

11 Approche énergétique

11.1 Introduction

11.1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- ▶ dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible ;
- ▶ déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système ;
- ▶ estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

11.1 Introduction	1
11.2 Puissance	1
11.3 Énergie cinétique	3
11.4 Théorème de l'énergie cinétique	4
11.5 Notion de rendement énergétique	5

B2-10

Emilien Durif, *Approche énergétique*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

11.2 Puissance

11.2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel** (E) en mouvement par rapport à un référentiel R subissant une densité d'effort $\vec{f}(M)$ (où M est un point courant de (E)) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overrightarrow{V(M, E/R)} dV.$$

Remarque

On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel (E) en mouvement dans un **référentiel galiléen** \mathcal{R}_g : $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$.

- ▶ Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en **Watt**.
- ▶ Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en **Nms⁻¹**.
- ▶ Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

Propriété – Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble E

On considère un ensemble matériel E composé de n solides S_i .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur E dans son mouvement par rapport à R il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les S_i venant de l'extérieur de E :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

11.2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide**Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide (S)**

La puissance d'une action mécanique extérieure à un solide (S) en mouvement dans un référentiel R peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit (S) et le torseur cinématique du mouvement de S dans le référentiel R .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

Remarque

- ▶ Le comoment des torseurs est défini par $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}$
 $= \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \right\}_P \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)}} \right\}_P = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- ▶ Lorsque le torseur cinématique de S/R est un couple (mouvement de translation) alors **en tout point A** la puissance est alors donnée par $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$.
- ▶ Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$.

11.2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides**Définition – Puissance d'actions mutuelles entre deux solides**

Soient deux solides (S_1) et (S_2) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles** entre (S_1) et (S_2), dans leur mouvement par rapport au repère R , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_g).$$

La puissance des actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est **indépendante du repère R**. Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

Remarque

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble E , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble E :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

11.2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons**Définition – Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons**

Si deux solides S_1 et S_2 sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de S_2 par rapport à S_1 autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

Remarque

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide S_1 et S_2 . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

11.3 Énergie cinétique**11.3.1 Définition****Définition – Énergie cinétique**

On définit l'**énergie cinétique** $\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)$ d'un système matériel S en mouvement dans un référentiel \mathcal{R}_g comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant P de S pondéré de la masse élémentaire :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\vec{V}(P/\mathcal{R}_g) \right)^2 dm.$$

11.3.2 Propriétés

Propriété – Expression avec les comoments

L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g) \} \otimes \{ \mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g) \}.$$

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

Propriété – Cas particuliers

- Solide S de masse M de centre d'inertie G en mouvement de **translation** par rapport à R :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{\mathcal{V}(G, S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

- Solide S de moment d'inertie $I_{Oz}(S)$ en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe** (O, \vec{z}) par rapport R :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

11.3.3 Inertie et masse équivalentes

Définition – Inertie et masse équivalentes

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble E composé de n solides S_i en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire $\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)$:

- avec **son inertie équivalente** $J_{\text{eq}}(E)$ (en kg m^2) rapportée à un paramètre de rotation $\dot{\theta}(t)$:

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente** $M_{\text{eq}}(E)$ (en kg) rapportée à un paramètre de translation $\dot{x}(t)$:

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

11.4 Théorème de l'énergie cinétique

11.4.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

11.4.2 Énoncé pour un solide

Théorème – Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S . Soit :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g).$$

11.4.3 Énoncé pour un ensemble de solides

Théorème – Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Soit (E) un ensemble de n solide (S_1, S_2, \dots, S_n) en mouvement par rapport à un repère galiléen \mathcal{R}_g . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- ▶ $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ la puissance intérieure à E qui est nulle si l'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites);
- ▶ $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g)$, la puissance galiléenne de E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g .

Remarque

- ▶ Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel E que l'on considère.
- ▶ Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- ▶ Pour obtenir une équation de mouvement (*i.e* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

11.5 Notion de rendement énergétique

11.5.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- ▶ **en régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs;
- ▶ **en régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

Définition – Rendement d'une chaîne fonctionnelle

Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- ▶ $\eta \in [0, 1]$;
- ▶ $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$ définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**;
- ▶ $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$ définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

Propriété – Rendement global d'une chaîne d'énergie

Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant n éléments de rendements η_i est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs η_i étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

11.5.2 Détermination d'une puissance dissipée**Propriété – Estimation des dissipations**

On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement η :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$



Application 1

Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs – Sujet

Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec Z_1 , Z_{21} , Z_{23} et Z_3 le nombre de dents des roues dentées. On nomme k_1 le rapport du train de S_1 et S_2 avec $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$ et k_2 le rapport de S_2 et S_3 avec $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$.

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m \vec{z}_0$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r \vec{z}_0$

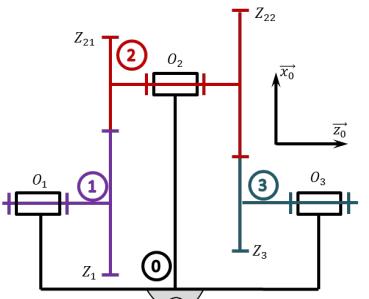
On rappelle que pour les engrenages à denture droite $d = mz$ avec d le diamètre primitif, m le module, z le nombre de dents du pignon. $\omega(1/0)$, $\omega(2/0)$ et $\omega(3/0)$ sont les vitesses de rotation de S_1 , S_2 et S_3 autour des axes (O_1, \vec{x}_g) , (O_2, \vec{x}_g) et (O_3, \vec{x}_g) . Le repère galiléen \mathcal{R}_g est lié au solide S_0 . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse $G_1 = O_1$, $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$ associées aux solides S_1 , S_2 et S_3 sont de la forme : $I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i}$.

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur C_m agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante C_r s'exerce sur l'arbre 3.

Question 1 Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

Question 2 Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.

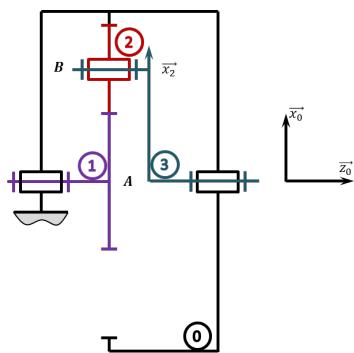
Question 3 Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.



Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\overline{\overline{I}}_A(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \overline{\overline{I}}_B(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad \overline{\overline{I}}_A(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m \vec{z}_0$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r \vec{z}_0$

Question 4 Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.

Question 5 Déterminer l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

Question 6 Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliqué un couple résistant.

Application 2

Système de dépose de composants électroniques – Sujet

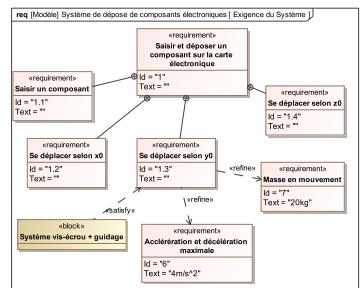
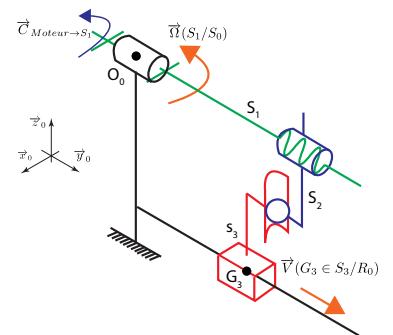
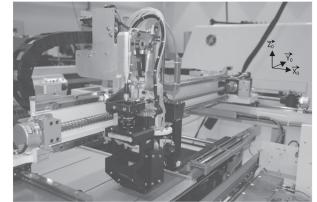
Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée \vec{y}_0) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

Hypothèses :

- ▶ le référentiel associé au repère $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen;
- ▶ les solides seront supposés indéformables;
- ▶ on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe (O_0, \vec{y}_0) : $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$;
- ▶ on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3 ;
- ▶ la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r);
- ▶ seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.

- ▶ S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- ▶ S_1 : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- ▶ S_2 : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- ▶ S_3 : chariot supportant la tête de dépose (masse M_3).



Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à S_1 : $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$;
- ▶ vitesse de rotation de S_1 : $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :

- ▶ masse : M_3 ;
- ▶ cinématique de S_3 : $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$.

On considère l'ensemble $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$.

Question 1 Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

Données numériques associées au système :

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0,1$.
- ▶ Pas de la vis à billes : $p = 20 \text{ mm}$.
- ▶ Diamètre de la vis à billes : $D = 25 \text{ mm}$.
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe \vec{y}_0 : $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$.
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $C_r = 3 \text{ Nm}$.
- ▶ l , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm .

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- couple maximal, $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$;
- fréquence de rotation maximale, $N_m = 6000 \text{ tr/min}$;
- moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe \vec{y}_0 , $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

Question 2 Déterminer l'expression de $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

Question 3 Calculer $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ en fonction des données du problème.

Question 4 Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$.

Question 5 Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0

Question 6 Déterminer la mobilité du système.

Question 7 Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

Question 8 Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe (O_0, \vec{y}_0) et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.

Question 9 Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction \vec{y}_0 et du paramètre $\dot{y}(t)$.

Question 10 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E .

Question 11 Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.

Question 12 Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2 . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Question 13 En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.

Question 14 On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2 . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Question 15 Déterminer dans ces conditions les dissipations.

Application 3

Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Sujet

Mines Ponts PSI – 2003.

Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câble mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).



Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement $f = 0,03$. 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme p : $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2$ avec p en pascal, $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ masse volumique de l'air, V_a module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en m/s .

Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de $0,15 \text{ m s}^{-2}$. On se place à l'instant où la vitesse de $7,2 \text{ m s}^{-1}$ va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

Question 1 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{c_T} , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c , M_p , μ , L , V , D_p et I_M .

Question 2 Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p , V , h , g et L .

Question 3 Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée

P_v des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ , S_f , V , V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.

Question 4 En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Sur la ligne, les cabines se déplacent à $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$. En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$. Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble. On envisagera une accélération constante des cabines de $a = 1,3 \text{ m s}^{-2}$.

Question 5 Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a , v_0 , t et V . Pour que l'accélération de $1,3 \text{ m s}^{-2}$ permette le lancement des cabines de $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ à $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$, l'application numérique donne environ : $x = 20 \text{ m}$.

Éléments de correction

1. $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left(4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2 \simeq 6,7 \text{ MJ}.$
2. $\mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = -8M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W}.$
3. $\mathcal{P} (\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha = -218\,677 \text{ W}.$
4. $P_T = 1266 \text{ kW}.$
5. $\tau = \frac{V - v_0}{a} = 5,3 \text{ s}$ et $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 19,875 \text{ m}.$

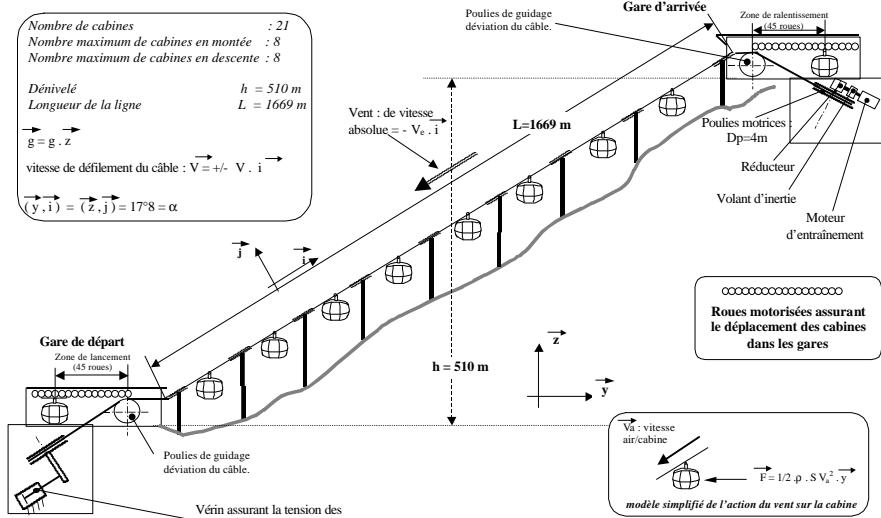


FIG. 1 : Ligne totale

Extrait du cahier des charges		Autres caractéristiques techniques	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	$Mc = 2500 \text{ kg}$
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	$Sl = 10 \text{ m}^2$
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	$Sf = 7,1 \text{ m}^2$
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	26 $M_p = 2080 \text{ kg}$	Masse linéaire du câble	$\mu = 8,47 \text{ kg/m}$
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	$V = 7,2 \text{ m/s}$	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d'entraînement	$N = 1700 \text{ tr/min}$	Diamètre d'une poulie motrice :	$D_p = 4 \text{ m}$
Longueur de la ligne	$L = 1669 \text{ m}$	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	$I_M = 575 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$
Dénivelé	$h = 510 \text{ m}$		

TD 1

Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2–4 est alors moteur et le vérin 3–5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2 ; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

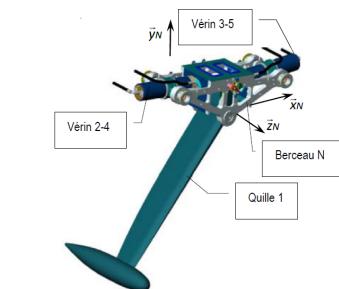
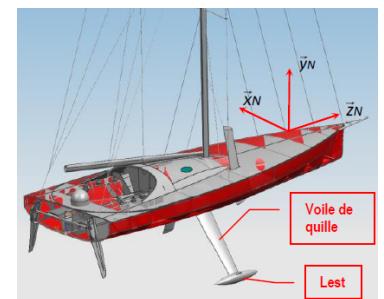
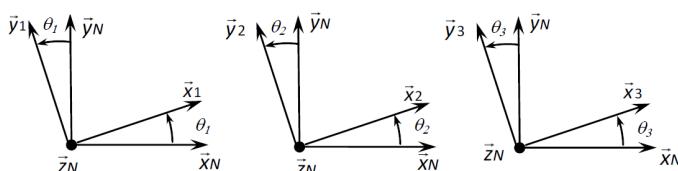


FIGURE 11.1 – Modèle volumique 3D

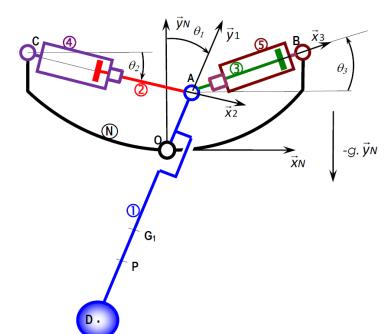


FIGURE 11.2 – Modèle 2D

FIGURE 11.3 – Paramétrage

Données géométriques, massiques et inertielles $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{y_1}$;
 $\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}$; $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\overrightarrow{x_3}$,

- Solide 1, masse M_1 , centre d'inertie G_1 , $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\overrightarrow{y_1}$, $I_{G_1}(1) =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N}\right)}$$

- Solide 2, masse M_2 , centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\overrightarrow{x_2}$, $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N}\right)}$$

- Solide 3, masse $M_3 = M_2$, centre d'inertie G_3 , $\overrightarrow{AG_3} = L_2\overrightarrow{x_3}$,

$$I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N}\right)}$$

- Solide 4, masse M_4 , centre d'inertie C , $I_C(4) =$

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N}\right)}$$

- Solide 5, masse M_5 , centre d'inertie B , $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N}\right)}.$$

Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{array} \right\}_C$.
- Action de pression de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{array} \right\}_B$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action hydraulique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p\overrightarrow{z_1} + F_t\overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{array} \right\}_p$ avec $\overrightarrow{OP} = -h\overrightarrow{y_1}$.

Vecteurs vitesses

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

- $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles;
- $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles;
- $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles;
- $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

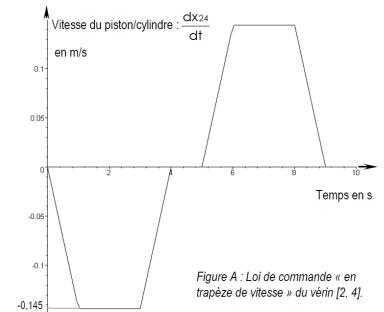
Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiliennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure 11.4.



Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\text{ s}$, $t = 1\text{ s}$, $t = 3\text{ s}$ et $t = 4\text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Éléments de correction

1. .
 2. a) $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1$.
 - b) $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$. On a aussi $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2$.
 - c) $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + L_2 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3$. On a aussi $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3$.
 - d) $\overrightarrow{V(A, 2/4)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2$.
3. a) $\mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2)$.
 - b) $\mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} \left(B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 \left(\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2 \right) \right)$.

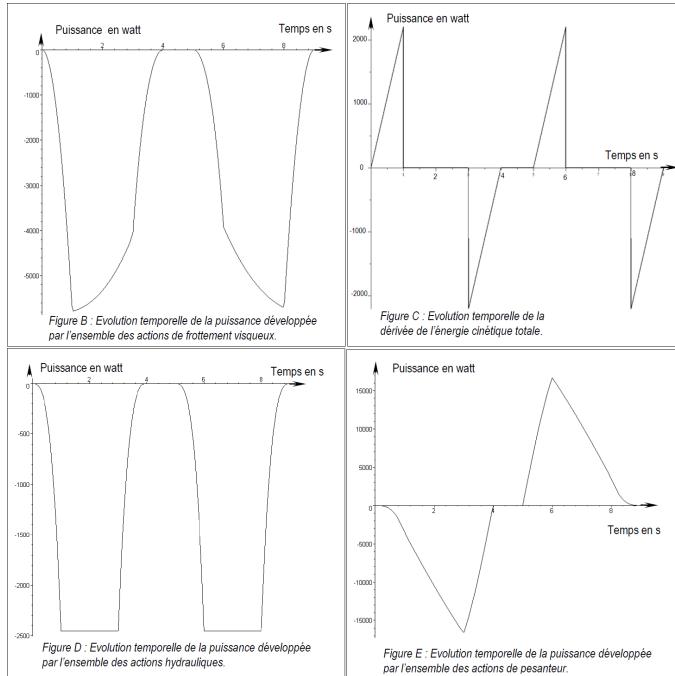


FIGURE 11.4 – Evolution temporelle des puissances

- c) $\mathcal{E}_c (4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2 .$
4. ► $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{Ph}} 2) = F_{h2} \dot{x}_{24};$
 ► $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{Phf}} 2) = -k \dot{x}_{24}^2(t);$
 ► $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{Ph}} 5) = F_h \dot{x}_{35}(t);$
 ► $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{Phf}} 5) = -k \dot{x}_{35}^2(t).$
5. ► la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
 ► $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
 ► $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2;$
 ► $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3);$
 ► $\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = F_t h \dot{\theta}_1.$
6. $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}.$

TD 2

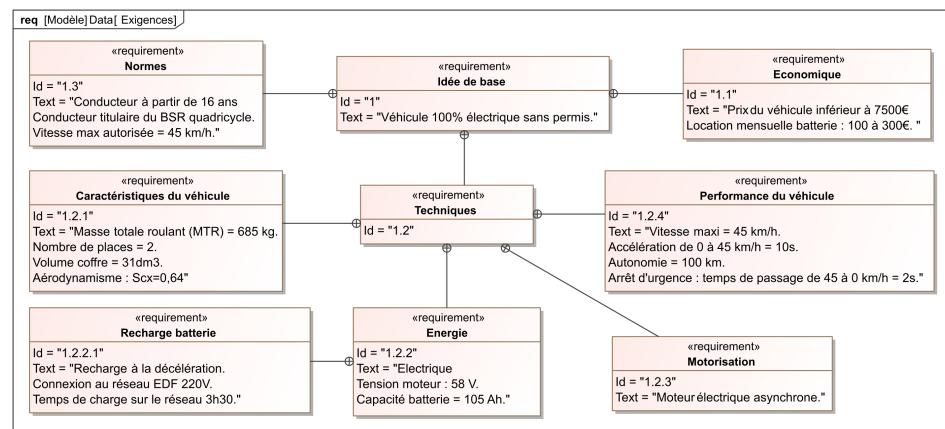
Renault Twizy ★ – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2017.

C1-05

C2-08

Mise en situation

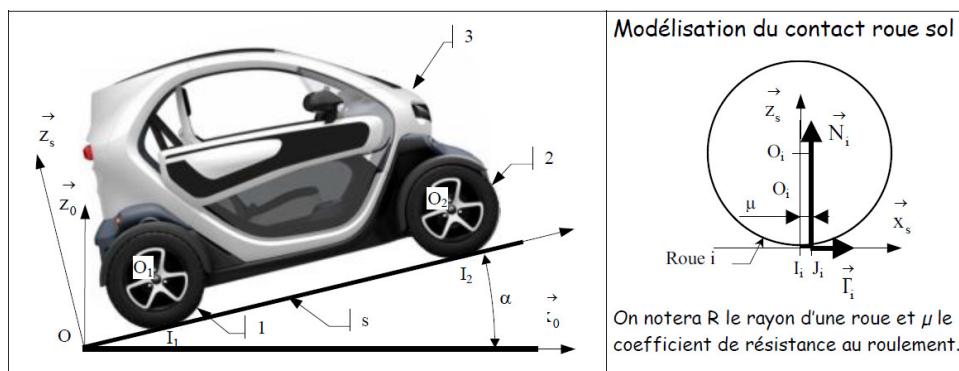


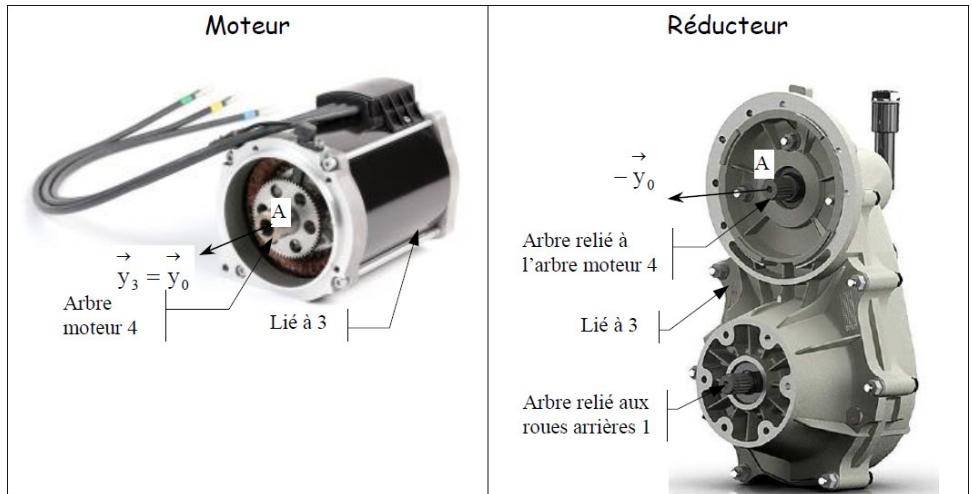
Choix du motoréducteur

Objectif

Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



**Masses et inerties :**

- ▶ le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe (A, \vec{y}_0) : $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$;
- ▶ le moment d'inertie d'une roue autour de son axe (O_i, \vec{y}_0) : $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$ (masse de la roue négligée);
- ▶ la masse du véhicule en charge : $m = 685 \text{ kg}$;
- ▶ le centre de gravité du véhicule en charge sera noté G ;
- ▶ les autres inerties seront négligées.

Hypothèses générales :

- ▶ le vecteur \vec{z}_0 est vertical ascendant et on notera g l'accélération de la pesanteur;
- ▶ le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen ; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$;
- ▶ toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- ▶ les roues roulent sans glisser sur le sol en I_i ;
- ▶ le coefficient de résistance au roulement μ est identique pour tous les contacts roue – sol : $\mu = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$. On pose $\vec{I}_1 J_1 = \mu \vec{x}_s$, avec $\mu > 0$ si le déplacement du véhicule est suivant $+\vec{x}_s$;
- ▶ les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés ; seules les roues arrière sont motrices.

Actions mécaniques Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est : $\{\mathcal{T}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{J_i}$ avec $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ et $i = 1$ (roues arrières) ou 2 (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$.

Grandeurs cinématiques : Soit ω_m la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3, ω_{13} la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et ω_{23} la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera r le rapport de transmission du réducteur tel que $\omega_m = r \omega_{13}$. On appellera $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$ la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon $R = 280 \text{ mm}$.

Notations :

- ▶ puissance extérieure des actions mécaniques du solide i sur le solide j dans le mouvement de i par rapport à 0 : $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$;
- ▶ puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide i et le solide j : $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$;
- ▶ énergie cinétique du solide i dans son mouvement par rapport à 0 : $\mathcal{E}_c(i/0)$.

Choix de l'ensemble moto-réducteur**Équation de mouvement du véhicule****Objectif**

Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

Question 1 Il est demandé de :

- ▶ écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;
- ▶ déterminer explicitement les énergies cinétiques ;
- ▶ en déduire une équation faisant intervenir $C_m, N_1, N_2, v, \omega_m, \omega_{1/0}, \omega_{2/0} \dots$;
- ▶ expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

Question 2 À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer ($N_1 + N_2$). Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

Question 3 Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre $(v, \omega_{10}), (v, \omega_{20})$ et (ω_m, ω_{10}) . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme $\frac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$ avec $F_r(t)$ fonction de m, μ, g, R et α et M_{eq} fonction m, J_m, J_R, R et r .

Détermination du coefficient de résistance au roulement μ

Objectif

Déterminer le coefficient de résistance au roulement μ suite à une expérimentation.

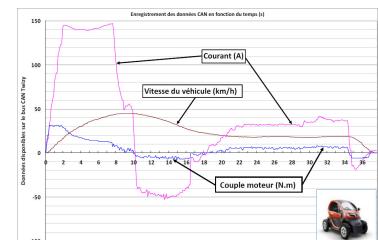
Question 4 En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement μ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- ▶ justifier dans quelle phase se placer ;
- ▶ définir la variable mesurée ;
- ▶ définir les hypothèses nécessaires ;
- ▶ énoncer les équations utilisées pour déterminer μ .

Choix du moto-réducteur

Objectif

Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.



Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale $\frac{dv(t)}{dt}$ du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission r issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

Question 5 Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission r_{\min} pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

Question 6 Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission r_{\max} qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

Question 7 À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

Validation du choix constructeur du moto-réducteur

Objectif

Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

Question 8 À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$ et conclure.

