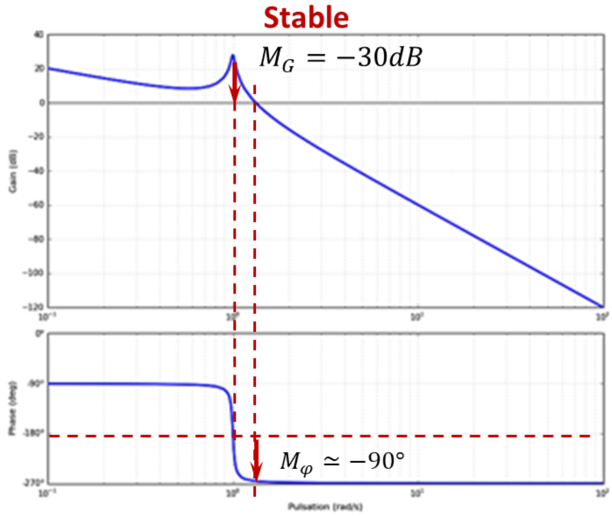




Stable



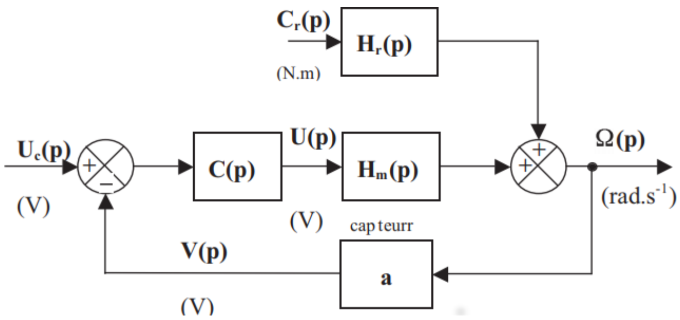
Stable



Stable

Application 3
Précision des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \dfrac{1+0,492p}{1+10,34p+5,1p^2}$ et $K_r = 0{,}37\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}\,\text{N}^{-1}\,\text{m}^{-1}$. $H_m(p) = \dfrac{0,5}{(1+10p)(1+0,5p)}$.
Le gain du capteur est de $a = 2\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}\,\text{s}$.

On considère que $C(p) = K_P$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_P$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \dfrac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

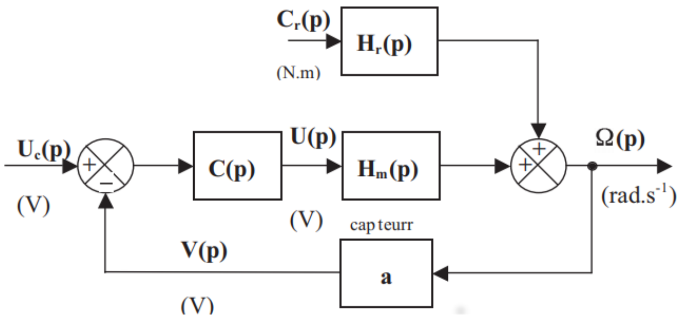
Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \dfrac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

Application 3
Précision des systèmes – Corrigé

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \dfrac{1+0,492p}{1+10,34p+5,1p^2}$ et $K_r = 0{,}37\,\mathrm{rad\,s^{-1}\,N^{-1}\,m^{-1}}$. $H_m(p) = \dfrac{0,5}{(1+10p)\,(1+0,5p)}$.
Le gain du capteur est de $a = 2\,\mathrm{V\,rad^{-1}\,s}$.

On considère que $C(p) = K_P$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_P$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

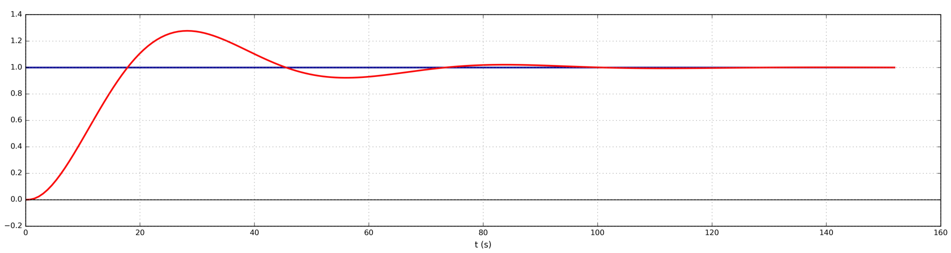
Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \dfrac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

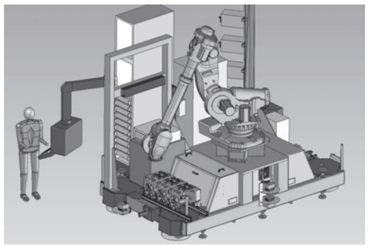
On considère que $C(p) = K_p + \dfrac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



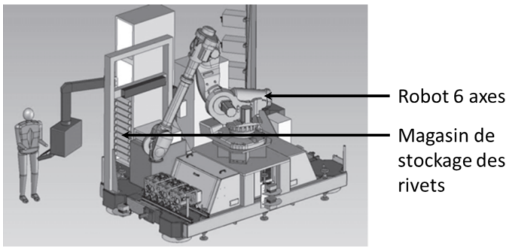
Application 4
Cellule d'assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.



Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



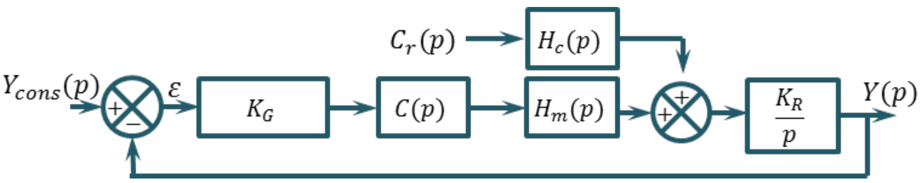
Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant C_r dû à l'action de pesanteur est supposé constant.

$H_M(p) = \dfrac{K_M}{(1+T_E p)(1+T_M p)}$ et $H_C(p) = \dfrac{\dfrac{(R+Lp)\,K_M}{K_C}}{(1+T_E p)(1+T_M p)}$.



Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

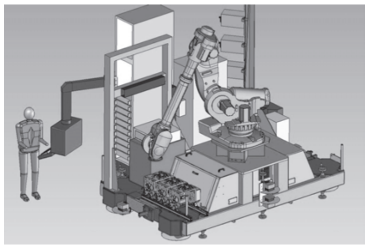
Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

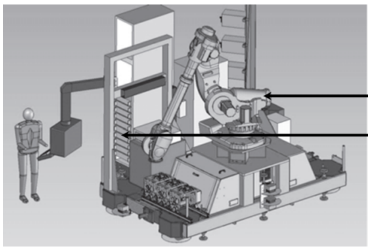
Application 4
Cellule d'assemblage pour avion Falcon Corrigé

E3A – PSI 2015.



Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :
Si $C_r(p) = 0$:

$$\begin{aligned}
Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \dfrac{\dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\
&= Y_{\text{cons}}(p) \dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\
&= Y_{\text{cons}}(p) \dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p) p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r)}
\end{aligned}$$

.

Correction

Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$\begin{aligned}
Y_2(p) &= C_r(p) \dfrac{\dfrac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \dfrac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\
&= C_r(p) \dfrac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\
&= C_r(p) \dfrac{\dfrac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C}}{(1 + T_E p)(1 + T_M p) p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M}
\end{aligned}$$

On a donc : $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

TD 1
Direction automobile découplée – Sujet

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découplée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de typé télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.12).

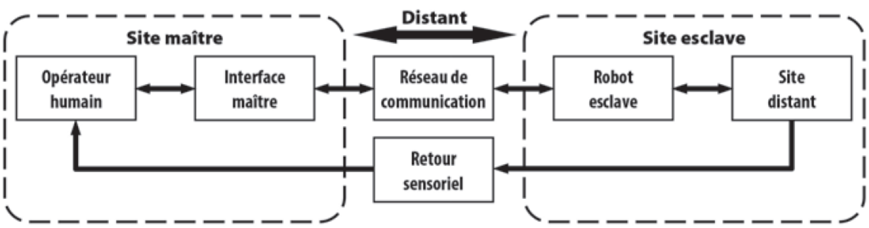


Figure 2.3 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découplée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.19) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.13.

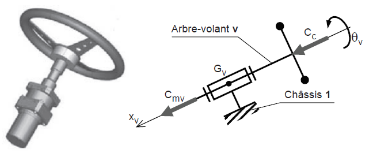


Figure 2.4 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant ;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v\left(G_v\right)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe $\left(G_v, \overrightarrow{x_v}\right)$;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot ;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace) ;

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen ;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot ;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f\vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c\vec{x}_v$ et $C_{\text{mv}}\vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.14 où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{\text{c v}}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv}.

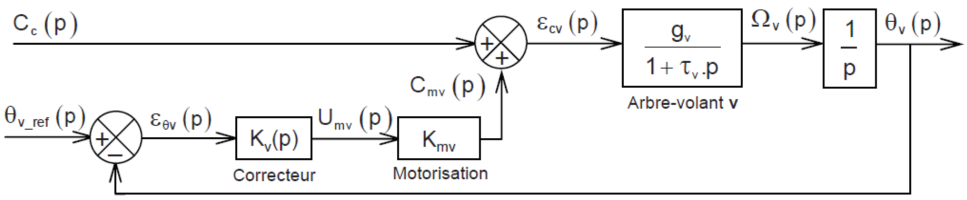


Figure 2.5 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}\,\text{N}^{-1}\,\text{m}^{-1}$; $\tau_v = 0{,}1\,\text{s}$ et $K_{\text{mv}} = 0{,}4\,\text{N}\,\text{m}\,\text{V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv}.

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \dfrac{1+\tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p)\varepsilon_{\theta v}(p)$ sous la forme $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1}\dfrac{1}{p^2}H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i.

On donne $\varepsilon_{\theta v}(p) = \dfrac{\theta_{\text{v\_ref}}(p)}{1+\text{FTBO}_{\text{v1}}(p)} - \dfrac{g_v}{p\,(1+\tau_v p)} \cdot \dfrac{C_C(p)}{1+\text{FTBO}_{v1}(p)}$.

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne Figure 2.20 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0{,}5\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\mathrm{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\mathrm{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

On donne (Figure 2.15) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α.

On note :

- $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\mathrm{Arg}[H(j\omega)]$;
- ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45°$.

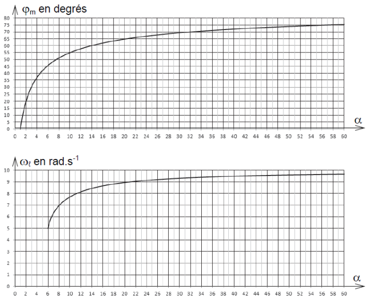


Figure 2.6 – Abaques de réglage de H(p) en fréquentiel

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0, fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis (Figure 2.15) pour justifier la réponse.

On donne (Figure 2.16), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1er dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

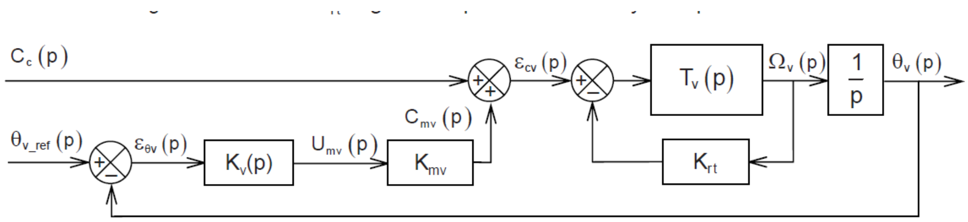


Figure 2.8 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\mathrm{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\mathrm{vrt}}(p)\varepsilon_{\mathrm{cv}}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt}. Mettre alors $T_{\mathrm{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\mathrm{vrt}}(p) = T_v(p)\beta\dfrac{1+\tau_v p}{1+\beta\tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v.

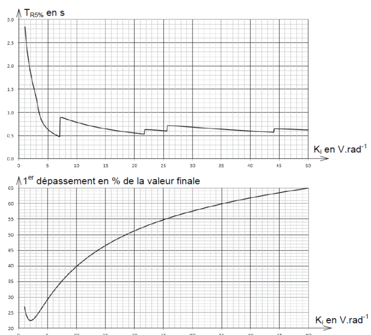


Figure 2.7 – Abaques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\mathrm{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \mathrm{FTBO}_{v2}(p)\varepsilon_{\theta v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\mathrm{FTBO}_{v2}(p) = K_{\mathrm{BOv2}}\dfrac{1}{p^2}\dfrac{1+\alpha\tau_v p}{1+\beta\tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv}, g_v, τ_v, K_i, α et β.

On donne sur la Figure 2.20 le tracé du lieu de transfert de la $\mathrm{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1{,}2\,\mathrm{V\,rad^{-1}}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (Figure 2.18), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d'angle $\theta_{\text{v\_ref}}$, en fonction de la marge de phase du système, réglé avec $\beta = 1/6$.

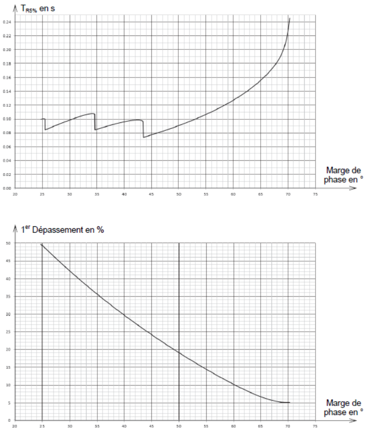


Figure 2.9 – Abaques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique

Question 12 Donner par lecture des abaques (Figure 2.18), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.

Question 13 Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de $\text{FTBO}_{v2}(p)$, tracé dans les conditions de la question 11,la valeur de K_i permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

Question 14 Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

Question 15 Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système ?

Éléments de correction

1. .
2. $K_{\text{BOv1}} = \dfrac{K_i K_{\text{mv}} g v}{\alpha \tau_v}$ et $H(p) = \dfrac{1+\alpha\tau_v p}{1+\tau_v p}$, $\alpha > 1$.
3. $K_i \geq 10\alpha \dfrac{\tau v}{K_{\text{mv}}}$ et $K_i \geq 25\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.
4. .
5. $K_i = 5\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \dfrac{1}{1+K_{\text{rt}} g v}$
10. $K_{\text{BOv2}} = \dfrac{K_i K_{\text{mv}} \beta g v}{\alpha \tau_v}$.
11. .
12. $M_\varphi = 58°$.
13. $K_i = 120\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.
14. .
15. .

Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.	1- Pulsation de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0	30 rad/s (≈ 5 Hz)	mini
	2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée)	0,1 s	± 20 ms
	3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle		
	– pour une consigne en échelon	nulle	aucune
	– pour une consigne en rampe de pente Ω_{v0}	≤ 0,5% de Ω_{v0}	± 0,2%
	4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple		
	– pour une perturbation en échelon	nulle	aucune
	– pour une perturbation en rampe de pente C_{c0}	≤ 10% de C_{c0}	± 5%
	5- Stabilité		
	– Marge de phase	45°	mini
	– Marge de gain	20 dB	mini
	6- Amortissement		
	– 1er dépassement en réponse indicielle (boucle fermée)	0%	15% maxi

Figure 2.10 – Exigences

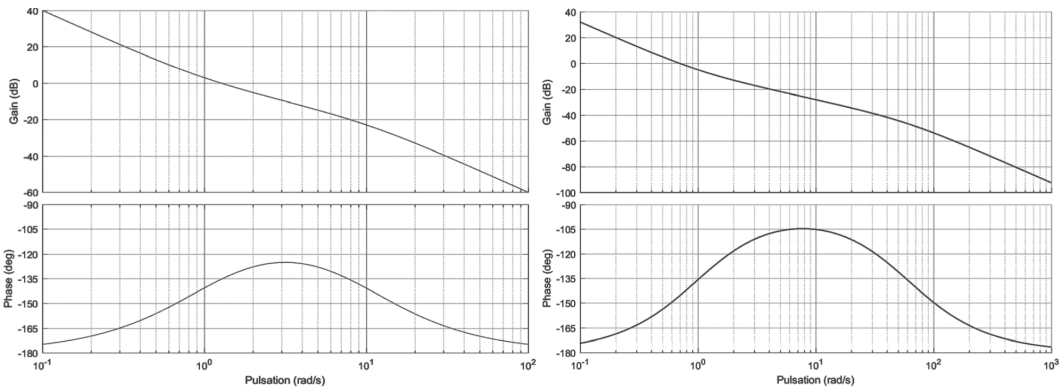


Figure 2.11 – Lieux de transfert de $\text{FTBO}_{v1}(p)$ et $\text{FTBO}_{v2}(p)$

TD 1
Direction automobile découplée – Corrigé

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découplée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de typé télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 2.12).

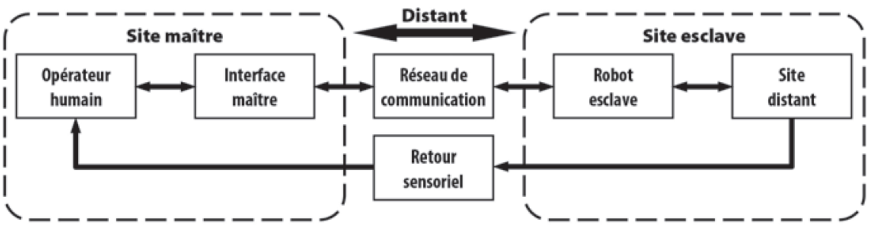


FIGURE 2.12 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découplée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 2.19) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure Figure 2.13.

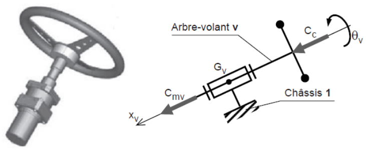


FIGURE 2.13 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v\left(G_v\right)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe $\left(G_v, \overrightarrow{x_v}\right)$;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen ;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot ;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x_v}$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x_v}$ et $C_{mv} \vec{x_v}$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 2.14 où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{c\,v}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv}.

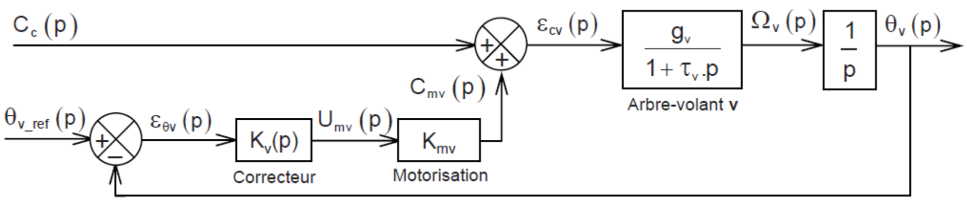


Figure 2.14 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}\,\text{N}^{-1}\,\text{m}^{-1}$; $\tau_v = 0{,}1\,\text{s}$ et $K_{mv} = 0{,}4\,\text{N}\,\text{m}\,\text{V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv}.

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \dfrac{1+\tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

Correction

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p)\varepsilon_{\theta v}(p)$ sous la forme $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1}\dfrac{1}{p^2}H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

Correction

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i.

On donne $\varepsilon_{\theta v}(p) = \dfrac{\theta_{\text{v\_ref}}(p)}{1+\text{FTBO}_{\text{v1}}(p)} - \dfrac{g_v}{p\,(1+\tau_v p)} \cdot \dfrac{C_C(p)}{1+\text{FTBO}_{v1}(p)}$.

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

Correction

On donne Figure 2.20 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0{,}5\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Correction

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

Correction

On donne (Figure 2.15) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α.

On note :

- $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45°$.

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0, fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis (Figure 2.15) pour justifier la réponse.

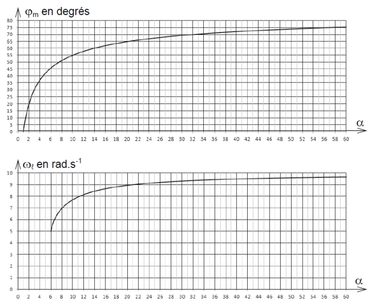


Figure 2.15 – Abaques de réglage de H(p) en fréquentiel

Correction

On donne (Figure 2.16), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1er dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

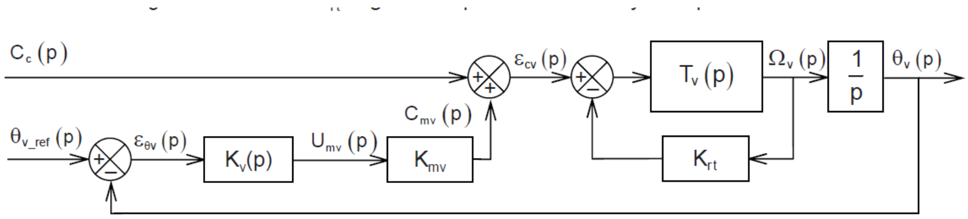


Figure 2.17 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Correction

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\varepsilon_{\text{cv}}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt}. Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta\dfrac{1+\tau_v p}{1+\beta\tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v.

Correction

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\varepsilon_{\theta v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}}\dfrac{1}{p^2}\dfrac{1+\alpha\tau_v p}{1+\beta\tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv}, g_v, τ_v, K_i, α et β.

Correction

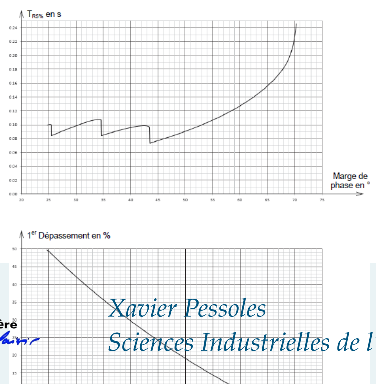
On donne sur la Figure 2.20 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1{,}2\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

Correction

On donne (Figure 2.18), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d'angle $\theta_{\text{v\_ref}}$, en fonction de la marge de phase du système, réglé avec $\beta = 1/6$.

Question 12 Donner par lecture des abaques (Figure 2.18), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.



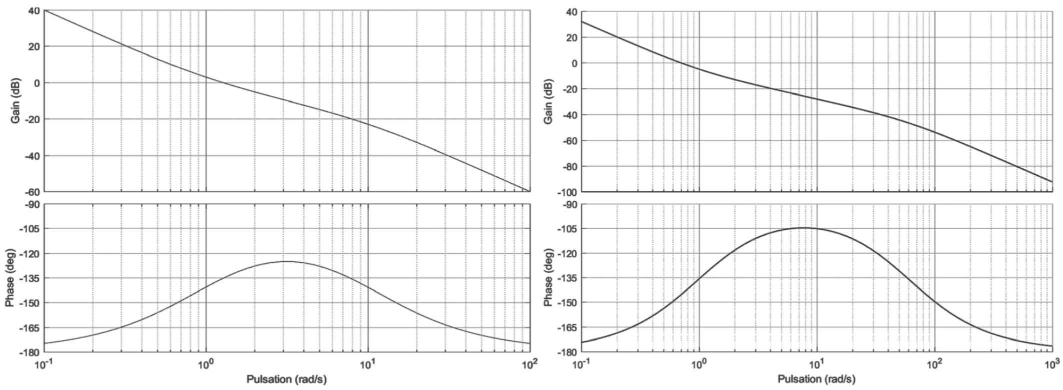


Figure 2.20 – Lieux de transfert de $\text{FTBO}_{\text{v1}}(p)$ et $\text{FTBO}_{\text{v2}}(p)$

Correction

Question 13 Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de $\text{FTBO}_{v2}(p)$, tracé dans les conditions de la question 11,la valeur de K_i permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

Correction

Question 14 Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

Correction

Question 15 Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système ?

Correction

Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.	1- Pulsation de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0	30 rad/s (≈ 5 Hz)	mini
	2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée)	0,1 s	± 20 ms
	3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle		
	– pour une consigne en échelon	nulle	aucune
	– pour une consigne en rampe de pente $\boldsymbol{\Omega}_{v0}$	≤ 0,5% de $\boldsymbol{\Omega}_{v0}$	± 0,2%
	4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple		
	– pour une perturbation en échelon	nulle	aucune
	– pour une perturbation en rampe de pente C_{c0}	≤ 10% de C_{c0}	± 5%
	5- Stabilité		
	– Marge de phase	45°	mini
	– Marge de gain	20 dB	mini
	6- Amortissement		
	– 1er dépassement en réponse indicielle (boucle fermée)	0%	15% maxi

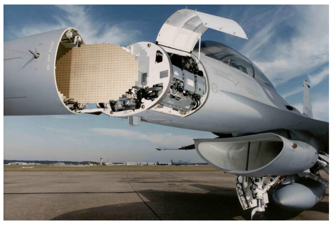
Figure 2.19 – Exigences

Éléments de correction

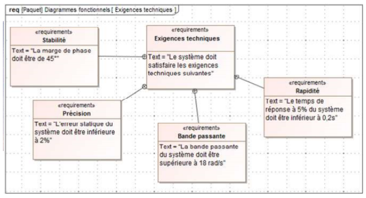
1. .
2. $K_{\text{BOv1}} = \dfrac{K_i K_{\text{mv}} g_v}{\alpha \tau_v}$ et $H(p) = \dfrac{1+\alpha\tau_v p}{1+\tau_v p}, \alpha > 1$.
3. $K_i \geq 10\alpha \dfrac{\tau_v}{K_{\text{mv}}}$ et $K_i \geq 25\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.
4. .
5. $K_i = 5\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \dfrac{1}{1+K_{\text{rt}} g_v}$
10. $K_{\text{BOv2}} = \dfrac{K_i K_{\text{mv}} \beta g_v}{\alpha\tau_v}$.
11. .
12. $M_\varphi = 58°$.
13. $K_i = 120\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.
14. .
15. .

TD 2
Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.



Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.



On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ $(B < 1)$, $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e\omega_m(t)$, $J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Avec :

- $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur) ;
- $e(t)$: force contre-électromotrice (en V) ;
- $i(t)$: intensité (en A) ;
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s) ;
- $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner) ;
- J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m^2) :
- R : résistance électrique du moteur ;
- k_e : constante de force contre-électromotrice ;
- k_m : constante de couple.

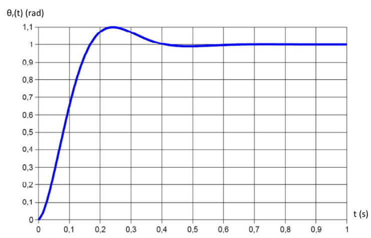
Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \dfrac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m.

Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :



Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K, z et ω_0.

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15\,\mathrm{rad/s}$.

Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est : $H(p) = \dfrac{1}{(1+0,05p)(1+0,0005p)(1+0,002p)}$.

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

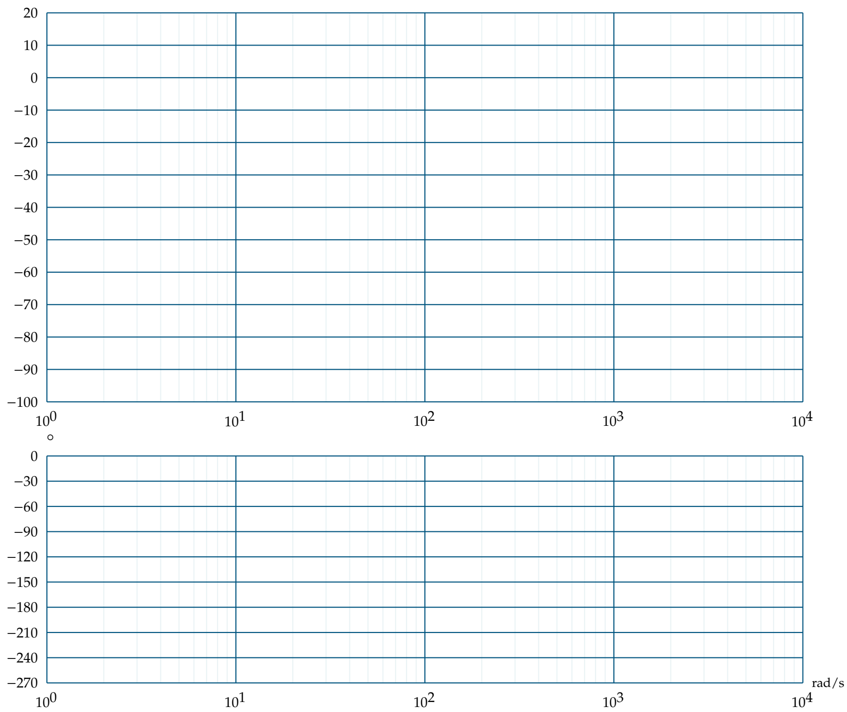
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10\,\text{rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2\sin(10t)$.

Pour $\omega < 20\,\text{rad/s}$, on a $H(p) \simeq \dfrac{1}{1+0,05p}$.

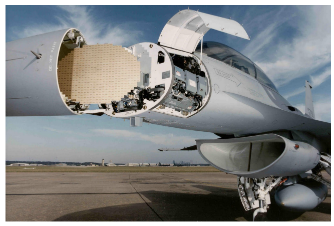
Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

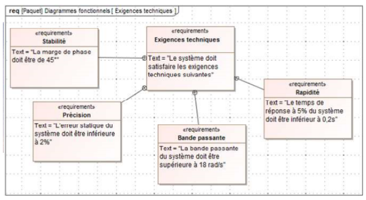
Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 2
Radar d'avion – Corrigé

F. Mathurin.





Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ $(B < 1)$, $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e\omega_m(t)$, $J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Avec :

- $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur) ;
- $e(t)$: force contre-électromotrice (en V) ;
- $i(t)$: intensité (en A) ;
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s) ;
- $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner) ;
- J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m^2) :
- R : résistance électrique du moteur ;
- k_e : constante de force contre-électromotrice ;
- k_m : constante de couple.

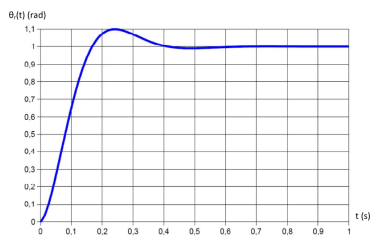
Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \dfrac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m.

Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :



Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K, z et ω_0.

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15\,\mathrm{rad/s}$.

Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est : $H(p) = \dfrac{1}{(1+0,05p)\,(1+0,0005p)\,(1+0,002p)}$.

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

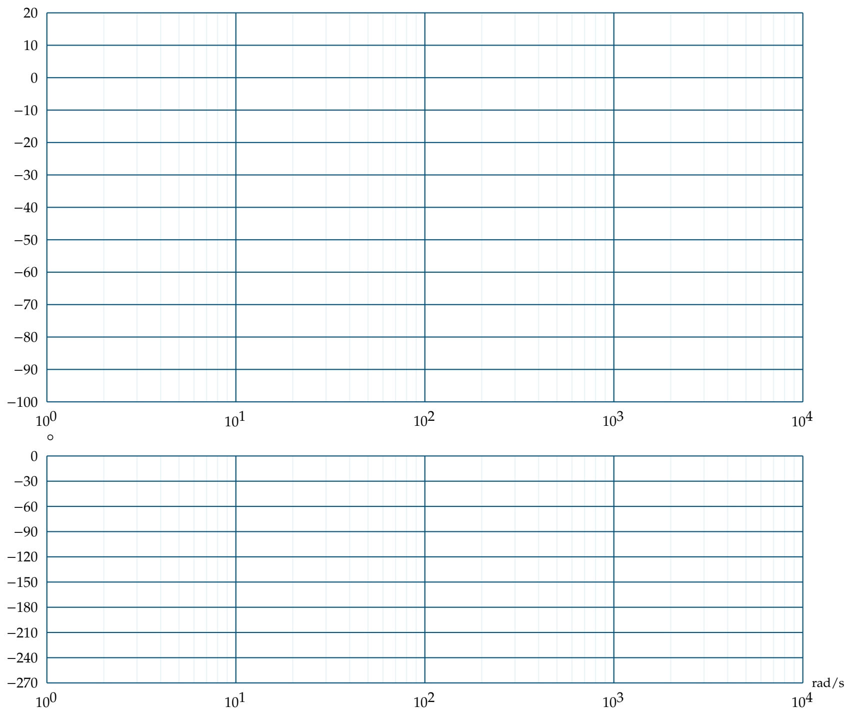
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10\,\text{rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2\sin(10t)$.

Pour $\omega < 20\,\text{rad/s}$, on a $H(p) \simeq \dfrac{1}{1+0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

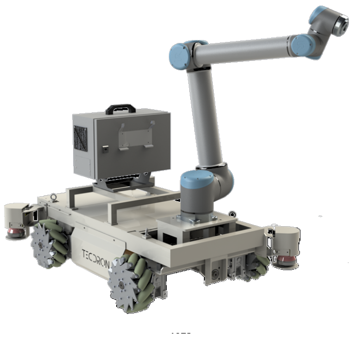
Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 3
Base TC200 Tecdron – Sujet

Centrale Supelec TSI 2021.

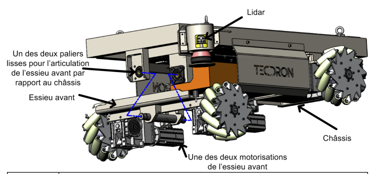
C2-03

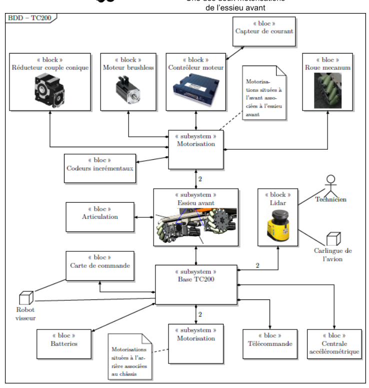


Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.





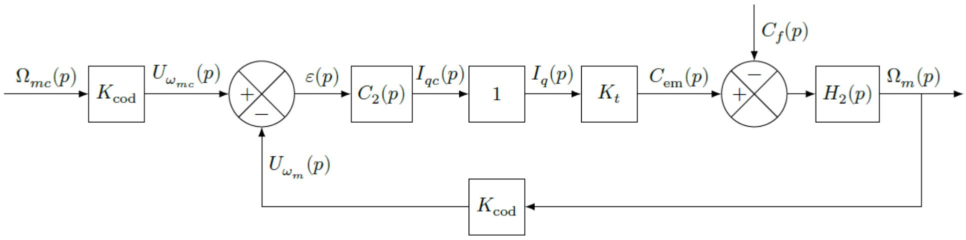
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.
Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.

Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0}	$\mu_{v\infty} < 1\,\%$
	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq$ 100 rad s^{-1} pour une pente de 1800 rad s^{-1}
Rapidité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180$ ms
Stabilité	Dépassement maximal	$\leq 10\,\%$
	Marge de phase	$\geq 60°$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	K_{cod}	0,2 V s rad^{-1}
Constante de couple	K_t	0,09 N m A^{-1}
Correteur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \dfrac{1}{J_{eq}p}$	$J_{eq} = 1,5 \times 10^{-2}$kg m^2

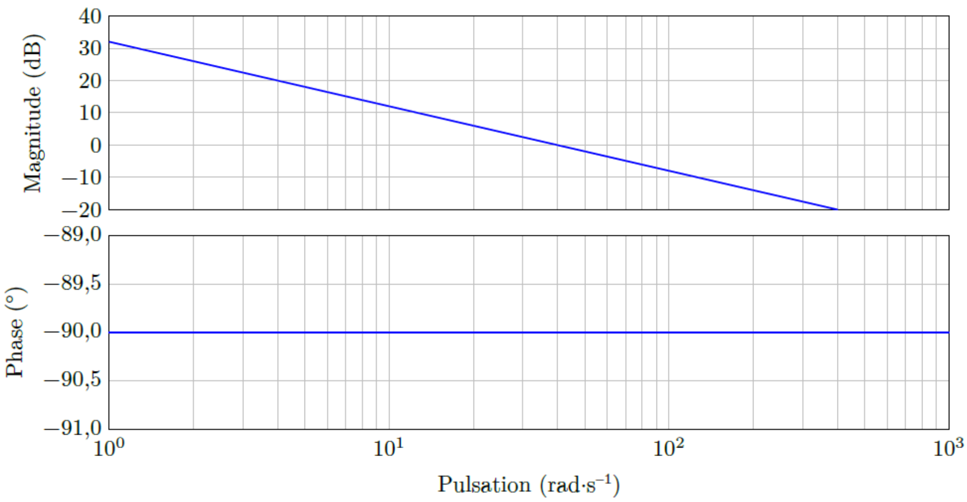
Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0}.

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



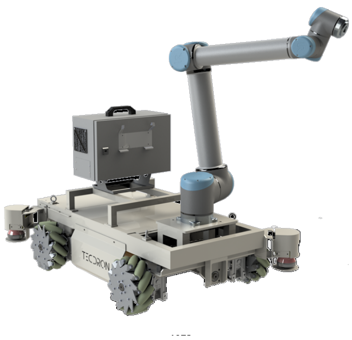
Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

TD 3
Base TC200 Tecdron – Corrigé

Centrale Supelec TSI 2021.

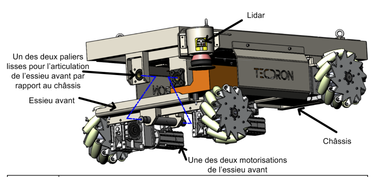
C2-03

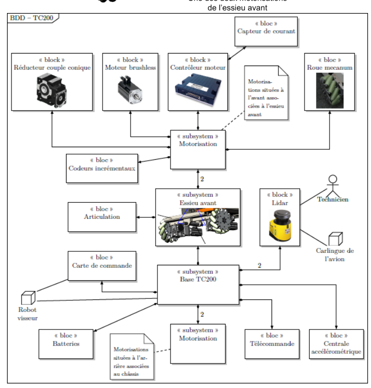


Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.





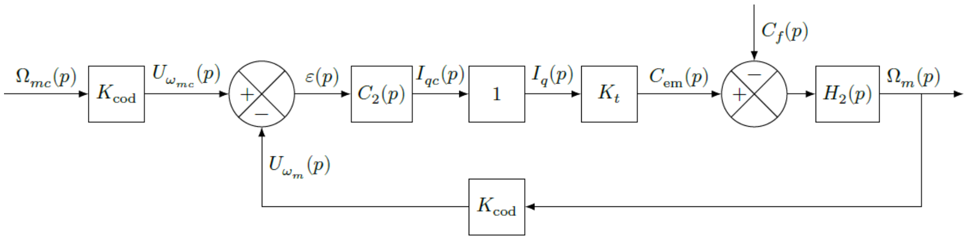
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.
Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.

Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0}	$\mu_{v\infty} < 1\,\%$
	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ pour une pente de $1800\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$
Rapidité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180\,\text{ms}$
Stabilité	Dépassement maximal	$\leq 10\,\%$
	Marge de phase	$\geq 60°$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	K_{cod}	$0{,}2\,\text{V}\,\text{s}\,\text{rad}^{-1}$
Constante de couple	K_t	$0{,}09\,\text{N}\,\text{m}\,\text{A}^{-1}$
Correteur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \dfrac{1}{J_{\text{eq}}p}$	$J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2}\text{kg}\,\text{m}^2$

Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Correction

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Correction

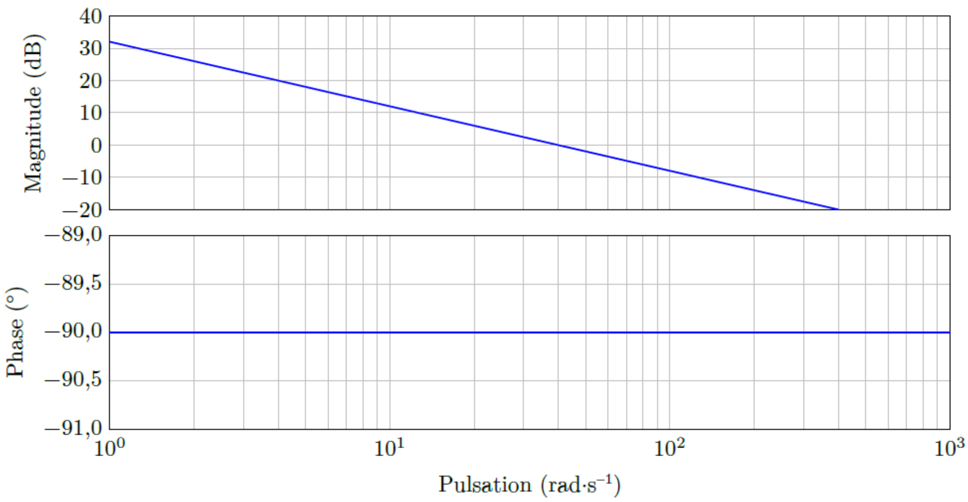
Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Correction

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0}.

Correction

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Correction

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

Correction