5 Algorithmes dichotomiques

5.1 Introduction

Les méthodes de résolutions par un algorithme dichotomique font partie des algorithmes basés sur le principe de « diviser pour régner ». Elles utilisent la définition du terme **dichotomie** qui signifie diviser un tout en deux parties « opposées ». Certains algorithmes de tris sont basés sur ce principe de diviser pour régner.

Ce cours vous présente deux algorithmes dichotomiques :

- la recherche d'un élément dans une liste triée ;
- la détermination de la racine d'une fonction quand elle existe.

5.2 Recherche dichotomique dans une liste triée

Lorsque vous cherchez le mot « hippocampe » dans le dictionnaire, vous ne vous amusez pas à parcourir chaque page depuis la lettre a jusqu'à tomber sur le mot « hippocampe »...
Dans une liste triée, il y a plus efficace ! Par exemple dans le dictionnaire, vous ouvrez à peu près au milieu, et suivant si le mot trouvé est « inférieur » ou « supérieur » à « hippocampe » (pour l'ordre alphabétique), vous poursuivez votre recherche dans l'une ou l'autre moitié du dictionnaire.

Propriété –

On se donne une liste `L` de nombres de longueur `n`, triée dans l'ordre croissant, et un nombre `x0`.
Pour chercher `x0`, on va couper la liste en deux moitiés et chercher dans la moitié intéressante et ainsi de suite.
On appelle `g` l'indice de l'élément du début de la sous-liste dans laquelle on travaille et `d` l'indice de l'élément de fin.
Au début, `g = 0` et `d = n-1`
On souhaite construire un algorithme admettant l'invariant suivant :

si `x0` est dans `L` alors `x0` est dans la sous-liste `L[g:d]` (`g` inclus et `d` exclu).

On va utiliser la méthode suivante.

- On compare `x0` à « l'élément du milieu » : c'est `L[m]` où `m = (g+d)//2` son indice est `m = n//2` (division euclidienne)
- Si `x0 = L[m]`, on a trouvé `x0`, on peut alors s'arrêter.
- Si `x0 < L[m]`, c'est qu'il faut chercher dans la première moitié de la liste, entre `L[g]` et `L[m-1]` (`L[m]` exclu).
- Si `x0 > L[m]`, c'est qu'il faut chercher dans la seconde moitié de la liste, entre `L[m+1]` et `L[d]` (`L[m]` exclu).

On poursuit jusqu'à ce qu'on a trouvé `x0` ou lorsque l'on a épuisé la liste `L`.

5.2.1 Exemples d'application

Indiquer pour les deux exemples suivants les valeurs successives de `g` et `d` :

1. `x0` = 5 et `L` =

−3	5	7	10	11	14	17	21	30

2. `x0` = 11 et `L` =

−2	1	2	7	8	10	13	16	17

5.2.2 Implémentation en Python

La fonction `recherche_dichotomie` d'arguments une liste `L` et un élément `x` renvoyant un booléen disant si `x` est dans la liste `L` est proposée :

```
1  def recherche_dichotomie(L:list, x:int)-> bool:
2      n = len(L)
3      g = 0 # c'est l'indice de gauche
4      d = n - 1 # c'est l'indice de droite
5      rep = False
6      while g <= d and rep == False :
7          # si x est dans L alors L[g] <= x <= L[d]     {invariant}
8          m = (g+d) // 2
9          if x == L[m]:
10             rep = True
11         elif x < L[m]:
12             d = m - 1
13         else:
14             g = m + 1
15         # si x est dans L alors L[g] <= x <= L[d]     {invariant}
16     return(rep)
```

Remarque : La terminaison de l'algorithme est obtenue avec $d - g$ qui est un entier positif qui décroît strictement à chaque passage dans la boucle `while` et joue le rôle de variant.

5.2.3 Implémentation récursive

```
1  def recherche_dichotomique_recursive(L:[int], x0:int, g:int, d:int):
2      if g>d :
3          return False # ou -1
4      m = (g+d)//2
5      if L[m] == x0 :
6          return True # ou m
7      elif L[m] > x0 :
8          return recherche_dichotomique_recursive(L, x0, g, d-1)
9      else :
10         return recherche_dichotomique_recursive(L, x0, g+1, d)
```

5.2.4 Terminaison

5.2.5 Preuve de correction

Montrons que `x` ∈ `L` ⟹ `x` ∈ `[g:d+1]`.[1]

- En entrant dans la boucle, $g = 0$ et $d + 1 = n - 1 + 1 = n$. Si `x` ∈ `L` alors, `x` ∈ `[0:n]`. La propriété d'invariance est donc vérifiée.
- Considérons la propriété `x` ∈ `L` ⟹ `x` ∈ `[g:d+1]` est vraie à la ^{e} itération.

Cas 1 : $\begin{cases} g = 0 \\ d = 8 \\ m = 4, L[m] > x0 \end{cases}$

$\begin{cases} g = 0 \\ d = 3 \\ m = 1, L[m] = x0 \end{cases}$.

C'est fini, on a bien trouvé x_0 dans la liste.

Cas 2 : $\begin{cases} g = 0 \\ d = 8 \\ m = 4, L[m] < x0 \end{cases}$,

$\begin{cases} g = 5 \\ d = 8 \\ m = 6, L[m] > x0 \end{cases}$

$\begin{cases} g = 5 \\ d = 5 \\ m = 5, L[m] < x0 \end{cases}$ $\begin{cases} g = 6 \\ d = 5 \end{cases}$.

C'est fini, on a épuisé la liste `L` et on n'a pas trouvé $x0$.

1: Cela signifie que $x \in [\![g, d]\!]$.

- On calcule `m`.
- Si `x = L[m]`, on a bien `x ∈ [g:d+1]`. La propriété d'invariance est vérifiée à la fin de l'itération et on sort de la boucle (car `rep` est `True`).
- Si `x < L[m]`, on a déjà vérifié que `x` était différent de `L[m]` et alors `d=m-1`. Donc $g = g$ et $d + 1 = m - 1 + 1 = m$. `x ∈ L` alors `x ∈ [g:m]`. La propriété d'invariance est donc vérifiée.
- Si `x > L[m]`, on a déjà vérifié que `x` était différent de `L[m]` et alors `g=m+1`. Donc $g = m + 1$ et $d + 1$ est inchangé. Donc si `x ∈ L` alors `x ∈ [m+1:d+1]`. La propriété d'invariance est donc vérifiée.

Dans chacun des cas, la propriété d'invariance est vérifiée à la fin de la ^{e} itération. C'est donc bien un invariant de boucle.

5.2.6 Analyse de la complexité

Dans le pire des cas, le terme recherché n'est pas dans la liste. On divise donc la taille du tableau par 2 tant que la taille est supérieure ou égale à 1.

On note n la taille du tableau. On cherche k le nombre de fois qu'on peut diviser la taille du tableau par 2 : $n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \geq 1 \Rightarrow \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \geq \frac{1}{n} \Rightarrow k \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geq \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow k \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

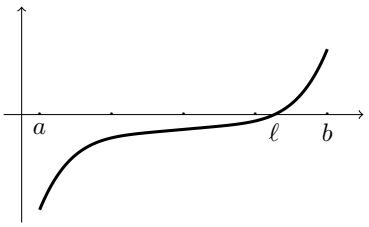
$\Rightarrow k \geq \frac{\ln n}{\ln 2}$. Il y aura donc dans le pire des cas $\log_2 n$ opérations. L'algorithme de recherche dichotomique est donc en $\mathcal{O}(\log_2(n))$.

5.3 Détermination de la racine d'une fonction par dichotomie

5.3.1 Principe théorique de la méthode par dichotomie

On considère une fonction f vérifiant :

$$f \text{ continue sur } [a, b] \text{ ; } f(a) \text{ et } f(b) \text{ de signes opposés.}$$



Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f possède au moins un zéro ℓ entre a et b. La preuve, vue en cours de mathématiques, repose sur la méthode de dichotomie. Prenons le cas $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et posons $g_0 = a$, $d_0 = b$.

On considère $m_0 = \frac{g_0 + d_0}{2}$ et on évalue $f(m_0)$:

- Si $f(m_0) \geq 0$, on va poursuivre la recherche d'un zéro dans l'intervalle $[g_0, m_0]$
  On pose donc : $g_1 = g_0 \quad ; \quad d_1 = m_0$
- Sinon, la recherche doit se poursuivre dans l'intervalle $[m_0, d_0]$
  On pose donc : $g_1 = m_0 \quad ; \quad d_1 = d_0$
- On recommence alors en considérant $m_1 = \frac{g_1 + d_1}{2}$...

5.3.2 Implémentation en Python et avec scipy

Écrivons une fonction `zero_dichotomie(f:callable, a:float, b:float, epsilon:float) -> float` d'arguments une fonction `f`, des flottants `a` et `b` (tels que `a < b`), et la précision voulue `epsilon` (flottant strictement positif). Cette fonction renverra une valeur approchée à `epsilon` près d'un zéro de `f`, compris entre `a` et `b`, obtenue par la méthode de dichotomie.

```
def zero_dichotomie(f:callable, a:float, b:float, epsilon:float):
    g = a # c'est un flottant
    d = b # c'est un flottant
    while d-g > 2*epsilon :
        m = (g + d) / 2
        if f(g)*f(m) <= 0:
            d = m
        else:
            g = m
    return ((g + d)/2)
```

Effectuons un test avec la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1, 2]$, avec une précision de 10^{-6} :

```
def f(x):
     return(x ** 2 - 2)
print (zero dichotomie(f, 1, 2, 10**(-6)))

# il s'affichera : 1.4142141342163086
```

Une telle fonction est déjà prédéfinie dans la bibliothèque `scipy.optimize`, la fonction `bisect`[2] :

2: La méthode de dichotomie s'appelle aussi la méthode de la *bisection*.

```
import scipy.optimize as spo
print (spo.bisect(f, 1, 2))
# il s'affichera : 1.4142135623724243
```

La précision est un argument optionnel (à mettre après `f`, `a` et `b`) et vaut 10^{-12} par défaut.