

TD 1 : Stabilisateur vertical pour appareil photo – Sujet

L'utilisation du mode vidéo, en haute définition sur les appareils photo réflex et légers, pose aux photographes le problème de la stabilisation de l'image.

Les nacelles gyrostabilisées, installées sur une perche portée par les deux mains de l'utilisateur et sur lesquelles se fixe l'appareil photographique permettent de corriger les perturbations dues aux mouvements de l'utilisateur selon trois axes de rotations. Néanmoins, elles ne permettent pas de réduire les perturbations verticales dues à la marche ou à la course de l'utilisateur.

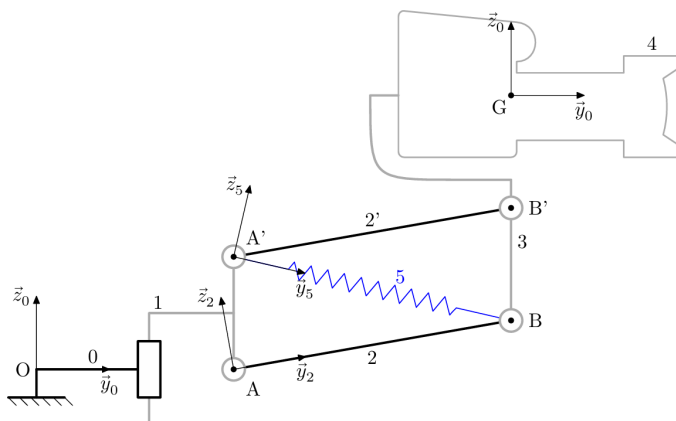
Pour résoudre ce problème, un constructeur commercialise un stabilisateur vertical à installer entre la perche et la nacelle gyrostabilisée.

Vérification du respect de l'exigence relative à la position d'équilibre

Le cahier des charges précise que le stabilisateur peut être utilisé avec des appareils photo de masse comprise entre 0,350 kg et 1,550 kg¹.

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception est assez robuste vis-à-vis du facteur de masse de l'appareil photo pour satisfaire l'exigence 1.1 relative à la position d'équilibre du système.



Le mécanisme étudié dont la modélisation retenue est donnée (figure 1.2). La nacelle gyrostabilisée est schématisée par la barre (3). Le support (1), faisant l'objet d'une liaison encastrement avec la perche, est supposé être en mouvement de translation par rapport au sol (0) autorisé par une glissière fictive. Ce modèle est paramétré par :

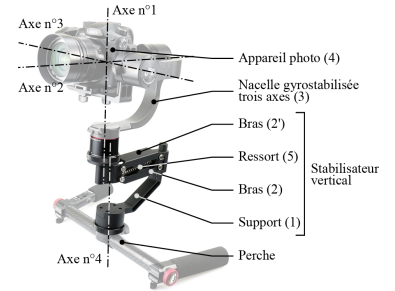
- ▶ le repère terrestre $\mathcal{R}_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen avec \vec{z}_0 vertical ascendant ;
- ▶ le repère $\mathcal{R}_1 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au support (1) avec $\vec{OA} = y_A \vec{y}_0 + z_{\text{pert}} \vec{z}_0$;
- ▶ le repère $\mathcal{R}_2 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié au bras (2) avec $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$;
- ▶ le repère $\mathcal{R}_2' (A', \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié au bras (2') avec $\vec{AA'} = l \vec{z}_0$;

Concours Centrale Supélec 2021 – PSI.

B2-14

C1-05

C2-07



1: Exigence 1

"requirement" Plage de fonctionnement
Id = "1.1.1" Text = "Obtenir une position d'équilibre du système dans la plage de fonctionnement $\alpha_0 \in [-35^\circ, 45^\circ]$ "

FIGURE 1.1 – Exigence 1.1

FIGURE 1.2 – Schéma cinématique plan et paramétrage du mécanisme

La plage de fonctionnement du mécanisme est limitée par la géométrie des bras (2) et (2') avec $\alpha \in [-35^\circ, 45^\circ]$, $l = 25 \text{ mm}$, $L = 52 \text{ mm}$, $y_G = 5 \text{ mm}$ et $z_G = 200 \text{ mm}$.

- le repère \mathcal{R}_3 ($B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) lié à la nacelle gyrostabilisée (3) et à l'appareil photo (4) liés rigidement entre eux avec $\vec{AB} = L\vec{y}_2$. Le centre d'inertie de l'ensemble $\{(3) + (4)\}$ est noté G, avec $\vec{BG} = y_G\vec{y}_0 + z_G\vec{z}_0$;
- le repère \mathcal{R}_5 ($A', \vec{x}_0, \vec{y}_5, \vec{z}_5$) est défini tel que $\vec{A'B} = L_r\vec{y}_5$ avec $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_5) = (\vec{z}_0, \vec{z}_5)$.

Le ressort de traction (5) de raideur K_r et de longueur à vide L_{r0} possède une tension initiale F_{r0} lorsque $L_r = L_{r0}$. Il est relié d'une part au support (1) et d'autre part au solide (3) aux points d'ancrage respectivement A' et B.

Pour cette étude la nacelle gyrostabilisée (3) et l'appareil photo (4) sont considérés comme formant un seul solide de masse $m_{34} = m_3 + m_4$ avec $m_3 = 1,250$ kg. La masse et l'inertie des autres solides sont négligés.

Dans cette partie, l'étude est conduite avec les hypothèses suivantes :

- les liaisons sont parfaites;
- la modélisation est plane;
- il n'y pas de perturbation ($z_{\text{pert}} = 0$).

En utilisant une fermeture géométrique, on peut montrer que $\tan \beta = \frac{L \sin \alpha - l}{L \cos \alpha}$ et que la longueur du ressort L_r peut s'exprimer sous la forme $L_r = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha}$.

Vérification de l'exigence relative à la plage de fonctionnement

L'action mécanique du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3) est modélisée par le torseur $\{\mathcal{F}_{5 \rightarrow 3}\} : \{\mathcal{F}_{5 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_r \vec{y}_5 \\ 0 \end{array} \right\}_B$.

Question 1 Exprimer la composante de résultante d'action mécanique F_r en fonction de l'angle α , des paramètres géométriques du système et des paramètres du ressort.

Question 2 Déterminer la direction des actions mécaniques de liaison exercées par le bras (2) sur la nacelle (3) et par le bras (2') sur la nacelle (3) **On pourra raisonner en statique**.

Question 3 Afin de déterminer la position d'équilibre de l'ensemble $\{(3) + (4)\}$, proposer sans calcul, une démarche claire qui permette d'exprimer l'effort nécessaire du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3) **On pourra raisonner en statique**.

Question 4 Exprimer l'équation scalaire traduisant l'équilibre du mécanisme en fonction des angles α, β , de la masse m_{34} et de la composante de résultante d'action mécanique F_r .

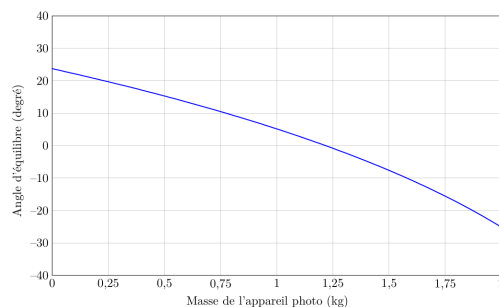
Dès lors, il est possible de tracer l'angle d'équilibre α_0 en fonction de la masse de l'appareil photo m_4 (figure 1.3).

Question 5 En donnant les valeurs des angles d'équilibre pour les deux valeurs extrêmes de masse, vérifier le respect de l'exigence 1.1.1. relative à la plage de fonctionnement.

Éléments de correction

1. $F_r = \frac{-F_{r0} - K_r}{\left(\sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha} - L_{r0}\right)}$.
2. $\vec{F}_{23} = F_{23}\vec{y}_2$ et $\vec{F}_{2'3} = F_{2'3}\vec{y}_2$.
3. .
4. $ZF_r = -m_{34}g \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$.
5. -9° à 18° .

FIGURE 1.3 – Angle d'équilibre α_0 en fonction de la masse de l'appareil photo m_4





TD 2 : Chasse neige – Sujet

D'après documents Mines-Telecom.

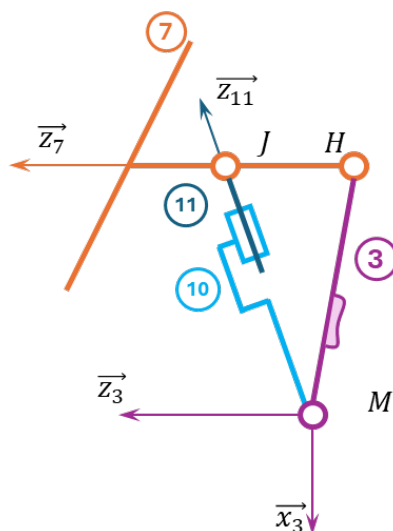
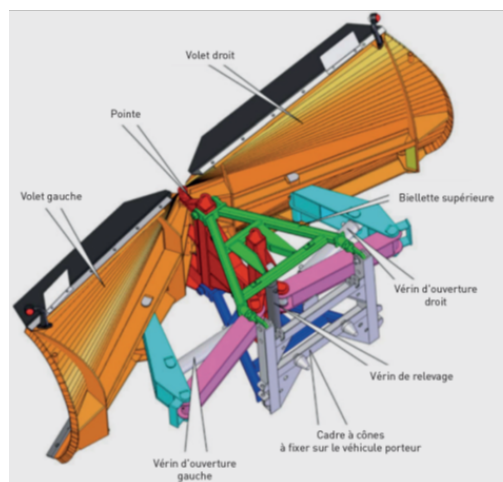
B2-14

C1-05

C2-07

Mise en situation

L'étrave de déneigement, objet de cette étude, est utilisée pour dégager les routes. Elle est composée de deux volets disposés en « V » qui permettent d'évacuer sur les côtés une épaisseur importante de neige. Les deux volets sont articulés de façon indépendante sur la pointe de l'étrave et ont une ouverture variable contrôlée par le conducteur à travers un vérin d'ouverture. En fin d'utilisation ou pour éviter des obstacles, elle est pourvue d'un système de relevage hydraulique.



La pièce 7 est la lame de déneigement articulée par rapport au châssis 3. Elle est mise en mouvement par le vérin {10 ; 11}.

Données et hypothèses

- ▶ $\gamma = (\vec{x}_3, \vec{x}_7) = (\vec{z}_3, \vec{z}_7)$ et $\beta = (\vec{x}_3, \vec{x}_{11}) = (\vec{z}_3, \vec{z}_{11})$;
- ▶ $\vec{z}_{11} = \vec{z}_{10}$ et $\vec{x}_{11} = \vec{x}_{10}$;
- ▶ $\vec{HJ} = h\vec{z}_7$ et $\vec{HQ} = a\vec{x}_3 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$ et $\vec{HG} = i\vec{z}_7$ et $\vec{HM} = f\vec{x}_3 + g\vec{z}_3$.
- ▶ Dans le cadre de cette étude, $\beta = 37^\circ$ et $\gamma = 16^\circ$, $\vec{g} = -g\vec{y}_3$;
- ▶ liaisons parfaites (pas de jeu, pas de frottement);

- le poids de toutes les pièces est négligé, sauf celui de la pièce 7, $m_7 = 850 \text{ kg}$ appliqué en G ;
- dimensions en mètres : $h = 0,68$; $a = -0,33$; $b = 0,1$; $c = 1,1$ et $i = 0,5$;
- l'action de la neige sur le volet 7 est modélisée par un glisseur de moment nul en Q tel que : $\{\mathcal{T}(\text{neige} \rightarrow 7)\} = \left\{ \begin{array}{c} Q\vec{x}_7 \\ 0 \end{array} \right\}_Q$ avec $Q = 15\,000 \text{ N}$;
- le vérin d'ouverture choisi supporte une pression d'alimentation de 150 bars.

Problème ouvert

Question 1 Proposer et mettre en œuvre une démarche permettant de vérifier si la pression d'alimentation du vérin d'ouverture est suffisante pour « chasser la neige ».

Problème décomposé

Question 2 Réaliser les figures planes associées au paramétrage du problème.

Question 3 Tracer le graphe de liaisons.

Question 4 Déterminer la direction \vec{u} de l'action mécanique $\overrightarrow{R(11 \rightarrow 7)} = F\vec{u}$.

Question 5 En isolant 7, exprimer la relation liant F , Q et les grandeurs géométriques.

Question 6 En déduire la pression dans le vérin en fonction de sa section S , Q et des grandeurs géométriques.

TD 1

Machine de forage – Sujet

Dans le domaine du génie civil, les foreuses permettent de réaliser des percages profonds afin de couler des pieux en béton armé. On s'intéresse aux conditions de basculement statique de la foreuse.

Pour prévenir le basculement de la foreuse, l'opérateur peut observer dans un coin de son écran : le pourcentage $b\%$ d'atteinte de la posture critique de basculement pour une orientation de tourelle donnée (figure 1.4).

Afin d'assurer la stabilité de l'engin, on cherche à satisfaire l'exigence 1.2 (figure 1.5).

Le paramétrage mécanique est donné sur la figure 1.6 :

- ▶ $\mathbf{0}$ le sol, **S1** le châssis de la foreuse, **S2** sa tourelle et son mât et **S3** l'ensemble {table de forage + outil};
- ▶ $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère attaché aux solides **S0** et **S1**;
- ▶ $\mathcal{R}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ la base attachée aux solides **Sé** et **S3** telle que $(\vec{x}, \vec{x}_2) = \theta$ où θ est connu;
- ▶ $\Sigma = \{\mathbf{S1}, \mathbf{S2}, \mathbf{S3}\}$ l'ensemble de la foreuse, de centre de gravité G tel que $\vec{OG} = r\vec{x}_2 + z_G\vec{z}$;
- ▶ $M = 186,5$ tonnes la masse de l'ensemble Σ et $m = 18$ tonnes la masse de **S3** seul;
- ▶ $2F_w\vec{z}$ connu, l'effort du câble d'avance sur **S3**. La masse du câble est négligée dans la suite;
- ▶ $F_{\text{sol}}\vec{z}$, inconnu, l'effort de forage du sol $\mathbf{0}$ sur l'outil de forage **S3** au point F , connu, défini par $\vec{OF} = R\vec{x}_2$;
- ▶ $-g\vec{z}$ où $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, l'accélération de la pesanteur terrestre.

On modélise ici les contacts entre le sol et la foreuse par des contacts ponctuels : $F_g\vec{z}$, (respectivement $F_d\vec{z}$) inconnu, l'effort du sol $\mathbf{0}$ sur **S1**, supposé ponctuel au centre I (respectivement J) de la surface de contact entre la chenille gauche cg (respectivement cd) et le sol tel que $\|\vec{OI}\| = a = 2,1 \text{ m}$ (respectivement $\|\vec{OJ}\| = a = 2,1 \text{ m}$).

Question 1 En appliquant le principe fondamental de la statique en O à l'isolement de votre choix, donner l'expression de F_g et de F_d en fonction des données connues du système, de θ et de F_{sol} .

Le problème étant symétrique pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (tourelle orientée à droite) et $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (tourelle orientée à gauche), on n'étudie par la suite que le basculement statique à droite.

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

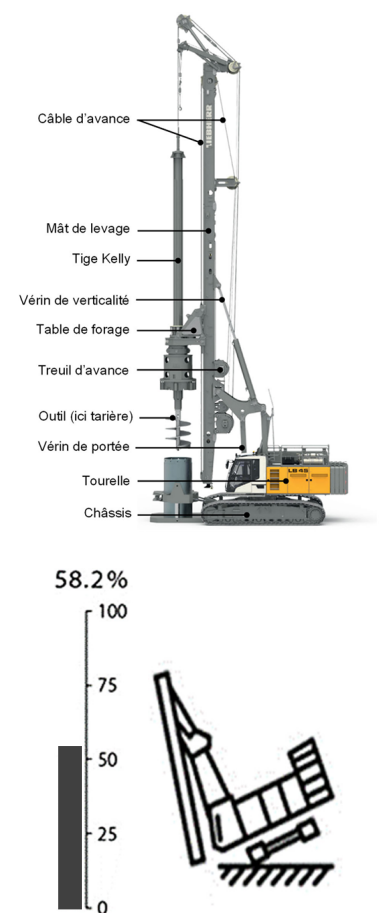


FIGURE 1.4 – Aperçu du contrôle de $b\%$.

« requirement »	
Équilibrage statique initial	
Id = '1.2'	
Text = 'b% < 50 % dans la posture la plus défavorable outil levé'	

FIGURE 1.5 – Exigence 1.2.

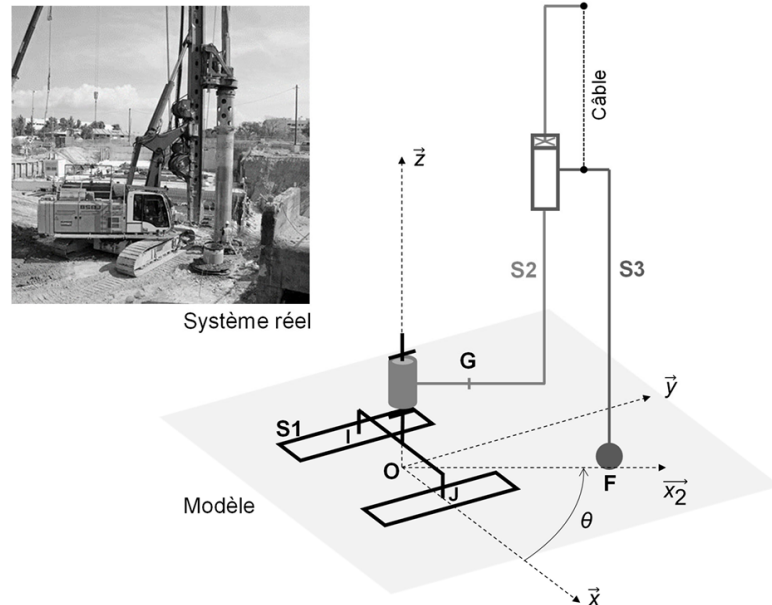


FIGURE 1.6 – Paramétrage mécanique

Question 2 Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position (r, θ) du centre de gravité G pour laquelle le basculement à droite est alors évité.

Question 3 Interpréter physiquement ce résultat et montrer que $b_{\%}$ peut être, dans ce cas, approximé par : $b_{\%} = 100 \frac{|r \cos \theta|}{a}$.

On désire dimensionner le nombre de contrepoids de 8 tonnes à placer à l'arrière de la tourelle pour que, en l'absence de forage et en extension maximale, l'exigence 1.2 d'équilibrage statique initial soit respectée même dans le pire des cas où la tourelle est pleinement orientée à droite ($\theta = 0^\circ$). Dans cette posture, le schéma de la figure 1.7 illustre où se situent, dans le même plan, les centres de gravité des différents éléments de la machine :

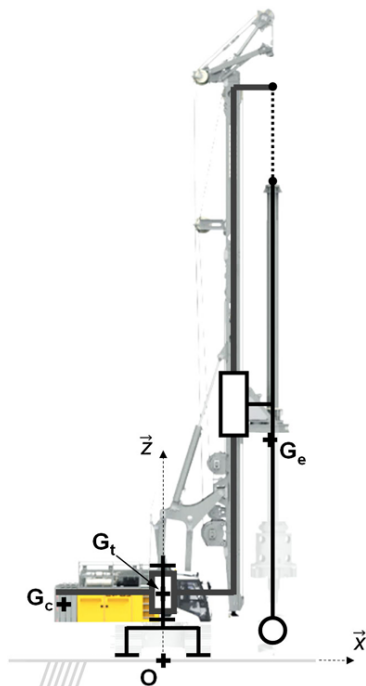


FIGURE 1.7 – Position des centres de gravité des différents solides.

- G_t est le centre de gravité de la tourelle et du châssis. La masse de cet ensemble S_t est notée $m_t = 44,7$ tonnes ;
- G_e est le centre de gravité de tous les équipements mobiles (tige Kelly, potences, vérins, mât, table de forage, outillage, terre à évacuer), positionnés dans la configuration la plus défavorable. La masse de cet ensemble S_e est notée $m_e = 48,8$ tonnes ;
- G_c est le centre de gravité des contrepoids. Il y a n_{cp} contrepoids de masse totale $m_c = n_{cp} \cdot m_1$, où $m_1 = 8$ tonnes est la masse d'un seul contrepoids ;
- l'accélération de la pesanteur est notée : $\vec{g} = -g\vec{z} = -9,8\vec{z}$ (en m/s^2).

On note (en mètres) : $\overrightarrow{OG_t} = 2,2\vec{z}$, $\overrightarrow{OG_e} = 4,4\vec{x} + 13\vec{z}$; $\overrightarrow{OG_c} = -4,3\vec{x} + 2,3\vec{z}$. On fait l'hypothèse que $\overrightarrow{OG_c}$ reste identique, indépendamment du nombre de contrepoids.

Question 4 Exprimer la coordonnée sur \vec{x} , notée r , du centre de gravité G total de la machine en fonction des paramètres connus et de n_{cp} . En déduire le nombre n_{cp} minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

TD 2

Machine de forage – Sujet

Dans le domaine du génie civil, les foreuses permettent de réaliser des percages profonds afin de couler des pieux en béton armé. On s'intéresse aux conditions de basculement statique de la foreuse.

Le basculement de la machine peut être dû à un déport trop important du centre de gravité de la machine, mais peut aussi être dû à un affaissement du sol. La foreuse doit donc contrôler à tout instant, par estimation, la pression qu'elle exerce sur le sol (et donc que le sol exerce sur elle).

Le tableau 1.1 récapitule les niveaux de pression que les sols peuvent supporter avant de risquer de s'affaisser.

D'après les normes européennes, la répartition de pression du sol sur chaque chenille doit être modélisée comme trapézoïdale sur sa longueur et constante sur sa largeur. Un exemple de représentations 3D, 2D et « aplatie » de telles répartitions est donné sur la figure 1.8. Sur la vue « aplatie », la machine est vue de dessus et la visualisation de l'allure des pressions sous les chenilles est ramenée dans le plan.

Un des rôles de l'ordinateur de bord est d'estimer ces répartitions de pression afin de vérifier que la pression maximale supportée par le sol (rentrée par l'utilisateur en fonction du site) n'est pas atteinte à un coefficient de sécurité près. Si c'est le cas, l'ordinateur bloque tous les mouvements de la foreuse qui risqueraient d'empirer et renvoie une alarme.

On se propose dans cette sous-partie d'étudier cette estimation.

On base l'étude sur le paramétrage figure 1.9, avec répartition de pression entre le sol et les chenilles. On note :

- $P(x, y, 0)$, un point courant de contact entre le sol et les chenilles. Attention, x est négatif sur la figure ci-dessous. Les grandeurs dx et dy sont les dimensions du domaine surfacique élémentaire autour du point P entre le sol et les chenilles ;
- $p_g(y) = A \frac{y}{L} + B$, la pression du sol 0 sur la chenille gauche cg au point $P(x, y, 0)$ où A et B , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $p_d(y) = C \frac{y}{L} + D$, la pression du sol 0 sur la chenille droite cd au point $P(x, y, 0)$ où C et D , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;

TABLE 1.1 – Pressions admissibles par le sol selon le type de sol

Type de sol	Rocher	Schiste argileux	Gravier compact	Asphalte	Sable compacté	Sable en vrac	Argile humide
Pression maximale admissible (kPa)	2 000	800	400	200	200	100	< 100

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

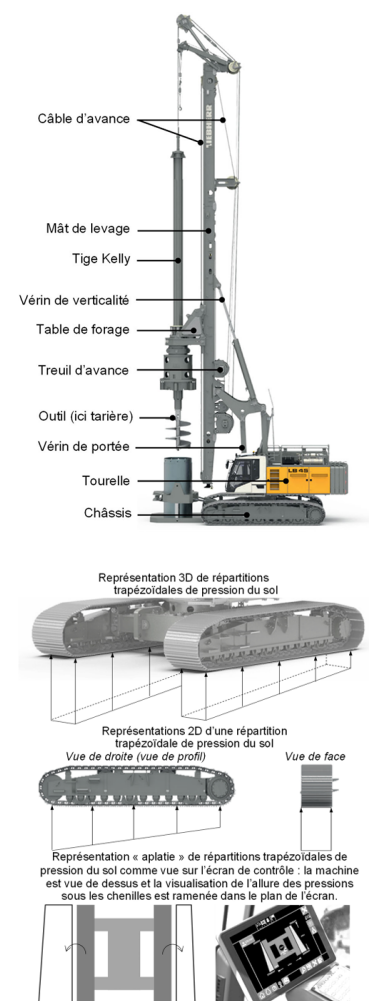


FIGURE 1.8 – Modèles de répartitions trapézoïdales de pression du sol sur les chenilles.

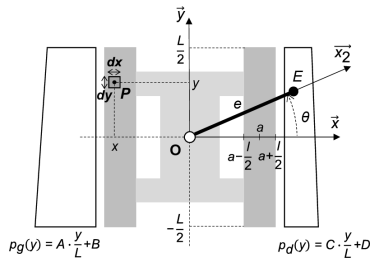


FIGURE 1.9 – Simplification et modèle équivalent

- $L = 5,4 \text{ m}$, la longueur et $l = 1 \text{ m}$ la largeur de chaque chenille ;
- $a = 2,1 \text{ m}$, la distance moyenne sur l'axe \vec{x} d'une chenille au centre O de la machine.

Afin de résoudre le problème plus facilement, on somme les deux glisseurs (poids en G et sol en F) pour en former un seul équivalent (en E), comme visualisé sur la figure 1.9 et noté $\overrightarrow{R}(eq \rightarrow f) = F_{eq} \vec{z}$ où F_{eq} est négatif.

Question 1 Déterminer les expressions de F_{eq} et de e en fonction de M, m, F_w, R, r et de g .

La force élémentaire de réaction du sol 0 sur la chenille gauche cg est notée $d\overrightarrow{F}_{0 \rightarrow cg}(P) = p_g(y) \vec{z} dx dy$. La chenille droite est notée cd .

Question 2 En déduire l'expression de la force élémentaire $d\overrightarrow{F}_{0 \rightarrow cg}(P)$ et du moment élémentaire $d\overrightarrow{M}_{O,0 \rightarrow cg}(P)$ au point O qu'exercent le sol sur la chenille gauche en un point P de contact en fonction de A et de B .

Question 3 Déterminer à l'aide de la question précédente les expressions de l'effort $\overrightarrow{F}_{0 \rightarrow cg}$ et du moment au point O $\overrightarrow{M}_{O,0 \rightarrow cg}$ en fonction de B, D et des données connues du système.

De même, on pourrait, par analogie, déterminer $\overrightarrow{F}_{0 \rightarrow cd}$ $\overrightarrow{M}_{O,0 \rightarrow cd}$ en fonction de C et de D . Au final, on peut en déduire la force $\overrightarrow{F}_{0 \rightarrow \Sigma}$ qu'exerce le sol sur la foreuse et le moment en O qu'exerce le sol sur la foreuse $\overrightarrow{M}_{O,0 \rightarrow \Sigma}$ (via uniquement les chenilles gauche et droite).

Grâce à ces résultats, on trouve qu'à l'équilibre, les répartitions de pressions trapézoïdales doivent respecter le système d'équations ci-contre.

$$\begin{cases} (D + B)Ll = -F_{eq} \\ (C + A) \frac{L^2 l}{12} = -F_{eq} e \sin \theta \\ (d - B)Lla = -F_{eq} e \cos \theta \end{cases}$$

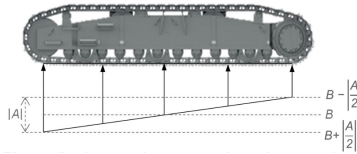


FIGURE 1.10 – Aperçu des expressions des pressions minimale, maximale et moyenne.

Question 4 Quels théorèmes généraux ont permis d'établir les trois équations scalaires du système d'équations (1) ?

La figure 1.10 permet de remarquer que B (respectivement D), toujours positive, est la pression moyenne de la répartition trapézoïdale gauche (respectivement droite) et que A (respectivement C), positive ou négative, en est l'écart entre sa pression avant et arrière. Ainsi, la pression maximale du sol sur la chenille gauche vaut toujours $B + \left| \frac{A}{2} \right|$ (respectivement $D + \left| \frac{C}{2} \right|$ à droite).

Ainsi, pour estimer la pression maximale exercée au sol, l'ordinateur de bord estime d'abord la position de E et la valeur de F_{eq} en fonction des données renvoyées à tout instant par les capteurs présents sur les différents axes de la foreuse. Ensuite, il détermine les valeurs des pressions A, B, C et D grâce aux équations précédentes avec l'hypothèse assez réaliste où $C = A$ et en déduit la pression maximale. Enfin, il renvoie à l'écran la visualisation « aplatie » des distributions de pression et sonne l'alarme en cas d'approche de la pression maximale autorisée rentrée par l'utilisateur.

Question 5 Après avoir précisé l'expression des paramètres A, B, C et D , donner l'expression de la pression maximale de chacune des répartitions estimées (gauche et droite) en fonction des données connues par la machine (L, l, a, e, θ et F_{eq} uniquement).

Question 6 En déduire que l'expression unique de la pression maximale sous la foreuse s'écrit : $p_{\max} = \frac{-F_{eq}}{2Ll} \left(1 + \frac{e |\cos \theta|}{a} + \frac{6e |\sin \theta|}{L} \right)$.