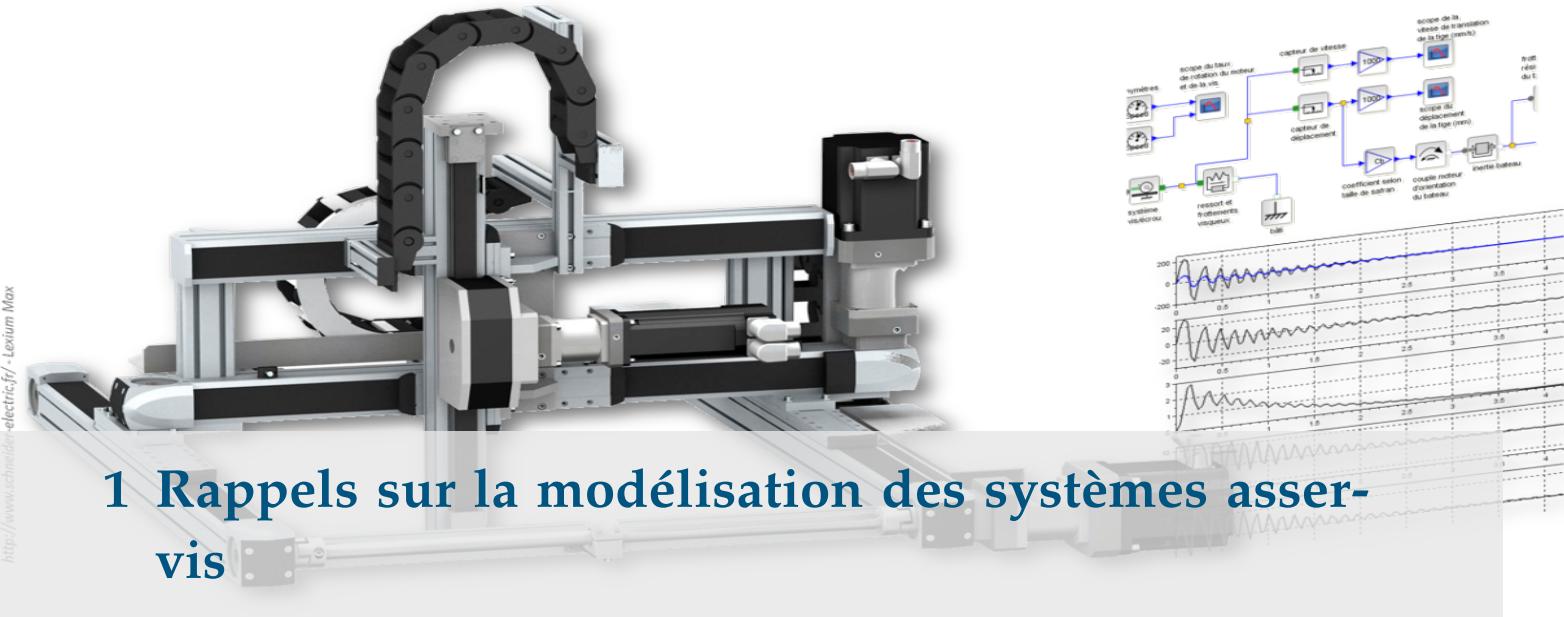


# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances . . . . .	1
1.1.1 Définitions . . . . .	1
1.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques . . . . .	2
1.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace . . . . .	3
1.2.1 Définitions . . . . .	3
1.2.2 Théorèmes . . . . .	3
1.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs . . . . .	4
1.3.1 Définitions . . . . .	4
1.3.2 Algèbre de blocs . . . . .	5
1.3.3 Fonctions usuelles . . . . .	5
1.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre . . . . .	6
1.4.1 Systèmes d'ordre 1 . . . . .	6
1.4.2 Systèmes d'ordre 2 . . . . .	7
1.5 Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	8
1.5.1 Définitions . . . . .	8
1.5.2 Gain . . . . .	8
1.5.3 Intégrateur . . . . .	9
1.5.4 Dérivateur . . . . .	9
1.5.5 Systèmes d'ordre 1 . . . . .	9
1.5.6 Systèmes d'ordre 2 . . . . .	9
1.5.7 Retard . . . . .	10
1.5.8 Tracé du diagramme de Bode . . . . .	10
Application 1 : Réponses fréquentielles – Sujet . . . . .	11
Application 1 : Réponses fréquentielles – Corrigé . . . . .	15
TD 1 : Banc d'essai BTP – Sujet . . . . .	19
TD 1 : Banc d'essai BTP – Corrigé . . . . .	23
TD 2 : Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet . . . . .	27
TD 2 : Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé . . . . .	31
TD 3 : Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet . . . . .	35
TD 3 : Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé . . . . .	39
TD 4 : Tête de découpe de tissus – Sujet . . . . .	43
TD 4 : Tête de découpe de tissus – Corrigé . . . . .	45
TD 5 : Bateau support de ROV – Sujet . . . . .	49
TD 5 : Bateau support de ROV – Corrigé . . . . .	53
TD 6 : Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet . . . . .	59
TD 6 : Robot pour la chirurgie endoscopique – Corrigé . . . . .	67
TD 7 : Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet . . . . .	75
TD 7 : Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Corrigé . . . . .	79
Colle 8 : Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Sujet . . . . .	89
Colle 8 : Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Corrigé . . . . .	91
Colle 2 : Cisaille à découpe au vol – Sujet . . . . .	95
Colle 2 : Cisaille à découpe au vol – Corrigé . . . . .	99
Colle 3 : Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Sujet . . . . .	105
Colle 3 : Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Corrigé . . . . .	109

Colle 4 : Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Sujet . . . . .	113
Colle 4 : Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Corrigé . . . . .	117



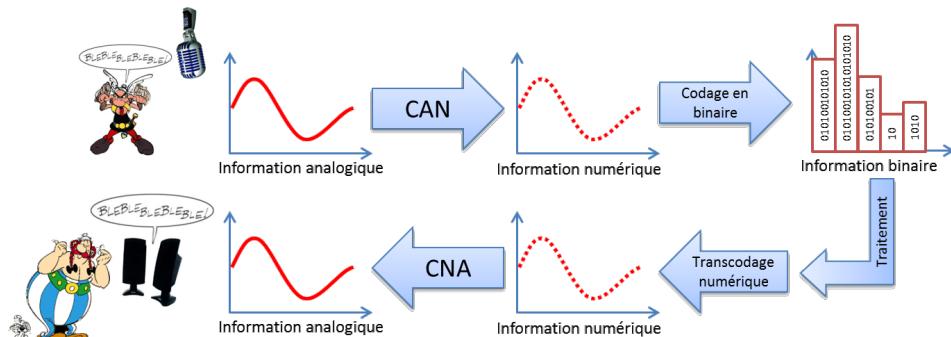
# 1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

## 1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

### 1.1.1 Définitions

## Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
  - Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).



## Définition – Systèmes automatiques ou asservis

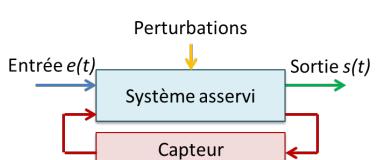
Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- ▶ la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable ;
  - ▶ la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger

<b>1.1</b>	Premières définitions . . . . .	1
<b>1.2</b>	Transformée de Laplace . . . . .	3
<b>1.3</b>	Modélisation par fonction de transfert et schéma- blocs . . . . .	4
<b>1.4</b>	Systèmes d'ordre 1 & 2 . . . . .	6
<b>1.5</b>	Réponse fréquentielle des SLCI . . . . .	8

- B2-04
  - B2-05
  - B2-06
  - B2-07
  - C1-01
  - C2-01
  - C2-02
  - C2-03



de la qualité de la tâche accomplie.

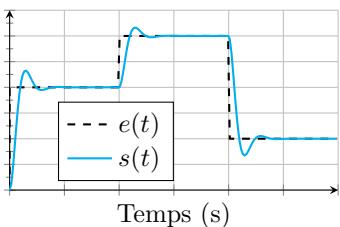


FIGURE 1.1 – Système suiveur.

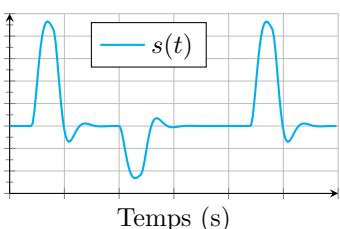


FIGURE 1.2 – Système régulateur.

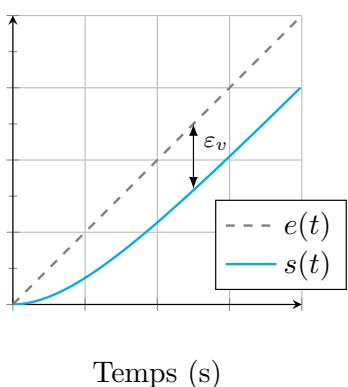


FIGURE 1.3 – Erreur de trainage.

### Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

### 1.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

#### Définition – Précision en position – Écart statique $\varepsilon_s$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_s$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

#### Définition – Précision en vitesse $\varepsilon_v$

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

#### Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

#### Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

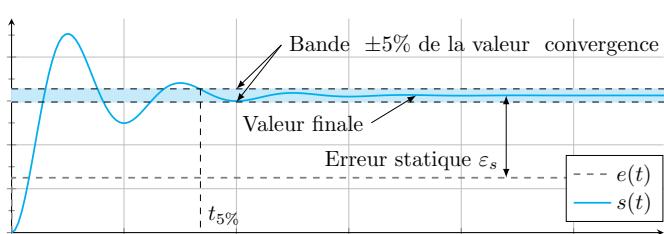


FIGURE 1.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

**Définition – Stabilité**

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 1.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

### 1.2.1 Définitions

#### Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

#### Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p)$  ...

#### Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^nF(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### 1.2.2 Théorèmes

#### Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

#### Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Théorème – Retard**

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

**Théorème – Amortissement**

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

## 1.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

### 1.3.1 Définitions

**Définition – Fonction de transfert – Transmittance**

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

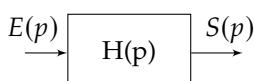
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

**Définition – Classe – ordre – pôles – zéros**

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

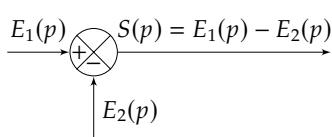
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- ▶ Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Le degré de  $D(p)$  est appelé **ordre  $n$  du système** ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).
- ▶ L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- ▶ S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  $\alpha$  est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

**Définition – Modélisation d'un bloc**

Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition – Modélisation d'un comparateur**

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

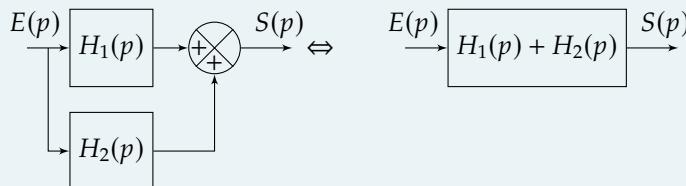
### 1.3.2 Algèbre de blocs

#### Résultat – Blocs en série

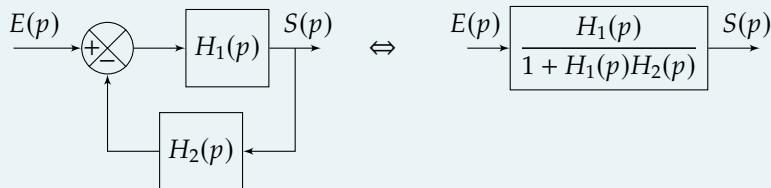


*Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.*

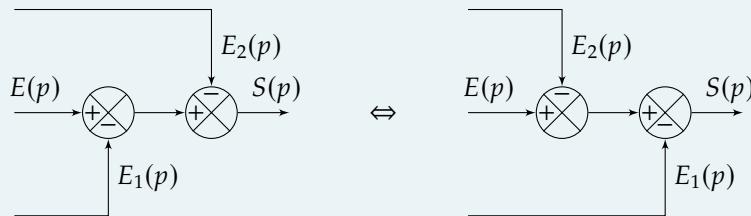
#### Résultat – Blocs en parallèle



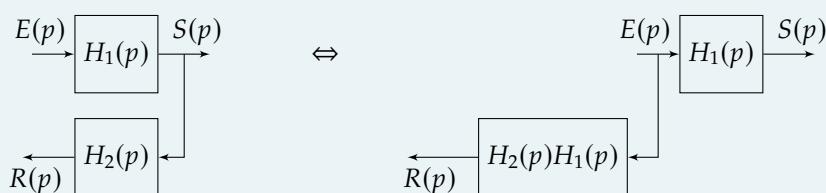
#### Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



#### Résultat – Comparateurs en série



#### Résultat – Point de prélèvement

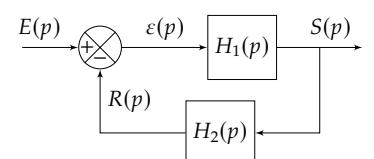


### 1.3.3 Fonctions usuelles

#### Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

*Formule de Black*

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



**Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO**

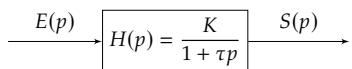
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

**Définition – Théorème de superposition**

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1E_1 + H_2E_2$ .

## 1.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

### 1.4.1 Systèmes d'ordre 1

**Définition – Système d'ordre 1**

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

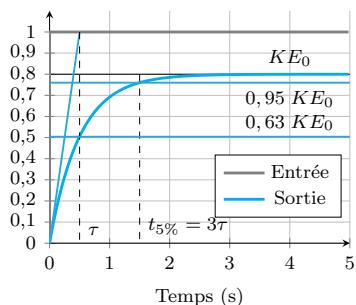
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶  $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- ▶  $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

**Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre**

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- ▶ la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;

- $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_\infty$ .

### Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

On note :

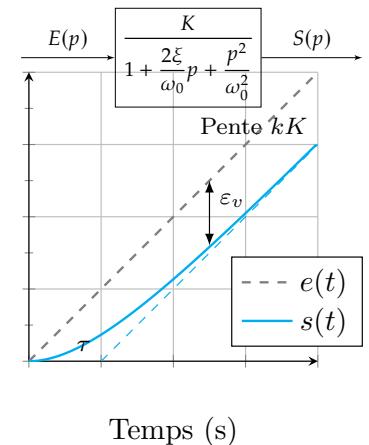
- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- $\xi$  (lire  $\chi i$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- $\omega_0$  pulsation propre du système (rad/s ou  $s^{-1}$ ).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

Analytiquement, on montre que  $s(t) = Kk \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

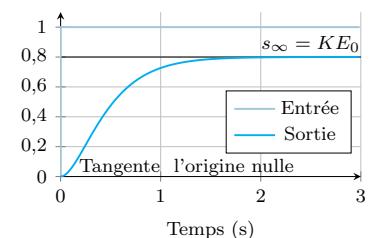
- pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ .



Temps (s)

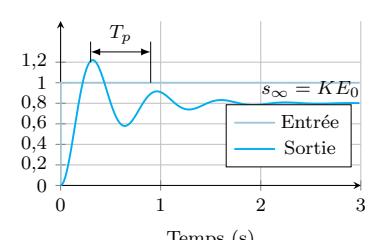
### Résultat – $\xi \geq 1$ : système non oscillant et amorti (apériodique)

- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.



### Résultat – $\xi < 1$ : système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ .



$$\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

- La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ .

### Résultat –

- Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $KE_0$  ( $2KE_0$  crête à crête).
- Pour  $\xi \approx 0,69$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

## 1.5 Réponse fréquentielle des SLCI

### 1.5.1 Définitions

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
- $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

- $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
- $\omega$  : la pulsation en rad/s;
- $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

### Définition – Gain & Phase

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

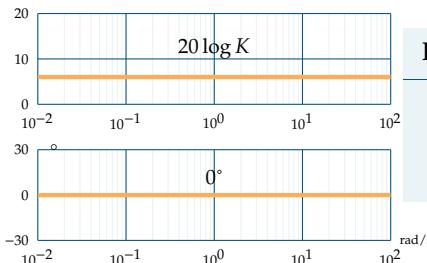
- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

### Résultat –

On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$ ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$ .

### 1.5.2 Gain



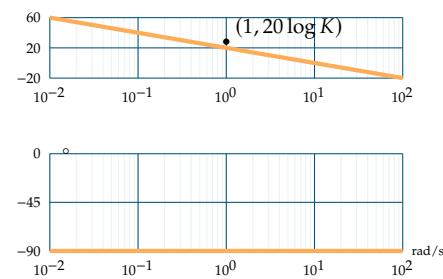
### Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

- Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .

### 1.5.3 Intégrateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

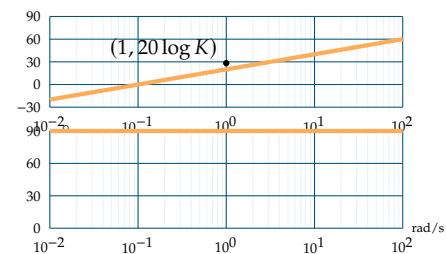
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 1.5.4 Dérivateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

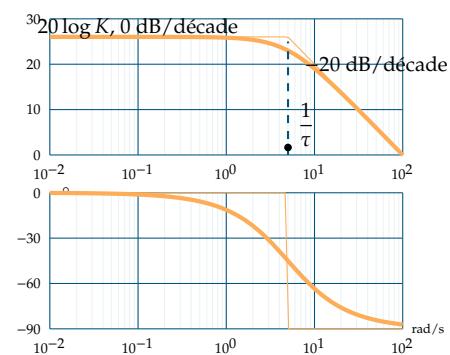
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .



### 1.5.5 Systèmes d'ordre 1

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

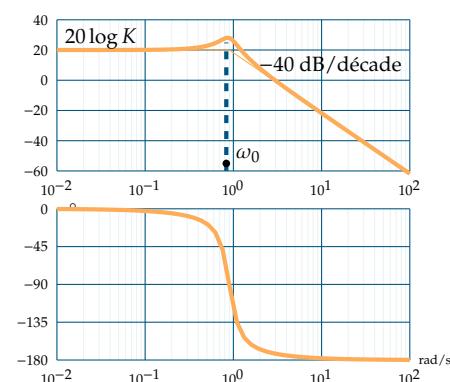
- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$ .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 1.5.6 Systèmes d'ordre 2

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .
- ▶ Cas où  $\xi < 1$ .
  - ▶ Diagramme de gain asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
    - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40\text{dB/decade}$ .
  - ▶ Diagramme de phase asymptotique :
    - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;



- pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .

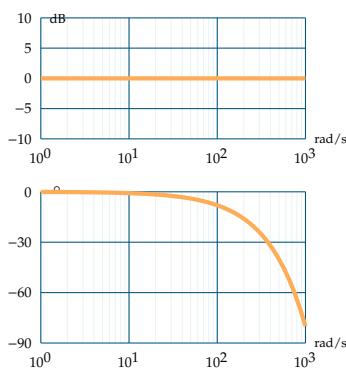
Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

### Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

### 1.5.7 Retard



### Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$ .

### 1.5.8 Tracé du diagramme de Bode

#### Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

#### Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

# Application 1

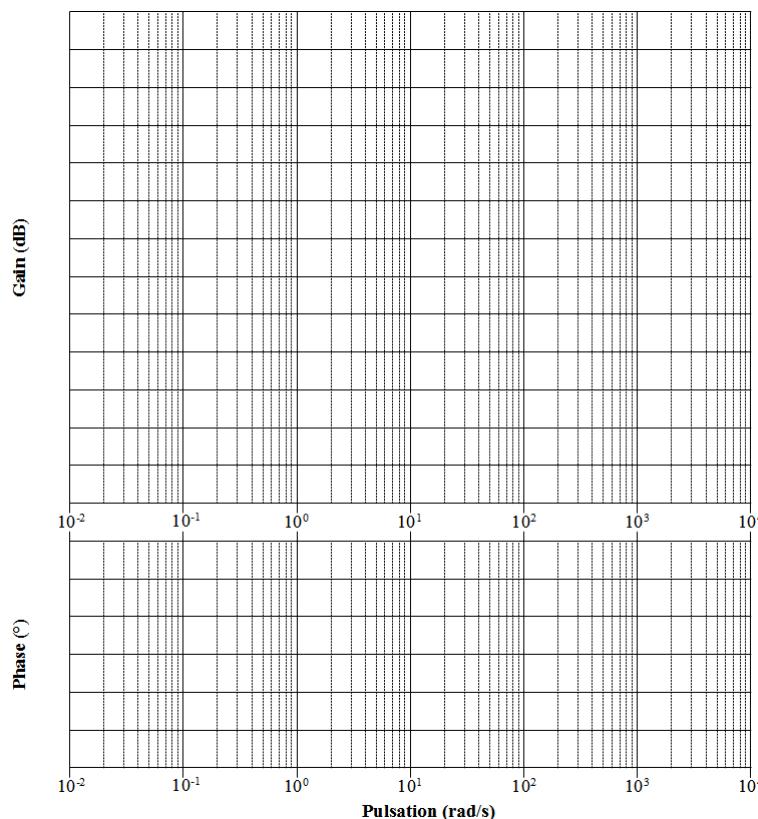
## Réponses fréquentielles – Sujet

D'après Sébastien Grange.

### Diagramme de Bode

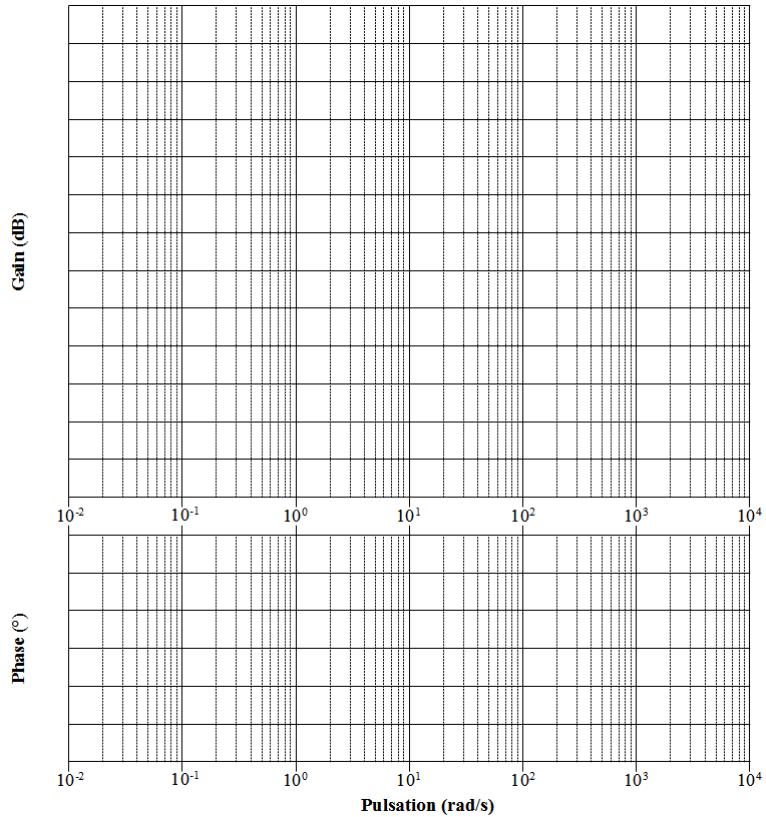
**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

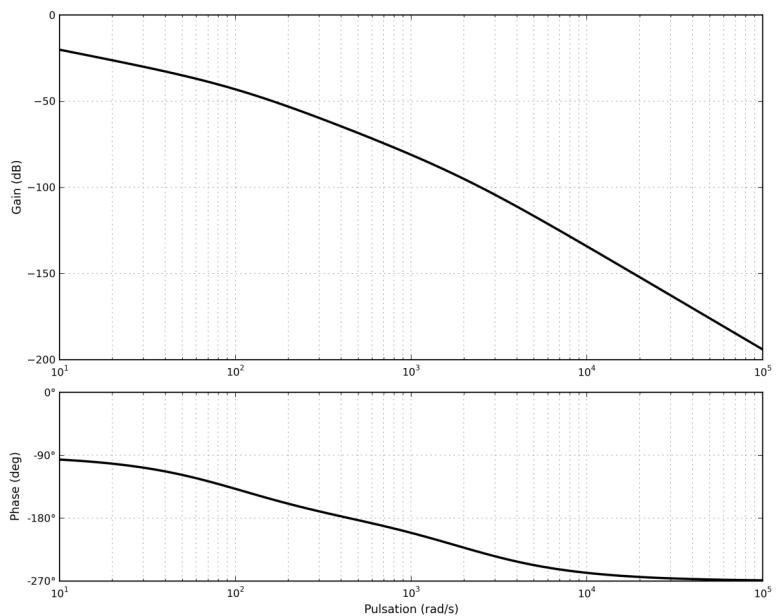


**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

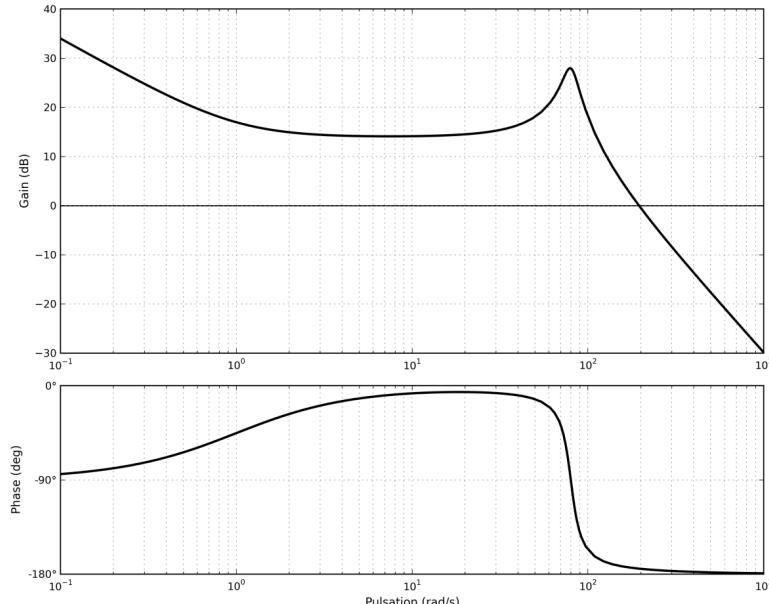


**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .



**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .



**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

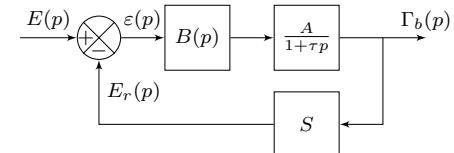
**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / g \text{ V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .



# Application 1

## Réponses fréquentielles – Corrigé

D'après Sébastien Grange.

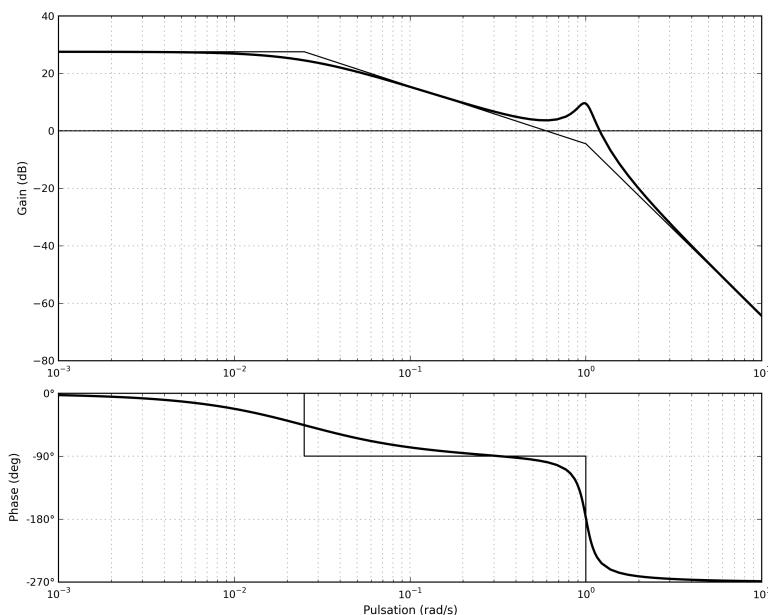
### Diagramme de Bode

**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

#### Correction

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1 + 40p) \left( 1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1} p + \frac{p^2}{1^2} \right)}$$



**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

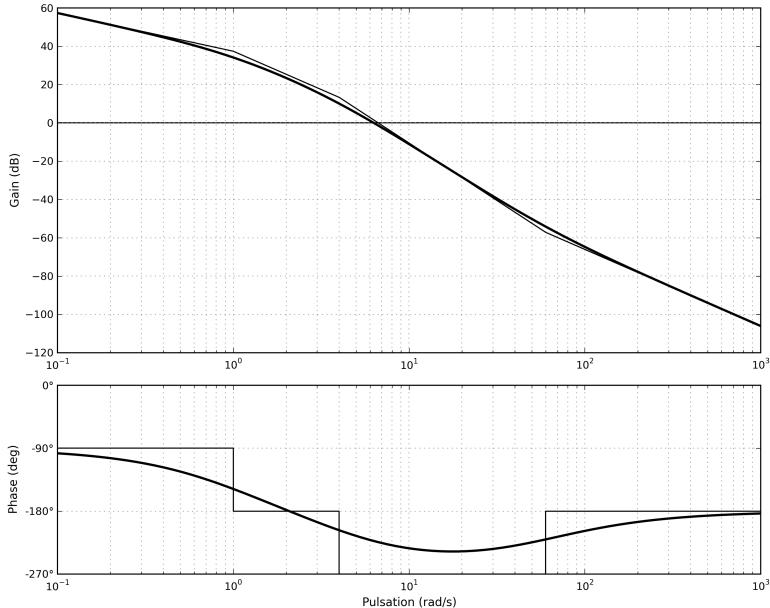
$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

### Correction

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + (2 \cdot 1,25)/2)p + p^2/2^2} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + p)(1 + 0,25p)}$$

	1 rad/s	$\frac{1}{0,25} = 4$ rad/s	$\frac{1}{0,0167} = 60$ rad/s
$1 + 0,0167p$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°
$\frac{1}{1 + p}$	0 dB/décade	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$\frac{1}{1 + 0,25p}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90°
$1/p$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$H(p)$	-20 dB/décade -90°	-40 dB/décade -180°	-60 dB/décade -270°

Poistionnement du diagramme asymptotique de gain : en  $\omega = << 1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $H(p) \approx \frac{75}{p}$ . Ainsi pour  $\omega \approx 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $H_{dB}(0,1) = 20 \log(75/0,1) = 57 \text{ dB}$ .



**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .

### Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1<sup>er</sup> ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\frac{1}{\tau}$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a :  $1/T_1 \approx 100$  et  $1/T_2 \approx 2000$  donc  $T_1 = 0,01 \text{ s}$  et  $T_2 = 0,0005 \text{ s}$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1<sup>er</sup> ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \approx -20$  et  $K \approx 1$ .

On a donc :  $H(p) = \frac{1}{p(1 + 0.01p)(1 + 0.0005p)}$ .

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc :  $H(p) \simeq \frac{1}{p(1 + 0.01p)}$ .

**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

#### Correction

On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente :  $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$ .

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que :  $G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) \simeq -60 \text{ dB}$  et donc  $S_0 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$ . D'après la courbe de phase, on peut lire :  $\varphi(\omega = 300\text{rad/s}) = -175 \text{ degrés}$ . On a donc :  $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$ . L'angle est à mettre en radians.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .

#### Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .

$$H(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + 2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $1/\tau$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a :  $1/T \simeq 1$  et  $T = 1 \text{ s}$ .

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\omega_0$ . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a :  $\omega_0 \simeq 80 \text{ rad/s}$ .

Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a :  $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$  et  $\xi \simeq 0,11$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \simeq 33$  et  $K \simeq 4,5$

**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / \text{g V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



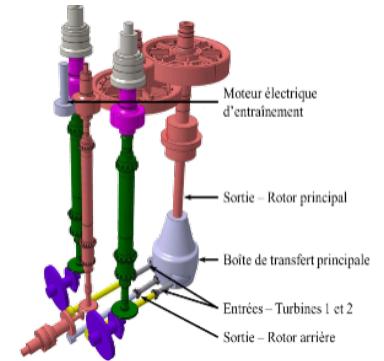
# TD 1

## Banc d'essai BTP – Sujet

Concours CCINP– TSI 2015

**B2-07**

**C2-03**

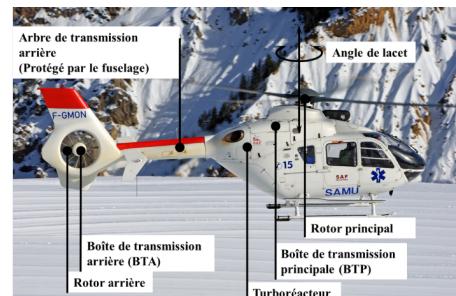


### Mise en situation

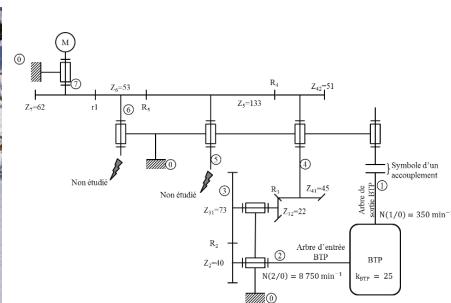
Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1.5a). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 1.5b présente la structure du banc d'essai.

#### Objectif

Valider Req 1.1.1.



(a) Hélicoptère.



(b) Structure du banc d'essai.

«requirement»	Précision de la régulation
Id = "1.1.1"	Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

FIGURE 1.5 – Hélicoptère et banc d'essai

### Le moteur à courant continu

On note :

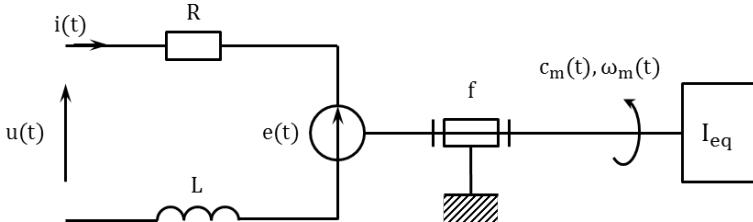
- $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;

- ▶  $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- ▶  $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶  $c_m(t)$  : le couple moteur;
- ▶  $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- ▶  $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- ▶  $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 1.6.

- ▶  $R$  : la résistance de l'induit;
- ▶  $L$  : l'inductance de l'induit;
- ▶  $f$  : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à  $\omega_m(t)$ ;
- ▶  $I_{eq}$  : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;

**FIGURE 1.6 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.**



Hypothèses :

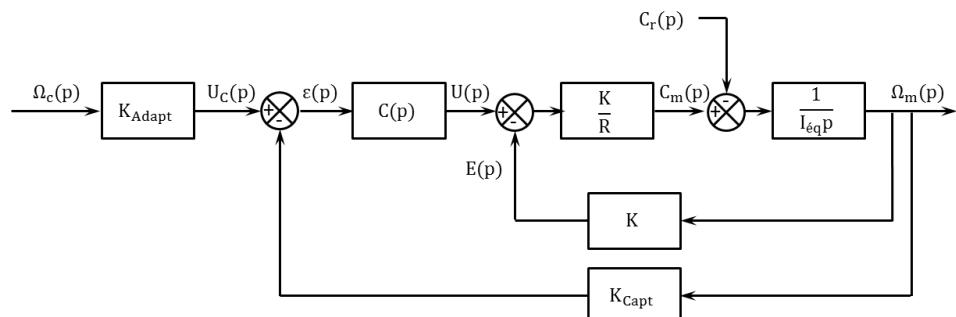
- ▶ le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- ▶ les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- ▶ on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- ▶ on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- ▶ on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- ▶ pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 1.7.



**FIGURE 1.7 – Régulation en vitesse du banc d'essai.**

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$  ?

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$ . On considère

que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_C(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_C(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

#### Éléments de correction

1.  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .
2.  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_p}{K + K_p K_{\text{Capt}}} \text{ et } \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K^2 + K K_p K_{\text{Capt}}}.$
3. .
4.  $K_2 = \frac{R}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})}.$
5.  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p).$
6.  $\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}.$
7. On montre que l'écart statique est annulé.
8.  $\varepsilon = 0.$





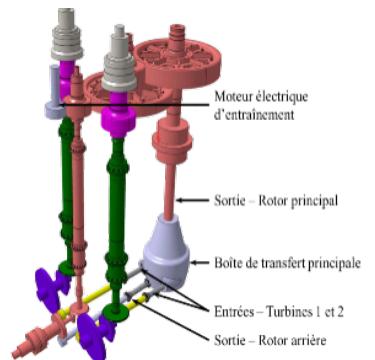
## TD 1

# Banc d'essai BTP – Corrigé

Concours CCINP– TSI 2015

**B2-07**

**C2-03**



## Mise en situation

### Objectif

Valider Req 1.1.1.

## Le moteur à courant continu

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{\text{Adapt}}$ ?

### Correction

Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

Afin d'avoir un asservissement précis ( $\varepsilon(p) = 0$  lorsque  $\Omega_c(p) = \Omega(p)$ ), on prend  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .

«requirement»
<b>Précision de la régulation</b>
Id = "1.1.1"
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

### Correction

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{K^2}{RI_{\text{eq}}p}} = \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} = \frac{1/K}{1 + \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2}p}$$

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p)}{1 + \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p) K_{\text{Capt}}} = \frac{K_{\text{Adapt}} K C(p)}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KC(p) K_{\text{Capt}}}$$

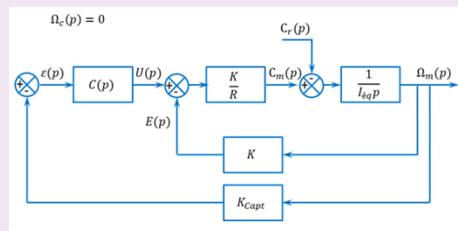
$$H_1(p) = \frac{K_{\text{Adapt}} K K_P}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} = \frac{\frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}}{\frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} p + 1} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$$

Soit par identification :  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}$  et  $\tau_1 = \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}}$ .

**Hypothèse 2 :** on considère que  $\Omega_c(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .

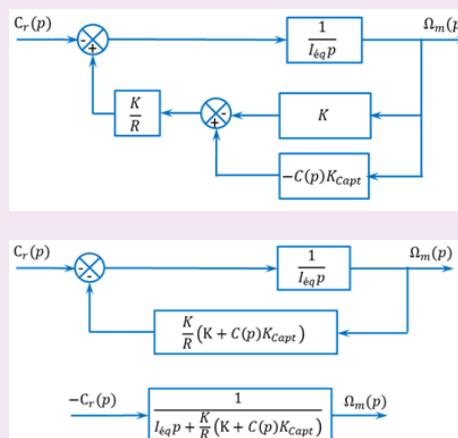
**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

#### Correction



**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

#### Correction



$$\text{On a donc : } H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{1}{\frac{K}{R}(K + K_P K_{\text{Capt}}) + I_{\text{eq}}p} = -\frac{\frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}}{1 + \frac{RI_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})} p}$$

$$= -\frac{K_2}{1 + \tau_2 p} \text{ Soit par identification : } K_2 = \frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \tau_1 = \frac{RI_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}$$

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_c(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

#### Correction

Par superposition on a :  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

#### Correction

On a, pour des échelons de consignes :  $\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$  avec  $\Omega_{c0} = 202 \text{ rad/s}$  et  $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$  avec  $C_{r0} = 990 \text{ Nm}$ .

L'écart statique  $\varepsilon_S$  s'écrit en sortie du comparateur :

$$\begin{aligned}\varepsilon_S &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}\Omega_m(p)) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} \left( p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_1(p)\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_2(p)C_r(p)) \right) \\ &\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( K_{\text{Adapt}}\frac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}}K_1\frac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}}K_2\frac{C_{r0}}{p} \right) \\ &\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}}K_1)\Omega_{c0} + K_{\text{Capt}}K_2C_{r0}\end{aligned}$$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

#### Correction

En choisissant  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ , l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain  $K_P$  important  $K_1 \rightarrow 1$  et  $K_2 \rightarrow 0$ , mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

#### Correction

En reprenant le raisonnement de la question \*\*, et en remplaçant  $C(p)$  par  $K_I/p$  dans

$$\text{les expressions de } H_1(p) \text{ et } H_2(p) : \lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} p}{1 + \frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}}} =$$

$$\frac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}.$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{1}{R \left( K + \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = 0$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p) \right)$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} K_{\text{Adapt}} / K_{\text{Capt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} 0 C_r 0 = 0$$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.



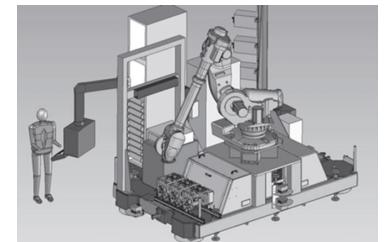
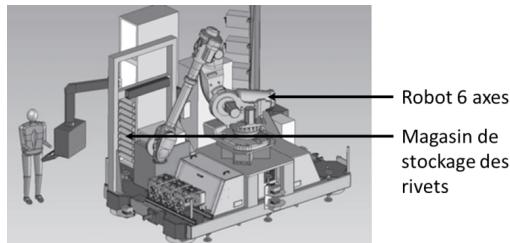
## TD 2

# Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet

Concours E3A – PSI 2015.

## Mise en situation

### Présentation



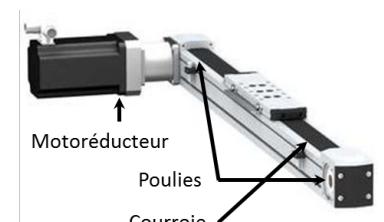
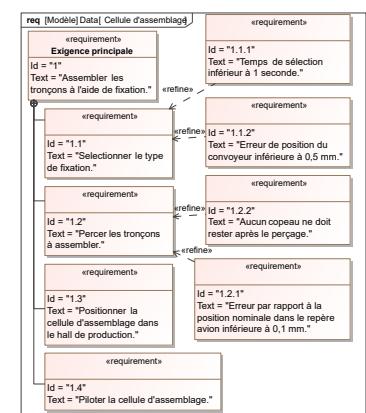
Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

L'objectif de cette partie est de valider les choix effectués par la société pour le sous ensemble de sélection des fixations de la cellule (exigence 1.1).

### Axe chariot

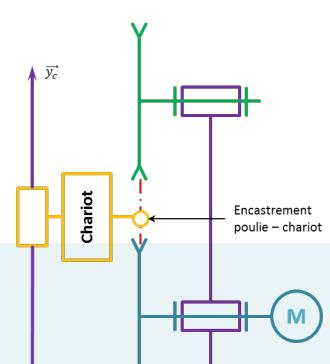
Le déplacement du chariot est assuré par un axe numérique asservi en vitesse et en position. Cet axe est composé d'un moteur à courant continu, d'un système de transmission de puissance de type poulies / courroie et d'un rail.

La modélisation du système de déplacement du chariot est donné ci-contre.



### Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Afin de sélectionner le type de fixation, la buse d'aspiration doit être déplacée en face de la cassette avec une erreur inférieure à 0,5 mm (voir exigences fonctionnelles). Cependant le fabricant du système poulie-courroie du rail indique déjà une erreur de  $\pm 0,25$  mm due notamment à l'élasticité de la courroie. Par conséquent, l'erreur en position de la commande doit être nulle. De plus, afin de ne pas perdre de temps lors



de la production, le temps maximal de déplacement lors de la sélection est imposé à une seconde.

L'étude se fera dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire un déplacement du chariot vers le haut entre les deux cassettes de rivets les plus éloignées. L'axe de déplacement est appelé  $\vec{y}_c$

## Notations domaine temporel – domaine de Laplace

Les notations entre le domaine temporel et celui de Laplace sont données dans la suite. Ainsi, si la fonction  $f(t)$  possède une transformée de Laplace, elle sera notée :  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

<input type="checkbox"/> $u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t);$	<input type="checkbox"/> $u(t)$ : tension moteur ;
<input type="checkbox"/> $e(t) = K_E \omega_m(t);$	<input type="checkbox"/> $i(t)$ : courant moteur ;
<input type="checkbox"/> $C_M(t) = K_C i(t);$	<input type="checkbox"/> $e(t)$ : force contre-électromotrice ;
<input type="checkbox"/> $J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f\omega_m(t) = C_M(t) - C_R(t).$	<input type="checkbox"/> $\omega_m(t)$ : vitesse de rotation moteur ;
	<input type="checkbox"/> $C_M(t)$ : couple moteur ;
	<input type="checkbox"/> $C_R(t)$ : couple résistant modélisant l'action de pesanteur.

## Critères à respecter pour l'exigence 1.2

Exigence	Critères	Niveaux
Déplacer le chariot	<b>Précision</b> : erreur statique par rapport à une consigne de vitesse constante <b>Rapidité</b> : temps de réponse à 5% en réponse à une consigne échelon <b>Stabilité</b>	NULLE $T_{r5\%} = 0,1\text{s}$ maxi
	Marge de gain : Marge de phase :	6 dB mini 45° mini

## Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Compte tenu des vitesses de translation importantes, le système retenu est de type poulie-courroie.

## Détermination de l'inertie équivalente

Les grandeurs caractéristiques (notations et valeurs) des éléments de l'axe du chariot sont données dans le tableau ci-dessous.

Moment d'inertie du rotor du moteur autour de son axe	$J_m$	$140 \times 10^{-6}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur	$J_{rd}$	$60 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie motrice autour de son axe	$J_{PM}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie réceptrice autour de son axe	$J_{PR}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Masse totale du chariot	$M$	5 kg
Vitesse de rotation de l'arbre moteur	$\omega_m$	
Vitesse de rotation de l'arbre de sortie du réducteur	$\omega_r$	
Rayon d'une poulie motrice ou réceptrice	$R_p$	45 mm
Rapport de réduction réducteur ( $\omega_r / \omega_m$ )	$\lambda$	1/5

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

### Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

Le coefficient de frottement visqueux est donné par  $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$ , l'inductance par  $L = 9 \text{ mH}$ , la résistance de l'induit par  $R = 3 \text{ Ohm}$ , la constante de couple par  $K_c = 1,3 \text{ NmA}^{-1}$  et  $K_E = 1,3 \text{ V}(\text{rad s}^{-1})^{-1}$ .

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_C}{K_C K_e + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$ .

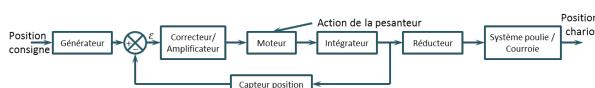
Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

La partie précédente a permis de déterminer un modèle du moteur. La suite de l'étude va permettre, par simulation, de déterminer les réglages nécessaires de l'axe vis-à-vis du cahier des charges. La figure suivante présente le principe de l'asservissement de l'axe du chariot.



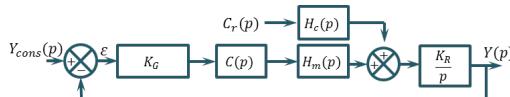
Les grandeurs caractéristiques des blocs de l'asservissement de l'axe chariot sont données dans le tableau ci-contre.

**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\varepsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

## Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant  $C_R$  dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

Générateur	$K_G$	À déterminer
Capteur de position	$K_{capt}$	$5 \times 10^{-3} \text{ V rad}^{-1}$
Correcteur amplificateur	$C(p)$	Variable

Avec :

- $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ; \frac{(R + L p) K_M}{K_C}$
- $H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$
- $C_R(p) = C_r/p ;$
- $K_R = R_p \lambda .$

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Question 13** Conclure.

Afin de répondre totalement au cahier des charges, l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral dérivé est retenue. En effet, la commande de l'axe intègre directement ce type de correcteur. Dans la suite du problème, le correcteur  $C(p)$  sera de la forme :  $C(p) = K_I \left( 1 + \frac{1}{(T_I p)} \right) (1 + T_D p)$ . Le réglage des coefficients a été fait par simulation numérique. Afin de vérifier maintenant le critère de rapidité, on donne la réponse temporelle (figure ??) de l'axe à un échelon de position de 1 m.

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

**Question 15** Tracer le diagramme de Bode.

On considère  $C_R(p) = 0$ . On prendra  $K_M = 0,8 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ ,  $T_e = 0,0051 \text{ s}$ ,  $T_m = 0,0074 \text{ s}$ .

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

On donne ci-dessous les diagrammes de Bode avec les correcteurs optimisés. Déterminer les marges de gain et marges de phase.

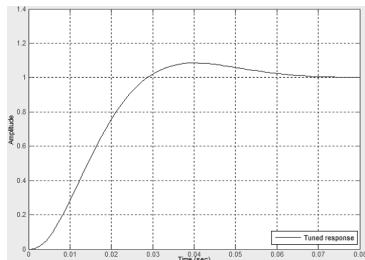
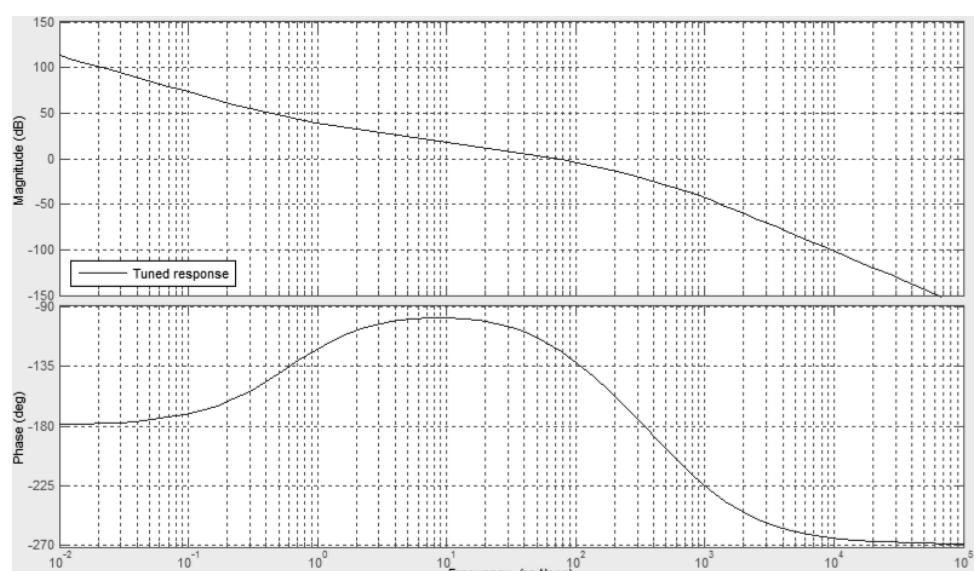
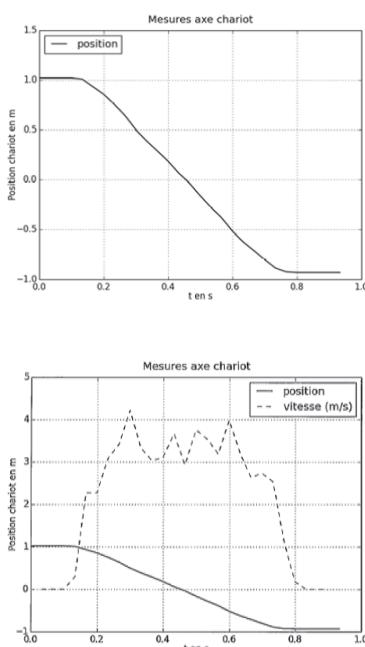


FIGURE 1.8 – Réponse temporelle système réglé.

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Afin de vérifier les réglages précédents, un essai sur le système réel est réalisé. Une consigne de 2 m est donnée. L'absence de système d'acquisition dédié impose un système de mesure extérieur au système réel. C'est un dispositif d'analyse d'image qui est retenu pour ces mesures.

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).





## TD 2

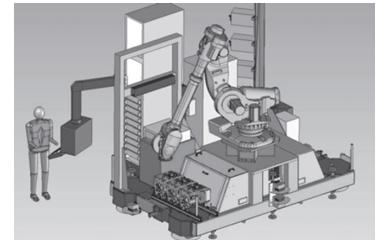
# Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé

Concours E3A – PSI 2015.

## Mise en situation

### Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

### Critères à respecter pour l'exigence 1.2



### Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

#### Correction

Utilisation d'un système vis-écrou.

### Détermination de l'inertie équivalente

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2J_{eq}\omega_m^2$ .

#### Correction

$E_c(\Sigma) = E_c(\text{moteur}) + E_c(\text{réducteur}) + E_c(\text{poulies}) + E_c(\text{chariot})$ .

- $E_c(\text{moteur}) = 1/2J_m\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{réducteur}) = 1/2J_{red}\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{poulies}) = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\omega_{red}^2 = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{chariot}) = 1/2MV^2 = 1/2MR_p^2\lambda^2\omega_m^2$ .

On a donc  $J_{eq} = MR_p^2\lambda^2 + (J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2 + J_{red} + J_m$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

#### Correction

$$J_{eq} = 0,0068 \text{ kg m}^2$$

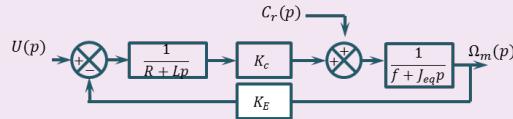
## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

### Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

### Correction



**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

### Correction

$$H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E + Rf}}{1 + \frac{RJ_{eq} + Lf}{K_c K_E + Rf} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E + Rf} p^2}$$

Le coefficient de frottement visqueux est donné par  $f = 0,2 \times 10^{-2}$  Nms rad $^{-1}$ , l'inductance par  $L = 9$  mH, la résistance de l'induit par  $R = 3$  Ohm, la constante de couple par  $K_c = 1,3$  NmA $^{-1}$  et  $K_E = 1,3$  V (rad s $^{-1}$ ) $^{-1}$ .

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_C}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$ . Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3}$  kg m $^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

### Correction

En faisant les applications numériques on montre que  $Rf$  est négligeable devant  $K_c K_E$  et que  $Lf$  est négligeable devant  $RJ_{eq}$ . On a donc :  $H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E}}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E} p^2} = \frac{K_C}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$ .

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

### Correction

$$\left\{ \begin{array}{l} T_e + T_m = \frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} \\ T_e T_m = \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E} \end{array} \right. \quad \text{On a (résolution d'une équation du second degré) : } \\ T_e = \frac{\frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} - \sqrt{\left(\frac{RJ_{eq}}{K_c K_E}\right)^2 - 4 \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E}}}{2}. T_e = 0,0051 \text{ s et } T_m = 0,0074 \text{ s.}$$

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

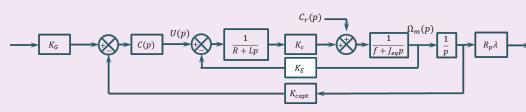
**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\varepsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

#### Correction

On doit avoir  $K_G = K_{\text{capt}} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{R_p} = 0,556 \text{ V rad}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

#### Correction



## Étude du modèle simplifié

**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

#### Correction

On raisonne par superposition :

Si  $C_r(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \end{aligned}$$

#### Correction

Si  $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C} \\ &= C_r(p) \frac{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \end{aligned}$$

On a donc :  $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

#### Correction

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

#### Correction

**Question 13** Conclure.

#### Correction

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

#### Correction

**Question 15** Tracer de diagramme de Bode.

#### Correction

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

#### Correction

**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

#### Correction

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).

#### Correction



## TD 3

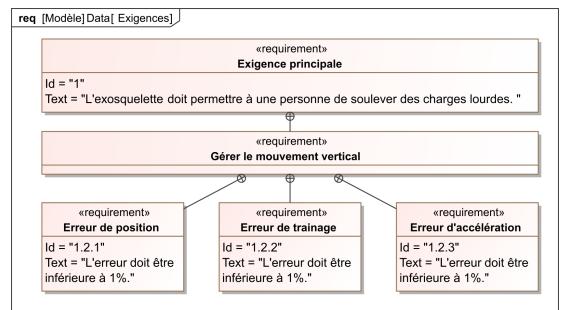
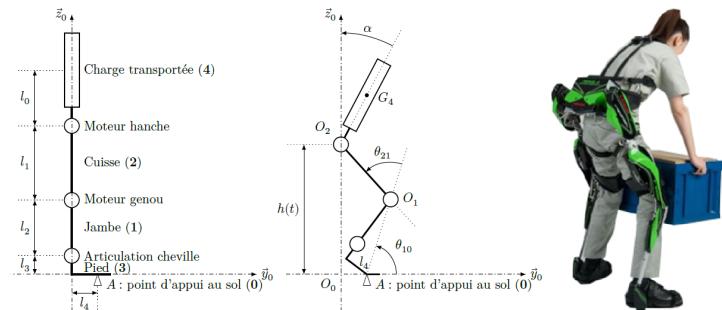
# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.

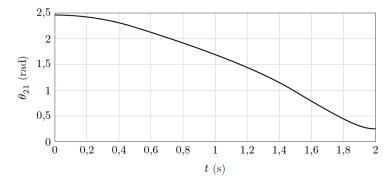


## Gestion du mouvement vertical

### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

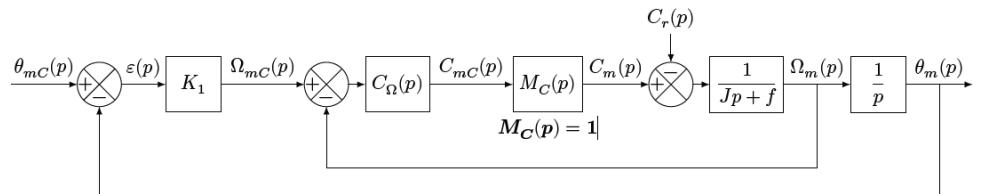
La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.

**Notations :**

- ▶  $\theta_{mC}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mC}(t)$  en rad);
- ▶  $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad);
- ▶  $C_{mC}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mC}(t)$  en Nm);
- ▶  $C_m(p)$  couple moteur (variable temporelle :  $c_m(t)$  en Nm);
- ▶  $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm);
- ▶  $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ );
- ▶  $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en  $rad\ s^{-1}$ );
- ▶  $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en  $rad\ s^{-1}$ );
- ▶  $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- ▶  $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ;
- ▶  $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- ▶  $f$  coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.



Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- ▶ l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ;
- ▶ l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

**Hypothèse**

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

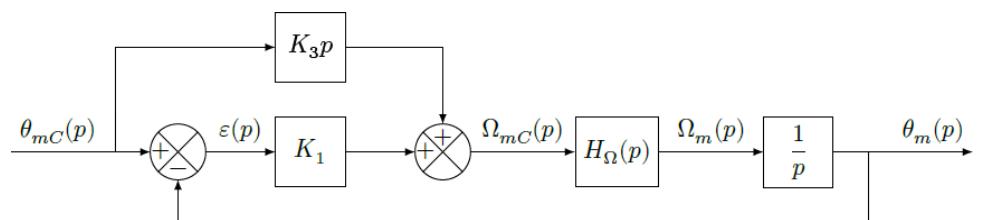
**Méthode –**

On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon).

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33\ ms$ .



**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

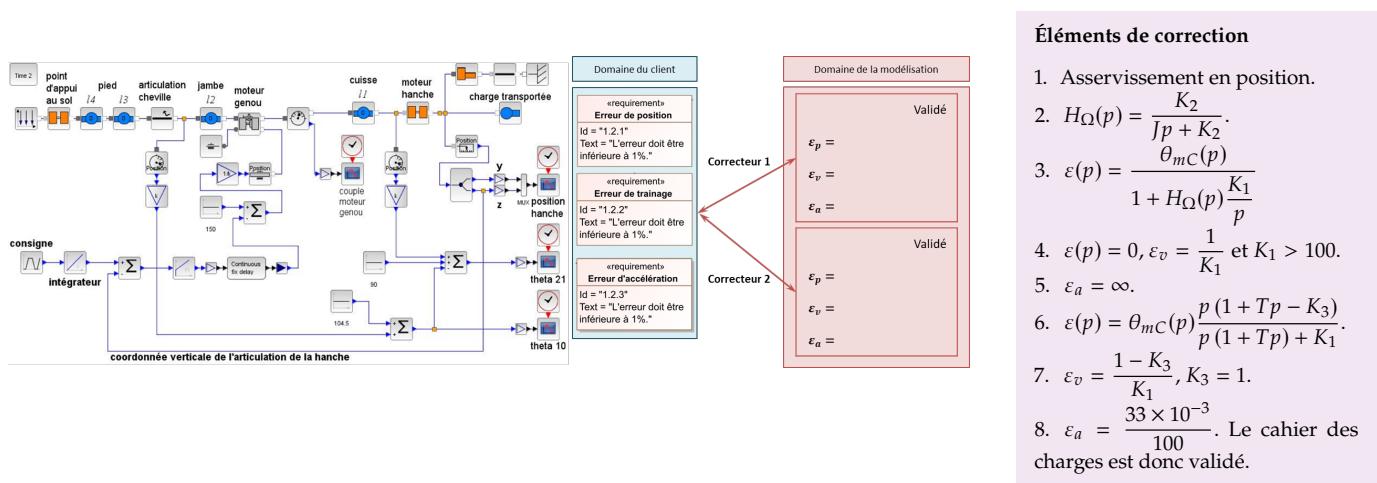
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.







## TD 3

# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

### Gestion du mouvement vertical



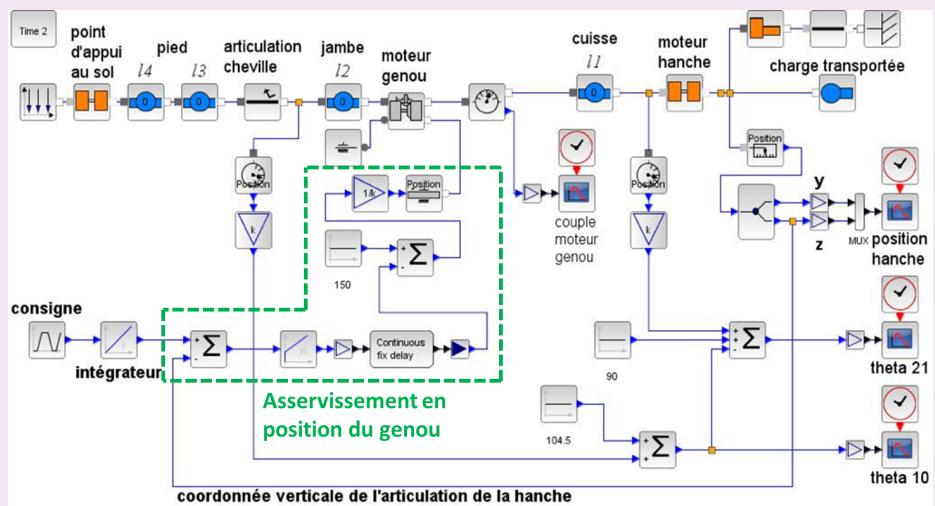
#### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

#### Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Correction**

En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a :  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}$ . En conséquences :  $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp+K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Correction**

D'une part,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ . D'autre part,  $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p)$ . Par suite,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}}$ .

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Correction**

On a :

$$\blacktriangleright \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} = 0$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1);

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et} \\ &\text{de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut  $\frac{1}{K_1} < 0,01$  et  $K_1 > 100$ .

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

En raisonnant de même, on a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).}$$

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

### Correction

En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p);$
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p);$
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}.$

On a donc :  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)}$

$$= \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)}\right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}.$$

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

### Correction

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir  $K_3 = 1$ .

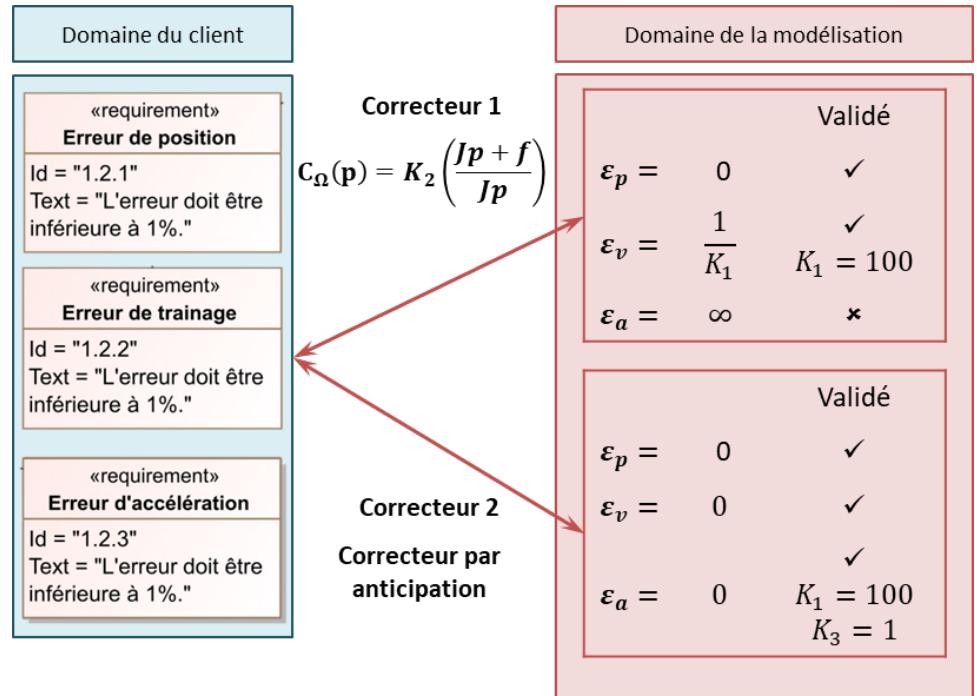
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

### Correction

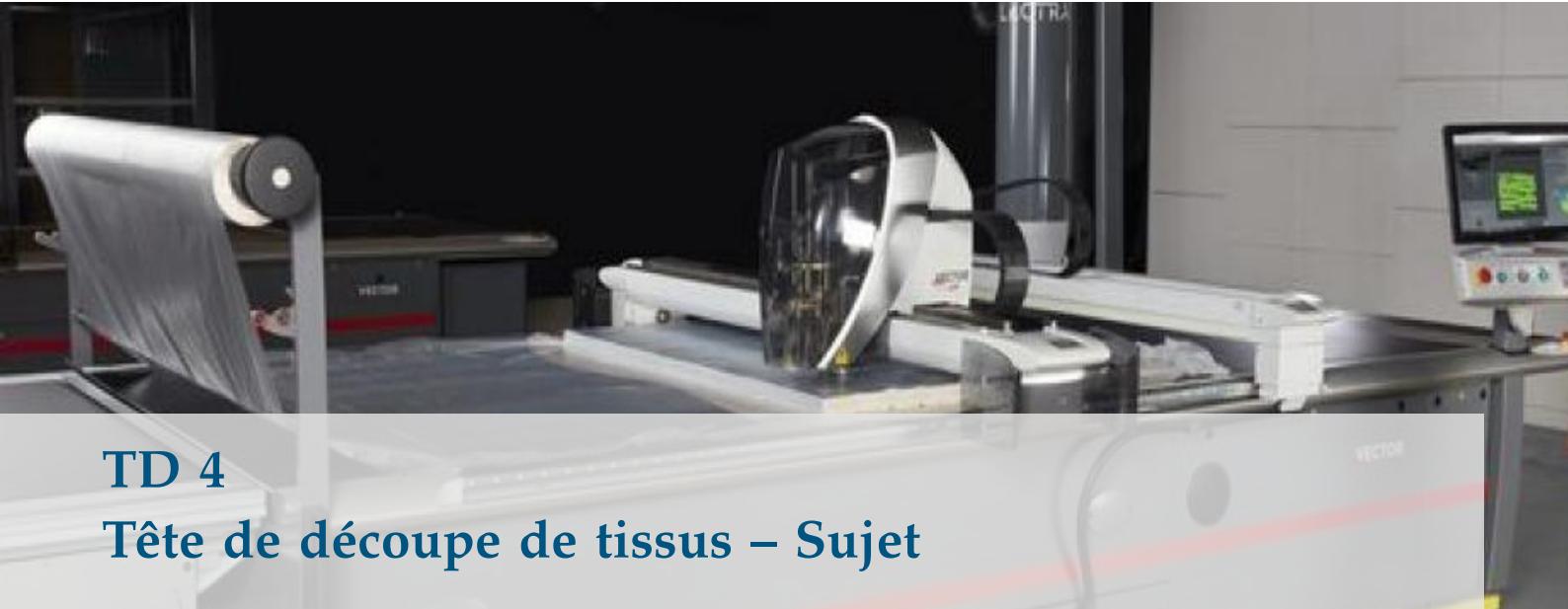
On a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p}$ . En prenant  $K_3 = 1$  et  $K_1 = 100$ , on obtient :  $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1 + Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . L'erreur est donc de  $33 \times 10^{-5}$ . Le cahier des charges est donc validé.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



===== TD =====



## TD 4

### Tête de découpe de tissus – Sujet

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 1.34) :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport à la table;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction  $\vec{x}_0$  par rapport au bras transversal;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

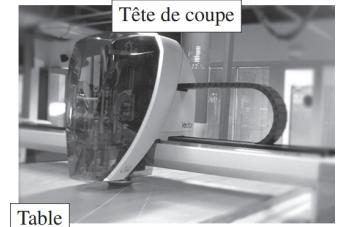
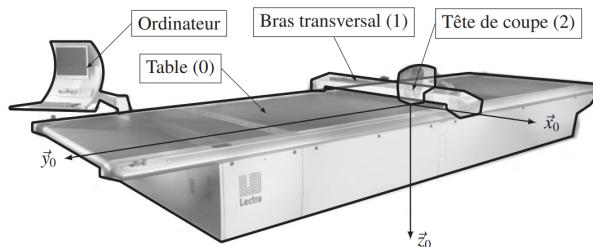


FIGURE 1.9 – Structure d'une table de découpe de tissus

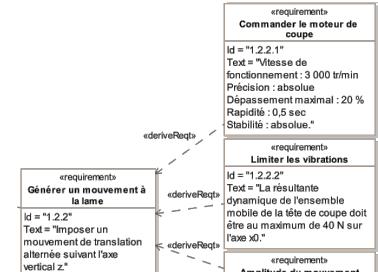


FIGURE 1.10 – Exigence 1.2.2.1

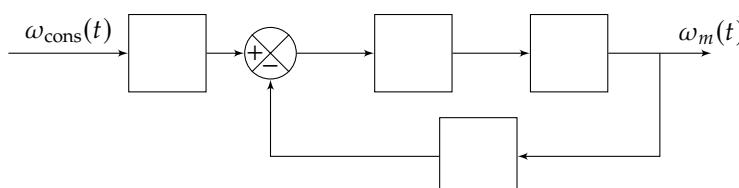
### Modélisation du comportement du moteur de coupe

#### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.12).

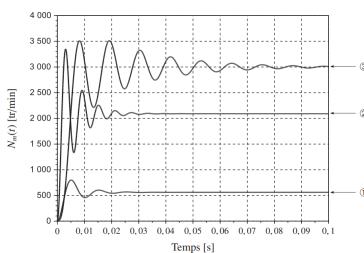
Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée  $\omega_m(t)$ , est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension  $u_{mes}(t)$ , image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne  $u_{cons}(t)$ , image de la vitesse de rotation de consigne  $\omega_{cons}(t)$ ; un adaptateur fournit  $u_{cons}(t)$  à partir de  $\omega_{cons}(t)$ . La tension écart  $\varepsilon(t) = u_{cons}(t) - u_{mes}(t)$  est alors transformée en tension d'alimentation du moteur  $u_m(t)$  par l'ensemble correcteur-variateur.

**Question 1** Compléter le schéma-bloc fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont :

- $R$ , résistance de l'induit;
- $L$ , inductance de l'induit;
- $k_e$ , constante de vitesse;
- $k_c$ , constante de couple;
- $u_m(t)$  est la tension d'alimentation du moteur;
- $i(t)$  est l'intensité traversant l'induit;
- $e(t)$  est la force contre-électromotrice;
- $\omega_m(t)$  est la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- $c_m(t)$  est le couple moteur;
- $c_r(t)$  est le couple résistant;
- $J$  est le moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ramené à l'arbre moteur, supposé constant dans cette partie.



**FIGURE 1.11** – Évolutions simulées de  $\omega_m(t)$ .

#### Éléments de correction

1. .
2.  $K_a = K_c$ .
3. .
4.  $K = \frac{1}{k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$  et  $\xi = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_ck_e}}$ .
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de  $K_p$ .
6.  $K_i \neq 0$  pour la courbe 3 uniquement.
7. .

**Question 2** On note  $K_a$  le gain de l'adaptateur et  $K_c$  le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre  $K_a$  et  $K_c$  pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu :  $u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t)$ ,  $c_m(t) = k_c i(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ . La fonction de transfert du moteur est notée  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

**Question 4** En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . On exprimera les constantes en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $k_e$ ,  $k_c$  et  $J$ .

## Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

### Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

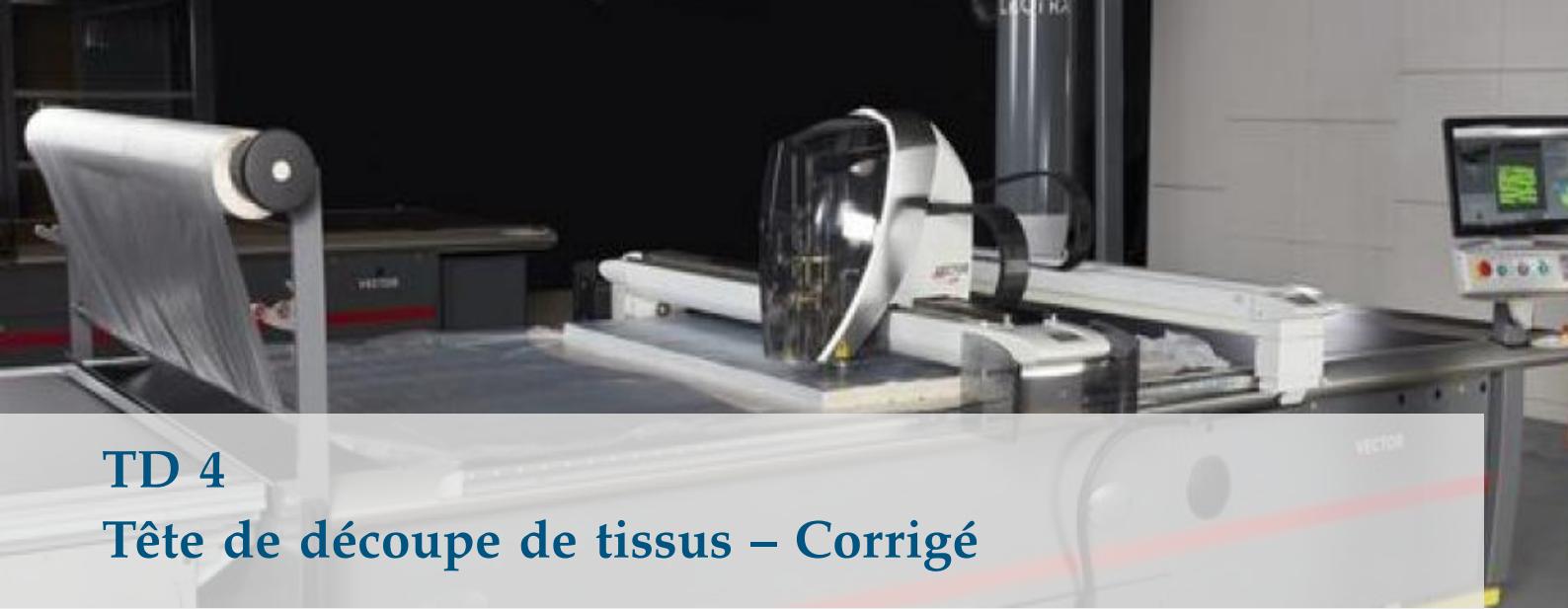
Le correcteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur de fonction de transfert  $H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

Les résultats de simulation de la réponse du moteur  $N_m(t)$ , en boucle fermée, pour une entrée échelon d'amplitude  $N_0 = 3000 \text{ tr min}^{-1}$  pour différentes valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  sont donnés sur la figure 1.13.

**Question 5** Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

**Question 6** Pour chaque courbe de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non.

**Question 7** Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.



## TD 4

### Tête de découpe de tissus – Corrigé

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

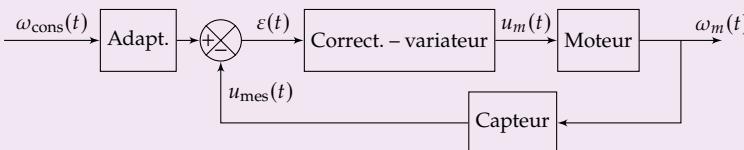
#### Modélisation du comportement du moteur de coupe

##### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.12).

**Question 1** Compléter le schéma-bloc fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

##### Correction



**Question 2** On note  $K_a$  le gain de l'adaptateur et  $K_c$  le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre  $K_a$  et  $K_c$  pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

##### Correction

On a  $\varepsilon(t) = K_a \omega_{\text{cons}}(t) - K_c \omega_m(t)$ .

Pour que  $\varepsilon(t)$  soit nul lorsque  $\omega_{\text{cons}}(t) = \omega_m(t)$ , il faut que  $K_a = K_c$ .

**Question 3** Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

##### Correction

On a  $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$ ,  $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) + Cr(p)$ ,  $C_m(p) = k_c I(p)$ ,  $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ .

**Question 4** En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique

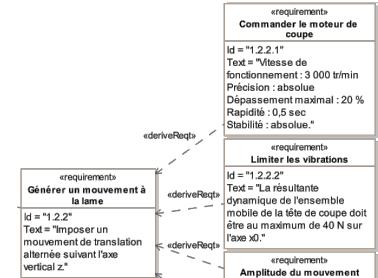
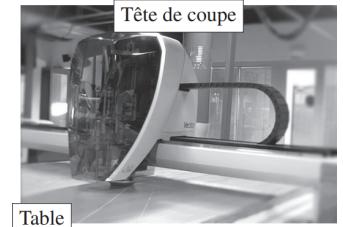


FIGURE 1.12 – Exigence 1.2.2.1

de la fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . On exprimera les constantes en fonction de  $R, L, k_e, k_c$  et  $J$ .

#### Correction

On a  $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) = \frac{C_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p) = Jp\frac{\Omega_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p)$ .

On a donc  $U_m(p) = \Omega_m(p)\left(\frac{Jp}{k_c}(R + Lp) + k_e\right)$  et  $H_m(p) = \frac{1}{\frac{JL}{k_c}p^2 + \frac{JR}{k_c}p + k_e}$   
 $\frac{1}{\frac{JL}{k_c}p^2 + \frac{JR}{k_c}p + 1}$ .

Par identification, on a donc  $K = \frac{1}{k_e}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{JR}{k_c k_e}$  soit  $\xi = \frac{JR}{2k_c k_e} \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}} = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$ .

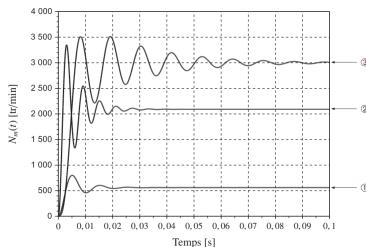


FIGURE 1.13 – Évolutions simulées de  $\omega_m(t)$ .

### Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

#### Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

**Question 5** Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

#### Correction

##### Méthode 1 – Coefficient d'amortissement

On note  $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\omega_m(t)}{\omega_{\text{cons}}(t)}$ .

$$\text{On a alors, } H_{\text{BF}}(p) = K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K_c K_p K}{1 + K_p \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} K_c + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_p K_c}.$$

On a donc  $\frac{2\xi_{\text{BF}}}{\omega_{\text{BF}}} = \frac{2\xi}{\omega_0(1 + K_p K_c)}$  et  $\omega_{\text{BF}}^2 = \omega_0^2(1 + K_p K_c)$ .

$$\text{Soit } \xi_{\text{BF}} = \frac{\xi \omega_{\text{BF}}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi \omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi}{\omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}.$$

En conclusion, plus  $K_p$  augmente, plus le coefficient d'amortissement diminue et donc plus les pseudo oscillations deviennent grandes. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de  $K_p$ .

##### Méthode 2 – Calcul de l'écart statique

On montre que  $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_a}{1 + K_p K_c K}.$$

Lorsque  $K_p$  augmente,  $\varepsilon_S$  diminue. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de  $K_p$ .

**Question 6** Pour chaque courbe de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non.

#### Correction

On montre que  $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{p}\right) K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$ . Ainsi, si  $K_i$  non nul,  $\varepsilon_S = 0$  (courbe 3 uniquement).

**Question 7** Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

#### Correction

	Stabilité	1 <sup>er</sup> Dépassemement	Erreur statique	$T_{5\%}$
Exigences	Absolue	< 20 %	Nulle	0,5 s
Courbe 1	Stable OK	$D_1 = 45\%$ Pas OK	2450 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,015\text{ s}$ OK
Courbe 2	Stable OK	$D_1 = 59\%$ Pas OK	900 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,018\text{ s}$ OK
Courbe 3	Stable OK	$D_1 = 15\%$ OK	0 tr/min OK	$T_{5\%} = 0,048\text{ s}$ OK

=====





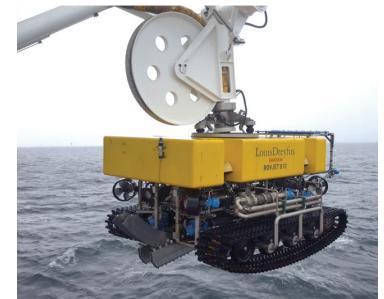
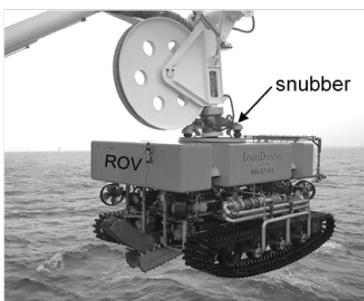
## TD 5

# Bateau support de ROV – Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

### Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.



**FIGURE 1.14 – ROV suspendu à la grue portique**

### Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

**TABLE 1.1 – Extrait du cahier des charges**

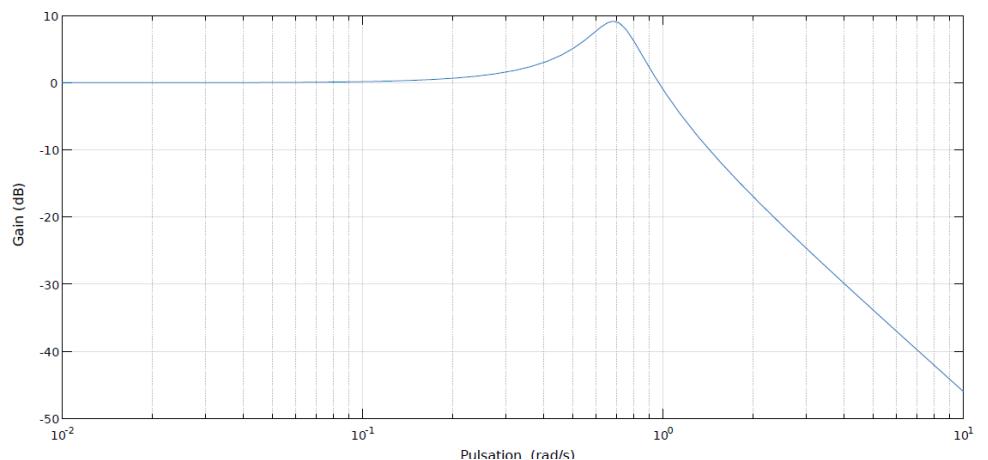
Exigence	Critère	Niveau
Id 1.1 : Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre $0,5 \text{ rad s}^{-1}$ à $1,7 \text{ rad s}^{-1}$	Amplitude verticale du ROV maximale	< 1 m pour 5 m d'amplitude de houle
Id 1.2 : Mise en tension du câble	Temps de réponse, $t_{r5\%}$	< 3 s

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble  $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$  suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble  $S$  est  $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  avec  $Y_S(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et  $Y_{\text{vague}}(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de  $B(p)$  dans la figure suivante.



**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (Figure 1.15).

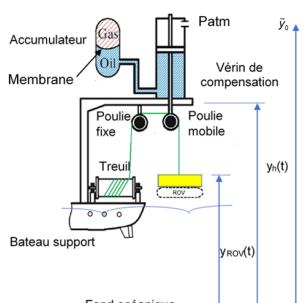


FIGURE 1.15 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression  $\Delta p_E(t)$  et  $\Delta p_G(t)$  autour du point d'équilibre peuvent être définies par  $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$  et  $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$ . Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left( \frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{\text{ROV}}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par  $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma$  se traduit par  $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{\text{ROV}}(t) + c(\dot{y}_{\text{ROV}}(t) - \dot{y}_h(t))$  (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par  $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$ .

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliquée les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

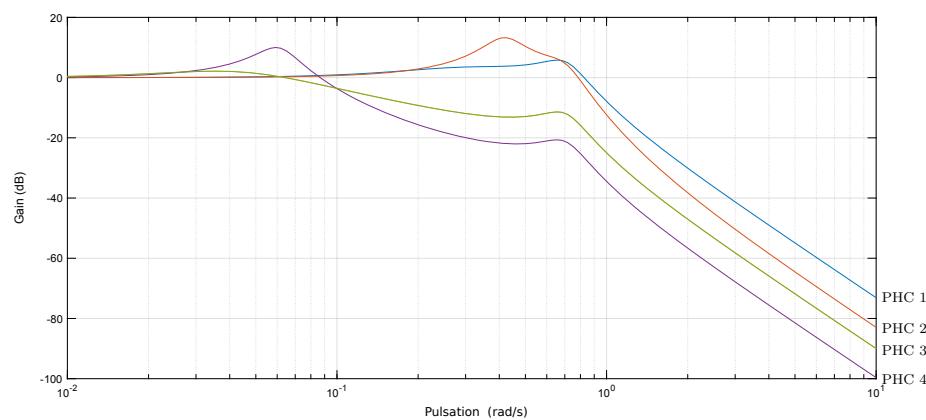
définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation  $\tau\omega_0 = 2\zeta$ .

**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle  $\omega_c$  et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.



La Figure 1.16 donne les diagrammes du gain de la fonction  $G(p)$  de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz  $V_{G0}$  correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

**FIGURE 1.16** – Courbes de gain  $G(p)$  pour différents réglages du PHC

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
$V_{G0}$ ( $\text{m}^3$ )	96	1	52	2

**TABLE 1.2** – Volumes  $V_{G0}$  pour différents réglages du PHC

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à  $-14$  dB.

**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

#### Éléments de correction

1.  $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{\text{vague}}(j\omega)} \right|$  et

$$G_{\text{dB}(\omega)} < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$$

2. ...

3.  $K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}}$  et  $\tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}$ .

4.  $\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}$ ,  $\omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}$ ;  $\zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}$ .

5. .

6. .

7. PHC4.



## TD 5

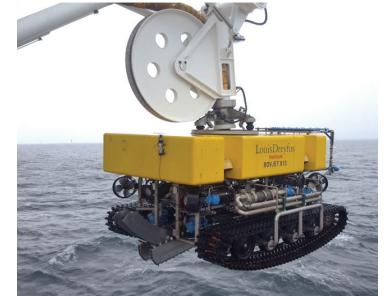
# Bateau support de ROV – Corrigé

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

## Introduction

### Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.



**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

### Correction

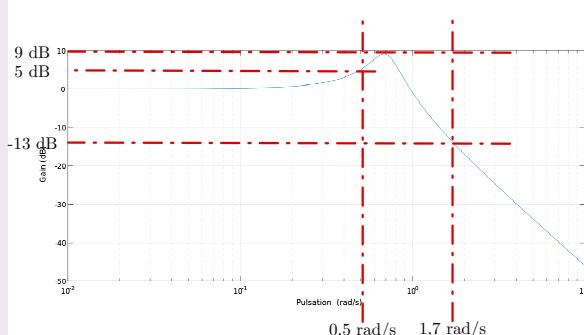
La définition du gain en décibel de la fonction de transfert  $B(j\omega)$  est  $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$ . L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$G_{dB}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1,7] \text{ rad/s.}$$

**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

### Correction

On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

### Correction

On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (1.2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left( p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR} \left( \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) = C_{qR} \left( 1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Par identification :

$$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions

initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes}$$

définies précédemment.

### Correction

La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta)p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1)p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} ; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

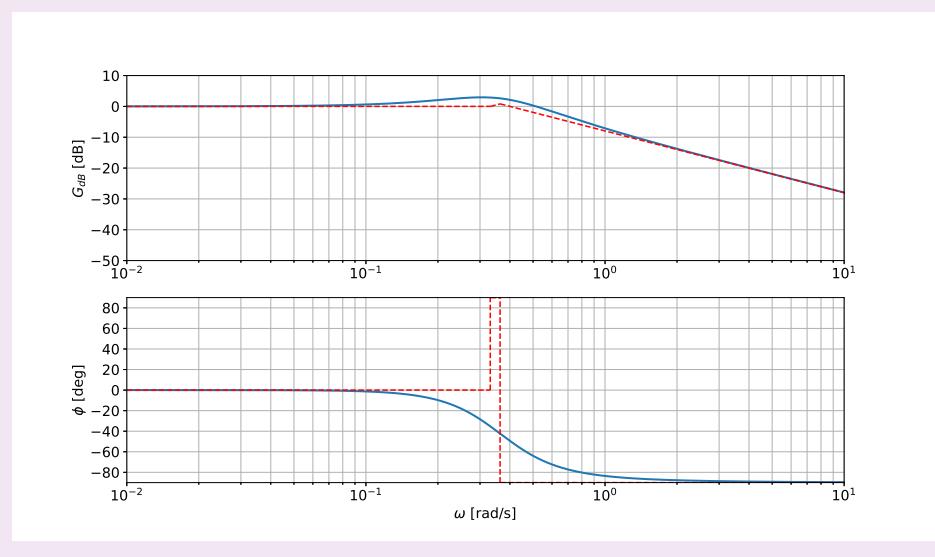
**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques.

Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

### Correction

Diagrammes de Bode de  $H(p)$ . On identifie 2 pulsations caractéristiques :  $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$  rad/s et  $\omega_n = 0,364$  rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  car  $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$ . La résonance sera toutefois faible.

$\omega$	BF $\omega \ll \omega_1$	MF $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	HF $\omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\frac{\tau\omega_n^2}{j\omega}$
$G_{\text{dB}}$	0	$20 \log \tau + 20 \log \omega$	$20 \log(\tau\omega_n^2) - 20 \log \omega$
$\phi$	0	$90^\circ$	$-90^\circ$

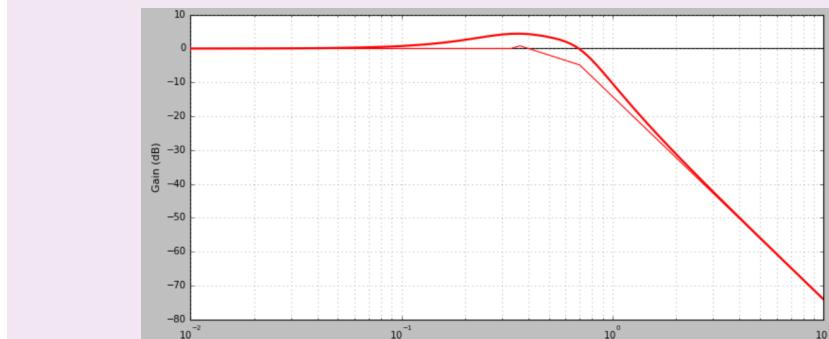


La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

#### Correction

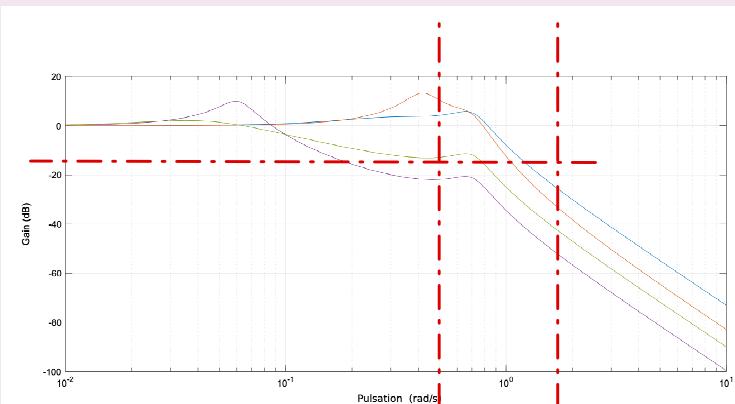
On a la relation  $G(p) = B(p)H(p)$ .



**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

#### Correction

Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.







## TD 6

# Robot pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Banque PT – SIA – 2005.

### Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon  $\vec{z}_1$ .

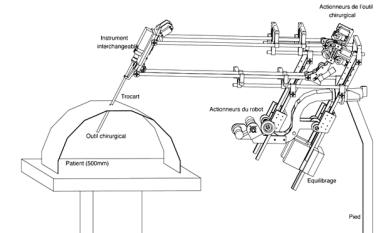
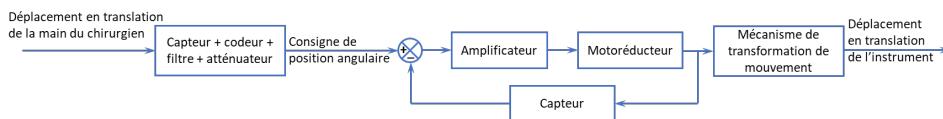


TABLE 1.3 – Liste partielle des exigences.

Req.	Exigence	Niveaux
1	Vitesse de translation nominale	$> 0,1 \text{ m s}^{-1}$
2	Temps $t_1$ pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
3	Précision – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
4	Précision – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ m s}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
5	Stabilité – Dépassemment	Aucun
6	Stabilité – Marge de phase	$45^\circ$
7	Rapidité – Bande passante à $-3 \text{ dB}$ pour la partie mécanique	4 Hz

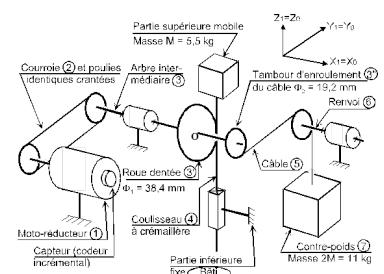
La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon  $\vec{Z}_1$ ) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.



La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure ci-contre présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006 ; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3) ;



- ▶ une roue dentée (3') de diamètre primitif  $\Phi_1 = 38,4 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;
- ▶ cette crémaillère est en liaison glissière d'axe  $\vec{z}_1$  par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse  $M = 5,5 \text{ kg}$ , les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse  $2M = 11 \text{ kg}$  tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3'') de diamètre  $\Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 19,2 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3).

Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :

- ▶ puissance nominale en sortie du réducteur :  $P_{\text{nom}} = 8,6 \text{ W}$ ;
- ▶ couple nominal en sortie du réducteur :  $C_{\text{nom}} = 1,4 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple de maintien en sortie du réducteur :  $C_{\text{maint}} = 1,5 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple maxi en sortie du réducteur :  $C_{\text{max}} = 2,7 \text{ Nm}$ ;
- ▶ vitesse nominale en sortie du réducteur :  $N_{\text{nom}} = 60 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ vitesse maxi en sortie du réducteur :  $N_{\text{max}} = 100 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur :  $J_1 = 3,70 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ capteur de position : codeur 360 incrémentés par tour monté sur le rotor du moteur;
- ▶ rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

Avec :

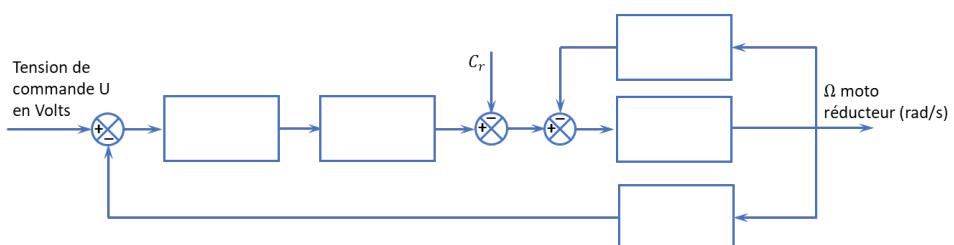
- ▶  $u(t)$  tension appliquée aux bornes de l'induit
- ▶  $i(t)$  intensité du courant traversant l'induit
- ▶  $e(t)$  force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $\omega_{\text{réd}}(t)$  vitesse de rotation à la sortie du réducteur;
- ▶  $C_{\text{réd}}(t)$  couple moteur ramené à la sortie du réducteur;
- ▶  $R = 10 \Omega$  : résistance de l'induit;
- ▶  $L = 2,2 \text{ mH}$  inductance de l'induit;
- ▶  $k_c = 2,1 \text{ N m A}^{-1}$  constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $k_e = 2,1 \text{ Vs rad}^{-1}$  constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $C_r = 0,2 \text{ N m}$  couple résistant induit par les frottements secs, ramené à la sortie du réducteur
- ▶  $f_v = 0,04 \text{ N m s rad}^{-1}$  coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur
- ▶  $J_{\text{équ}} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.

## Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

Le constructeur donne les caractéristiques électro-mécaniques exprimées à la sortie du réducteur. On rappelle les équations temporelles :  $u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_{\text{réd}}(t)$ ,  $C_{\text{réd}}(t) = k_c i(t)$ ,  $C_r - C_{\text{réd}}(t) - f_v \omega_{\text{réd}}(t) = J_{\text{équ}} \frac{d\omega_{\text{réd}}(t)}{dt}$ .

Les transformées de Laplace des fonctions  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\omega_{\text{réd}}(t)$ ,  $C_{\text{réd}}(t)$  sont respectivement  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $E(p)$ ,  $\Omega_{\text{réd}}(p)$  et  $C_{\text{réd}}(p)$ . On considère toutes les conditions initiales nulles.

**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



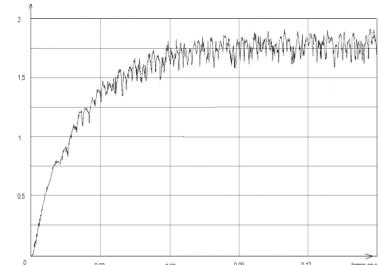
Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de  $M(p)$  suivante :  $M_1(p) = \frac{0,436}{1 + 14,5 \cdot 10^{-3}p + 3,1 \cdot 10^{-6}p^2}$ .

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension  $u(t) = 24$  V. Avec une génératrice tachymétrique dont le gain est de  $0,166$  V s rad $^{-1}$ , on a tracé la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ .

Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.



#### Remarque

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

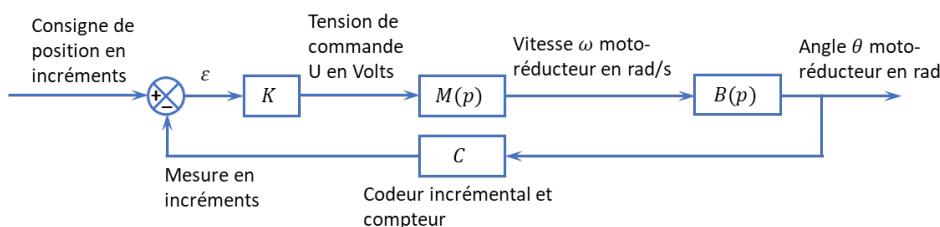
Dans la suite du problème, on néglige l'inductance  $L$  du moteur.

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

#### Respect du critère de marge de phase

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incrémentés est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



Le convertisseur-amplificateur  $K$  de gain  $k$  variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental  $C$  placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incrémentés par tour. Il est associé à un compteur – décompteur qui élabore la mesure de position en incrémentés. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.

**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

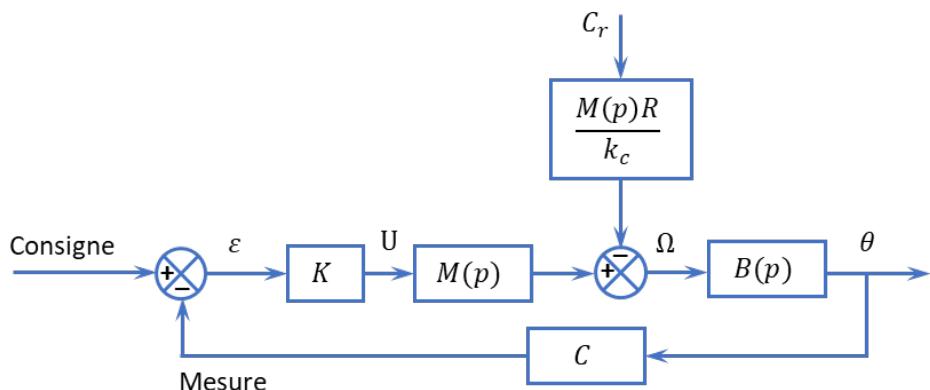
**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.

#### Remarque

Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à  $-180 + 45 = -135^\circ$ .

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{conso}}$  en incrément lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

Étant donné que la perturbation  $C_r$  intervient entre deux blocs de  $M(p)$ , on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.

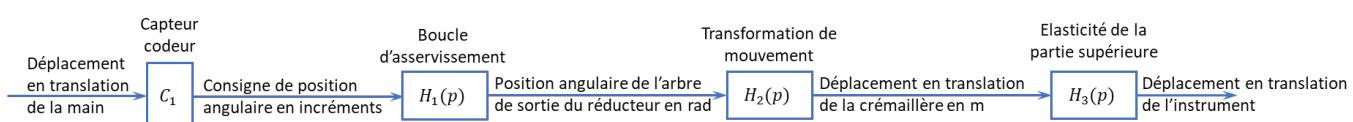


**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incréments entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

### Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

#### Modélisation par schéma-blocs



### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est :

$H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$ . On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrène avec la crémaillère a un diamètre  $\Phi_1 = 38,4$  mm.

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incrément par mètre du bloc  $C_1$ .

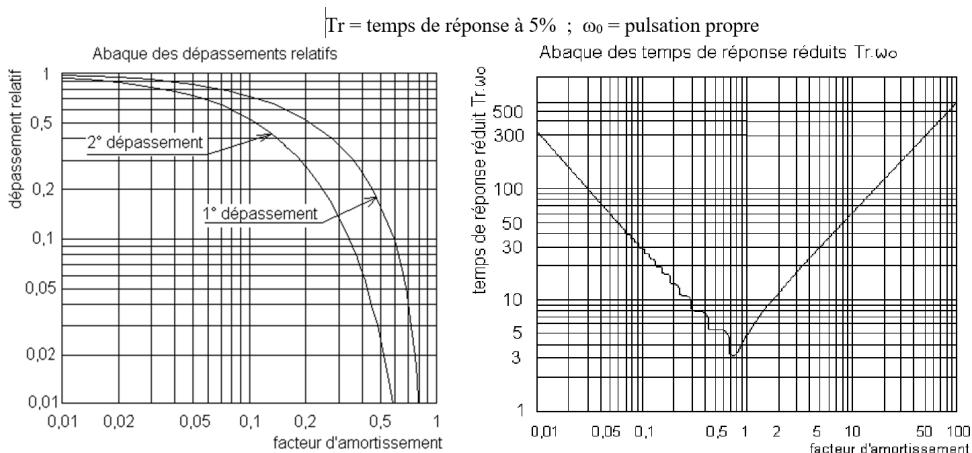
Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

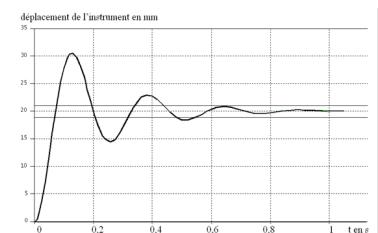
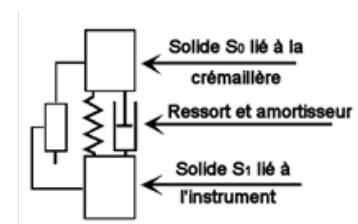
La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides :  $S_0$  représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés ; et  $S_1$  représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur  $k_0$  et un amortisseur de coefficient  $f_0$ , montés en parallèle comme le montre le schéma.

Pour identifier la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$  de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement  $d_{\text{crém}}(t) = 20 \times 10^{-3} \text{ m}$  à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement  $d_{\text{instrum}}(t)$  de l'instrument.



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassements relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.



**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3$  dB est-il satisfait ?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de  $H_3(p)$ , de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit  $m_1$  la masse du solide  $S_1$ . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté  $\vec{z}$ . L'origine  $O$  du mouvement de  $S_1$  correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit  $a_0$  l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota :  $a_0$  est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :

$$m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0.$$

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0$ ,  $f_0$ ,  $m_1$ .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6$  kg.

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3$  dB de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3\text{dB}} > \omega_{03}$ ).

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur  $c_1$  du bloc  $C_1$ . La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}. \quad \text{Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de } 100 \text{ mm s}^{-1}. \quad \text{On a tracé sur la figure 1.17 les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.}$$

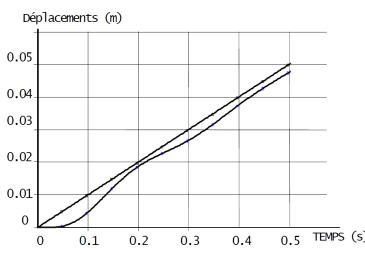


FIGURE 1.17 – Courbes de déplacement de la main

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

On donne figure 1.18, la courbe d'amplitude (gain) de  $H(p)$  pour  $p = j\omega$  dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal traité par le capteur-codeur  $C_1$  de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps :  $T_1 = 0,04$  s ;  $T_2 = 0,1$  s ;  $T_3 = 0,5$  s.

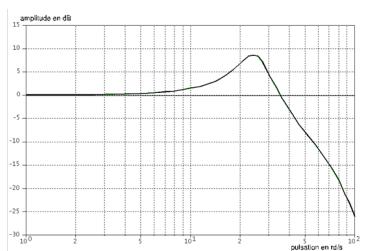


FIGURE 1.18 – Courbe de gain

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténusés de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

#### Éléments de correction

$$1. U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p); \\ E(p) = k_e\Omega_{\text{rédu}}(p); C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p); C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p).$$

$$2. M(p) = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} \cdot \frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1$$

3. .

4. .

$$5. M_2(p) = \frac{k_c}{\frac{R J_{\text{équ}}}{k_e k_c + R f_v} p + 1}$$

$$6. G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}, \text{ on a } \tau = 0,02 \text{ s.}$$

$$7. B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad,} \\ H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{k G_S}{1 + T p}.$$

8. .

9. L'écart statique est nul.

$$10. \varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}$$

$$11. H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$$

12. .

13. .

14. .

$$15. H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

16. .

$$17. \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

$$18. \Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

19. ► Écart dynamique maximal : 5 mm.

► Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.

► Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

20. .

$$21. T_2 = 0,1 \text{ s.}$$





## TD 6

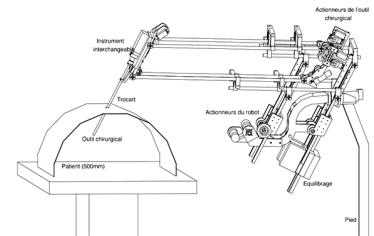
# Robot pour la chirurgie endoscopique – Corrigé

Banque PT – SIA – 2005.

## Présentation

### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

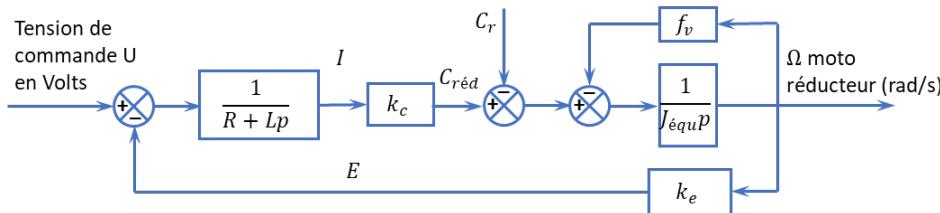
**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



#### Correction

On a :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p);$
- $E(p) = k_e \Omega_{\text{rééd}}(p);$
- $C_{\text{rééd}}(p) = k_c I(p);$
- $C_{\text{rééd}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rééd}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rééd}}(p).$



**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rééd}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

#### Correction

En raisonnant à partir des équations, on a :  $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rééd}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{\text{rééd}}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rééd}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{(J_{\text{équ}} p + f_v) \Omega_{\text{rééd}}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rééd}}(p)$

 $\Rightarrow U(p) = \left( \frac{(J_{\text{équ}} p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{\text{rééd}}(p)$ 

Au final,  $M(p) = \frac{k_c}{(J_{\text{équ}} p + f_v) (R + Lp) + k_e k_c}$ .

En mettant l'expression sous forme canonique, on a :  $M(p) = \frac{k_c}{J_{\text{équ}}Lp^2 + (RJ_{\text{équ}} + Lf_v)p + k_e k_c + Rf_v}$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{J_{\text{équ}}L}{k_e k_c + Rf_v}p^2 + \frac{RJ_{\text{équ}} + Lf_v}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}.$$

En réalisant l'application numérique, on a :  $M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6}p^2 + 14,6 \times 10^{-3}p + 1}$ .

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

#### Correction

En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant  $L$ , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et  $M(p)$  se modélise par une fonction d'ordre 1.

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.

#### Correction

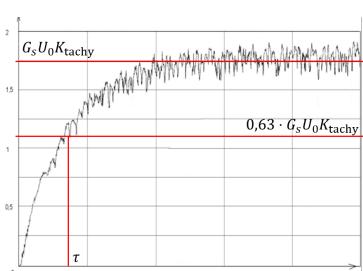
En utilisant la formulation de  $M_1(p)$  donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a :  $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$ . Au final,  $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -4607$  et  $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -70$ . Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme  $3,1 \times 10^{-6}(p + 4607)(p + 70)$ .  
Le pôle  $p_2$  est donc dominant par rapport à  $p_1$ .

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

#### Correction

En utilisant l'expression établie initialement en négligeant l'inductance, on a  $M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{RJ_{\text{équ}}}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}$ . En réalisant l'application numérique,  $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015p}$  ( $G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$  et  $T = 0,015 \text{ s}$ ).

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).



#### Correction

La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que  $24 \cdot G_S \cdot K_{\text{tachy}} = 1,75 \text{ V}$

soit  $G_S = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ . En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a  $\tau = 0,02 \text{ s}$ . On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse «  $L$  négligeable ».

## Respect du critère de marge de phase

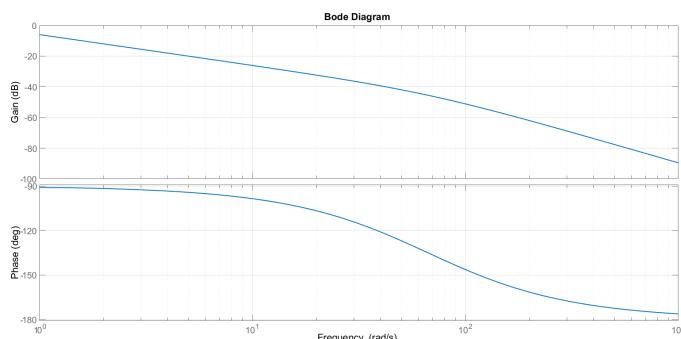
**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

### Correction

$B$  assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc  $B(p) = \frac{1}{50p}$ . Par ailleurs  $C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad}$ .

$$\text{On a donc } H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$$

**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.



### Correction

Au vu du tracé, la phase est supérieure à  $-135^\circ$  lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$  en incrémentaux lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

### Correction

#### Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

#### Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart

$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon(p) &= \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}. \text{ Cons}(p) = \frac{1}{p}. \text{ On a alors } \varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \varepsilon(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0. \end{aligned}$$

**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

#### Correction

$$\begin{aligned}
 & \text{On a } \varepsilon(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left( \varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \\
 \Leftrightarrow & \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) = \text{Cons}(p) + B(p)CC_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \\
 & \text{Cons}(p) \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 & + C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 & + C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{\frac{G_S}{1 + Tp} R \frac{1}{50p} C}{k_c \left( 1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1 + Tp} \right)} \\
 & = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1 + Tp) 50p + CKG_S)} \\
 & = C_r \frac{G_S RC}{k_c CKG_S} = C_r \frac{R}{k_c K}.
 \end{aligned}$$

On a donc  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = C_r \frac{R}{k_c K}$  soient  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95$  incr.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

#### Correction

Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur  $k = 1$ .

## Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

### Modélisation par schéma-blocs

#### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

#### Correction

En notant  $x$  le déplacement en translation, on a  $x = \frac{38,4}{2}\Theta$ . On a donc  $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$ .

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incréments par mètre du bloc  $C_1$ .

#### Correction

Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que  $P = 1$ .

On a  $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$ .

On a donc  $c_1 = 148\,810 \text{ incr m}^{-1}$ .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

#### Correction

On souhaite maintenant que  $P_1 = \frac{1}{10}$  et  $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

#### Correction

Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de  $K = 1$ .

Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve  $\xi = 0,2$ .

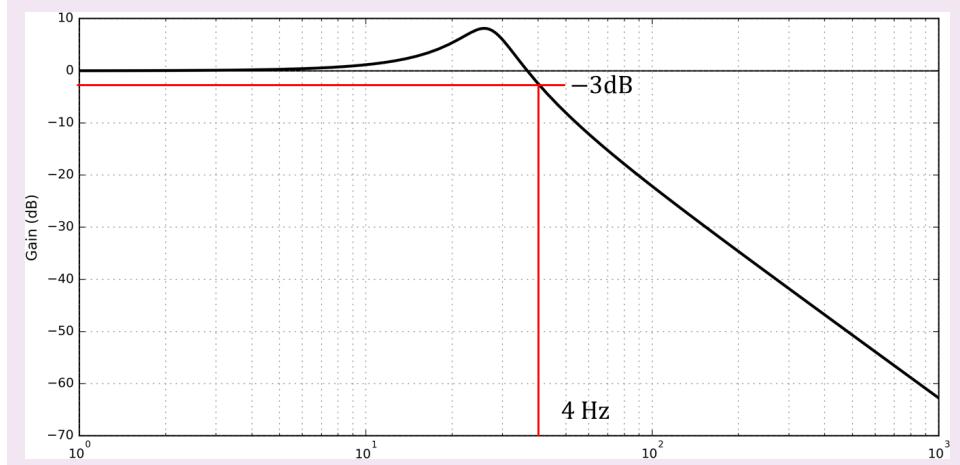
Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a  $\omega_0 Tr = 15$ . On a donc  $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait?

#### Correction

On trace le diagramme de Bode. La bande passante à -3 dB est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.



**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0, f_0, m_1$ .

#### Correction

$$\text{On a } m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0.$$

$$\text{On a donc } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6 \text{ kg}$ .

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3 \text{ dB}$  de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$ ).

#### Correction

$$\text{On a } \omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03} \text{ or } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2; \text{ donc nécessairement, } \omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}}$$

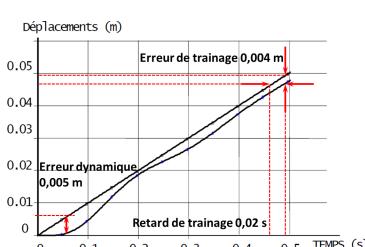
$$\Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1 \Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

#### Correction

- ▶ Écart dynamique maximal : 5 mm.
- ▶ Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.
- ▶ Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.



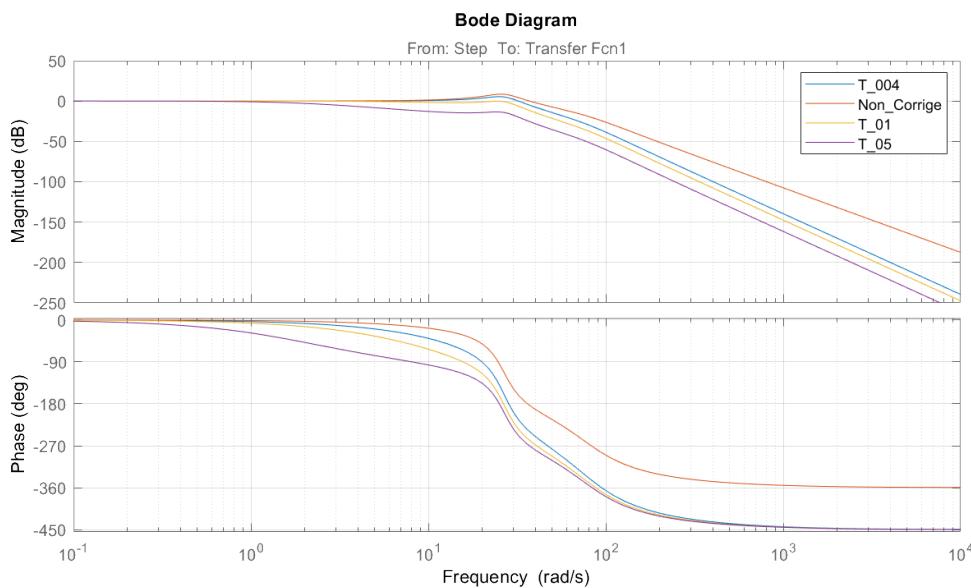
**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Correction

Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de  $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$ . À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport  $S/E$  est donc de  $10^{8/20} = 2,5$  ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténueres/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

### Amélioration des performances dynamiques

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténueres de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?



### Correction

Le filtre  $T_2 = 0,1 \text{ s}$  permet d'atténuer le gain à une pulsation de  $25 \text{ rad s}^{-1}$  sans trop atténuer le gain à des pulsations inférieures à  $6,3 \text{ rad s}^{-1}$ .





## TD 7

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2006



## Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé enrayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

### Objectif

L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure 1.34 où  $v_c$  est la consigne de glissement.

On note :

- ▶  $H_1(p)$  la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve);
- ▶  $H_2(p)$  la fonction de transfert de la roue au freinage;
- ▶  $C(p)$  le correcteur de la boucle de régulation;
- ▶  $M(p)$  la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure;
- ▶  $v_m$  : glissement estimé.

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

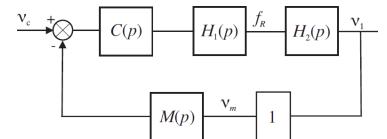
Pour une vitesse de train  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

On a  $M = 8200 \text{ kg}$ ,  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ ,  $I/r^2 = 400 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :

$$H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}.$$



**FIGURE 1.19** – Structure de la chaîne de régulation de glissement

**Marges de stabilité, performances en boucle ouverte**

Pulsation de coupure à 0 dB

$$\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$$

Marge de phase

$$\Delta\varphi \geq 60^\circ \text{ au point de fonctionnement nominal } B$$

Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique  $\mu = f(v)$ **Réponse à un échelon de consigne de glissement**

Écart en régime permanent

Nul

Temps du 1<sup>er</sup> maximum

$$t_m \leq 3,5 \text{ s}$$

Dépassee

$$D \simeq 18 \%$$

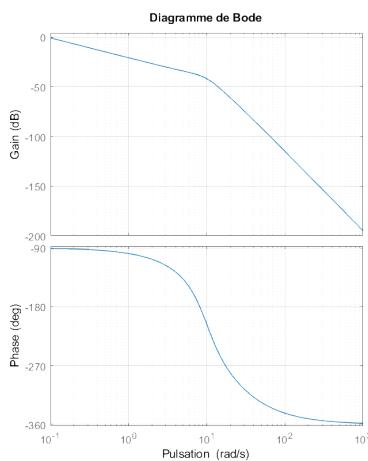
**Réponse à une variation en échelon de l'adhérence**

Écart en régime permanent

Nul

Temps de réponse

$$t_r \leq 9 \text{ s}$$

FIGURE 1.20 – Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ 

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

**Synthèse du régulateur de la boucle de régulation**

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode – Marge de phase**

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode –**

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |FTBO(j\omega_c)| = 0$ .

**Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement**

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de

glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$ .

On supposera sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 5** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Question 6** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 7** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 8** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

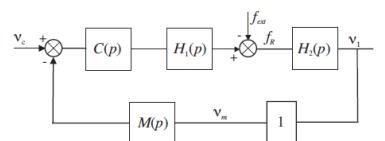
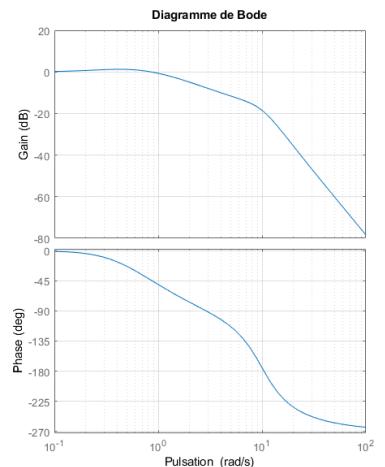
**Question 9** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

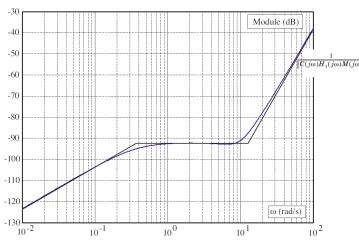
## Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 10** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .





**Question 11** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $||H_2(j\omega)||$ .

**Question 12** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $||F_2(j\omega)||$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Question 13** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + Tp}$ .

**Question 14** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 15** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

### Retour sur le cahier des charges

**Question 16** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

#### Éléments de correction

1. ...
2.  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .
3.  $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .
4. \*\*\*
5. \*\*\*
6. \*\*\*
7. \*\*\*
8. \*\*\*
9. \*\*\*
10. \*\*\*



## TD 7

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2006 –  
Ressources UPSTI



## Mise en situation

### Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

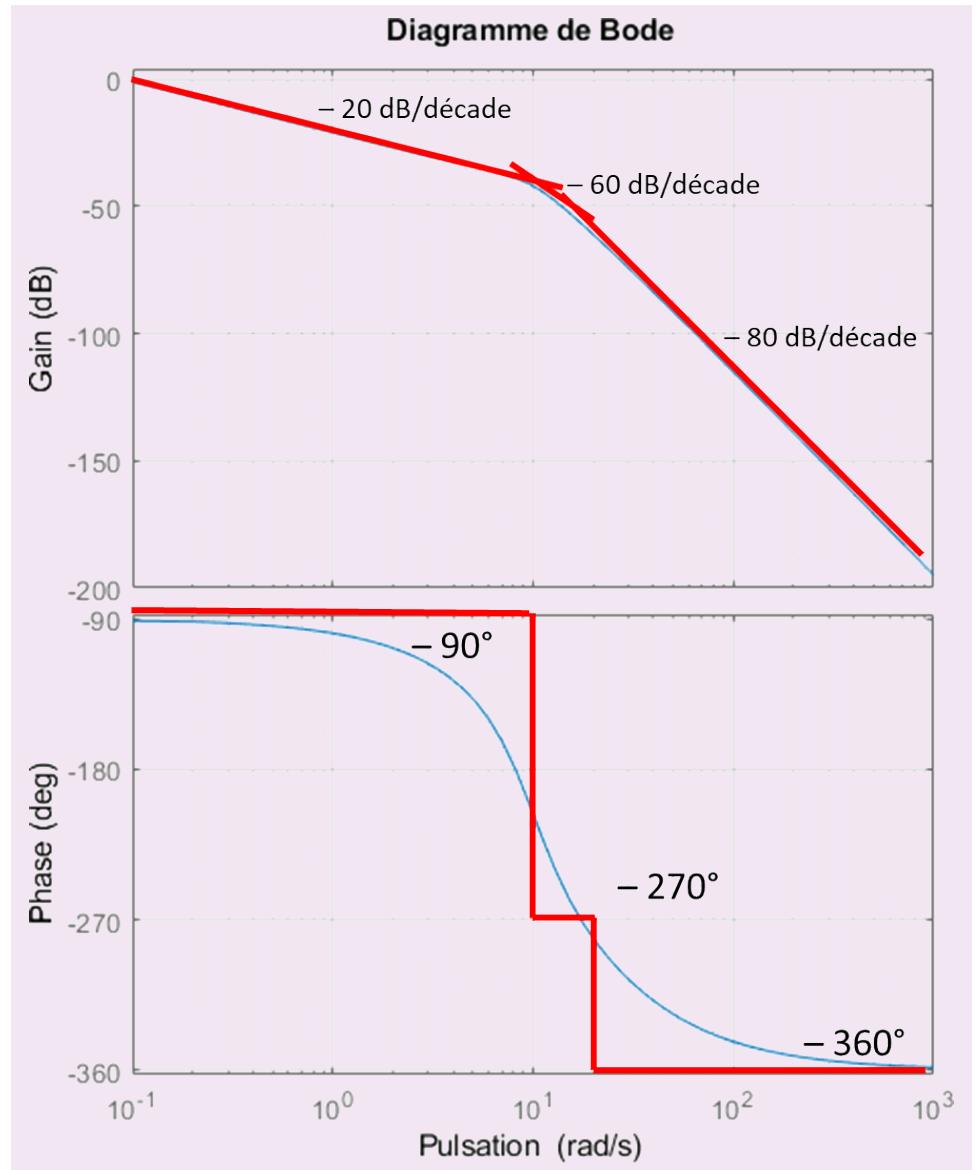
#### Correction

On a pour  $H_1(p)$ ,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$  et  $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$  soit  $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$ . Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$ . Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour  $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $\text{FTBO}(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$ .

On a donc  $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$ .

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	$-40 \text{ dB/decade}$	$-40 \text{ dB/decade}$	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ \text{FTBO}(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-60 \text{ dB/decade}$	$-80 \text{ dB/decade}$	
$\text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega))$	$-90^\circ$	$-270^\circ$	$-360^\circ$	



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

#### Méthode – Marge de phase

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|FTBO(j\omega_c)| = 0$  dB. On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Correction**

La pulsation de coupure souhaitée est  $\omega_c \approx 1 \text{ rad s}^{-1}$ . On cherche donc  $K_r$  et  $T_i$  tels que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$ .

$$\begin{aligned}\arg[\text{FTBO}(j\omega)] &= \arg \left[ \underbrace{\frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{K_r}_{\rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \\ \arg \left[ \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \right] - 98,5\end{aligned}$$

**Remarque**

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque  $\omega = \omega_c$ . L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$

$$\text{Soit } \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5 + 180 \geq 60 \text{ et } \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ.$$

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Correction**

On en déduit que pour  $\omega = \omega_c = 1$ ,  $\arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) - 90 \geq -21,5^\circ$   
 $\Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) \geq 68,5^\circ$  et donc  $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .

**Attention :** à ce stade, la marge de phase serait de  $60^\circ$  SI la pulsation de coupure était de  $1 \text{ rad s}^{-1}$  ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode –**

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

**Correction**

En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ  $-20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$ . La fonction de transfert du correcteur est  $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) = K_r \frac{T_ip + 1}{T_ip}$ . Le gain dB du correcteur doit donc être de  $20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1 : 20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i\omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1$   
 $\Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$ .  
 On a donc  $K_r = 9,3$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Analytiquement (à vérifier...)} 20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1. \\
 & ||\text{FTBO}(j\omega)|| = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
 & = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \frac{1 + T_ip}{T_ip} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
 & = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \frac{1}{1 + 0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot \\
 & 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\
 & = \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2)^2 + 0,1^2}}
 \end{aligned}$$

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

#### Méthode –

Soit  $\omega_\varphi$  la pulsation telle que  $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$ . La marge de gain s'exprime alors par  $MG = -20 \log ||H(j\omega_\varphi)||$ .

#### Correction

**Approche analytique** On résout  $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

**Approche graphique**

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

#### Correction

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

#### Correction

- $K_f = 1$  : lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0 = 0,5$  : valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$ ;
- $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$ ;
- $\xi < 0,7$  (résonance).

**Question 8** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

### Correction

La pulsation propre  $\omega_0$  est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{(1+3,3p)}{(1+1,66p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 9** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $\nu_c(t) = \nu_{c0}u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

### Correction

#### Calcul du temps du 1<sup>er</sup> maximum

Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est donné par  $f(t_m) = 0$ , soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à  $t_m = 3,3$  s.

#### Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsorielle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour  $t = t_m$  :

$$\nu(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (ay(t) + by'(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec  $y(t) = te^{-t/\tau_2}$  dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2} dt = \left[ -\tau_2 te^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$\nu(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[ -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour  $t = t_m$  on obtient  $\nu(t_m) = 1.13$ , soit un dépassement de 13%.

**Question 10** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la

consigne de glissement relatif.

#### Correction

- Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

**Question 11** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$$

#### Correction

On a directement  $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}.$

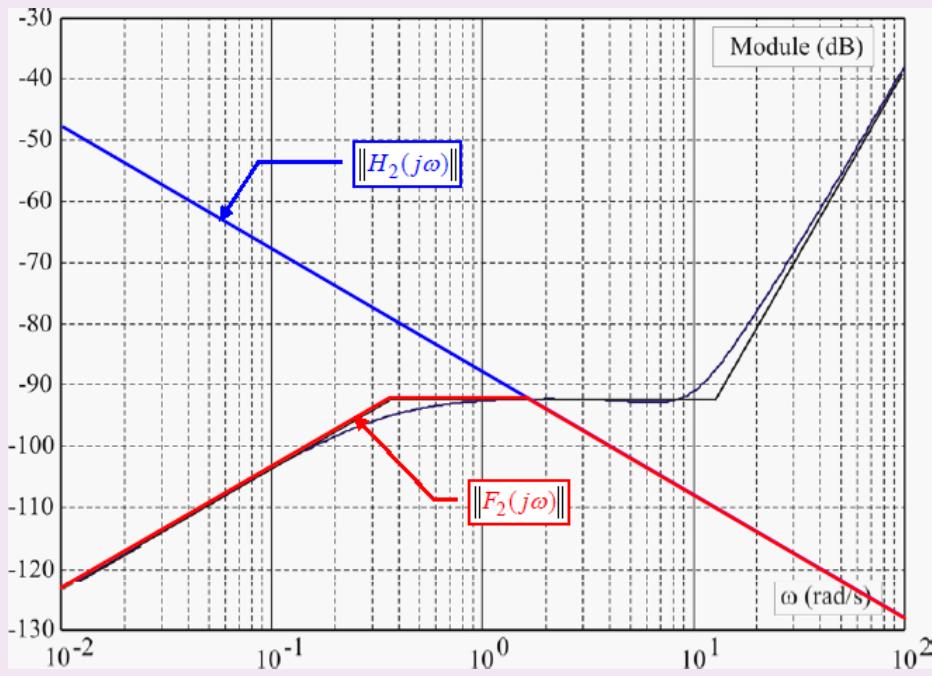
On peut alors déterminer le module et on a  $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|.$

Dans ces conditions :

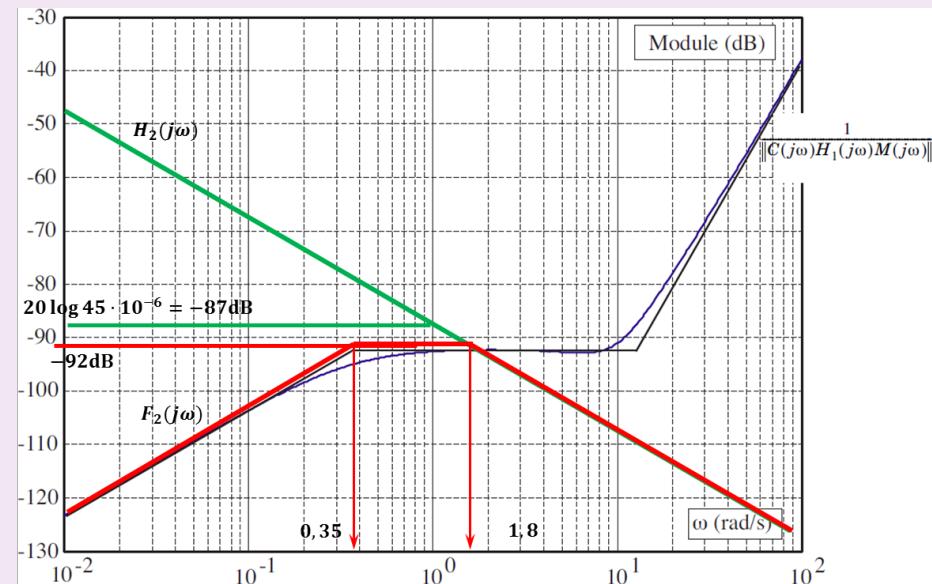
- si  $\left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \gg 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|;$
- si  $\left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \ll 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \|H_2(j\omega)\|.$

On peut en conclure que  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$

**Question 12** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}.$  Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|.$

**Correction**

**Question 13** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $|F_2(j\omega)|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Correction**

En analysant les brisures de  $F_2$ , on peut proposer la fonction de transfert suivante :  $F_2 = \frac{Kp}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$  avec  $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \simeq 2,9$  s,  $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \simeq 0,6$  s. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, on a donc  $20 \log K\omega = 20 \log 0,01K = -123$  soit  $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7 \cdot 10^{-5}$ .

$$\text{Au final, } F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1 + 2,9p)(1 + 0,6p)}.$$

**Question 14** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

#### Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle  $p_2$  étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de  $p_1$ , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

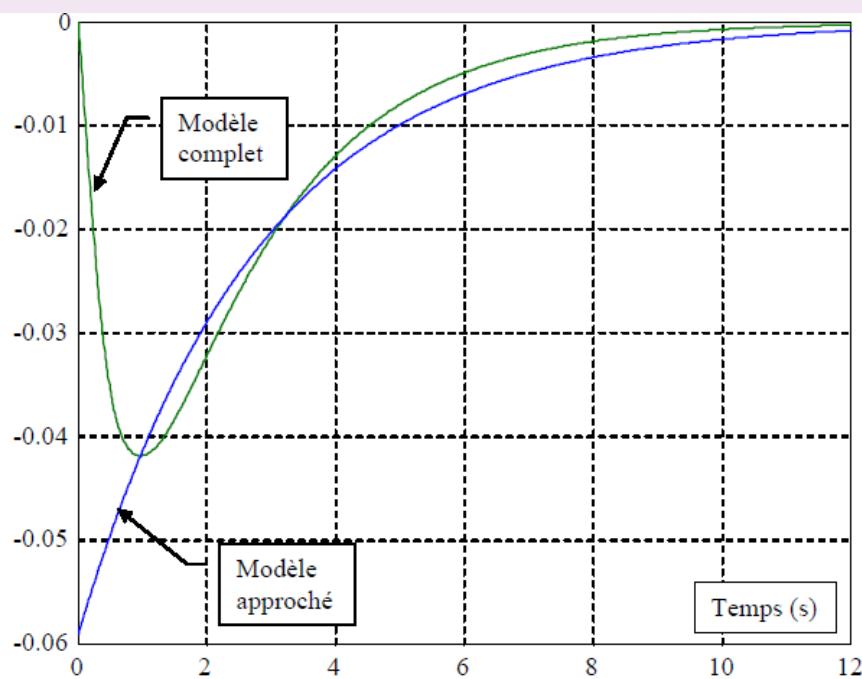
$$F_2(p) = -\frac{p}{12100(1 + 2,8p)}$$

**Question 15** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

#### Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1<sup>er</sup> ordre en partant d'une condition non nulle ( $v_1 = 0,05$ ) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de  $t_r = 3T = 8,4 \text{ s}$ .

**Question 16** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

**Correction**

Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

**Retour sur le cahier des charges**

**Question 17** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

**Correction**

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.





# Colle 1

## Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Sujet

Mines Ponts 2016.

B2-04

### Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC<sup>2</sup>E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure 1.21 décrit les exigences auxquelles est soumis l'asservissement du MC<sup>2</sup>E.

### Validation des performances de l'asservissement d'effort

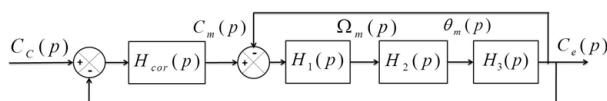
#### Modèle de connaissance de l'asservissement

##### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ .

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

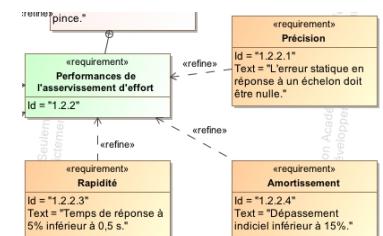
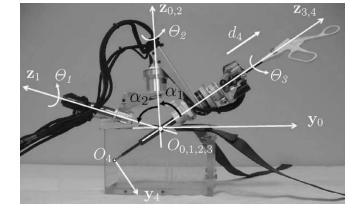


FIGURE 1.21 – Performances de l'asservissement.

On note :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

FIGURE 1.22 – Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;
- $C_c(p)$ , couple de consigne;
- $C_m(p)$ , couple moteur;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

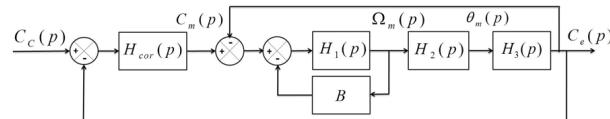


FIGURE 1.23 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 1.27.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

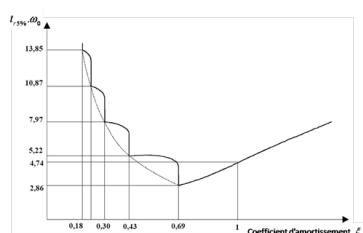
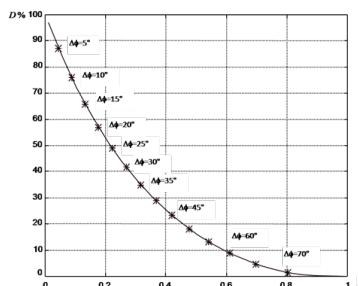
$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}.$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne  $K_i = 1$ .

**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.



## Diagrammes de Bode

On prend  $K_i = 0,4$ ,  $T_i = 0,01$  s et  $\tau = 0,5$  s.

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i (1 + T_i p)}{T_i p (1 + \tau p)^2}$ .



# Colle 1

## Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique – Corrigé

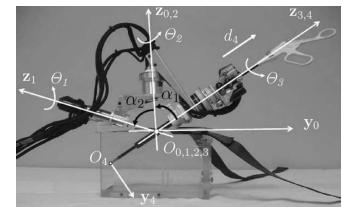
Mines Ponts 2016.

B2-04

### Présentation générale

### Validation des performances de l'asservissement d'effort

### Modèle de connaissance de l'asservissement



### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

### Correction

$$H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p} \text{ et } H_3(p) = K_C\theta.$$

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

### Correction

$$\text{Calculons } F(p) = \frac{C_e(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_C\theta}{Jp} \frac{1}{p}}{1 + K_C\theta \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}} = \frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } H_{BF}(p) &= \frac{F(p)H_{cor}(p)}{1 + F(p)H_{cor}(p)} \text{ soit } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta}}{1 + \frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta}} = \frac{K_C\theta}{Jp^2 + K_C\theta + K_C\theta} \\ &= \frac{1/2}{\frac{J}{2K_C\theta}p^2 + 1}. \end{aligned}$$

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

### Correction

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude  $C_0/2$ . Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

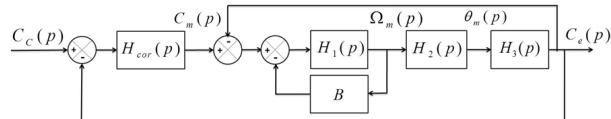


FIGURE 1.25 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

### Correction

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } F_1(p) &= \frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{B}{Jp}} = \frac{1}{Jp + B}. \text{ Par suite } FTBO(p) = \frac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + F_1(p)H_2(p)H_3(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}}{1 + \frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p(Jp + B) + K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}. \\ \text{Par ailleurs, } H_{BO}(p) &= \frac{1}{(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + 2\tau p + \tau^2 p^2}. \\ \text{On a donc } \frac{B}{K_{C\theta}} &= 2\tau \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \tau. \text{ D'autre part, } \tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \\ \text{Au final, } B &= 2\sqrt{J K_{C\theta}} \text{ et } \tau = \frac{B}{2K_{C\theta}} = \frac{2\sqrt{J K_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \end{aligned}$$

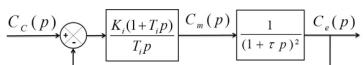


FIGURE 1.26 – Régulation avec correcteur PI.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 1.27.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

### Correction

- ▶ Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- ▶ Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

$$\text{On a } \varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p^2)}} = C_0 \frac{1}{p + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i(1 + \tau p)^2}}$$

Par suite,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = 0$ .

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{K_{\text{BF}}}{1 + \frac{2\xi_{\text{BF}}}{\omega_{0\text{BF}}} p + \frac{p^2}{\omega_{0\text{BF}}^2}}.$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

### Correction

Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.

En choisissant  $T_i = \tau$  (compensation du pôle double du système), on a alors  $\text{FTBO}(p) = \frac{K_i(1 + \tau p)}{\tau p(1 + \tau p)^2} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}$ .

On a alors  $\text{FTBF}(p) = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p) + K_i}$ .

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne  $K_i = 1$ .

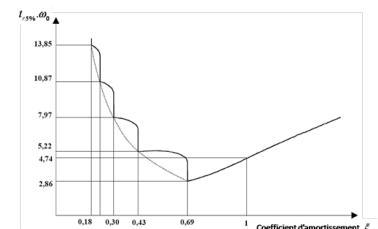
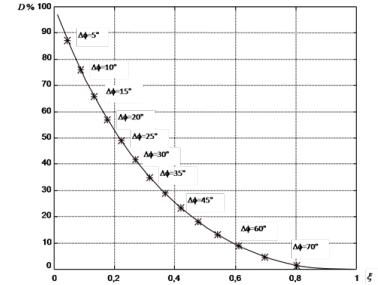
**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{e0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

### Correction

## Diagrammes de Bode

On prend  $K_i = 0,4$ ,  $T_i = 0,01$  s et  $\tau = 0,5$  s.

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p)^2}$ .



**Question 2.**

D'après l'équation de mouvement,  $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$ . On a donc  $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$ . (2)  
 On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$ ; donc  $H_2(p) = \frac{1}{p}$ . (2)  
 Enfin,  $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$  et donc  $H_3(p) = K_{C\theta}$ . (1)

**Question 3.**

On a dans un premier temps  $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$ .  
 Dans un second temps,  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$ .  
 Avec  $H_{cor}(p) = 1$  :  $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$ . (5)

**Question 4.**

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a :  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{Jp^2}{2K_{C\theta}}+1}$ . Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude  $C_0$  est une sinusoïde (d'amplitude  $C_0$  et de moyenne  $\frac{C_0}{2}$ ). (3)  
 Un mouvement sinusoïdal est sûrement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical. (2)

**Question 5.**

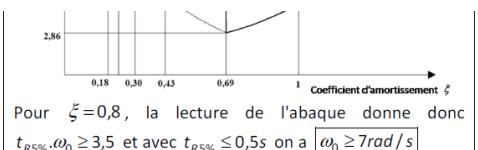
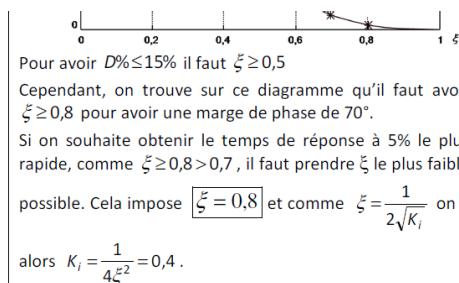
On a  $H_{BO}(p) = \frac{H_{cor}(p)\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{Jp^2}{K_{C\theta}}+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$ .  
 Par ailleurs,  $(1+tp)^2 = 1 + t^2 p^2 + 2tp$ . (3)  
 En identifiant,  $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$  et  $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$ . On a donc  $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$  et  $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$ . (2)

**Question 6.**

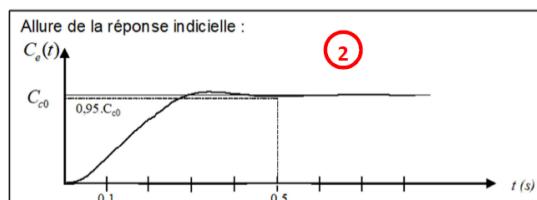
On a :  $\varepsilon(p) = \frac{C_e(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}}$ . En conséquences,  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}} = \lim_{p \rightarrow 0} C_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}} = 0$  Nm. (3) L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée. (2)

**Question 7.**

On a  $\frac{\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2}} = \frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+tp)^2+K_i(1+T_ip)}$ . Avec  $T_i = \tau$ , on a  $\frac{K_i}{tp(1+tp)+K_i}$ . La FTBF est bien d'ordre 2. (5)

**Question 9.**

Critère	Valeur
Dépassement	2% <span style="color:red;">(1)</span>
Tr5%	<0,5 s <span style="color:red;">(1)</span>
Erreur statique en réponse à un échelon	0 <span style="color:red;">(1)</span>



# Colle 2

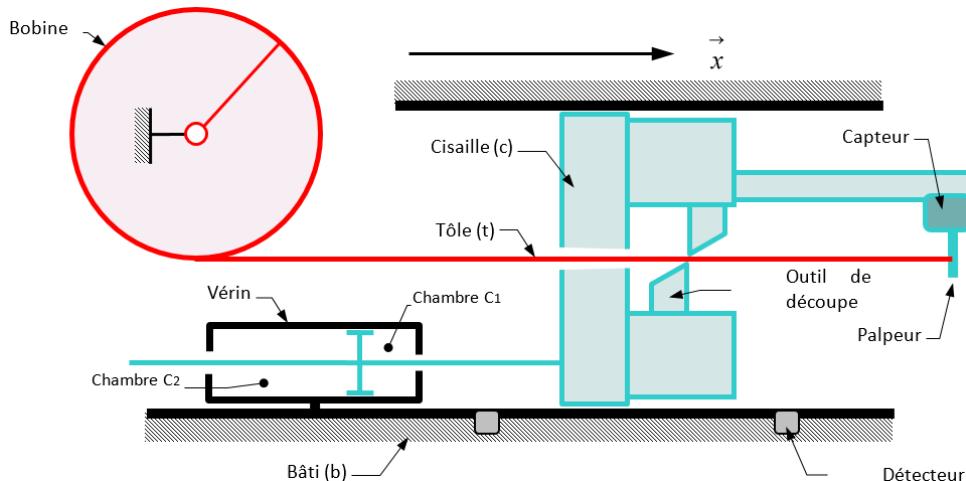
## Cisaille à découpe au vol – Sujet

D'après P. Dubois, C. Gamelon..

### Mise en situation

#### Objectif

- Identifier les paramètres du vérin.
- Quantifier l'erreur de trainage et déterminer son impact sur le système.
- Proposer des solutions pour la compenser.



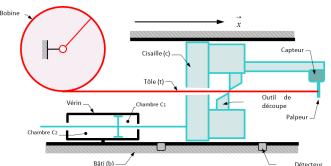
La machine, représentée par le schéma ci-dessus, permet de débiter en continu une bobine de tôle en tronçons de même longueur \*. La rotation continue à fréquence variable de la bobine impose à la tôle (**t**) une vitesse linéaire  $v(t)$  par rapport au bâti (**b**) constante. Les outils de découpe sont portés par la cisaille (**c**) qui est mise en mouvement par un vérin hydraulique.

En avançant, la tôle déplace le palpeur du capteur porté par la cisaille. Celui-ci délivre alors une tension  $u(t)$  proportionnelle à l'écart de position entre la tôle et la cisaille. Un amplificateur transforme ce signal en courant d'intensité  $i(t)$  pour commander un distributeur hydraulique qui fournit au vérin un débit d'huile  $q(t)$ . Au bout d'un certain temps, se déplaçant à la même vitesse, la cisaille et la tôle arrivent face à un détecteur qui déclenche la coupe. La tôle tombe, la cisaille recule jusqu'à son point de départ et attend que la tôle revienne en contact avec le palpeur pour recommencer un cycle. La position de la cisaille est ainsi « asservie » à la position de la tôle.

\*. <https://goo.gl/azqSkT>

B2-04

B2-06



On notera par des majuscules les transformées de Laplace des fonctions du temps notées en minuscules.

$$\text{Rappels : } \mathcal{L}[a] = \frac{a}{p}, \mathcal{L}[at] = \frac{a}{p^2} \text{ et} \\ \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}.$$

On note :

- ▶  $e(t)$  le déplacement de la tôle (**t**) par rapport au bâti (**b**);
- ▶  $\varepsilon(t)$  le déplacement de la tôle par rapport à la cisaille (**c**);
- ▶  $x(t)$  le déplacement de la cisaille par rapport au bâti.

$X(p)$  est la transformée de Laplace du déplacement  $x(t)$  et  $Q(p)$  celle du débit  $q(t)$ .

On note :

- ▶  $m$  la masse totale mise en mouvement par le vérin;
- ▶  $f$  le coefficient de frottement visqueux associé au déplacement de l'ensemble mobile. Les frottements créent un effort qui s'oppose au déplacement et qui est proportionnel à la vitesse :  $F_f(t) = -f \frac{dx(t)}{dt} \vec{x}$ ;
- ▶  $\Delta p(t)$  la différence de pression entre les deux chambres  $C_1$  et  $C_2$  du vérin;
- ▶  $S$  la surface du piston en contact avec l'huile.

## Schéma-bloc du système

On considère comme instant initial le moment où la tôle touche le palpeur. À cet instant  $e$  et  $x$  sont nuls. L'équation reliant les déplacements est donnée par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - x(t).$$

Le capteur, l'amplificateur et le distributeur délivrent des signaux de sortie proportionnels à leurs signaux d'entrée. On notera  $K_c$ ,  $K_a$  et  $K_d$  leurs gains respectifs. Soit  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$  la fonction de transfert associée à l'ensemble vérin plus charge déplacée.

**Question 1** Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

## Équation de comportement dynamique

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble mobile en projection sur  $\vec{x}$ , on a :  $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\Delta p(t) - f \frac{dx(t)}{dt}$ .

## Fonction de transfert du vérin

Pour le type de vérin utilisé, le débit d'alimentation a pour expression :  $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\Delta p(t)}{dt}$ .  $V$  est le volume moyen d'une chambre et  $B$  le module d'élasticité de l'huile, (ces deux paramètres sont des constantes).

**Question 2** Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert :  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ , que l'on mettra sous la forme :  $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$ .

## Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

$$\text{On pose } H_v(p) = \frac{K_v}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

Une simulation numérique a permis de tracer le diagramme de Bode donné page suivante. On se propose de retrouver les valeurs de  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  à partir du diagramme.

**Question 3** Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel  $\text{GdB}(\omega)$  en fonction des notations  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de  $H_v(j\omega)$ ). Quelle est sa valeur pour  $\omega = \omega_0$  ?

**Question 4** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

**Question 5** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers  $\infty$ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

**Question 6** Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de  $H_v(p)$  donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

**Question 7** Donner l'expression littérale de la phase  $\varphi(\omega)$  en fonction des notations  $\omega_0$  et  $\xi$ . Déterminer ses limites lorsque  $\omega$  tend vers 0 et lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre  $\omega_0$  puis pour 100 et 200 rad s<sup>-1</sup>. Tracer la courbe de phase.

### Détermination des gains $K_c$ , $K_a$ et $K_d$

Pour que le système soit stable en boucle fermée on décide de régler le correcteur pour avoir une marge de gain de 6 dB.

**Question 8** Quelle valeur  $K$  doit-on donner au produit des gains  $K_c K_a K_d$  (préciser les unités). On note  $K_0$  le produit  $KK_v$  (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de  $K_0$ ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue ?

#### Méthode –

Cette question est un peu prématurée par rapport à notre avancée. Cependant, vous pouvez tenter d'appliquer la méthode suivante :

1. Déterminer le gain (en dB) pour lequel la phase vaut -180°.
2. Chercher  $K$  tel que  $20 \log |FTBO| = -6$ .
3. Calculer  $K_0$ .

### Erreur de traînage

On note :  $H(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$ .

**Question 9** Donner l'expression de l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $H(p)$ . La tôle se déplace à vitesse constante  $v$ , quelle est la transformée  $E(p)$  de  $e(t)$ ? Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $v$  et des paramètres canoniques.

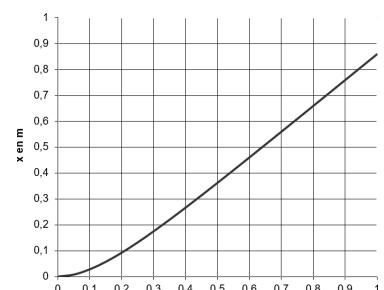
**Question 10** On appelle erreur de traînage  $\varepsilon_t$  la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de  $\varepsilon_t$ . Faire l'application numérique avec  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $K_0 = 7$  (unité SI).

### Identification temporelle

On donne ci-contre, le tracé de la courbe  $x(t)$  obtenu à l'aide d'un logiciel de simulation. Cette réponse est voisine de celle d'un premier ordre soumis à la même entrée. Soit  $F(p) = \frac{K_f}{1 + Tp}$  la fonction de transfert du système du premier ordre associé.

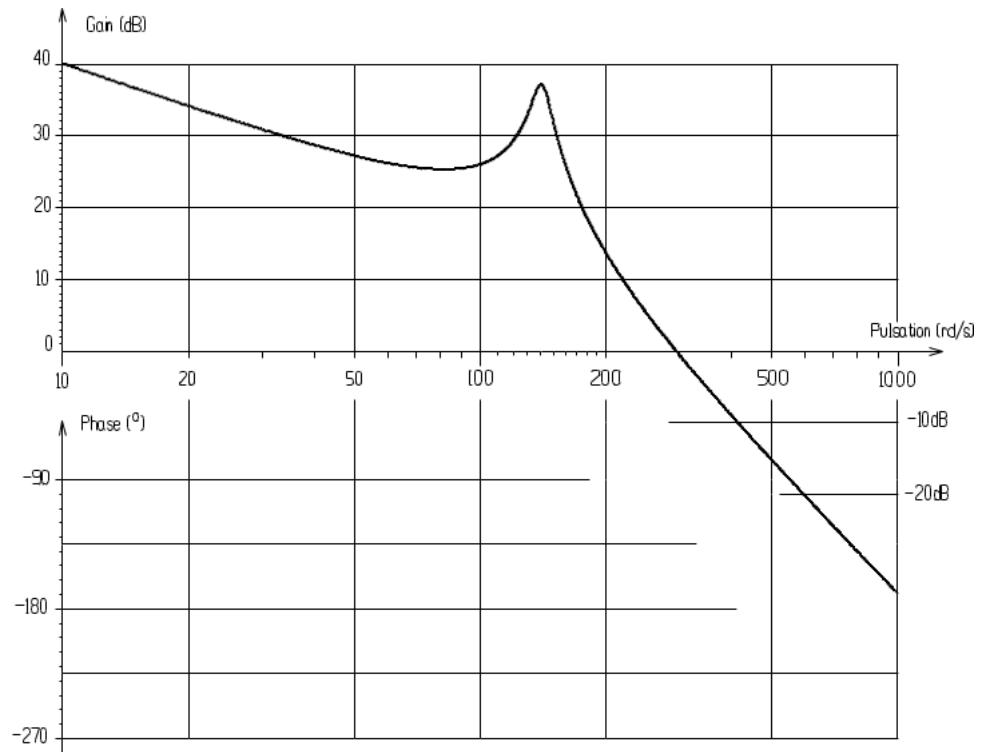
**Question 11** Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante :  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ ).

**Question 12** Déterminer les valeurs numériques de  $K_f$  et  $T$  à l'aide de relevés sur la courbe.



**Question 13** Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

**Question 14** Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?



# Colle 2

## Cisaille à découpe au vol – Corrigé

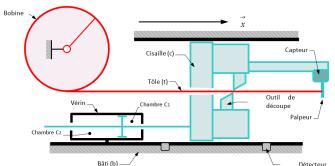
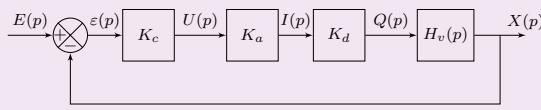
D'après P. Dubois, C. Gamelon..

### Mise en situation

#### Schéma-bloc du système

**Question 1** Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

#### Correction



### Équation de comportement dynamique

#### Fonction de transfert du vérin

**Question 2** Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert :  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ , que l'on mettra sous la forme :  $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$ .

#### Correction

D'une part,  $mp^2 X(p) = S\Delta P(p) - fpX(p) \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) = \Delta P(p)$ .

D'autre part :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Delta P(p) \Leftrightarrow 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} = \Delta P(p)$ .

On a donc :  $\frac{p(mp + f)}{S} X(p) = 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S} X(p) + \frac{2BSpX(p)}{Vp} = \frac{2BQ(p)}{Vp}$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{p(mp + f)}{S} + \frac{2BSp}{Vp} \right) \frac{Vp}{2B} = \frac{Q(p)}{X(p)} \Leftrightarrow \left( \frac{p(mp + f)}{S} \frac{Vp}{2B} + Sp \right) = \frac{Q(p)}{X(p)}.$$

$$\text{On a donc, } H_v(p) = \frac{1}{p \left( \frac{(mp + f)Vp}{S} \frac{1}{2B} + Sp \right)} = \frac{1}{p \left( \frac{Vm}{2BS} p^2 + \frac{fV}{2BS} p + Sp \right)} =$$

$$\frac{1/Q}{p \left( \frac{Vm}{2BS^2} p^2 + \frac{fV}{2BS^2} p + 1 \right)}.$$

Au final,  $k = \frac{1}{S}$ ,  $a = \frac{Vm}{2BS^2}$  et  $b = \frac{fV}{2BS^2}$ .

### Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

**Question 3** Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel  $G_{\text{dB}}(\omega)$  en fonction des notations  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de  $H_v(j\omega)$ ). Quelle est sa valeur pour  $\omega = \omega_0$  ?

#### Correction

$$H_v(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$$

$$\begin{aligned} \text{En conséquence, } G_{\text{dB}}(\omega) &= 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right| = 20 \log K_v - 20 \log |j\omega| - \\ &20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \\ &= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \\ \text{Au final, } G_{\text{dB}}(\omega_0) &= 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi. \end{aligned}$$

**Question 4** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

#### Correction

$$\text{On a } G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend  $20 \log K_v - 20 \log \omega$ . La pente est donc de  $-20 \text{ dB/decade}$ . Elle coupe l'horizontale à 0 dB en  $\omega = K_v$ .

**Question 5** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers  $\infty$ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

#### Correction

$$\text{On a } G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque  $\omega$  tend vers  $\infty$ , le gain tend  $20 \log K_v - 20 \log \omega$ ,  $G_{\text{dB}}$  tend vers  $= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 + 20 \log \omega_0^2 = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega$ .

La pente est donc de -60 dB/decade.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand

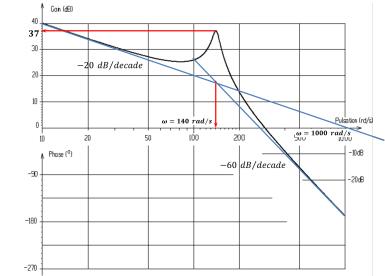
$$20 \log K_v - 20 \log \omega = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega \Leftrightarrow \log \omega = \log \omega_0. \text{ Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en } \omega = \omega_0.$$

**Question 6** Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de  $H_v(p)$  donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

#### Correction

Par lecture du graphe, on obtient  $\omega_0 = 140 \text{ rad/s}$  et  $K_v = 1000 \text{ s m}^{-2}$ .

$$G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 20 \log 1000 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 60 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow \frac{37 - 60 + 20 \log 140}{-20} = \log 2\xi \Leftrightarrow \xi \approx 0,05.$$



**Question 7** Donner l'expression littérale de la phase  $\varphi(\omega)$  en fonction des notations  $\omega_0$  et  $\xi$ . Déterminer ses limites lorsque  $\omega$  tend vers 0 et lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre  $\omega_0$  puis pour 100 et 200 rad s<sup>-1</sup>. Tracer la courbe de phase.

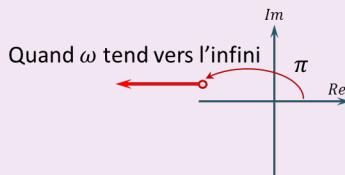
#### Correction

$$\varphi(\omega) = \arg K_v - \arg(j\omega) - \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$$

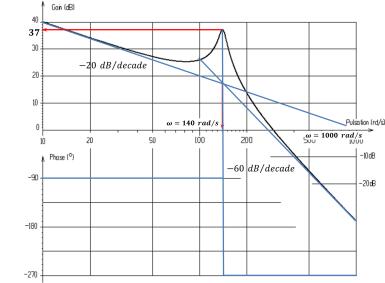
Lorsque  $\omega$  tend vers 0,  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\frac{\pi}{2}$ .

Lorsque  $\omega$  tend vers l'infini,  $-\arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$  tend vers  $\pi$  donc  $-\arg(\dots)$  tend vers  $-\pi$ .

Explication graphique de prof de SII...



Au final, lorsque  $\omega$  tend vers l'infini,  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\frac{3\pi}{2}$ .



## Détermination des gains $K_c$ , $K_a$ et $K_d$

**Question 8** Quelle valeur  $K$  doit-on donner au produit des gains  $K_c K_a K_d$  (préciser les unités). On note  $K_0$  le produit  $KK_v$  (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de  $K_0$ ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue?

#### Correction

Étant donné l'exigence demandée, le gain de la FTBO doit être de -6 dB lorsque la phase vaut -180°. On a déjà vu que pour cette phase, le gain décibel de  $H_v$  vaut 37 dB. Le gain dB vaut  $20 \log K + 20 \log |H_v|$ . On cherche donc  $K$  tel que  $20 \log K + 20 \log |H_v| = -6$ . Au final,  $K = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Par suite,  $K_0 = 7 \text{ s}^{-1}$ .

## Erreur de traînage

**Question 9** Donner l'expression de l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $H(p)$ . La tôle se déplace à vitesse constante  $v$ , quelle est la transformée  $E(p)$  de  $e(t)$ ? Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $v$  et des paramètres canoniques.

### Correction

On peut redémontrer le résultat suivant :  $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$ .

Exprimons  $\varepsilon(p)$  :  $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - H(p)\varepsilon(p)$ ; donc  $\varepsilon(p)(1 + H(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$ .

Le consigne étant une vitesse, on a donc  $E(p) = \frac{v}{p^2}$ . On a donc :  $\varepsilon(p) = \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}}$ .

**Question 10** On appelle erreur de traînage  $\varepsilon_t$  la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de  $\varepsilon_t$ . Faire l'application numérique avec  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $K_0 = 7$  (unité SI).

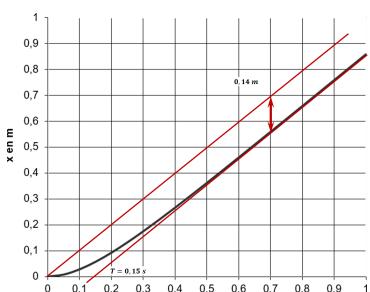
### Correction

L'entrée en vitesse précédente correspondant à une entrée en rampe, on a donc  $\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{v}{p + \frac{K_v K_c K_a K_d}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \frac{v}{K_v K_c K_a K_d} = \frac{1}{7} \simeq 0,14 \text{ m}$ . Pour compenser cette erreur, il suffit de régler la butée de la tôle à découper.

## Identification temporelle

**Question 11** Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante :  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ ).

**Question 12** Déterminer les valeurs numériques de  $K_f$  et  $T$  à l'aide de relevés sur la courbe.



### Correction

Première solution : cf cours pour un système du premier ordre soumis à une rampe.

Seconde solution : se raccrocher à ce que l'on sait (peut-être) pour un premier ordre soumis à un échelon... en effet, la rampe peut être assimilée à un premier ordre intégré. Ainsi, pour un système du premier ordre soumis à un échelon d'amplitude  $v$ , la valeur finale est  $vK_f$ . Ainsi, en intégrant, la pente en régime permanent sera de  $vK_f$ .

La pente étant de 1 on a  $K_f = 1$ .

Reste à savoir que l'asymptote coupe l'axe des abscisses en  $T$ . Après lecture,  $T = 0,15 \text{ s}$ .

**Question 13** Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

**Correction**

Même erreur que précédemment.

**Question 14** Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?

**Correction**

Il est possible de décaler la butée de 14 cm et ainsi supprimer l'écart de trainage.



## Colle 3

# Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Sujet

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

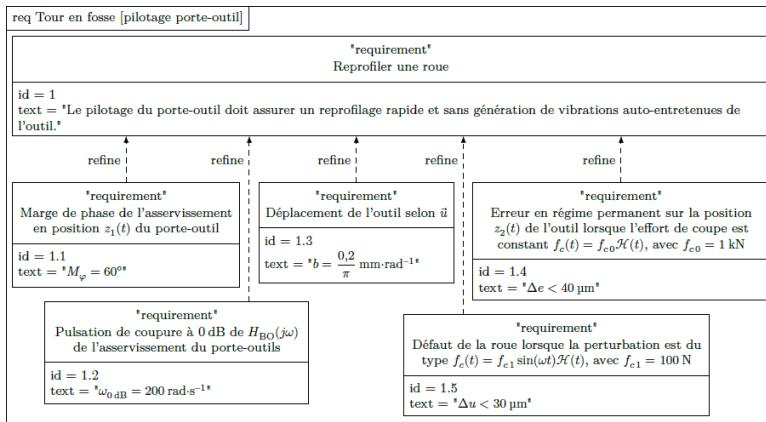
### Modélisation du mouvement pour la commande

#### Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position  $z_1(t)$  comprenant un correcteur proportionnel.

Le système composé de l'outil et du porte-outil est modélisé sur la Figure 1.28. Le porte-outil, de masse  $m_1 = 5522 \text{ kg}$ , est considéré indéformable et en liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  avec le bâti. Une chaîne de motorisation électrique permet de déplacer le porte-outil et une structure de commande associée permet d'asservir la position  $z_1(t)$  par rapport à une position de référence. La chaîne de motorisation exerce une force motrice  $\vec{f}_m(t) = f_m(t)\vec{z}_0$  sur le porte-outil.

La cahier des charges est donné sur la figure suivante.



Les positions du porte-outil et du point C par rapport à leur position de référence sont respectivement paramétrées par  $z_1(t)\vec{z}_0$  et  $z_2(t)\vec{z}_0$ , avec  $z_1(t)\vec{z}_0$  et  $z_2(t)\vec{z}_0$  des grandeurs algébriques (Figure 1.28). Les conditions initiales sont toujours supposées nulles.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée au porte-outil puis à l'outil permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$m_1 \ddot{z}_1(t) + \lambda \dot{z}_1(t) + K z_1(t) = \lambda \dot{z}_2(t) + K z_2(t) + f_m(t)$$

$$m_2 \ddot{z}_2(t) + \lambda \dot{z}_2(t) + K z_2(t) = \lambda \dot{z}_1(t) + K z_1(t) + f_c(t)$$

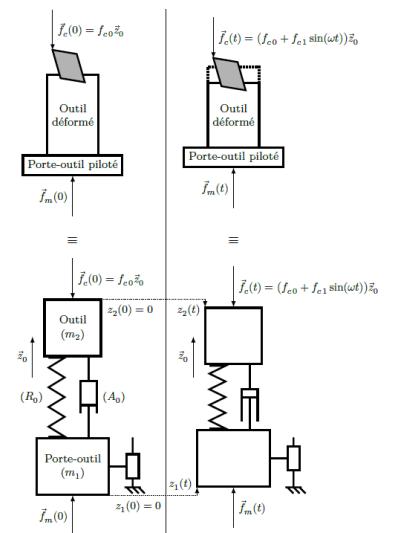


FIGURE 1.28 – Modèle de déformation de l'outil avec le porte-outil piloté

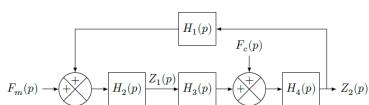


FIGURE 1.29 – Modèle de l'outil et du porte-outil

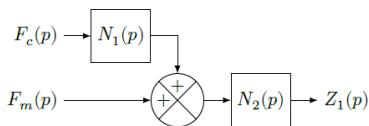


FIGURE 1.30 – Modèle équivalent

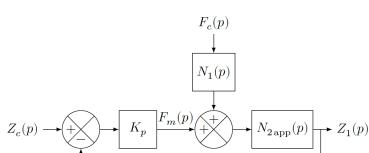
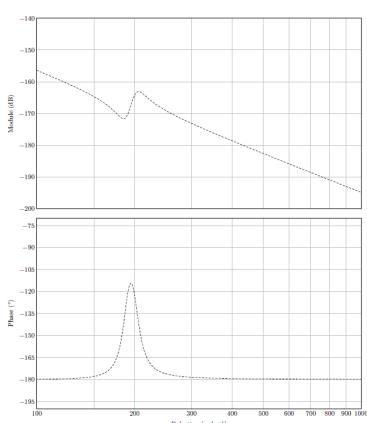


FIGURE 1.31 – Modèle de synthèse de la régulation en position  $z_1(t)$  du porte-outil

D'un point de vue numérique,  $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$  et  $\tau = 1 \text{ s}$ .

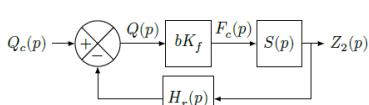


FIGURE 1.32 – Modèle équivalent de la chaîne d'asservissement complète

Le modèle correspondant est représenté par le schéma bloc de la Figure 1.29.

**Question 1** Exprimer les fonctions  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$  en fonction de  $K$ ,  $\lambda$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

Le modèle de la Figure 1.29 est réduit au modèle équivalent de la figure Figure 1.30.

**Question 2** Exprimer  $N_1(p)$  et  $N_2(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ .

**Question 3** Montrer que  $N_2(p)$  peut s'écrire sous la forme  $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2 (p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$ . Exprimer  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $A$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\lambda$  et  $K$ .

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_2(p)$  est représenté ci-contre.

**Question 4** Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

**Question 5** Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert  $N_2(p)$  peut être approchée par la fonction  $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$ . En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_{2\text{app}}(p)$  sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Le modèle approché ( $N_{2\text{app}}(p)$ ) est retenu pour la suite de l'étude. Le schéma bloc modélisant la régulation de la position  $z_1(t)$  est donné en figure Figure 1.36, en considérant un correcteur proportionnel de gain  $K_p$ .

**Question 6** Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la Figure 1.27.

## Analyse de l'influence d'un paramètre

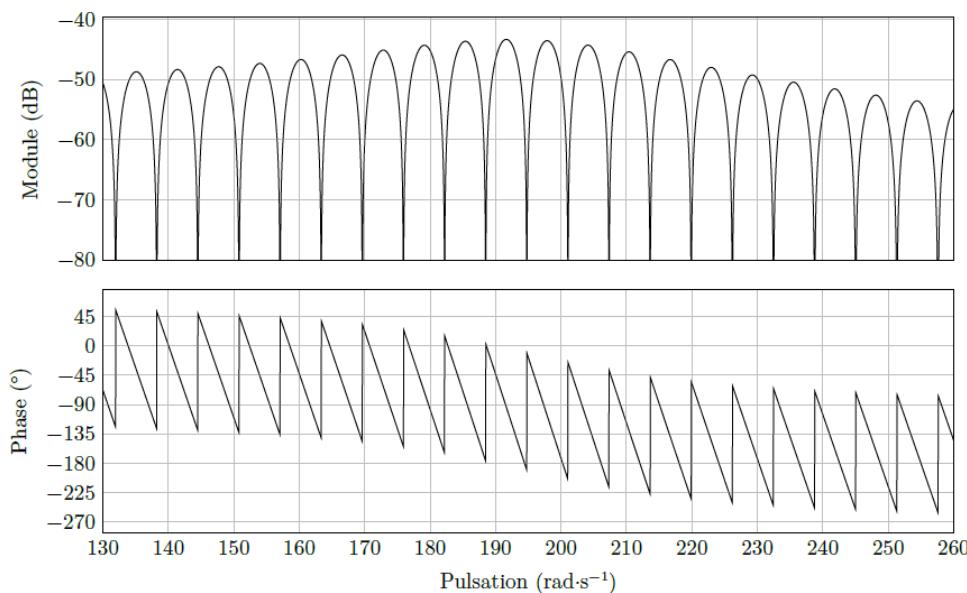
On a d'une part  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ .

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par  $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$  où  $\tau$  est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

**Question 7** Déterminer  $H_r(p)$  en fonction de  $\tau$ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

La Figure 1.40 représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système modélisé Figure 1.39, avec  $b = \frac{5 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ mm rad}^{-1}$



**FIGURE 1.33** – Diagramme de Bode de la boucle ouverte du schéma-blocs

Les « zéros de transmission » d'une fonction de transfert  $H(p)$  correspondent aux pulsations  $\omega$  pour lesquelles  $H(j\omega)$  est nul.

**Question 8** Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la Figure 1.40 en analysant les « zéros de transmission ».

**Question 9** Déterminer un ordre de grandeur du paramètre  $b$  permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.



## Colle 3

# Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil – Corrigé

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

### Modélisation du mouvement pour la commande

**Question 1** Exprimer les fonctions  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$  en fonction de  $K$ ,  $\lambda$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

#### Correction

D'après le schéma-blocs  $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$ . D'après la première équation différentielle, on a :  $m_1p^2Z_1(p) + \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) = \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1p^2 + \lambda p + K}$ . On

a donc par identification  $H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_1(p) = \lambda p + K$ .

D'après le schéma-blocs  $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$ . D'après la seconde équation différentielle,  $m_2p^2Z_2(p) + \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) = \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p)}{m_2p^2 + \lambda p + K}$ . On

a donc par identification  $H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_3(p) = \lambda p + K$ .

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$$

**Question 2** Exprimer  $N_1(p)$  et  $N_2(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ .

#### Correction

En utilisant le premier modèle, on avait :  $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$ .

Ainsi,  $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))))$

$= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p)$

$\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p))$ .

En utilisant le schéma-blocs,  $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$ . Par identification, on obtient  $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$  et  $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $N_2(p)$  peut s'écrire sous la forme  $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$ .

Exprimer  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $A$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\lambda$  et  $K$ .



**Correction**

$$\begin{aligned}
N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\
&= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))} \\
&= \frac{m_2 \left( p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left( p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}. \\
\text{Par identification, on a : } A &= \frac{1}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, 2\xi_1\omega_1 = \frac{\lambda}{m_2} \text{ et } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} =, \\
\omega_2^2 &= K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, 2\xi_2\omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \\
\text{On a donc } \xi_1 &= \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.
\end{aligned}$$

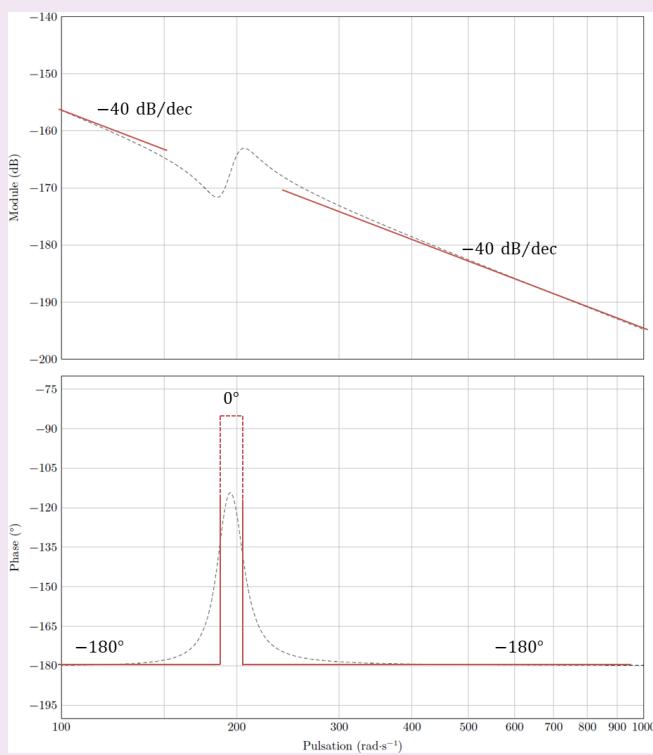
Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_2(p)$  est représenté ci-contre.

**Question 4** Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

**Correction**

D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement  $\omega_1 < \omega_2$ . On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert  $N_2(p)$ .

	$\omega_1$		
	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$
$\frac{A}{p^2}$	-40 dB/dec	-40 dB/dec	-40 dB/dec
$p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2$	0 dB/dec	40 dB/dec	40 dB/dec
$\frac{1}{p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2}$	0 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$20 \log N_2(p) $	-40 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$\text{Arg}(N_2(p))$	$-180^\circ$	$0^\circ$	$-180^\circ$



**Question 5** Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert  $N_2(p)$  peut être approchée par la fonction  $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$ . En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_{2\text{app}}(p)$  sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

#### Correction

Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s<sup>-1</sup>, on peut modéliser  $N_2(p)$  par un double intégrateur. Le gain dB est donc  $20 \log A - 20 \log \omega^2$ .

Pour  $\omega = 500$  rad s<sup>-1</sup> on a  $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$  et  $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$ .

**Question 6** Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la Figure 1.27.

#### Correction

Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1 :**  $M\varphi = 60^\circ$  : impossible à respecter la phase sera toujours de  $-180^\circ$ .
- **req 1.2 :**  $\omega_{0\text{dB}} = 200$  rad s<sup>-1</sup> : critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4 :** erreur en régime permanent :  $\Delta c < 40 \mu\text{m}$  pour un échelon d'amplitude  $f_{c0} = 1 \text{kN}$  : critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5 :** défaut de la roue  $\Delta u < 30 \mu\text{m}$  lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

## Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ .

D'un point de vue numérique,  $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$  et  $\tau = 1 \text{ s}$ .

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par  $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$  où  $\tau$  est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

**Question 7** Déterminer  $H_r(p)$  en fonction de  $\tau$ .

#### Correction

D'après le schéma-blocs,  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ . D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$ . En conséquence,  $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

**Question 8** Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la Figure 1.40 en analysant les « zéros de transmission ».

#### Correction

$$\text{FTBO}(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p).$$

On a  $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$ .

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

$$\blacktriangleright \text{ pour } \omega = \frac{k2\pi}{\tau} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \text{ et } G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty;$$

$$\blacktriangleright \text{ pour } \omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \text{ et } G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2.$$

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ .

Pour la phase,  $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j\sin(-\tau\omega))$ . Or  $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$ . On a donc  $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$ .

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal  $\frac{2\pi}{\tau}$  périodique.

**Question 9** Déterminer un ordre de grandeur du paramètre  $b$  permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

#### Correction

Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire  $b'$  tel que  $20 \log b' = 45$  soit  $b' = 10^{45/20} = 177$ . Au bilan, on aurait donc  $b_{lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$ .

Il faudrait déterminer si une augmentation de  $b$  réduit l'amortissement de l'asservissement.

# Colle 4

## Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Sujet

Concours CCINP – MP 2020.

### Présentation

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... lorsque ces lieux sont de grandes tailles.

### Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

#### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en intensité du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence « 1.7.1.1 » et ses sous-exigences.

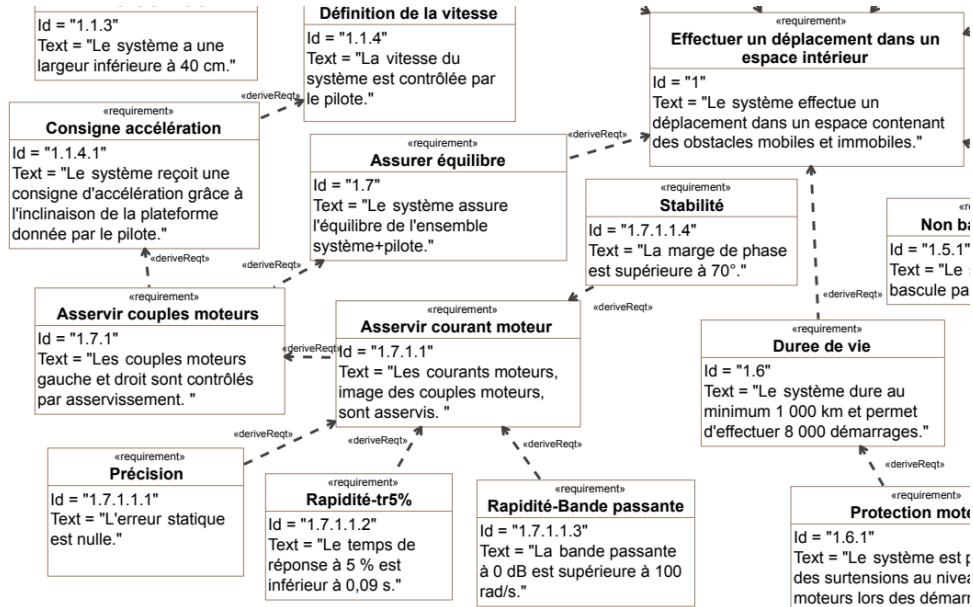


FIGURE 1.34 – Diagramme des exigences

### Modélisation du moteur

Le moteur brushless associé à son électronique de commande peut se modéliser par les équations d'une machine à courant continu.

On notera  $J_{\text{eq}}$  l'inertie équivalente des masses mobiles mises en jeu ramenée sur l'arbre moteur. On modélisera les différents frottements par un frottement visqueux générant un couple résistant, rapporté à l'arbre moteur, proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre moteur et de coefficient  $f$  ( $f > 0$ ). On rappelle les équations caractéristiques associées :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K_e \omega_m(t)$ ;
- $C_m(t) = K_e i(t)$ ;
- $J_{\text{eq}} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - f \omega_m(t)$ .

**Question 1** Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

**Question 2** Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans Figure 1.35. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

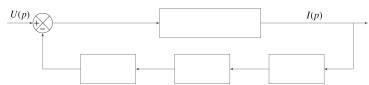


FIGURE 1.35 – Schéma-blocs

**Question 3** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ . Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

## Asservissement du moteur en intensité

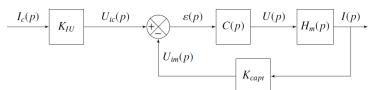


FIGURE 1.36 – Schéma-blocs

L'architecture retenue pour contrôler le couple moteur est un asservissement en intensité, image du couple moteur (voir équation précédente). Le schéma-blocs est représenté Figure 1.36. Un convertisseur IU fournit au calculateur une tension  $u_{ic}(t)$  image de l'intensité de consigne  $i_c(t)$ , proportionnelle à cette dernière de coefficient  $K_{iu}$ . De même, l'intensité réelle  $i(t)$ , mesurée par un capteur d'intensité de coefficient  $K_{capt}$ , a pour image  $u_{im}(t)$ . L'écart, noté  $\varepsilon(t) = u_{ic}(t) - u_{im}(t)$ , est traité par le correcteur de fonction de transfert  $C(p)$ , qui impose la tension  $u(t)$  aux bornes du moteur.

On donne la fonction de transfert du moteur :  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

**Question 4** Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à  $K_{iu}$ , caractéristique du convertisseur IU.

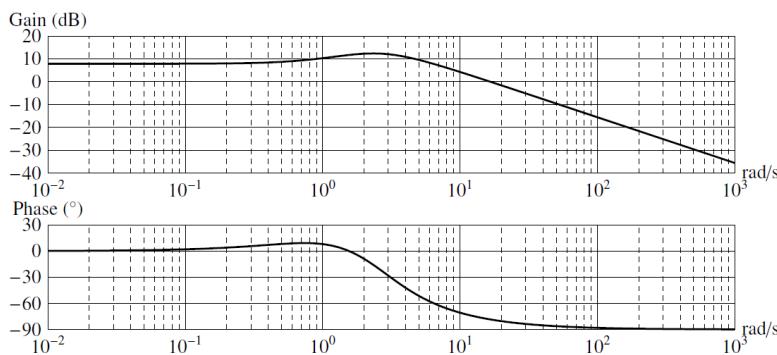
On prend, dans un premier temps, un correcteur purement proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

On en déduit la fonction de transfert  $H_I(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$  :

$$H_I(p) = \frac{K'}{1 + K'} \frac{\frac{1 + \tau_m p}{2z_m + K' \tau_m}}{1 + \frac{\omega_{0m}}{1 + K'} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2(1 + K')} p^2}, \text{ avec } K' = K_{iu} K_p K_m.$$

**Question 5** Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée  $\mu_s$ , pour une entrée indicielle (i.e.  $I_c(p)$  est un échelon unitaire), en fonction de  $K_{iu}$ ,  $K_p$  et  $K_m$ .

La Figure 1.37 présente les diagrammes de Bode en boucle ouverte de l'asservissement étudié, en prenant  $K_p = 10$ .



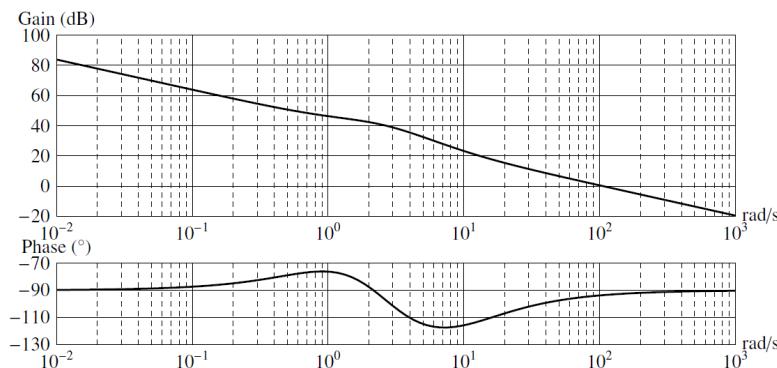
**FIGURE 1.37** – Diagrammes de Bode en boucle ouverte pour  $K_p = 10$

**Question 6** Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

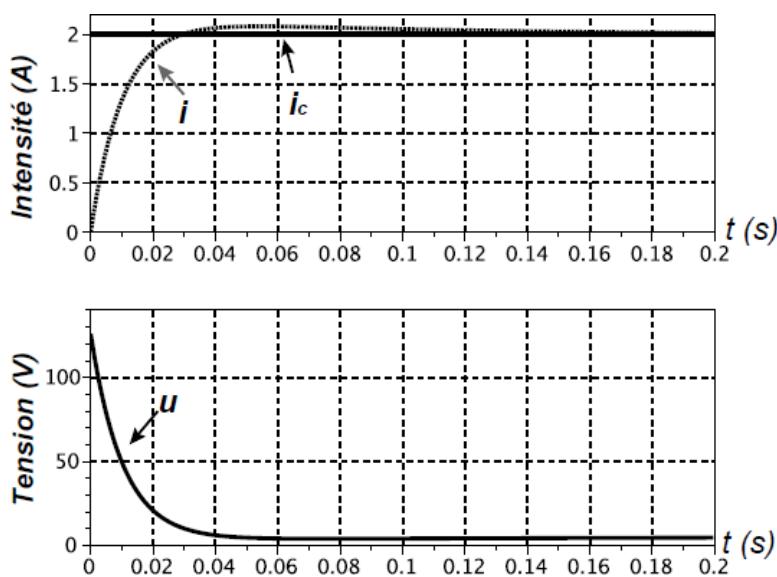
Dans un deuxième temps, il est décidé d'utiliser un correcteur de type proportionnel intégral. Sa fonction de transfert est notée :  $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour  $K_p = 10$  et  $K_i = 1000$ . On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

Une fois le correcteur réglé, on obtient les diagrammes de Bode en boucle ouverte (Figure 1.38) et les réponses temporelles (Figure 1.39), pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.



**FIGURE 1.38** – Diagrammes de Bode en boucle ouverte avec réglage du correcteur PI effectué



**FIGURE 1.39** – Réponses temporelles avec réglage du correcteur PI effectué

**Question 8** Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du système).

Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. Figure 1.40 présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.

**Question 9** Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

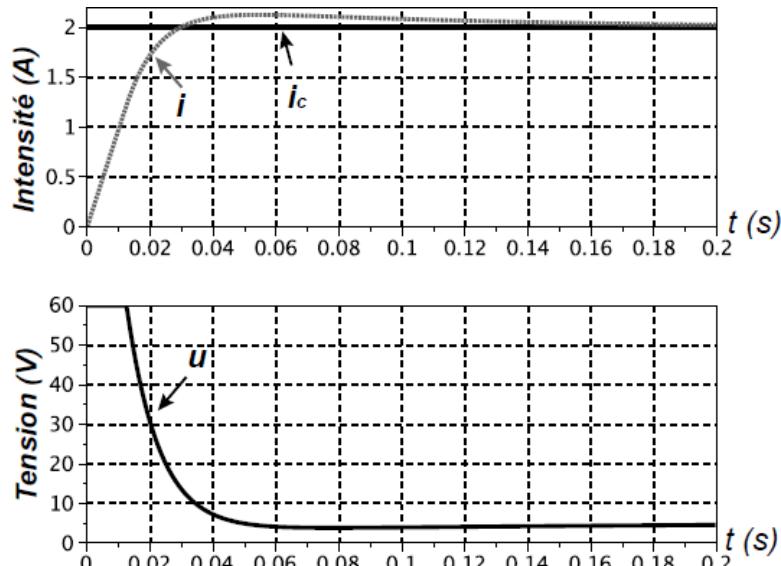


FIGURE 1.40 – Réponses temporelles du système finalement implanté

## Colle 4

# Gyropode à usage professionnel HUBLEX – Corrigé

Concours CCINP – MP 2020.

### Présentation

B2-04

C2-03

### Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

#### Modélisation du moteur

**Question 1** Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

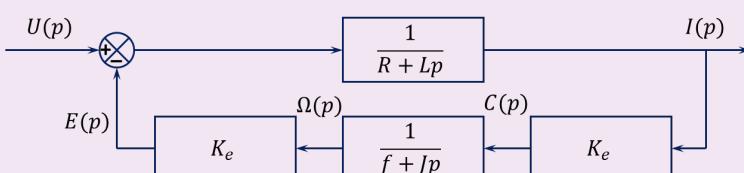


#### Correction

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p);$
- $E(p) = K_e \Omega_m(p);$
- $C_m(p) = K_e I(p);$
- $J_{eq}p\Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p).$

**Question 2** Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans Figure 1.35. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

#### Correction



**Question 3** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ . Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

#### Correction

En utilisant la formule de Black, on a  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{R+Lp}}{1 + K_e^2 \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{f+Jp}} =$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R + Lp) + K_e^2 \frac{1}{f + Jp}} &= \frac{f + Jp}{(R + Lp)(f + Jp) + K_e^2} \\ &= \frac{f + Jp}{Rf + (Lf + RJ)p + LJp^2 + K_e^2} = \frac{f}{Rf + K_e^2} \frac{1 + \frac{J}{f}p}{(Lf + RJ) \frac{p}{Rf + K_e^2} + \frac{LJp^2}{Rf + K_e^2} + 1}. \end{aligned}$$

On a donc  $K_m = \frac{f}{Rf + K_e^2}$ ,  $\tau_m = \frac{J}{f}$ ,  $\frac{1}{\omega_{0m}^2} = \frac{LJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow \omega_{0m} = \sqrt{\frac{Rf + K_e^2}{LJ}}$  et  $\frac{2z_m}{\omega_{0m}} = \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{\omega_{0m}}{2} \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{Lf + RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K_e^2}}.$

## Asservissement du moteur en intensité

**Question 4** Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à  $K_{IU}$ , caractéristique du convertisseur IU.

### Correction

Pour avoir  $\varepsilon = 0$  lorsque  $I_c(p) = I(p)$ , il faut nécessairement  $K_{capt} = K_{IU}$ .

**Question 5** Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée  $\mu_s$ , pour une entrée indicielle (i.e.  $I_c(p)$  est un échelon unitaire), en fonction de  $K_{IU}$ ,  $K_p$  et  $K_m$ .

### Correction

$K_{capt} = K_{IU}$ , il est donc possible de positionner  $K_{capt}$  en amont de la chaîne directe, de supprimer  $K_{IU}$  et de se ramener à un schéma-blocs à retour unitaire.

On a alors  $FTBO(p) = K_{capt}C(p)H_m(p)$  et  $\varepsilon(p) = \frac{I_c(p)}{1 + FTBO(p)}$ .

On a alors  $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{1}{p} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{1}{1 + K_m K_p K_{capt}}.$

**Question 6** Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1 » avec ce type de correcteur.

### Correction

Avec ce correcteur, l'exigence de précision nulle ne pourra pas être satisfaite.

**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour  $K_p = 10$  et  $K_i = 1000$ . On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

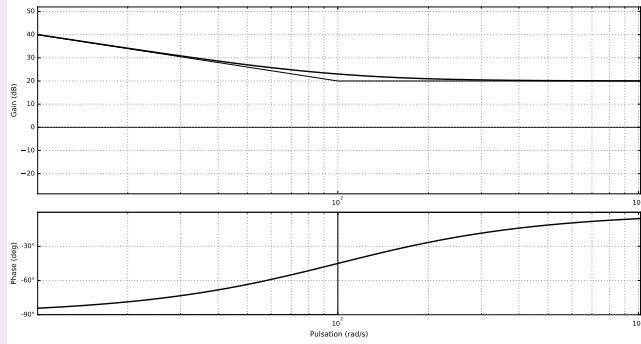
### Correction

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p p + K_i}{p} = K_i \frac{\frac{K_p}{K_i} p + 1}{p} = \frac{1000}{p} \left( \frac{1}{100} p + 1 \right).$$

On peut donc dresser le tableau de variation asymptotique.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega_1 = 100\text{rad/s}$	$\omega \rightarrow \infty$
$H_1(p) = \frac{K_i}{p} = \frac{1000}{p}$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	
$H_2(p) = 1 + \frac{p}{100}$	0 dB/décade 0°	20 dB/décade 90°	
$C(p)$	-20 dB/décade -90°	0 dB/décade 0°	

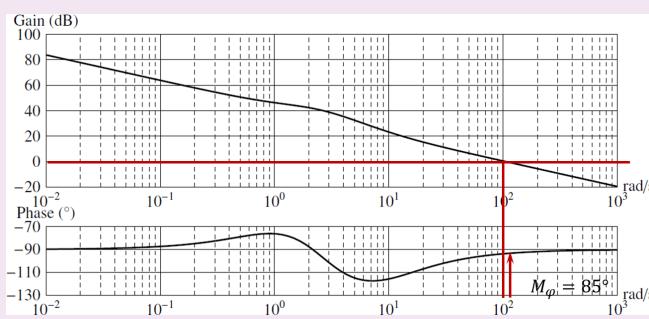
L'asymptote du gain décibel de «  $H_1(p)$  » coupe l'axe des abscisses en 1000.



**Question 8** Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du système).

### Correction

La marge de phase est respectée. Cependant la tension atteinte demandée par la commande (120 V) est peut être trop élevée pour le moteur.



Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. Figure 1.40 présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.

**Question 9** Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

### Correction

Le constructeur a ajouté une saturation de ±60 V.