

## 11 Approche énergétique

### 11.1 Introduction

#### 11.1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- ▶ dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible ;
- ▶ déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système ;
- ▶ estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

B2-10

Emilien Durif, *Approche énergétique*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

### 11.2 Puissance

#### 11.2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

##### Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel** ( $E$ ) en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  subissant une densité d'effort  $\vec{f}(M)$  (où  $M$  est un point courant de ( $E$ )) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overrightarrow{V(M, E/R)} dV.$$

##### Remarque

On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement dans un **référentiel galiléen**  $\mathcal{R}_g$  :  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ .

- ▶ Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en **Watt**.
- ▶ Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en **Nms<sup>-1</sup>**.
- ▶ Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

**Propriété – Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble E**

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$ .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les  $S_i$  venant de l'extérieur de  $E$  :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

**11.2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide****Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ )**

La puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

**Remarque**

- ▶ Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}$   
 $= \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \right\}_P \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)}} \right\}_P = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- ▶ Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors **en tout point A** la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$ .
- ▶ Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

**11.2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides****Définition – Puissance d'actions mutuelles entre deux solides**

Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), dans leur mouvement par rapport au repère  $R$ , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_g).$$

**La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) est **indépendante du repère R**. Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

**Remarque**

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble  $E$ , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble  $E$  :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

**11.2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons****Définition – Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons**

Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

**Remarque**

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

**11.3 Travail****11.3.1 Définition****Définition – Travail**

Le travail entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  d'une action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $R$  est donné par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

**Remarque**

On peut également définir le travail élémentaire par :

$$dW(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

- Le travail est une grandeur scalaire.
- L'unité de travail est le **Joule**.

- Le travail est homogène au **produit entre une force et une distance**.

### 11.3.2 Travail conservatif

#### Définition – Travail conservatif

On dit que le **travail est conservatif** (noté  $W_{c,t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R)$ ) s'il est indépendant du chemin suivi pour passer de l'état initial (instant  $t_1$ ) à l'état final (instant  $t_2$ ). Dans ce cas là il existe une grandeur appelée énergie potentielle de l'action mécanique extérieure à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  qui vérifie :  $dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = -dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R)$  avec  $dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt$ .

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\frac{dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R)}{dt}.$$

#### Remarque

- On dit que la puissance à travail conservatif dérive d'une énergie potentielle (au signe près).
- L'énergie potentielle est une primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près arbitraire.

### Énergie potentielle de la pesanteur

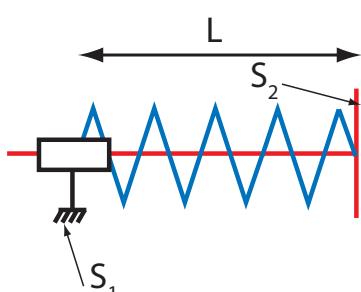
#### Définition – Énergie potentielle de la pesanteur

L'**énergie potentielle** associée à l'action de la pesanteur sur un ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(g \rightarrow E/R) = m g z_G + k.$$

Où  $z_G$  correspond à la position du centre de gravité  $G$  de  $S$  suivant la verticale ascendante  $\vec{z}$  (colinéaire au champs de pesanteur  $\vec{g}$ ) et  $k$  une constante.

### Énergie potentielle associée à un ressort



#### Définition – Énergie potentielle associée à un ressort

L'**énergie potentielle associée à l'action d'un ressort**  $r$  de raideur  $K$  et de longueur à vide  $L_0$  situé entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \frac{K}{2}(L - L_0)^2 + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

## 11.4 Énergie cinétique

### 11.4.1 Définition

#### Définition – Énergie cinétique

On définit l'**énergie cinétique**  $\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)$  d'un système matériel  $S$  en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}_g$  comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant  $P$  de  $S$  pondéré de la masse élémentaire :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left( \vec{V}(P/\mathcal{R}_g) \right)^2 dm.$$

### 11.4.2 Propriétés

#### Propriété – Expression avec les comoments

L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g) \} \otimes \{ \mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g) \}.$$

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

#### Propriété – Cas particuliers

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V(G, S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe**  $(O, \vec{z})$  par rapport  $R$  :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

### 11.4.3 Inertie et masse équivalentes

#### Définition – Inertie et masse équivalentes

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)$  :

- avec **son inertie équivalente**  $J_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$  :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg}$ ) rapportée à un paramètre de

translation  $\dot{x}(t)$  :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}M_{\text{eq}}(E)\dot{x}^2.$$

## 11.5 Théorème de l'énergie cinétique

### 11.5.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

### 11.5.2 Énoncé pour un solide

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g).$$

### 11.5.3 Énoncé pour un ensemble de solides

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Soit  $(E)$  un ensemble de  $n$  solide  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  en mouvement par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_g$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- ▶  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$  la puissance intérieure à  $E$  qui est nulle si l'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites);
- ▶  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g)$ , la puissance galiléenne de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ .

#### Remarque

- ▶ Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel  $E$  que l'on considère.
- ▶ Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- ▶ Pour obtenir une équation de mouvement (*ie* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

## 11.6 Notion de rendement énergétique

### 11.6.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- ▶ **en régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs;
- ▶ **en régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

#### Définition – Rendement d'une chaîne fonctionnelle

Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- ▶  $\eta \in [0, 1]$ ;
- ▶  $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$  définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**;
- ▶  $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$  définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

#### Propriété – Rendement global d'une chaîne d'énergie

Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant  $n$  éléments de rendements  $\eta_i$  est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs  $\eta_i$  étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

### 11.6.2 Détermination d'une puissance dissipée

#### Propriété – Estimation des dissipations

On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement  $\eta$  :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$





## Application 1

### Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs – Sujet

#### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

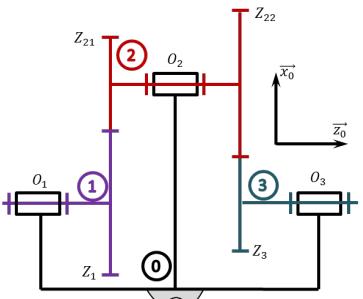
On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sont de la forme :  $I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i}$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante  $C_r$  s'exerce sur l'arbre 3.

**Question 1** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

**Question 2** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.

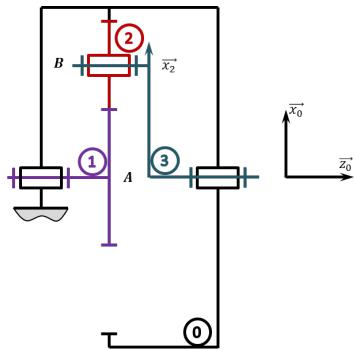
**Question 3** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.



## Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\overline{\overline{I}}_A(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \overline{\overline{I}}_B(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad \overline{\overline{I}}_A(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

**Question 4** Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.

**Question 5** Déterminer l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

**Question 6** Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliqué un couple résistant.



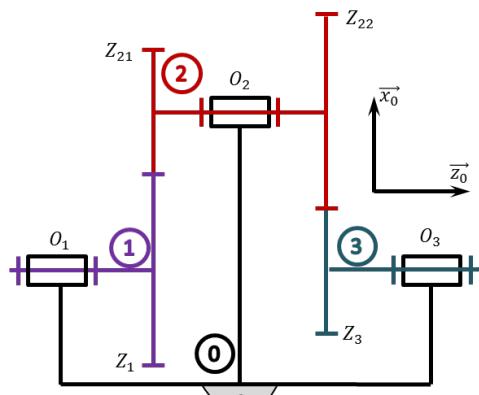
## Application 1

### Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs – Corrigé

#### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sont de la forme :  $I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i}$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante  $C_r$  s'exerce sur l'arbre 3.

**Question 7** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

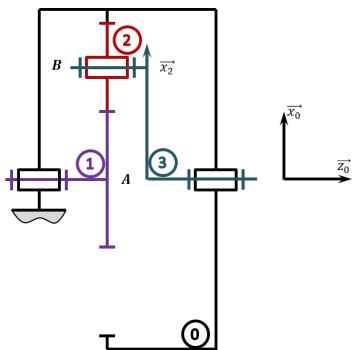
**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.

**Question 9** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

## Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\overline{\overline{I}}_A(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \overline{\overline{I}}_B(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad \overline{\overline{I}}_A(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

**Question 10** Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.

### Correction

#### Méthode –

- Écrire le rapport de réduction recherché.
- Refaire le schéma en fixant le porte satellite et en libérant le bâti. Le porte satellite devient donc le bâti et le train peut être considéré comme un train simple.
- Déterminer le rapport de réduction du train simple (les taux de rotation seront donc exprimés en fonction du porte-satellite) en fonction du nombre de dents des roues dentées.
- Introduire les fréquences de rotation exprimées au point 1.
- Exprimer le rapport de réduction cherché en fonction du nombre de dents des solides.

On recherche  $k = \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$ .

On bloque le porte satellite 3 et on libère la couronne 0.

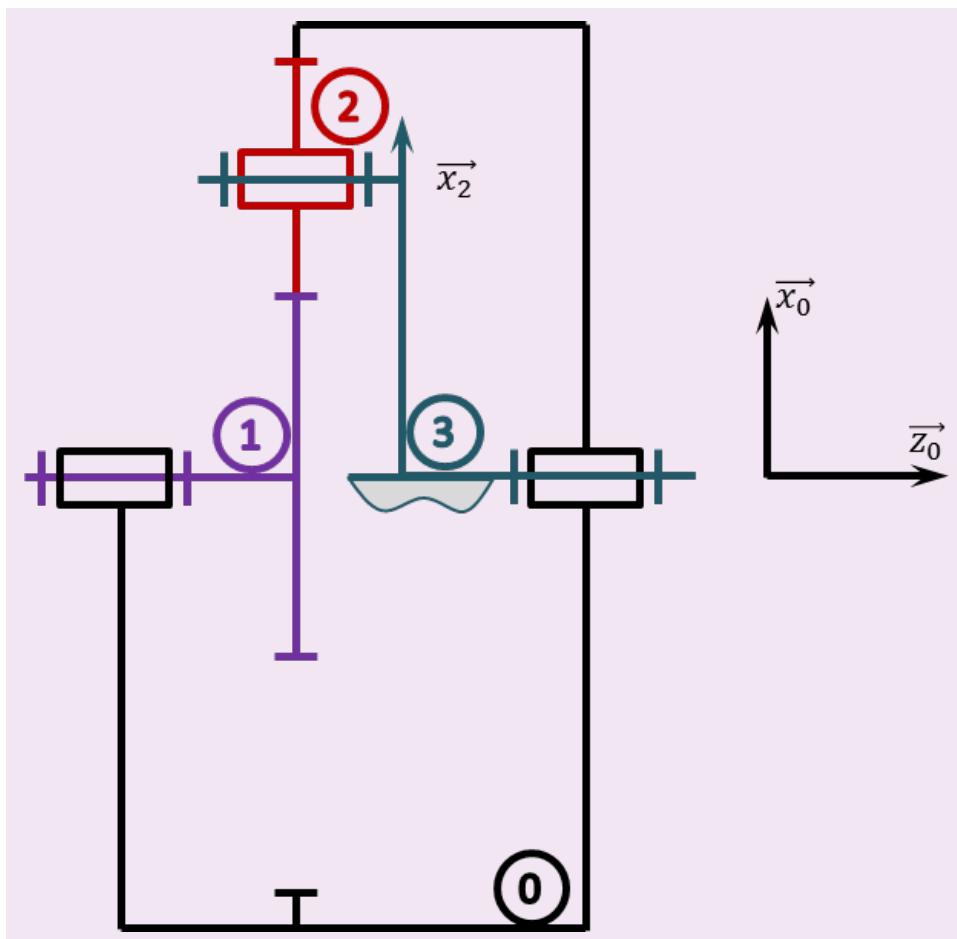
On peut donc exprimer  $\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0)} = (-1)^1 \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_0} = -\frac{Z_1}{Z_0}$ .

En décomposant le taux de rotation, on introduit  $\omega(1/0)$  et  $\omega(0/3)$  :  $\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0)} = \frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)}$

$$\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0) - \omega(3/0)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow Z_0 \omega(3/0) =$$

$$Z_1 (\omega(1/0) - \omega(3/0)) \Leftrightarrow \omega(3/0) (Z_0 + Z_1) = Z_1 \omega(1/0) \Leftrightarrow \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}.$$

Au final,  $k = \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}$ .



**Question 11** Déterminer l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

**Question 12** Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliqué un couple résistant.

#### Correction

##### Méthode –

- On calcule  $T(1/0)$ ,

##### Calcul de l'énergie cinétique du planétaire : $T(1/0)$

Par définition,  $2T(1/0) = \{\mathcal{V}(1/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(1/0)\}$  A étant un point fixe dans 0, on a :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_1 \overrightarrow{V(G, 1/0)} \\ \sigma(A \in 1/0) = \bar{I}(A, 0) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = C_1 \omega(1/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(1/0) = \frac{1}{2} C_1 \omega(1/0)^2$$

### Correction

**Calcul de l'énergie cinétique du porte-satellite :  $T(3/0)$**

Par définition,  $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$ ; on a :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega(3/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 3/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 \overrightarrow{V(G, 3/0)} \\ \sigma(A \in 3/0) = \bar{I}(A, 3) \overrightarrow{\Omega(3/0)} = C_3 \omega(3/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2} C_3 \omega(3/0)^2 = \frac{1}{2} k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

### Correction

**Calcul de l'énergie cinétique d'un seul satellite :  $T(2/0)$**

Par définition,  $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$  et le centre d'inertie d'un porte satellite est au point  $B$  on a donc :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, 2/0)} \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \overrightarrow{V(G, 2/0)} \\ \sigma(A \in 2/0) = \bar{I}(A, 2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} = C_2 \omega(2/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/3)} + \overrightarrow{V(B, 3/0)} = \vec{0} + \overrightarrow{V(A, 3/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = -R_3 \vec{x}_3 \wedge \omega(3/0) \vec{z}_0 = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est porté par le porte satellite. Par ailleurs, les points  $A, B$  ainsi que les points de contact dans les engrenages sont toujours suivant la direction du porte satellite. Enfin,  $R_3 = R_1 + R_2$ . D'où :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, 2/0)} = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3 \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \overrightarrow{V(G, 2/0)} = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3 \\ \sigma(A \in 2/0) = C_2 \omega(2/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2} C_2 \omega(2/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 R_3^2 \omega(3/0)^2 = \frac{1}{2} C_2 \frac{r_1^2}{4r_2^2} \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 R_3^2 k^2 \omega(1/0)^2 = \frac{1}{2} C_2 \mu^2 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

### Correction

**Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble E :  $T(E/0)$**

Sans oublier qu'il y a 3 satellites (...), on a donc :

$$T(E/0) = T(1/0) + T(2/0) + T(3/0)$$

$$T(E/0) = \frac{3}{2} C_2 \frac{r_1^2}{4r_2^2} \omega(1/0)^2 + \frac{3}{2} M_2 R_3^2 k^2 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} C_1 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

D'où

$$T(E/0) = \frac{1}{2} \left( 3C_2 \mu^2 + 3M_2 R_3^2 k^2 + C_1 + k^2 C_3 \right) \omega(1/0)^2$$

On note donc  $J_{eq} = 3C_2\mu^2 + 3M_2R_3^2k^2 + C_1 + k^2C_3$  l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

### Correction

#### Calcul des puissances externes

#### Calcul des puissances dues aux actions de contact

Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 1 et 0 :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1}$  :

On a :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1} = \{\mathcal{V}(1/0)\} \otimes \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}$

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(1 \rightarrow 0)} \\ \overrightarrow{M(A, 1 \rightarrow 0)} = L_{01} \vec{x}_0 + L_{01} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_A$$

On a donc :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1} = 0$ .

- Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 2 et 0 :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 2} = 0$
- Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 3 et 0 :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 3} = 0$
- Puissance fournie à l'arbre 1 :  $\mathcal{P}_{ext \rightarrow 1} = C_e \omega(1/0)$
- Puissance transmise par l'arbre 3 :  $\mathcal{P}_{3 \rightarrow ext} = C_s \omega(3/0) = k C_s \omega(1/0)$
- Calcul des puissances dues aux actions à distance
- Puissance due à la pesanteur sur la pièce 1
- Puissance due à la pesanteur sur la pièce 3
- Puissance due à la pesanteur sur la pièce 2
- Calcul des puissances internes
- Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 1 et 2 :  $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = 0$  (RSG)
- Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 2 et 3 :  $\mathcal{P}_{3 \rightarrow 2} = 0$

D'après le théorème de l'énergie puissance, on a :

$$\frac{dT(E/0)}{dt} = (C_e + k C_s) \omega(1/0) \Leftrightarrow J_{eq} \dot{\omega}(1/0) = (C_e + k C_s)$$



# Application 2

## Système de dépose de composants électroniques – Sujet

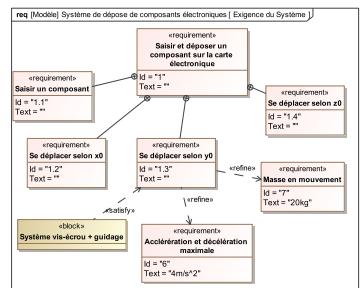
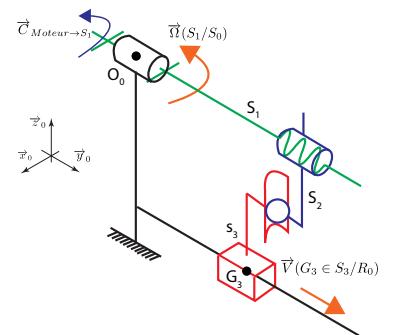
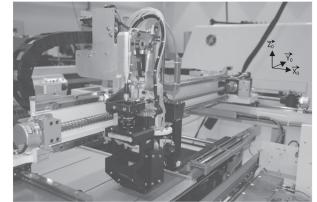
Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

**Hypothèses :**

- le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
- on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
- la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
- seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.

- $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).



### Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
- vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- masse :  $M_3$ ;
- cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

**Données numériques associées au système :**

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- Pas de la vis à billes :  $p = 20 \text{ mm}$ .
- Diamètre de la vis à billes :  $D = 25 \text{ mm}$ .
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3 \text{ Nm}$ .
- $l$ , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) :  $1000 \text{ mm}$ .

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- couple maximal,  $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$ ;
- fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000 \text{ tr/min}$ ;
- moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

# Application 2

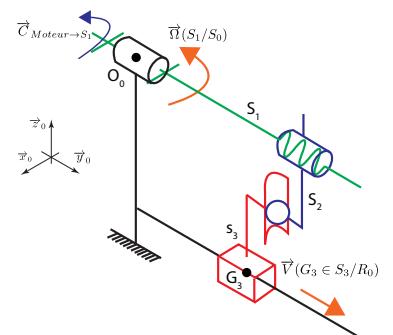
## Système de dépose de composants électroniques – Corrigé

Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

### Hypothèses :

- ▶ le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
  - ▶ les solides seront supposés indéformables;
  - ▶ on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
  - ▶ on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
  - ▶ la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
  - ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
  - ▶ seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.
- 
- ▶  $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
  - ▶  $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
  - ▶  $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
  - ▶  $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose ( $M_3$ ).



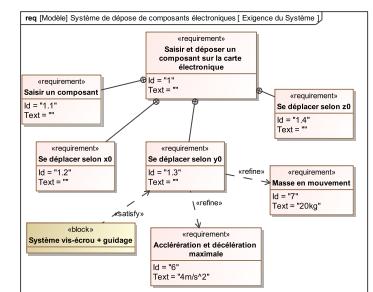
### Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
- ▶ vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- ▶ masse :  $M_3$ ;
- ▶ cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .



### Données numériques associées au système :

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- ▶ Pas de la vis à billes :  $p = 20 \text{ mm}$ .
- ▶ Diamètre de la vis à billes :  $D = 25 \text{ mm}$ .
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3 \text{ Nm}$ .
- ▶  $l$ , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) :  $1000 \text{ mm}$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

### Correction

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

### Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- ▶ couple maximal,  $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$ ;
- ▶ fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000 \text{ tr/min}$ ;
- ▶ moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

### Correction

On a :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

- ▶  $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{01} \cdot \vec{x}_0 \pm C_r \cdot \vec{y}_0 + N_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \pm C_r \cdot \dot{\theta}(t). \text{ Le signe de la composante suivant } \vec{y}_0 \text{ dépendra du sens du mouvement de } S_1/S_0.$
- ▶  $\mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = C_m \cdot \dot{\theta}(t).$
- ▶  $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ X_{03} \cdot \vec{x}_0 \pm Y_{03} \cdot \vec{y}_0 + Z_{03} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{03} \cdot \vec{x}_0 + M_{03} \cdot \vec{y}_0 + N_{03} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{-} = \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t).$
- ▶  $\mathcal{P}(\text{Poids} \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{poids} \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -M_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{G_3} = 0.$

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

### Correction

- ▶ D'après le graphe des liaisons :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) + \mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3)$ .
- ▶ Calcul de  $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0 + Z_{12} \vec{z}_0 \\ L_{12} \vec{x}_0 + M_{12} \vec{y}_0 + N_{12} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} q_{21} \vec{y}_0 \\ v_{12} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_0} = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12}.$  Or,  $\left\{ \begin{array}{c} M_{12} = -\frac{p}{2\pi} Y_{12} \\ v_{12} = \frac{p}{2\pi} q_{21} \end{array} \right. .$  D'où :  $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi} [Y_{12} \cdot q_{21} - q_{21} \cdot Y_{12}] = 0.$
- ▶ Calcul de  $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3) = \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} A \\ X_{23} \vec{x}_0 + Y_{23} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} A \\ p_{32} \vec{x}_0 + q_{32} \vec{y}_0 + r_{32} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{w_{32} \cdot \vec{z}_0}$

- $= 0.$
- On en déduit donc :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0.$

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

#### Correction

- Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :

$$E_c(E/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

- Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(1/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(1/R_0) \} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \vec{\bar{I}}_{O_0}(S_1) \cdot \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 \vec{\bar{I}}_{O_0}(S_1) \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0] = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2.$
- Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(2/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(2/R_0) \} = 0$  car l'inertie de 2 est négligeable.
- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(3/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(3/R_0) \} = \left\{ \begin{array}{c} - \\ M_3 \cdot \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} - \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} = \frac{1}{2} M_3 \cdot \dot{y}^2(t).$
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $E$  :  $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)].$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

#### Correction

Ici la mobilité vaut 1.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

#### Correction

Par une fermeture cinématique on pourrait montrer :  $\dot{y}(t) = -\frac{p}{2\pi} \dot{\theta}(t).$

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

#### Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} \left[ (I_m + I_v) + M_3 \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot \dot{\theta}^2(t) \text{ d'où,}$$

$$J_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) + M_3 \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2.$$

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

#### Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} \left[ (I_m + I_v) \cdot \left( \frac{2\pi}{p} \right)^2 + M_3 \right] \cdot \dot{y}^2(t) \text{ d'où,}$$

$$M_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) \cdot \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3.$$

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

#### Correction

En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient :  $M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t) + 0$ .

On peut postuler un sens de déplacement :  $\dot{y}(t) > 0$ , ainsi  $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p} \dot{y}(t) < 0$ ,  $C_r > 0$ ,  $Y_{03} < 0$  :

$$M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = \left[ -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} + Y_{03} \right] \cdot \dot{y}(t)$$

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

#### Correction

Il faut éliminer le paramètre  $Y_{03}$ . Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliquée à  $S_3$  en projection selon  $\vec{z}_0$  :  $Z_{03} - M_3 \cdot g = 0$ .

Or la loi de Coulomb donne (avec  $Z_{03} > 0$  et  $Y_{03} < 0$ ) :  $Y_{03} = -\mu \cdot Z_{03} = -\mu \cdot M_3 \cdot g$ .

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant  $\dot{y}(t) \neq 0$ ) :

$$M_{\text{eq}} \cdot \ddot{y}(t) = -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} - \mu \cdot M_3 \cdot g.$$

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

#### Correction

$$C_m = -\frac{p}{2\pi} [M_{\text{eq}} \ddot{y}_{\max} + M_3 \cdot g \cdot \mu] - C_r = -\frac{p}{2\pi} M_3 (\ddot{y}_{\max} + g \cdot \mu) - (I_m + I_v) \frac{2\pi}{p} \ddot{y}_{\max} - C_r$$

L'application numérique donne :  $C_m = -3,79 N \cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

#### Correction

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0)}{\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)}$$

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

**Correction**

- ▶ Expression de  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -(\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0))$ ;
- ▶ TEC appliqué à  $S_2/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) = -\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0)$ ;
- ▶ TEC appliqué à  $S_1/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0)$ ;
- ▶ en combinant ces équations on obtient  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -(-\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0) - \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = (1 - \eta)\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)$ .

On donne :

- ▶ Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

**Correction**

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = C_{\max} \cdot \dot{\theta}_{\max} \cdot (\eta - 1) = 21,2 \times 6000 \frac{2\pi}{60} \cdot (1 - \eta) = 2664 \text{ W}$$



# Application 3

## Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Sujet

Mines Ponts PSI – 2003.

### Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câble mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).



Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement  $f = 0,03$ . 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme  $p$  :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2$  avec  $p$  en pascal,  $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$  masse volumique de l'air,  $V_a$  module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en  $\text{m/s}$ .

### Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $E_{c_T}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée

$P_v$  des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Sur la ligne, les cabines se déplacent à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ . En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ . Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble. On envisagera une accélération constante des cabines de  $a = 1,3 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

#### Éléments de correction

1.  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left( 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2 \simeq 6,7 \text{ MJ}.$
2.  $\mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = -8M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W}.$
3.  $\mathcal{P} (\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha = -218\,677 \text{ W}.$
4.  $P_T = 1266 \text{ kW}.$
5.  $\tau = \frac{V - v_0}{a} = 5,3 \text{ s}$  et  $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 19,875 \text{ m}.$

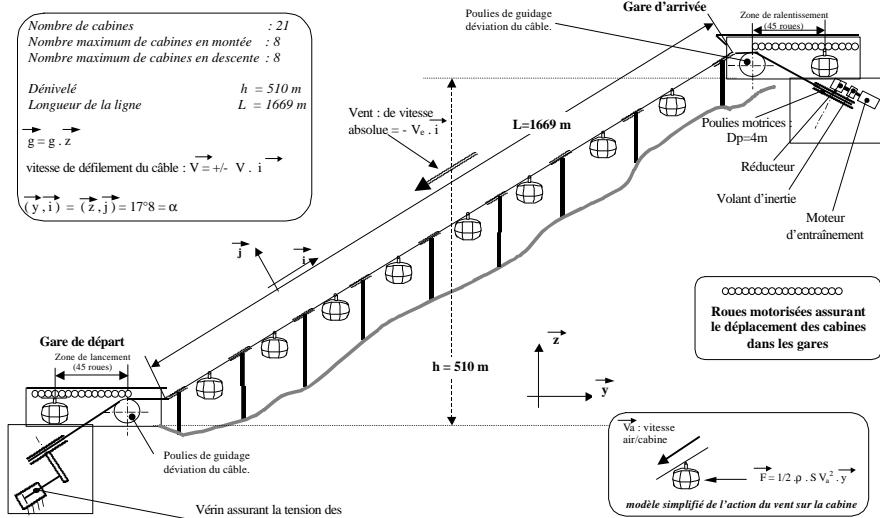


FIG. 1 : Ligne totale

<b>Extrait du cahier des charges</b>		<b>Autres caractéristiques techniques</b>	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	$Mc = 2500 \text{ kg}$
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	$Sl = 10 \text{ m}^2$
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	$Sf = 7,1 \text{ m}^2$
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	26 $M_p = 2080 \text{ kg}$	Masse linéaire du câble	$\mu = 8,47 \text{ kg/m}$
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	$V = 7,2 \text{ m/s}$	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d'entraînement	$N = 1700 \text{ tr/min}$	Diamètre d'une poulie motrice :	$D_p = 4 \text{ m}$
Longueur de la ligne	$L = 1669 \text{ m}$	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	$I_M = 575 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$
Dénivelé	$h = 510 \text{ m}$		



## Application 3

### Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Corrigé

Mines Ponts PSI – 2003.

#### Mise en situation



#### Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $E_{c_T}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

#### Correction

- ▶ Énergie cinétique des 4 brins de câbles :  $\mathcal{E}_c (\text{cables}/0) = \frac{1}{2} 4L\mu V^2$ .
- ▶ Énergie cinétique des 8 cabines montantes :  $\mathcal{E}_c (C_m/0) = \frac{1}{2} 8(M_c + M_p)V^2$ .
- ▶ Énergie cinétique des 8 cabines descendantes :  $\mathcal{E}_c (C_d/0) = \frac{1}{2} 8M_c V^2$ .
- ▶ Énergie cinétique de la motorisation :  $\mathcal{E}_c (M/0) = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2$ .

On a par ailleurs  $V = \omega_M \cdot \frac{D_p}{2}$ .

$$\text{On a donc } \mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left( 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2.$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } M_{\text{eq}} &= 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} = 4 \times 1669 \times 8,47 + 16 \times 2500 + 8 \times 2080 + \\ &575 \times 10^3 \frac{4}{16} = 256\,936 \text{ kg et } \mathcal{E}_c (\Sigma/0) = 6,7 \text{ MJ.} \end{aligned}$$

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .

### Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m/0) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -(M_c + M_p) g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ &= -8(M_c + M_p) g V \vec{z} \cdot \vec{i} = -8(M_c + M_p) g V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d/0) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_d)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_d/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -M_c g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ &= 8M_c g V \vec{z} \cdot \vec{i} \\ &= 8M_c g V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.

Ainsi,  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = 8M_c g V \sin \alpha - 8(M_c + M_p) g V \sin \alpha = -8M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W}$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_v$  des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

### Correction

Le vent va dans le sens de la descente. En montée,  $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_m/0)} = -V_e \vec{i} - V \vec{i}$ .

En descente,  $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_d/0)} = -V_e \vec{i} + V \vec{i}$ .

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (-V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = -8S_f V \frac{1}{2} \rho (V + V_e)^2 \cos \alpha$ .

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8S_f V \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \cos \alpha$ .

Au final,  $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = 8S_f V \frac{1}{2} \rho ((V - V_e)^2 - (V + V_e)^2) \cos \alpha = 8S_f V \frac{1}{2} \rho (-4VV_e) \cos \alpha = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha$ . On a donc  $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -218\,677 \text{ W}$

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

**Correction**

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

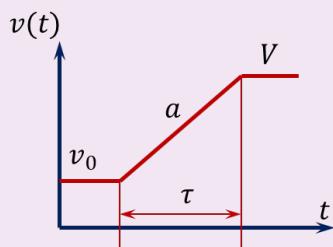
$$\frac{d\mathcal{E}_c(\Sigma/0)}{dt} = \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{frottement} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow \Sigma/0).$$

On a donc, en régime permanent :  $0 = -229672 - 359289 - 400000 + P_T$ .  $P_T = 218677 + 359289 + 400000 = 977\,966 \text{ W} \approx 1000 \text{ kW}$ .

En tenant compte de l'accélération, on a  $P_T = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} V \dot{V} = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} 7,2 \cdot 0,15 \approx 1266 \text{ kW}$ .

Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

**Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

**Correction**

On a  $v(t) = at + k$ . Par ailleurs,  $v(t_2) = V = at_2 + k$  et  $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$ . On a donc  $V - v_0 = a\tau$  soit  $\tau = \frac{V - v_0}{a} = \frac{6,9}{1,3} = 5,3 \text{ s}$ . La distance parcourue pendant la durée  $\tau$  correspond à l'intégrale de la vitesse soit à l'aire sous la courbe. On a donc  $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 5,3 \times 0,5 \times 7,5 = 19,875 \text{ m}$ .



## Application 4

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique ( $MC^2E$ ) – Sujet

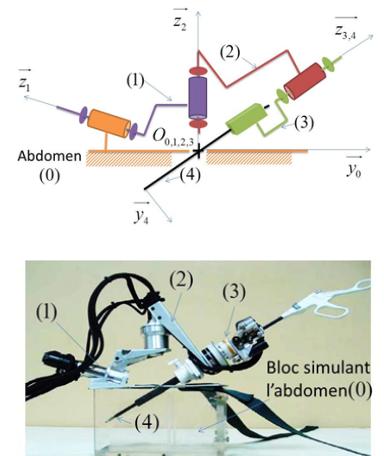
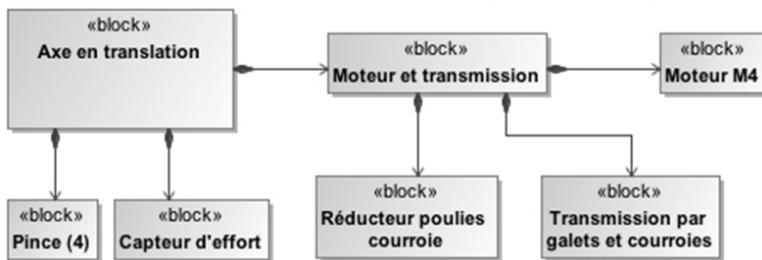
Concours Commun Mines Ponts 2016.

### Mise en situation

Le robot  $MC^2E$  est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moteur réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).

### Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

### Équation de mouvement

### Hypothèses

- ▶ La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- ▶ Les axes de rotation du MC<sup>2</sup>E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- ▶ L'instrument chirurgical est vertical.
- ▶ Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- ▶ Tous les galets  $G_i$  ont même rayon noté  $\mathcal{R}_g$  et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points  $I_1$  à  $I_6$ .
- ▶ La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primitif pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

### Modélisation simplifiée du problème

- ▶ La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée  $\omega_m(t)\vec{x}_0$  où  $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$  (vitesse de rotation avant réduction de rapport  $r$ ).
- ▶ La poulie motrice a un rayon  $R_i$  et tourne à la vitesse  $\omega_i(t)$  (vitesse de rotation après réduction de rapport  $r$ ).
- ▶ La poulie réceptrice a un rayon  $R_e$  et tourne à la vitesse  $\omega_e(t)$ .
- ▶ Les deux pignons en contact ont même rayon primitif, supposé égal à  $R_e$ .
- ▶ Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ .
- ▶ L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté  $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{ressort} \rightarrow 4) = -kz(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_4}$  où  $O_4$  est le point de contact entre la pince (4) et le ressort,  $k$  la raideur du ressort et  $z(t)$  la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.
- ▶ On note  $\vec{V}(O_4, 4/0) = v(t)\vec{z}_0 = \frac{dz(t)}{dt}\vec{z}_0$ .
- ▶ Les masses des courroies sont négligées.

### Données

- ▶  $I_m$ , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_r$ , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- ▶  $I_i$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_i$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_e$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_p$ , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_g$ , moment d'inertie de chaque galet  $G_i$ , de rayon  $R_g$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $m_4$ , masse de la pince (4).
- ▶  $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$ , rapport de réduction constant du motoréducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- ▶  $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- ▶  $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

### Travail demandé

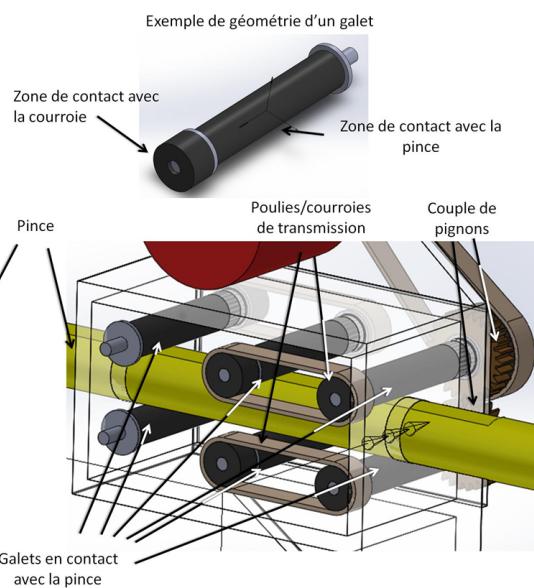
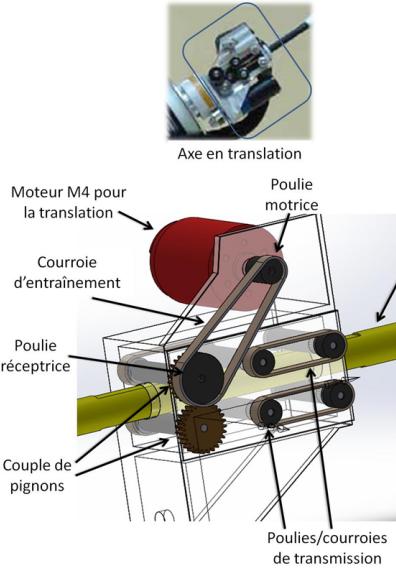
**Question 1** Déterminer la relation entre  $v(t)$  et  $\omega_m(t)$ . Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre  $z(t)$  et  $\theta_m(t)$ .

**Question 2** Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente  $J$  ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de  $m_4$  et des données géométriques.

**Question 4** Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

**Question 5** Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0), déterminer l'expression du terme  $C_e(t)$  en fonction des données du problème et de  $\theta_m(t)$ .



#### Éléments de correction

- $v(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$  et  
 $z(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \theta_m(t).$
- .
- $J = I_m + (I_r + I_i) r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g) \left( \frac{R_i}{R_e} r \right)^2 + m_4 \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2.$
- $\mathcal{P}(\text{res} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = -kz(t) \frac{R_g r R_i}{R_e} \omega_m(t),$   
 $\mathcal{P}(\text{mot} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = C_m \omega_m(t),$   
 $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = 0$  et  
 $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0.$
- $C_e(t) = k \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t).$



## Application 4

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2016.

### Mise en situation

#### Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

### Équation de mouvement

### Travail demandé

**Question 1** Déterminer la relation entre  $v(t)$  et  $\omega_m(t)$ . Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre  $z(t)$  et  $\theta_m(t)$ .

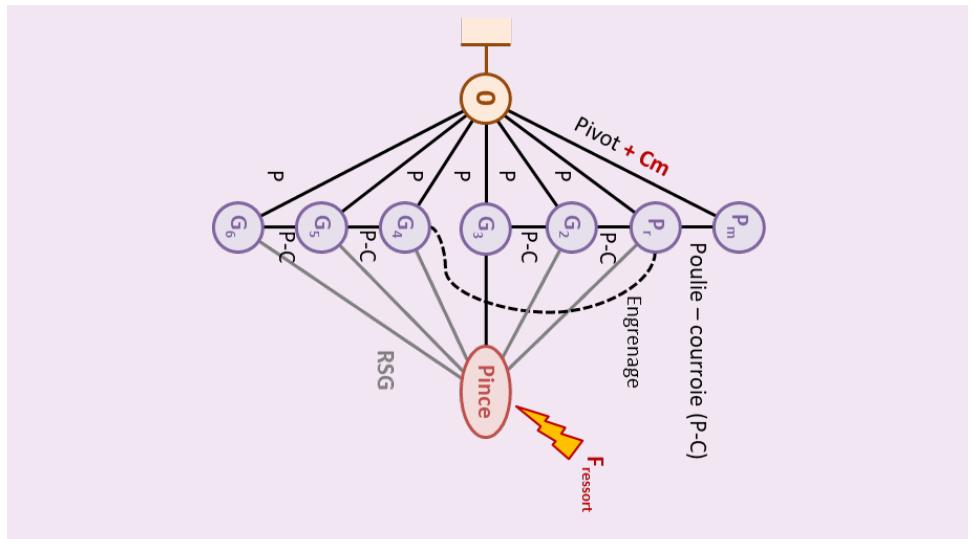
#### Correction

On a  $\omega_i(t) = r\omega_m(t)$ . De plus  $\frac{\omega_e(t)}{\omega_i(t)} = \frac{R_i}{R_e} \iff \omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}\omega_i(t)$  et donc :  $\omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}r\omega_m(t)$ .

Enfin,  $v(t) = R_g\omega_e(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$ . Les conditions initiales étant nulles,  $z(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \theta_m(t)$ .

**Question 2** Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

#### Correction



**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**. Définir l'inertie équivalente  $J$  ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de  $m_4$  et des données géométriques.

#### Correction

Tous les solides sont en mouvement « simples » par rapport au référentiel galiléen. On a :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}I_m\omega_m(t)^2 + \frac{1}{2}(I_r + I_i)\omega_i(t)^2 + \frac{1}{2}(I_e + 2I_p + 6I_g)\omega_e(t)^2 + \frac{1}{2}m_4v(t)^2$$

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}I_m\omega_m(t)^2 + \frac{1}{2}(I_r + I_i)(r\omega_m(t))^2 + \frac{1}{2}(I_e + 2I_p + 6I_g)\left(\frac{R_i}{R_e}r\omega_m(t)\right)^2 + \frac{1}{2}m_4\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\omega_m(t)\right)^2$$

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}\left(I_m + (I_r + I_i)r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g)\left(\frac{R_i}{R_e}r\right)^2 + m_4\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\right)^2\right)\omega_m(t)^2$$

$$\text{On a donc } J = I_m + (I_r + I_i)r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g)\left(\frac{R_i}{R_e}r\right)^2 + m_4\left(R_g r \frac{R_i}{R_e}\right)^2.$$

**Question 4** Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

#### Correction

On isole l'ensemble.

##### Bilan des puissances extérieures

- Action du ressort :  $\mathcal{P}$  (ressort  $\rightarrow 4/\mathcal{R}_g$ ) =  $-kz(t)v(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$ .
- Action du moteur :  $\mathcal{P}$  (moteur  $\rightarrow 4/\mathcal{R}_g$ ) =  $C_m \omega_m(t)$ .
- Action de la pesanteur :  $\mathcal{P}$  (pesanteur  $\rightarrow E/\mathcal{R}_g$ ) = 0 (La pesanteur est compensée par un système de compensation).

**Bilan des puissances intérieures** Toutes les liaisons étant supposées parfaites,  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$ .

**Question 5** Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**, déterminer l'expression du terme  $C_e(t)$  en fonction des

données du problème et de  $\theta_m(t)$ .

### Correction

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on a :  $J\dot{\omega}_m(t)\omega_m(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t) + C_m \omega_m(t)$

$$C_m \omega_m(t) \Rightarrow J\dot{\omega}_m(t) = -k \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t) + C_m.$$

$$\text{En utilisant l'équation différentielle du mouvement on a alors : } C_e(t) = k \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t).$$



# Application 5

## Chariot élévateur à bateaux – Sujet

X – ENS – PSI – 2012.

### Présentation

Le chariot élévateur, objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

C1-05

C2-08

- ▶ du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- ▶ du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.



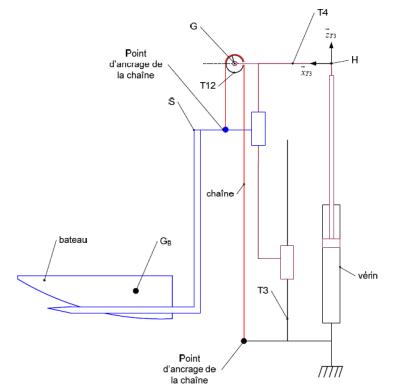
### Phase de levage du bateau

#### Objectif

Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

- ▶ req 102 : vitesse de levage en charge :  $0,33 \text{ m s}^{-1}$  ;
- ▶ req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la figure ci-contre. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble  $S = \{T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}\}$  est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble  $S$ . Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon  $T_{12}$  qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est  $F_V$  (considéré comme constant). On note  $I_{T_{12}}$  le moment d'inertie de la poulie  $T_{12}$  par rapport à son axe de rotation,  $R_{T_{12}}$  son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

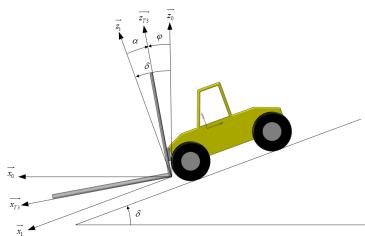


Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère  $\mathcal{R}_3$  peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes  $\overrightarrow{z_{T3}}$  et  $\overrightarrow{z'_0}$  sont confondus pour les conditions de l'étude.

Solide	Masse
Ensemble (S)	$m_S$
Bateau (B)	$m_B$
Mât inférieur (T3)	$m_{T3}$
Mât supérieur (T4)	$m_{T4}$
Chaîne (C)	négligée

**Question 1** Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

### Phase de déplacement



La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargeement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1,T2 et T1', T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

- ▶ l'angle de basculement  $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$ ;
- ▶ l'angle de la pente  $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ ;
- ▶ l'angle à asservir  $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$ .

**Question 2** Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle  $\varphi(t)$  qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

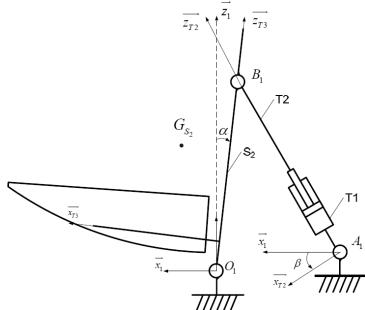
Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.

Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- ▶ l'ensemble  $S_2 = \{T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, B\}$  en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot 1 de centre de gravité  $G_{S_2}$ . Le moment d'inertie de l'ensemble  $S_2$  par rapport à l'axe sera noté  $J_{S_2}$  et sa masse  $m_{S_2}$ . La liaison pivot entre l'ensemble  $S_2$  et le chariot (bâti) génère un couple résistant  $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{O_1 O_{G_{S_2}}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T3}$ ;
- ▶ un vérin équivalent  $V = \{T_1, T_2\}$  dont le corps est en liaison pivot d'axe  $(A_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot (bâti) et la tige en liaison pivot d'axe  $(B_1, \vec{y}_0)$  par rapport à l'ensemble  $S_2$ . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté  $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T2}$  où  $p(t)$  est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose  $\overrightarrow{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$ . Le paramétrage est tel que si  $\alpha = 0$  alors  $\lambda = 0$ .

**Question 3** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .



# Application 5

## Chariot élévateur à bateaux – Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

### Présentation

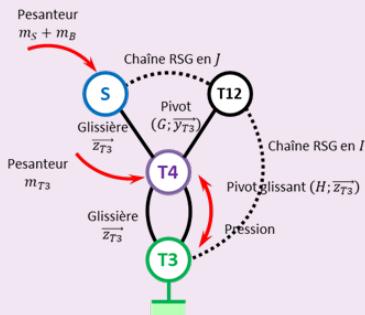
**Question 1** Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

C1-05

C2-08

### Correction

On isole l'ensemble : {bateau ; S ; chaîne ; T12 ; T4}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé galiléen :  $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$ .



### Relation cinématique :

- ▶  $\overrightarrow{V(G, S/T_3)} = V_B \vec{z}$  et  $\overrightarrow{V(G, T_4/T_3)} = V_V \vec{z}$
- ▶  $\overrightarrow{V(G, S/T_3)} = \overrightarrow{V(G, S/T_{12})} + \overrightarrow{V(G, T_{12}/T_4)} + \overrightarrow{V(G, T_4/T_3)}$ 
  - $\overrightarrow{V(G, S/T_{12})} = \overrightarrow{V(J, S/T_{12})} + \vec{GJ} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/T_{12})} = R\vec{x} \wedge \omega(T_4/T_{12})\vec{y} = R\omega(T_4/T_{12})\vec{z}$
  - $V_B = R\omega(T_4/T_{12}) + V_V$
- ▶  $\overrightarrow{V(G, S/T_3)} = \overrightarrow{V(G, S/T_{12})} + \overrightarrow{V(G, T_{12}/T_3)}$ 
  - $\overrightarrow{V(G, T_{12}/T_3)} = \overrightarrow{V(I, T_{12}/T_3)} + \vec{GI} \wedge \overrightarrow{\Omega(T_{12}/T_3)} = -R\vec{x} \wedge \omega(T_{12}/T_4)\vec{y} = R\omega(T_4/T_{12})\vec{z}$
  - $V_B = R\omega(T_4/T_{12}) + R\omega(T_4/T_{12}) = 2R\omega(T_4/T_{12})$
- ▶  $V_B = V_B/2 + V_V \iff V_B = 2V_V \text{ et } \omega(T_4/T_{12}) = -\frac{V_B}{2R}$ .

(Remarque : erreur de signe éventuelle sur  $\omega(T_{12}/T_4)$ , non pénalisante pour la suite...)

### Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{array}{c} -(m_S + m_B)g\vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_B} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_B\vec{z} \end{array} \right\}_{G_B} = -(m_S + m_B)gV_B;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{array}{c} -m_T 4g\vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_{T_4}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_V\vec{z} \end{array} \right\}_{G_{T_4}} = -m_T 4gV_V = -\frac{1}{2}m_T 4gV_B;$
- $\mathcal{P}(\text{pre} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{array}{c} F_V\vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_H \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_V\vec{z} \end{array} \right\}_{G_B} ) = F_V V_V = \frac{1}{2}F_V V_B.$
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = 0$  : glissière et pivot glissant sans frottement
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow 12/\mathcal{R}_g) = 0$  : roulement sans glissement.
- $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = V_B(\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g)$

Bilan des puissances intérieures :

$$\mathcal{P}\left(E \xrightarrow{=} \right).$$

Calcul de l'énergie cinétique :

- $\mathcal{E}_c(S/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B)V_B^2$  (mouvement de translation du bateau par rapport au référentiel galiléen);
- $\mathcal{E}_c(T_4/3) = \frac{1}{2}m_T 4V_V^2 = \frac{1}{8}m_T 4V_B^2$  (mouvement de translation du vérin par rapport au référentiel galiléen);
- $\mathcal{E}_c(T_{12}/3) = \frac{1}{2}\frac{J}{4R^2}$  (mouvement de rotation et translation du solide 12 – masse négligeable) (Remarque : le terme  $1/4$  n'apparaît pas sur le corrigé initial).
- $\mathcal{E}_c(E/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B + 1/4m_T 4 + J/(4R^2))V_B^2$
- $\frac{d}{dt}[E_c(t)] = \left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma$  et  $\gamma = \frac{d}{dt}[V_B(t)]$ .

Au final :  $\left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma = V_B\left(\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g\right)$  et  $\gamma = \frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g$   
 $\frac{m_S + m_B + 1/4m_T 4 + \frac{J}{4R^2}}{\gamma}$  Cette valeur permet de valider l'exigence 1.1.3 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère 1.1.2) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire ( $t = \frac{V_{\text{levage}}}{\gamma}$ ).

## Phase de déplacement

**Question 2** Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle  $\varphi(t)$  qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches? Justifier.

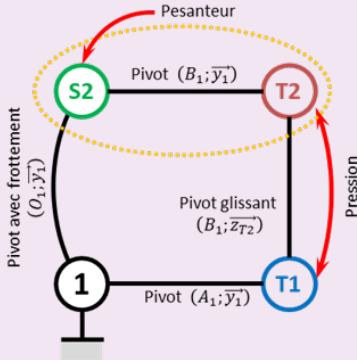
### Correction

Quand le chariot avance à vitesse constante ( $\varphi_{dec} = 0$ ), il faut que l'angle  $\varphi(t)$  soit nul. Il faut donc envoyer une consigne  $\varphi_c = -\delta$ .

**Question 3** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq}\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2}gx_{G_{S_2}}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .

### Correction

On isole l'ensemble  $E = \{S_2; T_2\}$ . On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen :  $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$



### Calcul des puissances externes :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{l} -m_{S_2} g \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_{S_2}} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/1)} = \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3} \end{array} \right\}_{G_{S_2}}$   
 $= (-m_{S_2} g \vec{z}_1) \cdot (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}) = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha)$   
 $\overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/1)} - (x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T_3}) \wedge \dot{\alpha} \vec{y}_1 = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}.$
- $\mathcal{P}(1 \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{l} - \\ L_{12} \vec{x}_1 - \mu \dot{\alpha} \vec{y}_1 + N_{12} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_1} = -\mu \dot{\alpha}^2$
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{pivot glissant}} = 0$  (pivot glissant sans frottement)
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{vérin}} = \left\{ \begin{array}{l} p(t) S \vec{z}_{T_2} \\ - \end{array} \right\}_{B_1} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right\}_{B_1} = p(t) S \dot{\lambda} = p(t) S \frac{\dot{\alpha}}{k}$
- $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha) - \mu \dot{\alpha}^2 + p(t) S \dot{\alpha}/k.$

Calcul des puissances internes  $\mathcal{P}(E \leftrightarrow =)$  pas de frottement dans la liaison pivot.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S2 sont à prendre en contact (elles sont négligeables pour T2).

$$\mathcal{E}_c(S_2/1) = \frac{1}{2} J_{S_2} \ddot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{S_2} \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)}^2 = \frac{1}{2} (J(S_2) + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)) \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\alpha}^2$$

avec  $J_{\text{eq}} = J(S_2) + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)$ .

On trouve donc, au final :

$$J_{\text{eq}} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} = \frac{p(t) S}{k} + m_{S_2} g (x_{G_{S_2}} \cos \alpha - z_{G_{S_2}} \sin \alpha).$$

Si on suppose l'angle  $\alpha$  nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.



# TD 1

## Système de dépose de poudre – Sujet

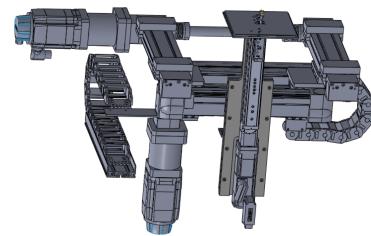
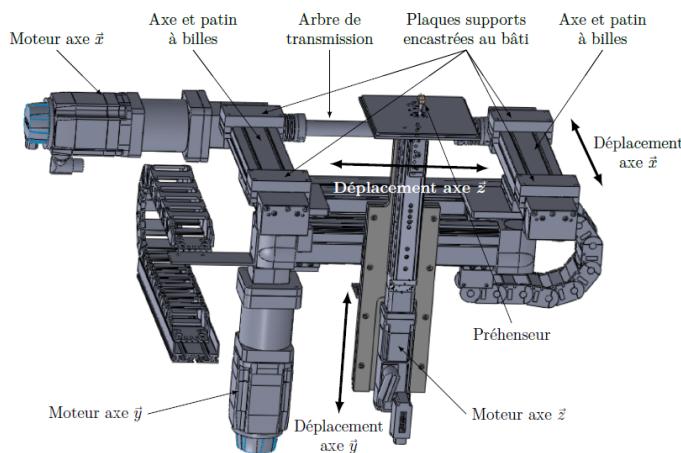
Concours Centrale Supelec – TSI 2016

### Mise en situation

On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.

C1-05

C2-08



### Objectif

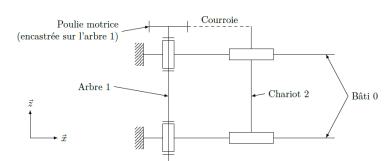
L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système. Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe  $\bar{x}$  soit de  $V_{\max} = 0,45 \text{ m s}^{-1}$  et que l'accélération maximale du chariot soit de  $\gamma_{\max} = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### Travail demandé

La transmission est réalisée de la façon suivante. L'arbre 1 est entraîné par un moto-réducteur dont le rapport de réduction est noté  $r$ .

#### Notations

- ▶  $\Omega$  : vitesse de rotation du moteur;
- ▶  $C_m$  : le couple exercé par le moteur;
- ▶  $r = n_{\text{axe poulie}}/n_{\text{moteur}} = \frac{1}{10}$  : rapport de réduction du réducteur entre le moteur et les poulies;



- $M_2 = 25 \text{ kg}$  : masse de l'ensemble mobile 2;
- $\phi = 28,65 \text{ mm}$  est le diamètre primitif des poulies;
- l'inertie des courroies est négligée;
- $J_m = 1,2 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre moteur;
- $J_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre 1;
- $C_r = 0,15 \text{ Nm}$  : couple de frottements secs dans les liaisons ramené à l'arbre moteur;
- $\mu = 0,001 \text{ N m s rad}^{-1}$  : coefficient de frottements visqueux dans les liaisons ramené à l'arbre moteur.

**Question 1** Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur  $\Omega_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Déterminer l'accélération maximale du moteur  $\dot{\Omega}_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe  $\vec{x}$  par rapport au bâti notée  $\mathcal{E}_c$  (ensemble/0). En déduire l'inertie équivalente  $J$  de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

**Question 4** Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté  $C_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 5** Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de  $3000 \text{ tr min}^{-1}$  et de puissance utile  $0,47 \text{ kW}$ .

**Question 6** Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

# TD 1

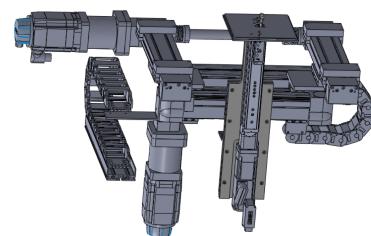
## Système de dépose de poudre – Corrigé

Concours Centrale Supelec – TSI 2016

### Mise en situation

C1-05

C2-08



### Travail demandé

**Question 1** Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur  $\Omega_{\max}$ . Faire l'application numérique.

#### Correction

On a  $V_{\max} = \Omega_{\max} \cdot r \cdot \frac{\phi}{2}$ . En conséquence  $\Omega_{\max} = V_{\max} \frac{2}{r\phi}$ .

$$\text{Application numérique : } \Omega_{\max} = \frac{2 \cdot 0,45 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 314 \text{ rad s}^{-1} \simeq 3000 \text{ tr min}^{-1}.$$

**Question 2** Déterminer l'accélération maximale du moteur  $\dot{\Omega}_{\max}$ . Faire l'application numérique.

#### Correction

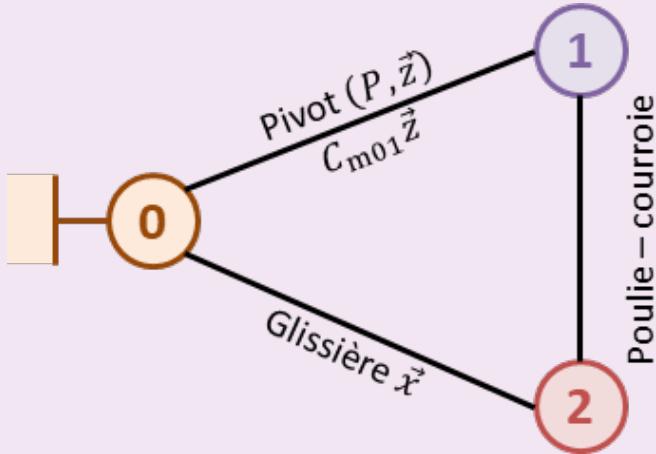
En suivant un raisonnement similaire :  $\dot{\Omega}_{\max} = \gamma_{\max} \frac{2}{r\phi}$ .

$$\text{Application numérique : } \dot{\Omega}_{\max} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 6981 \text{ rad s}^{-2}.$$

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe  $\vec{x}$  par rapport au bâti notée  $\mathcal{E}_c$  (ensemble/0). En déduire l'inertie équivalente  $J$  de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

**Correction**

Le système peut être modélisé ainsi :



$\mathcal{E}_c(\text{ensemble}/0) = \mathcal{E}_c(1/0) + \mathcal{E}_c(2/0)$ . Le solide 1 et l'arbre moteur sont en rotation par rapport au bâti et le solide 2 est en translation par rapport au bâti, on a donc :

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \quad & \mathcal{E}_c(1/0) = \frac{1}{2} (J_m \Omega^2 + J_1 (r\Omega)^2) = \frac{1}{2} (J_m + J_1 r^2) \Omega^2 \\ \blacktriangleright \quad & \mathcal{E}_c(2/0) = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M \Omega^2 \left( \frac{r\phi}{2} \right)^2.\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_c(\text{ensemble}/0) = \frac{1}{2} \left( (J_m + J_1 r^2) + M \left( \frac{r\phi}{2} \right)^2 \right) \Omega^2.$$

$$\text{Application numérique : } J_{eq} = (J_m + J_1 r^2) + M \left( \frac{r\phi}{2} \right)^2 = 5,9 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2.$$

**Question 4** Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté  $C_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Correction**

**Question 5** Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

**Correction**

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de  $3000 \text{ tr min}^{-1}$  et de puissance utile  $0,47 \text{ kW}$ .

**Question 6** Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

**Correction**

# TD 2

## Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

### Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

### Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère  $R_N$  est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que :  $F_{h2} > 0$  et  $F_{h3} = 0$ . Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre ( $F_{h2}$  désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2 ; on a donc  $-F_{h2}$  qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

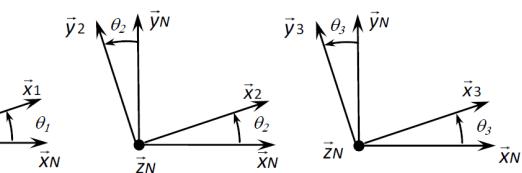


FIGURE 11.3 – Paramétrage

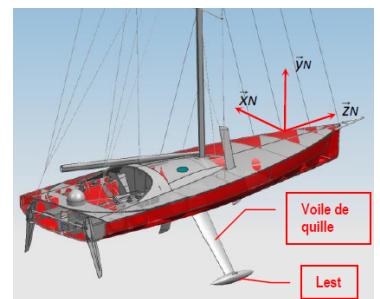


FIGURE 11.1 – Modèle volumique 3D

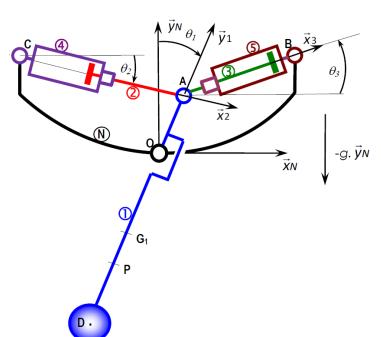


FIGURE 11.2 – Modèle 2D

**Données géométriques, massiques et inertielles**  $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{y_1}$  ;  
 $\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}$  ;  $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\overrightarrow{x_3}$ ,

- Solide 1, masse  $M_1$ , centre d'inertie  $G_1$ ,  $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\overrightarrow{y_1}$ ,  $I_{G_1}(1) =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N}\right)}.$$

- Solide 2, masse  $M_2$ , centre d'inertie  $G_2$ ,  $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\overrightarrow{x_2}$ ,  $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N}\right)}.$$

- Solide 3, masse  $M_3 = M_2$ , centre d'inertie  $G_3$ ,  $\overrightarrow{AG_3} = L_2\overrightarrow{x_3}$ ,

$$I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N}\right)}.$$

- Solide 4, masse  $M_4$ , centre d'inertie  $C$ ,  $I_C(4) =$

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N}\right)}.$$

- Solide 5, masse  $M_5$ , centre d'inertie  $B$ ,  $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N}\right)}.$$

### Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{array} \right\}_C$ .
- Action de pression de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{array} \right\}_B$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action hydraulodynamique de l'eau sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p\overrightarrow{z_1} + F_t\overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{array} \right\}_p$  avec  $\overrightarrow{OP} = -h\overrightarrow{y_1}$ .

## Vecteurs vitesses

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

1.  $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles;
2.  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles;
3.  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles;
4.  $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

## Energie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1.  $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles;
2.  $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.
3.  $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à  $E$  en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiliennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à  $E$ . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $N$ . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position  $\theta_1 = 0$  à la position  $\theta_1 = 45^\circ$  en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position  $\theta_1 = 0$  en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure ??.

**Question 7** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0\text{ s}$ ,  $t = 1\text{ s}$ ,  $t = 3\text{ s}$  et  $t = 4\text{ s}$ . Sur cet intervalle  $[0, 4\text{ s}]$ , évaluer, en  $\text{kW}$ , la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

**Question 8** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

### Éléments de correction

1. .
  2. a)  $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1$ .
  - b)  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2$ .
  - c)  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + L_2 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3$ .
  - d)  $\overrightarrow{V(A, 2/4)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2$ .
3. a)  $\mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2)$ .
  - b)  $\mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} \left( B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 \left( \dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2 \right) \right)$ .

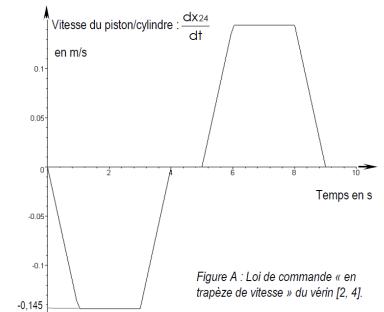
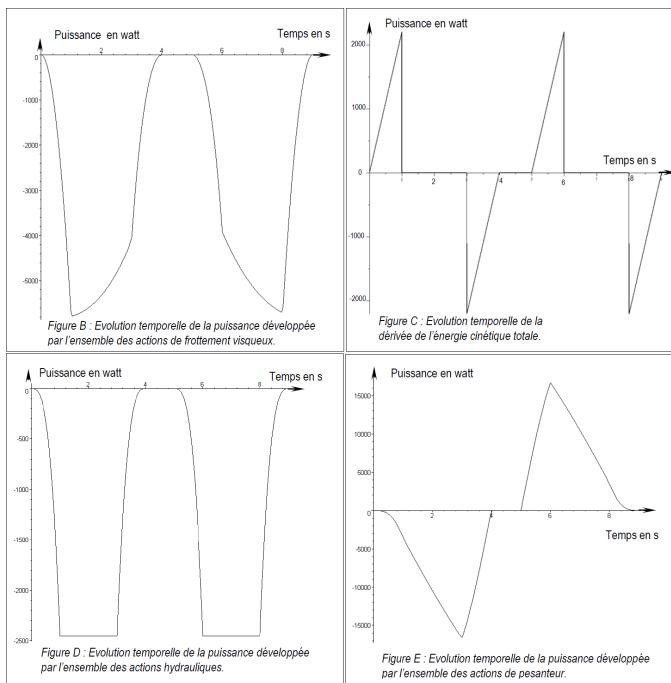


Figure A : Loi de commande « en trapèze de vitesse » du vérin [2, 4].



**FIGURE 11.4 – Evolution temporelle des puissances**

- c)  $\mathcal{E}_c(4/N) = \frac{1}{2}C_4\dot{\theta}_2^2$ .
4.  $\triangleright \mathcal{P}(4 \xleftrightarrow{\text{Ph}} 2) = F_{h2}\dot{x}_{24};$
  - $\triangleright \mathcal{P}(4 \xleftrightarrow{\text{Phf}} 2) = -k\dot{x}_{24}^2(t);$
  - $\triangleright \mathcal{P}(3 \xleftrightarrow{\text{Ph}} 5) = F_h\dot{x}_{35}(t);$
  - $\triangleright \mathcal{P}(3 \xleftrightarrow{\text{Phf}} 5) = -k\dot{x}_{35}^2(t).$
  5. la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
  - $\triangleright \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = -M_1gL_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
  - $\triangleright \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = -M_2g\dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2g\dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2;$
  - $\triangleright \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3g(-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3);$
  - $\triangleright \mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = F_t h \dot{\theta}_1.$
  6.  $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}.$

## TD 2

# Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

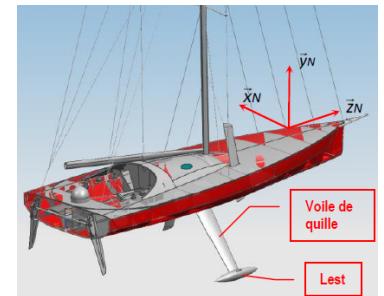
C1-05

C2-08

## Mise en situation

### Objectif

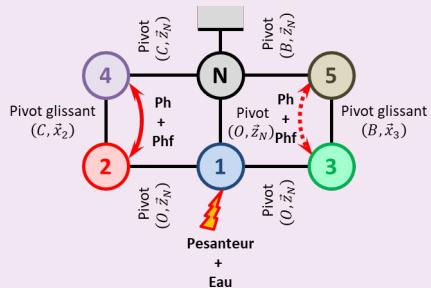
L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.



## Vecteurs vitesse

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

### Correction



**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

1.  $\vec{V}(G_1, 1/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles;
2.  $\vec{V}(G_2, 2/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles;
3.  $\vec{V}(G_3, 3/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles;
4.  $\vec{V}(A, 2/4)$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

### Correction

$$\begin{aligned}
1. \quad & \overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = \overrightarrow{V(O, 1/N)} + \overrightarrow{G_1 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1 \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_N = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1. \\
2. \quad & \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[ \frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(R\vec{y}_1 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2. \\
& \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[ \frac{d(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(x_{24}(t)\vec{x}_2 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = \\
& \quad \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2. \\
3. \quad & \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = \left[ \frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(R\vec{y}_1 + L_2 \vec{x}_3)}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + L_2 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3. \\
& \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = \left[ \frac{d(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[ \frac{d(-x_{35}(t)\vec{x}_3 + L_2 \vec{x}_3)}{dt} \right]_{R_N} = \\
& \quad -\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3. \\
4. \quad & \overrightarrow{V(A, 2/4)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{CA}}{dt} \right]_{R_4} = \left[ \frac{d(x_{24}(t)\vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2.
\end{aligned}$$

## Energie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1.  $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES;
2.  $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES.
3.  $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES.

### Correction

$$\begin{aligned}
1. \quad & \mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(1/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(1/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(1/N)}}{\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}} \right\}_{G_1} \otimes \\
& \left\{ \frac{M_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/N)}}{\sigma(G_1, 1/N)} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1}{\dot{\theta}_1 (-D_1 \vec{y}_N + C_1 \vec{z}_N)} \right\}_{G_1} \\
& = \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_1^2 (-D_1 \vec{y}_N + C_1 \vec{z}_N) \vec{z}_N + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_1^2 C_1 + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \\
& \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2). \\
2. \quad & \mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(2/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(2/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/N)}}{\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}} \right\}_{G_2} \otimes \\
& \left\{ \frac{M_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/N)}}{\sigma(G_2, 2/N)} \right\}_{G_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_2 \vec{z_N} \\ \dot{x}_{24}(t) \vec{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y_2} \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{l} M_2 (\dot{x}_{24}(t) \vec{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y_2}) \\ \dot{\theta}_2 B_2 \vec{z_N} \end{array} \right\}_{G_1} \\
&= \frac{1}{2} \left( B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 \left( \dot{x}_{24}(t) \vec{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y_2} \right)^2 \right) = \\
&\frac{1}{2} \left( B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 \left( \dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2 \right) \right). \\
3. \quad \mathcal{E}_c (4/N) &= \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2.
\end{aligned}$$

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à  $E$  en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

### Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(4 \leftrightarrow 2) = \{\mathcal{T}(4 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 4 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/4)} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{array} \right\}_A$   
 $= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2} \vec{x_2} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t) \vec{x_2} \end{array} \right\}_A = F_{h2} \dot{x}_{24};$
- $\mathcal{P}(4 \leftrightarrow 2) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -k \dot{x}_{24}(t) \vec{x_2} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t) \vec{x_2} \end{array} \right\}_A = -k \dot{x}_{24}^2(t);$
- $\mathcal{P}(3 \leftrightarrow 5) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} F_h \vec{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \vec{x_3} \end{array} \right\}_A$   
 $= F_h \dot{x}_{35}(t);$
- $\mathcal{P}(3 \leftrightarrow 5) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -k \dot{x}_{35}(t) \vec{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \vec{x_3} \end{array} \right\}_A = -k \dot{x}_{35}^2(t).$

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiliennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à  $E$ . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

### Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \quad \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_1 g \vec{y}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ \frac{\dot{\theta}_1 \vec{z}_N}{V(G_1, 1/R_N) = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_1} \\
 &= -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \vec{y}_N = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1; \\
 \blacktriangleright \quad \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_2 g \vec{y}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2 \end{array} \right\}_{G_1} \\
 &= -M_2 g \vec{y}_N \left( \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2 \right) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - \\
 &M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2; \\
 \blacktriangleright \quad \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) &= -M_3 g \vec{y}_N \left( -\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3 \right) \\
 &= -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3); \\
 \blacktriangleright \quad \mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) &= \{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P \otimes \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ h \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_P \\
 &= F_t h \dot{\theta}_1;
 \end{aligned}$$

**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $N$ . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

#### Correction

$$\text{On a : } \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$$

**Question 7** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0\text{ s}$ ,  $t = 1\text{ s}$ ,  $t = 3\text{ s}$  et  $t = 4\text{ s}$ . Sur cet intervalle  $[0, 4\text{ s}]$ , évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

#### Correction

D'après UPSTI. À 1 s,  $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14\,500\text{ W}$  à 3 s  $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22\,500\text{ W}$  Maximum à environ 22,5 kW. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur  $[5\text{ s}; 8\text{ s}]$ ).

**Question 8** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

#### Correction

D'après UPSTI. La différence est de 7,5 kW. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...

# TD 3

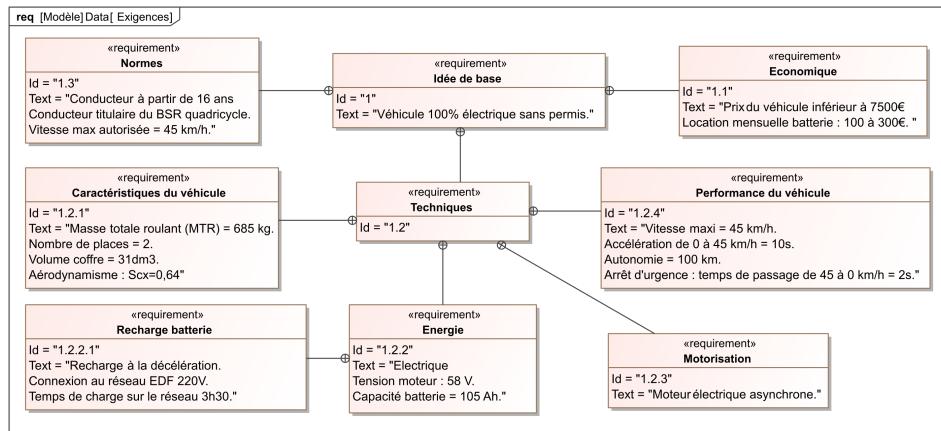
## Renault Twizy ★ – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2017.

### Mise en situation

C1-05

C2-08

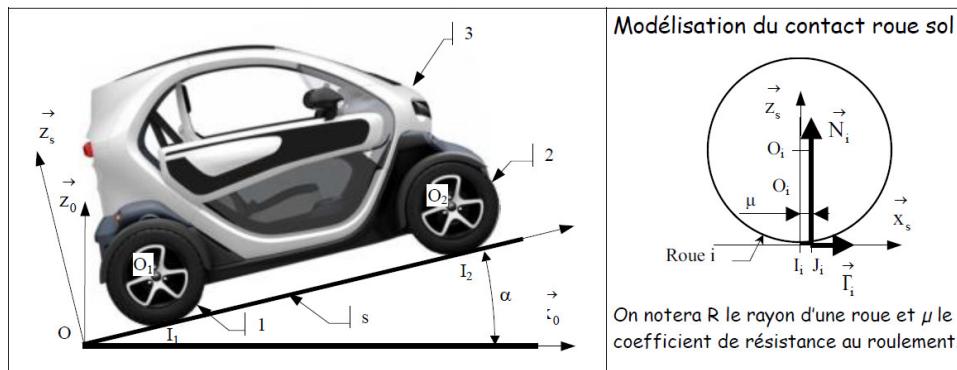


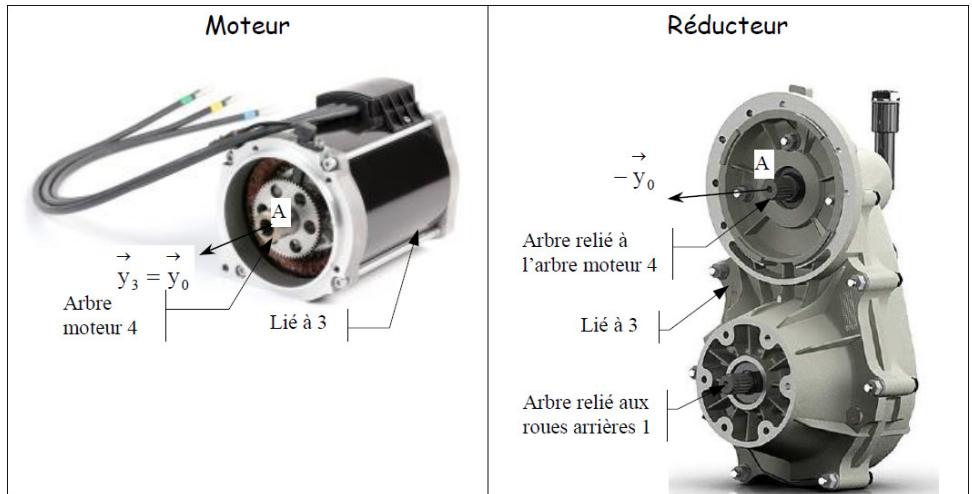
### Choix du motoréducteur

#### Objectif

Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



**Masses et inerties :**

- ▶ le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- ▶ la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- ▶ le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- ▶ les autres inerties seront négligées.

**Hypothèses générales :**

- ▶ le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- ▶ le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen ; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;
- ▶ toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- ▶ les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- ▶ le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On pose  $\vec{I}_1 J_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- ▶ les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés ; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{T}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{J_i}$  avec  $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  et  $i = 1$  (roues arrières) ou 2 (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$ .

**Grandeurs cinématiques** : Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

**Notations :**

- ▶ puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- ▶ puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- ▶ énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

**Choix de l'ensemble moto-réducteur****Équation de mouvement du véhicule****Objectif**

Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

**Question 1** Il est demandé de :

- ▶ écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;
- ▶ déterminer explicitement les énergies cinétiques ;
- ▶ en déduire une équation faisant intervenir  $C_m, N_1, N_2, v, \omega_m, \omega_{1/0}, \omega_{2/0} \dots$  ;
- ▶ expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer ( $N_1 + N_2$ ). Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10}), (v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m, \mu, g, R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m, J_m, J_R, R$  et  $r$ .

### Détermination du coefficient de résistance au roulement $\mu$

#### Objectif

Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

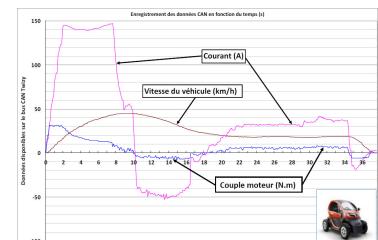
**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- ▶ justifier dans quelle phase se placer ;
- ▶ définir la variable mesurée ;
- ▶ définir les hypothèses nécessaires ;
- ▶ énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .

### Choix du moto-réducteur

#### Objectif

Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.



Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{\min}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

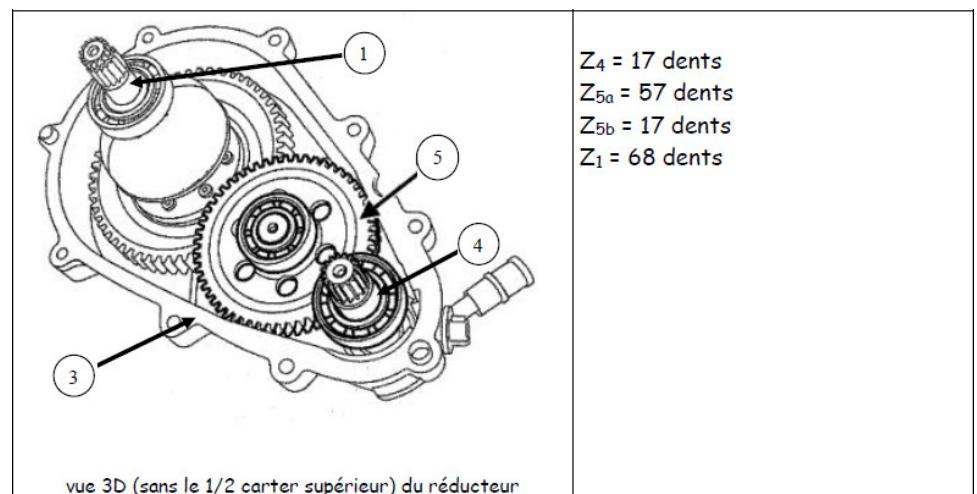
**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

#### Objectif

Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.



# TD 3

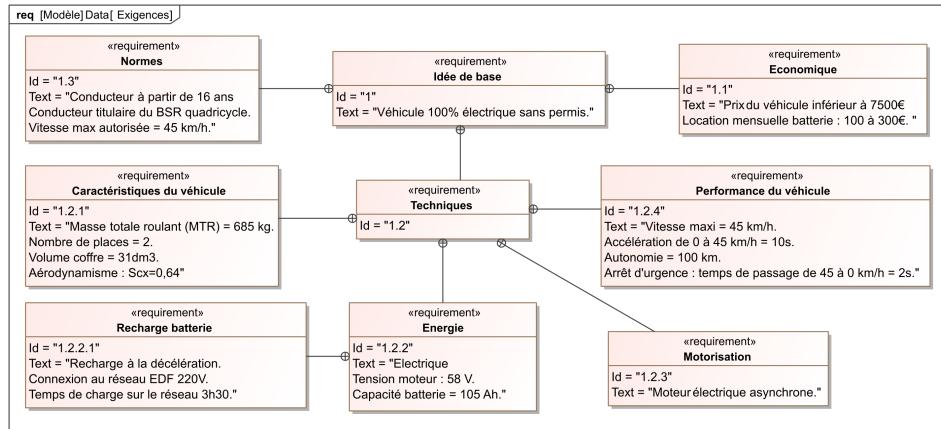
## Renault Twizy ★ – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2017.

C1-05

C2-08

### Mise en situation

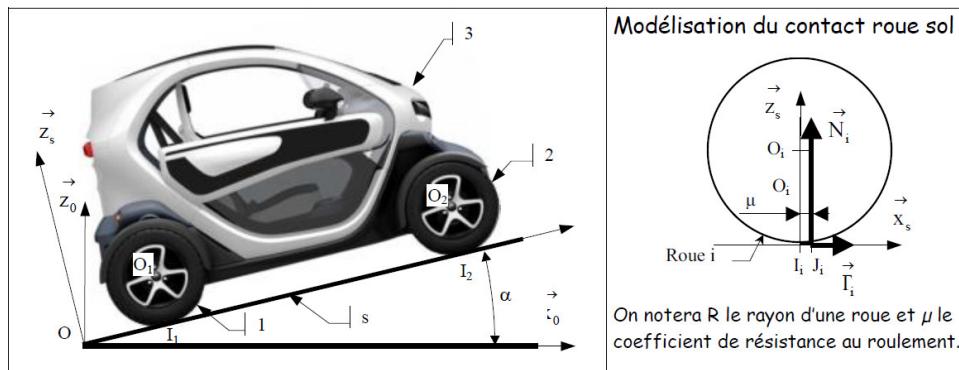


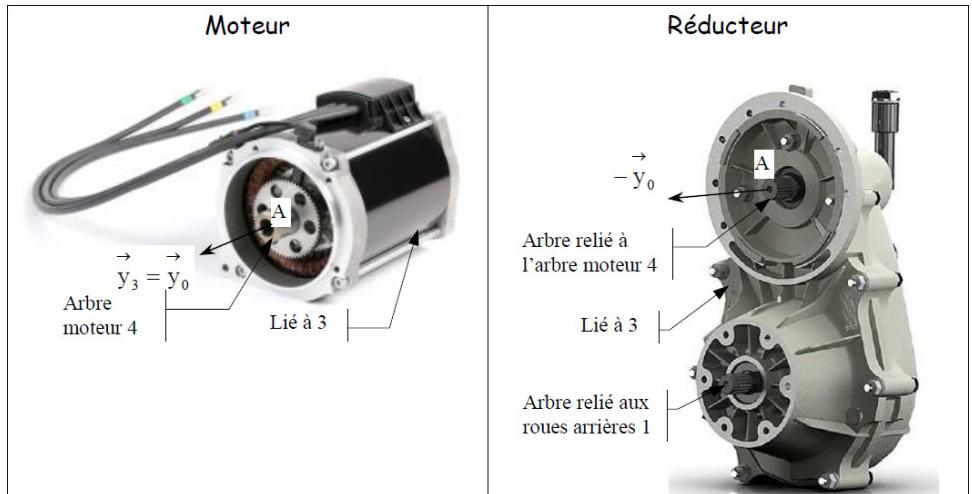
### Choix du motoréducteur

#### Objectif

Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



**Masses et inerties :**

- ▶ le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- ▶ la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- ▶ le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- ▶ les autres inerties seront négligées.

**Hypothèses générales :**

- ▶ le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- ▶ le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen ; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;
- ▶ toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- ▶ les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- ▶ le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On pose  $\vec{I}_1 \vec{J}_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- ▶ les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés ; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{T}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{J_i}$  avec  $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  et  $i = 1$  (roues arrières) ou 2 (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$ .

**Grandeurs cinématiques** : Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

**Notations :**

- ▶ puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- ▶ puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- ▶ énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

**Choix de l'ensemble moto-réducteur****Équation de mouvement du véhicule****Objectif**

Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

**Question 1** Il est demandé de :

- ▶ écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;
- ▶ déterminer explicitement les énergies cinétiques ;
- ▶ en déduire une équation faisant intervenir  $C_m, N_1, N_2, v, \omega_m, \omega_{1/0}, \omega_{2/0} \dots$  ;
- ▶ expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

#### Correction

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer  $(N_1 + N_2)$ . Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

#### Correction

**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10}), (v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m, \mu, g, R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m, J_m, J_R, R$  et  $r$ .

#### Correction

### Détermination du coefficient de résistance au roulement $\mu$

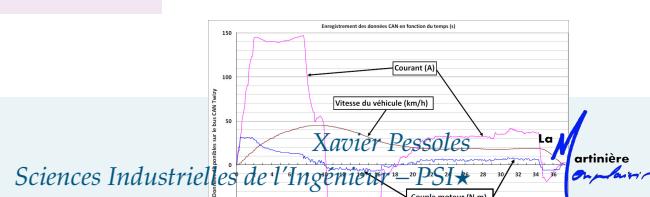
#### Objectif

Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- ▶ justifier dans quelle phase se placer ;
- ▶ définir la variable mesurée ;
- ▶ définir les hypothèses nécessaires ;
- ▶ énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .

#### Correction



## Choix du moto-réducteur

### Objectif

Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{\min}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

### Correction

**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

### Correction

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

### Correction

## Validation du choix constructeur du moto-réducteur

### Objectif

Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.

### Correction

