

Parallélépipède★

B2-10

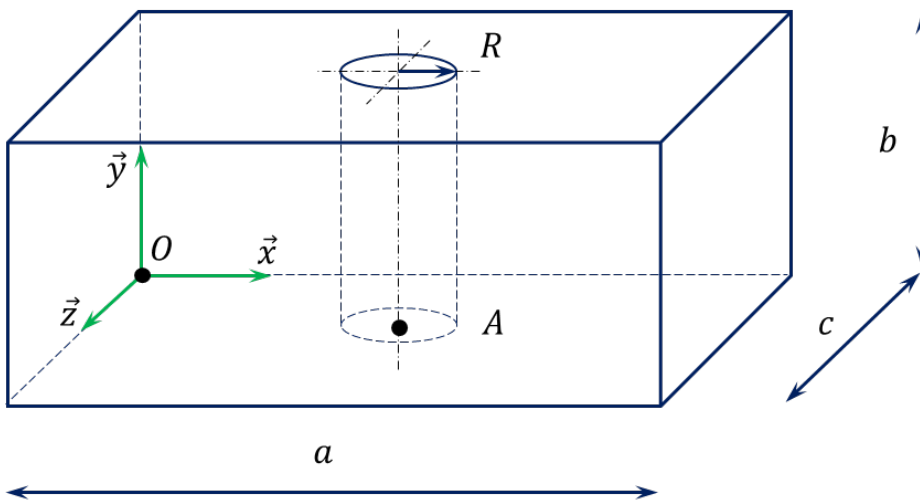
La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe (G, \vec{k}) de rayon R et de hauteur H et de masse m est donnée en son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec

$$A = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède de cotés a, b et c et de masse m est donnée en son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}, B = m \frac{a^2 + c^2}{12},$

$$C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



On pose $\vec{OA} = \frac{a}{2}\vec{x} + \frac{c}{2}\vec{z}$.

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G , en A puis O .

Corrigé voir ??.

Parallélépipède★

B2-10

Question 3 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide. Pour des raisons de symétrie, on a directement $\vec{OG} = \frac{a}{2}\vec{x} + \frac{b}{2}\vec{y} + \frac{c}{2}\vec{z}$.

Question 4 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G, en A puis O.

Notons (1) le parallélépipède rectangle et (2) le cylindre (plein). On note $\mathcal{B}_0 =$

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ On a } I_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \text{ et } I_G(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \text{ (attention$$

l'axe du cylindre est \vec{y}).

$$\text{On a donc } I_G(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

$$\text{Par ailleurs, } m = m_1 - m_2 \text{ et } \vec{AG} = \frac{b}{2}\vec{y}; \text{ donc } I_A(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 + m\frac{b^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 + m\frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

$$\text{Enfin, } \vec{OG} = \frac{a}{2}\vec{x} + \frac{b}{2}\vec{y} + \frac{c}{2}\vec{z}; \text{ donc } I_O(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} +$$

$$m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

Mouvement RR ★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

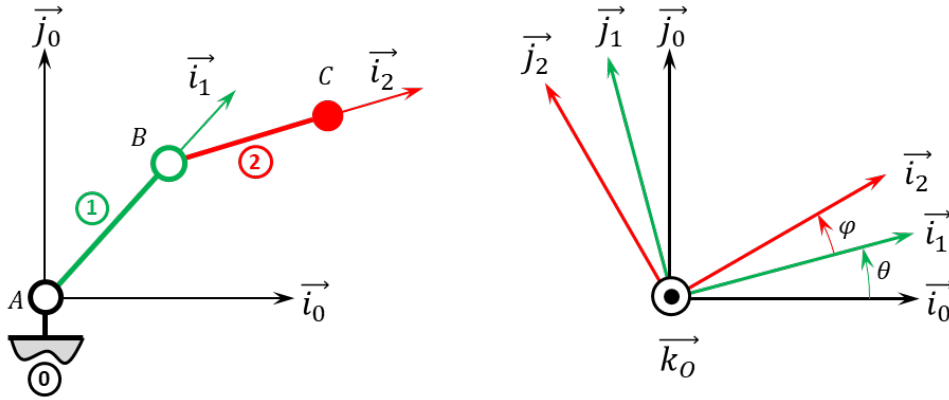
Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{AB} = R\vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\vec{BC} = L\vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 et $\vec{AG}_1 = \frac{1}{2}R\vec{i}_1$, on note m_1 la masse de 1 et

$$I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1};$$

- G_2 désigne le centre d'inertie de 2 et $\vec{BG}_2 = \frac{1}{2}L\vec{i}_2$, on note m_2 la masse de 2 et

$$I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en A en utilisant 2 méthodes différentes pour le calcul du moment.

Question 2 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B en utilisant 2 méthodes différentes pour le calcul du moment.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$.

Question 4 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 4.

Mouvement RR ★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 5 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en A en utilisant 2 méthodes différentes pour le calcul du moment.

[NON TERMINE] **Définition**

$$\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} = \overrightarrow{\delta(G_1, 1/0)} + \overrightarrow{AG_1} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)} \end{array} \right\}_A$$

Calcul de $\overrightarrow{V(G_1, 1/0)}$

$$\overrightarrow{V(G_1, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AG_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2} R \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

$$(\text{Avec } \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1).$$

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)}$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(G_1, 1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1.$$

Calcul de $\overrightarrow{\sigma(G_1, 1/0)}$

$$G_1 \text{ est le centre d'inertie de 1; donc : } \overrightarrow{\sigma(G_1, 1/0)} = I_{G_1}(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta} C_1 \vec{z}_1.$$

Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_1, 1/0)}$

G_1 est le centre d'inertie de 1; donc : $\overrightarrow{\delta(G_1, 1/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(G_1, 1/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\theta} C_1 \vec{z}_1$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, 1/0)}$

En utilisant la formule de changement de point, on a : $\overrightarrow{\delta(A, 1/0)} = \overrightarrow{\delta(G_1, 1/0)} + \overrightarrow{AG_1} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)} = \ddot{\theta} C_1 \vec{z}_1 + \frac{1}{2} R \vec{i}_1 \wedge m_1 (R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1)$

Question 6 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B en utilisant 2 méthodes différentes pour le calcul du moment.

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{AC} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{AB} \right]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{BC} \right]_{\mathcal{R}_0} = R \frac{d}{dt} \left[\vec{i}_1 \right]_{\mathcal{R}_0} + L \frac{d}{dt} \left[\vec{i}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} \\ = R \dot{\theta} \vec{j}_1 + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2.$$

$$(\text{Avec } \frac{d}{dt} \left[\vec{i}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[\vec{i}_2 \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{i}_2 = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_2 = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2).$$

Question 7 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$.

Question 8 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Mouvement RR ★

B2-14

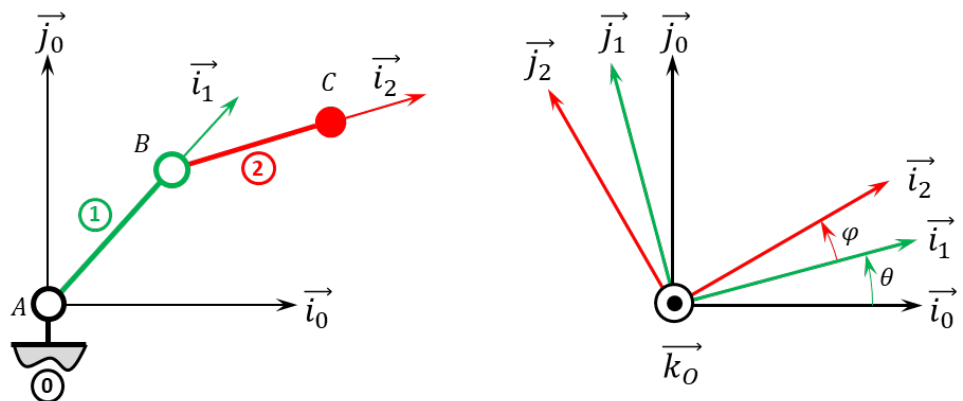
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 et $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} R \vec{i}_1$, on note m_1 la masse de 1;
- G_2 désigne le centre d'inertie de 2 et $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{2} L \vec{i}_2$, on note m_2 la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 .

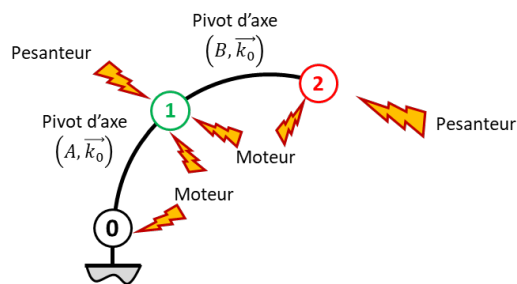
Corrigé voir 2.

Mouvement RR ★

B2-14

C1-05

Question 3 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 . C'est une chaîne ouverte. On isole l'extrémité et on applique le théorème correspondant aux mobilités :

- ▶ on isole 2 et on réalise le théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{k}_0 ;
- ▶ on isole 1+2 et on réalise le théorème du moment dynamique en B en projection sur \vec{k}_0 .

Cylindre percé ★

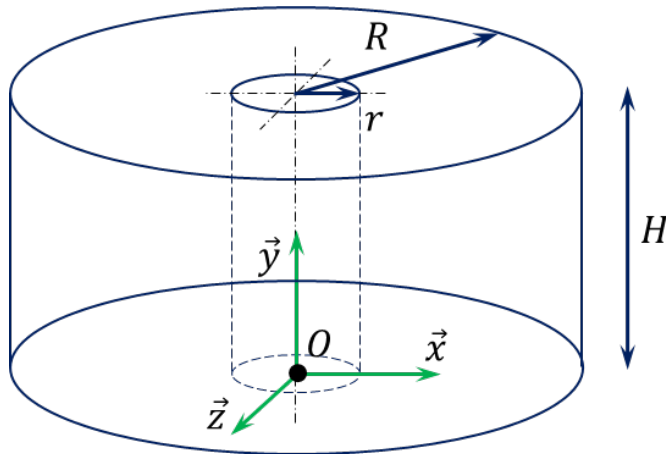
B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe (G, \vec{k}) de rayon R et de hauteur H et de

masse m est donnée en son centre d'inertie par $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ avec

$$A = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

Soit la pièce suivante.



On pose $\vec{OA} = -\frac{R}{2} \vec{x}$.

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G puis en O .

Corrigé voir ??.

Cylindre percé ★

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 3 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Question 4 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G puis en O .

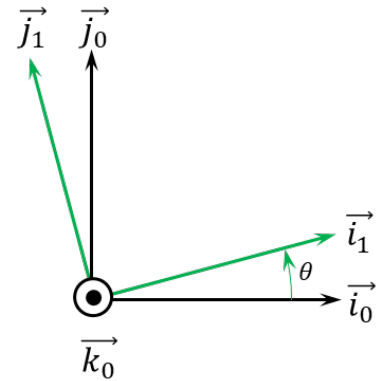
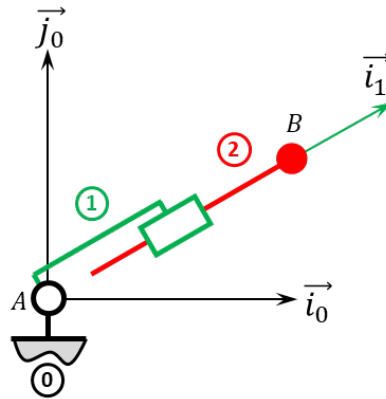
Mouvement RT ★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** et $\overrightarrow{AG_1} = L_1 \vec{i}_1$, on note m_1 la masse de **1** et
- $$I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} ;$$
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) =$
- $$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} .$$



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en A .

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Question 3 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 3.

Mouvement RT ★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 4 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en A . On a $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \end{array} \right\}_A$. Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$.

$$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)}$$

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Question 6 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Mouvement RT ★

B2-14

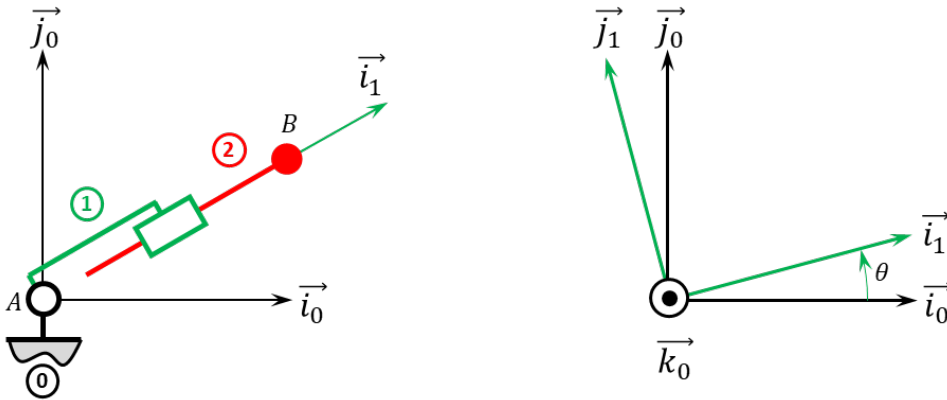
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** et $\overrightarrow{AG_1} = L_1\overrightarrow{i_1}$, on note m_1 la masse de **1**;
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet d'actionner le solide **1**. Un vérin électrique positionné entre **1** et **2** permet d'actionner le solide **2**

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{j_0}$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à \mathcal{R}_0 .

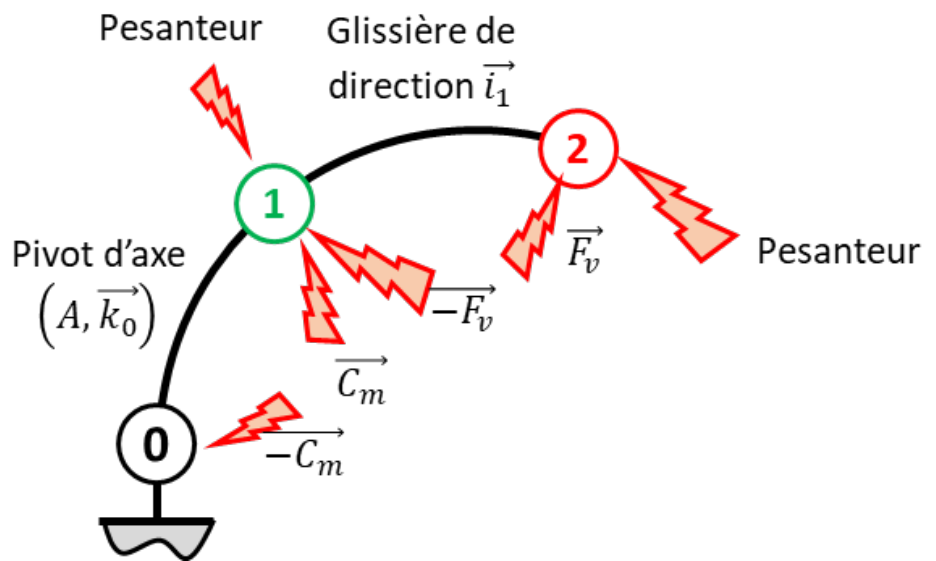
Corrigé voir 2.

Mouvement RT ★

B2-14

C1-05

Question 3 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



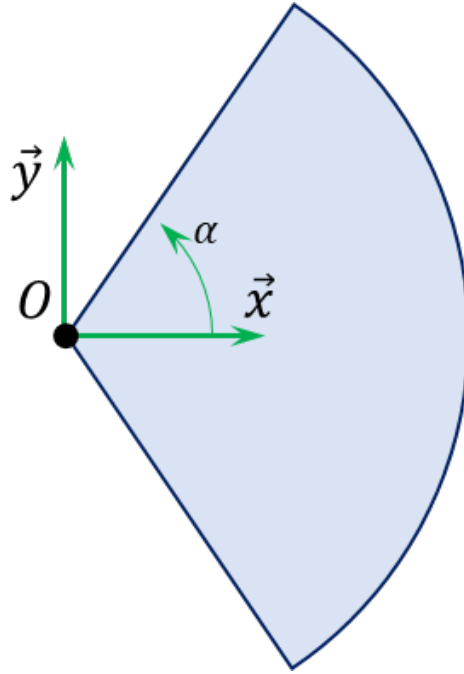
Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 .

- On isole {1}. On réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{i}_1 : $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{i}_1 + \overrightarrow{R(F_v \rightarrow 2)} \cdot \vec{i}_1 + \overrightarrow{R(Pes \rightarrow 2)} \cdot \vec{i}_1 = \overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{i}_1$.
- On isole {1+2}. On réalise un théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{k}_0 : $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, Mot \rightarrow 1)} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, Pes \rightarrow 2)} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, Pes \rightarrow 1)} \cdot \vec{k}_0 = \delta(A, 2/0) \cdot \vec{k}_0 + \delta(A, 1/0) \cdot \vec{k}_0$.

Disque ★★

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit un secteur de disque de rayon R , d'épaisseur négligeable et de masse surfacique μ .



Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en O .

Corrigé voir ??.

Disque ★★

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 3 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

Question 4 Déterminer la matrice d'inertie du solide en O .

Mouvement TR ★

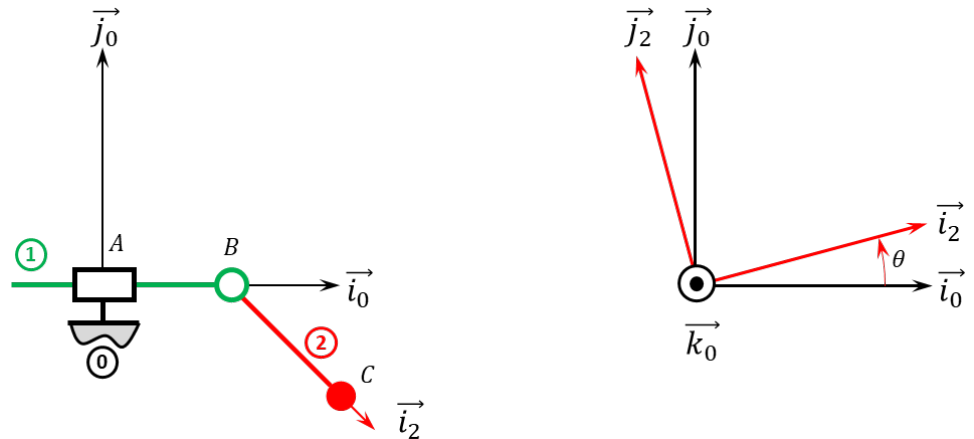
C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = R\vec{i}_2$ avec $R = 30$ mm. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;

- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2 et $I_{G_2}(2) =$
- $$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0$

Question 3 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 3.

Mouvement TR ★

C2-08

C2-09

Question 4 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Expression de la résultante dynamique $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = m_2 \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0}$

$$\frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \frac{d^2}{dt^2} [\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \vec{j}_2]_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R (\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2).$$

Méthode 1 : Calcul en $G_2 = C$ puis déplacement du torseur dynamique

- Calcul du moment cinétique en G_2 : $G_2 = C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = I_C(2) \dot{\theta} \vec{k}_0 = C_1 \dot{\theta} \vec{k}_1$.
- Calcul du moment dynamique en G_2 : $G_2 = C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1$.
- Calcul du moment dynamique en B : $\overrightarrow{\delta(B, 2/0)} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_d(2/0)} = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R m_2 \wedge (\ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R (\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2)) = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R m_2 (-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \vec{k}_0 + R \ddot{\theta} \vec{k}_2).$

Au final, on a donc $\{\mathcal{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R (\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2)) \\ C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R m_2 (-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \vec{k}_0 + R \ddot{\theta} \vec{k}_2) \end{array} \right\}_B$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0$

On a $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} = \overrightarrow{R_d(1/0)} + \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_1 \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + m_2 \left(\ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \left(\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2 \right) \right)$.
On projette alors sur \vec{i}_0 , $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0 = m_1 \ddot{\lambda}(t) + m_2 \left(\ddot{\lambda}(t) - R \left(\ddot{\theta} \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \right)$.

Question 6 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Mouvement RT ★

B2-14

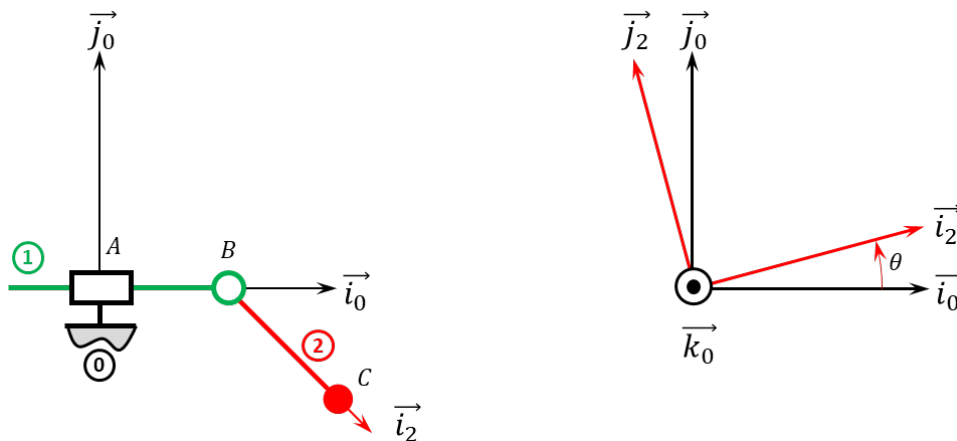
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$ avec $R = 30$ mm. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1**;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2**.

Un vérin électrique positionné entre **0** et **1** permet d'actionner le solide **1**. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet d'actionner le solide **2**.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de **1** et de **2** par rapport à \mathcal{R}_0 .

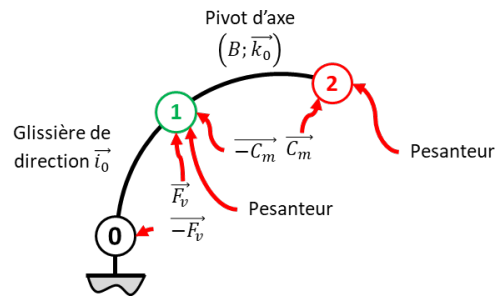
Corrigé voir 2.

Mouvement RT ★

B2-14

C1-05

Question 3 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



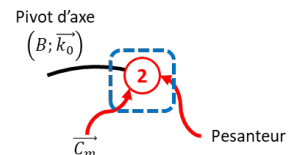
Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de 1 et 2 par rapport à \mathcal{R}_0 . Ce mécanisme présente deux degrés de liberté indépendants : $\lambda(t)$ et $\theta(t)$. Il est donc nécessaire d'écrire, dans le meilleur des cas, deux équations :

- une équation traduisant la mobilité de 2 par rapport à 1, soit TMD appliqué à 2 en B en projection sur \vec{k}_0 ;
- une équation traduisant la mobilité de 1+2 par rapport à 0, soit TRD appliqué à 1+2 en projection sur \vec{i}_0 .

► On isole 2.

► BAME :

- actions de la liaison pivot $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$;
- action du moteur $\{\mathcal{T}(\text{mot} \rightarrow 2)\}$;
- action de la pesanteur $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\}$.

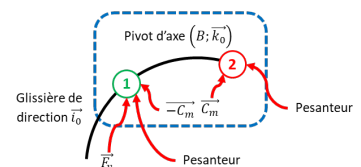


- **Théorème** : on applique le théorème du moment dynamique en B au solide 2 en projection sur \vec{k}_0 : $C_{\text{mot}} + \overline{\mathcal{M}}(B, \text{pes} \rightarrow 2) \cdot \vec{k}_0 = \delta(B, 2/0) \cdot \vec{k}_0$.
- **Calcul de la composante dynamique** : considérons le cas où la matrice d'inertie est donnée en C. On a donc $\delta(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\sigma(C, 2/0)]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [I_C(2) \Omega(2/0)]_{\mathcal{R}_0}$.
De plus, $\delta(B, 2/0) = \delta(C, 2/0) + \overline{BC} \wedge R_d(2/0)$ et $R_d(2/0) = m_2 \Gamma(C, 2/0)$.

► On isole 1+2.

► BAME :

- actions de la liaison glissière $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$;
- action de la pesanteur $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\}$;
- action de la pesanteur $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\}$;
- action du vérin $\{\mathcal{T}(\text{ver} \rightarrow 1)\}$.



- **Théorème** : on applique le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur \vec{i}_0 : $R(\text{ver} \rightarrow 1) \cdot \vec{i}_0 = R_d(1+2/0) \cdot \vec{i}_0$.

► **Calcul de la composante dynamique :** $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} = \overrightarrow{R_d(1/0)} + \overrightarrow{R_d(2/0)} =$
 $m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} + m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)}.$

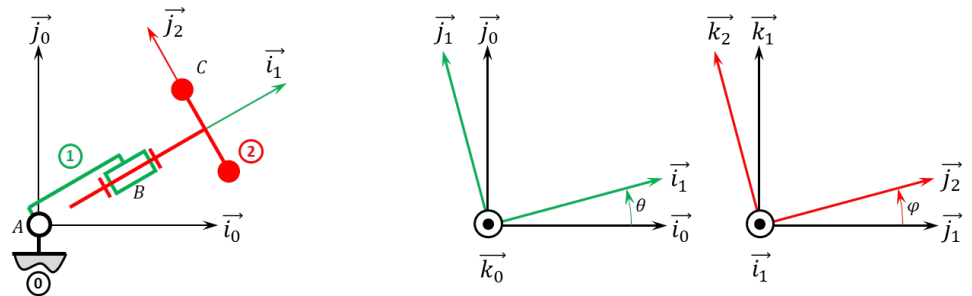
Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\vec{i}_2 + r\vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20$ mm et $r = 10$ mm. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- G_2 désigne le centre d'inertie de **2** tel que $\overrightarrow{BG_2} = \ell\vec{i}_2$, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Question 3 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 3.

Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09

Question 4 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Par définition, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B, 1/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$

$$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$$

Calcul de $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$: $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\vec{j}_1$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$: $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(B, 1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R\dot{\theta}\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = R\ddot{\theta}\vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{i}_1$.

Au final, $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \left(R\ddot{\theta} \vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2 \vec{i}_1 \right)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)}$ B est le centre d'inertie du solide 1; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(B, 1/0)} \right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(B, 1/0)} = I_B(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \dot{\theta} \vec{k}_0 = C_1 \dot{\theta} \vec{k}_0$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0$.

Au final, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \left(R\ddot{\theta} \vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2 \vec{i}_1 \right) \\ C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_B$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Tout d'abord, $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} = \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} + \overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \vec{k}_0$ – Méthode 1

$\overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \vec{k}_0 = \left(\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)} \right) \cdot \vec{k}_0 = \left(C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0 + R \vec{i}_1 \wedge m_1 \left(R\ddot{\theta} \vec{j}_1 - R\dot{\theta}^2 \vec{i}_1 \right) \right) \cdot \vec{k}_0 = C_1 \ddot{\theta} + m_1 R^2 \ddot{\theta}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0$ – Méthode 1

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \vec{k}_0 = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 \right]_{\mathcal{R}_0} - \underbrace{\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \frac{d}{dt} \left[\vec{k}_0 \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}}$.

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = \left(I_A(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} \right) \cdot \vec{k}_0$

$I_A(2) = I_{G_2}(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta} \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{i}_2 = \dot{\theta} \left(\cos \varphi \vec{k}_2 + \sin \varphi \vec{j}_2 \right) + \dot{\varphi} \vec{i}_2$.

On a donc $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 + m_2 R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \sin \varphi (B_2 + m_2 R^2) \\ \dot{\theta} \cos \varphi (C_2 + m_2 R^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

De plus $\vec{k}_1 = \cos \varphi \vec{k}_2 + \sin \varphi \vec{j}_2$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = \dot{\theta} \sin^2 \varphi (B_2 + m_2 R^2) + \dot{\theta} \cos^2 \varphi (C_2 + m_2 R^2)$.

Enfin, $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = (B_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi) + (C_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \cos^2 \varphi - 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi)$.

Conclusion

$\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0 = C_1 \ddot{\theta} + m_1 R^2 \ddot{\theta} + (B_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi) + (C_2 + m_2 R^2) (\ddot{\theta} \cos^2 \varphi - 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi)$.

Question 6 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Mouvement RR 3D ★★

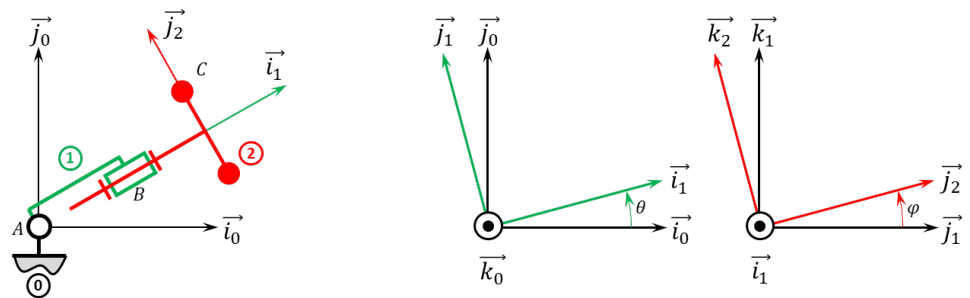
B2-14

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\vec{i}_2 + r\vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$ et $r = 10 \text{ mm}$. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1**;
- G_2 désigne le centre d'inertie de **2** tel que $\overrightarrow{BG_2} = \ell\vec{i}_2$, on note m_2 la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet d'actionner le solide **1**. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet d'actionner le solide **2**. L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g\vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à \mathcal{R}_0 .

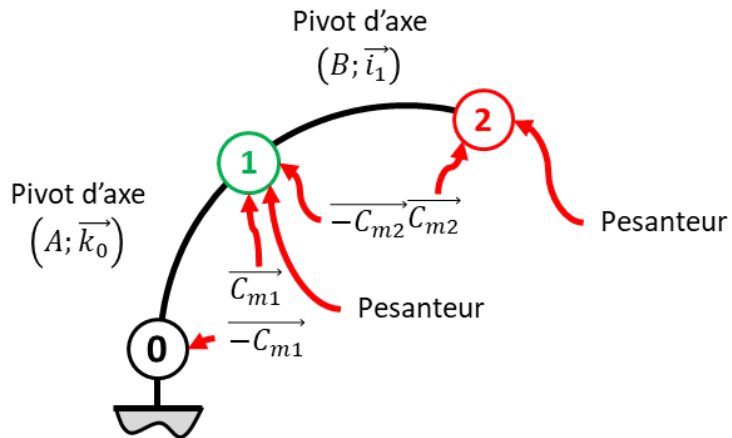
Corrigé voir 2.

Mouvement RR 3D ★★

B2-14

C1-05

Question 3 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 .

On isole 2 et on réalise un théorème du moment dynamique en B (ou A) en projection sur \vec{i}_1 .

On isole 1+2 et on réalise un théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{k}_0 .

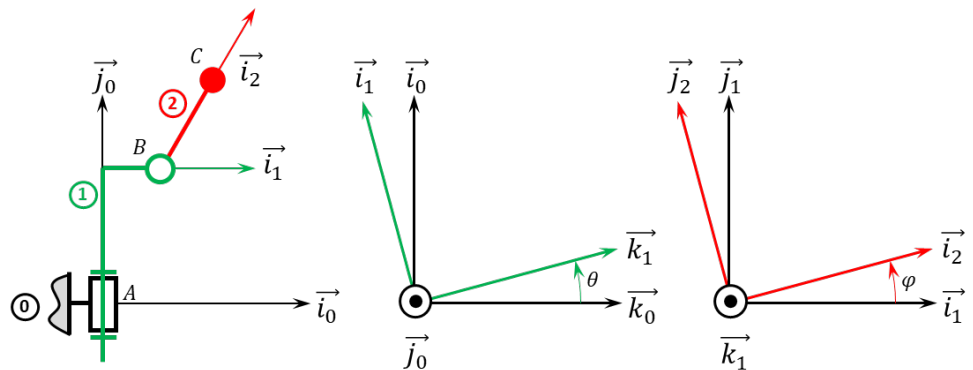
Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H\vec{j}_1 + R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = L\vec{i}_2$. On a $H = 20 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 tel que $\overrightarrow{AG_1} = H\vec{j}_1$, on note m_1 la masse de 1 et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2 et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1 + 2/0)} \cdot \vec{j}_0$

Question 3 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Corrigé voir 3.

Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 4 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ en B.

Par définition, $\{\mathcal{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B, 2/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(2/0)}$: $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$

Calcul de $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$:

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [H\vec{j}_1 + R\vec{i}_1 + L\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0}.$$

Calculons :

- ▶ $\frac{d}{dt} \left[\vec{j}_0 \right]_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} ;$
- ▶ $\frac{d}{dt} \left[\vec{i}_1 \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{i}_1 = -\dot{\theta} \vec{k}_1 ;$
- ▶ $\frac{d}{dt} \left[\vec{i}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{i}_2 = (\dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}_2) \wedge \vec{i}_2 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{i}_2 + \dot{\varphi} \vec{k}_2 \wedge \vec{i}_2 = -\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2 .$

On a donc $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = -R\dot{\theta} \vec{k}_1 + L(-\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2) .$

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} &= \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[L\dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R\vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) \right]_{\mathcal{R}_0} . \end{aligned}$$

Calculons :

- ▶ $\frac{d}{dt} \left[\vec{j}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{j}_2 = (\dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}_1) \wedge \vec{j}_2 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2 + \dot{\varphi} \vec{k}_1 \wedge \vec{j}_2 = \dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\varphi} \vec{i}_2 .$
- ▶ $\frac{d}{dt} \left[\vec{k}_1 \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{i}_1 .$

Avec les hypothèses, on a $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = L\dot{\varphi} (\sin \varphi \vec{k}_1 - \vec{i}_2) - \dot{\theta} (R\dot{\theta} \vec{i}_1 + L \cos \varphi \dot{\theta} \vec{i}_1 - L\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{k}_1) .$

Calculons $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)}$

C est le centre d'inertie du solide 2; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} .$

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = I_C(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} .$

Or $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}_2 = \dot{\theta} (\cos \varphi \vec{j}_2 + \sin \varphi \vec{i}_2) + \dot{\varphi} \vec{k}_2 .$

$$\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} A_2 \sin \varphi \\ \dot{\theta} B_2 \cos \varphi \\ C_2 \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} .$$

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{j}_0$

Question 6 Déterminer $\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/0)$ et $\mathcal{P}(1 \rightarrow 2/0)$.

Mouvement RR 3D ★★

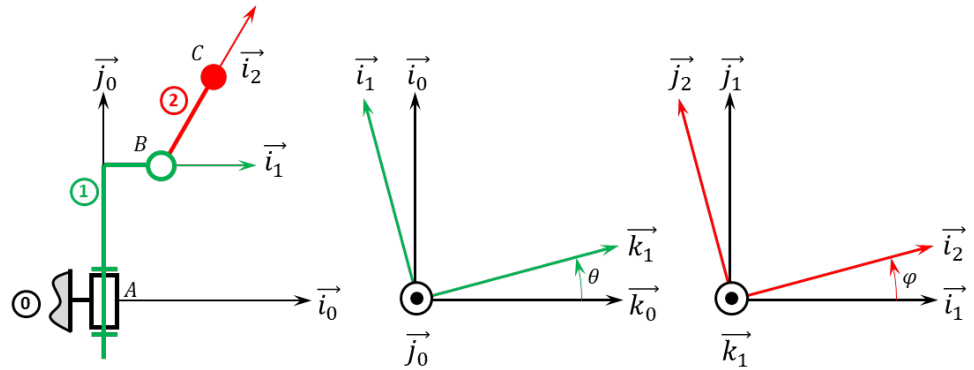
B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H\vec{j}_1 + R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = L\vec{i}_2$. On a $H = 20 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ mm}$. De plus :

- ▶ G_1 désigne le centre d'inertie de 1 tel que $\overrightarrow{AG_1} = H\vec{j}_1$, on note m_1 la masse de 1;
- ▶ $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2. L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g \vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 .

Corrigé voir 2.

Mouvement RR 3D ★★

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 3 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 4 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 .