

## 12 Correction des SLCI

### 12.1 Pourquoi corriger un système ?

Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- ▶ plus précis;
- ▶ plus amorti;
- ▶ plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.

#### Résultat –

- ▶ D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- ▶ D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- ▶ D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

<b>12.1 Pourquoi corriger un système? . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>12.2 Le correcteur proportionnel . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>12.3 Les correcteurs à action intégrale . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>12.4 Le correcteur à avance de phase . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>12.5 Bilan sur l'influence des correcteurs . . . . .</b>	<b>5</b>

C1-02

C2-04

**Frédéric Mazet**, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

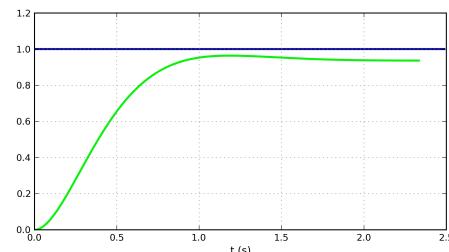
**Florestan Mathurin**, *Correction des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

## 12.2 Le correcteur proportionnel

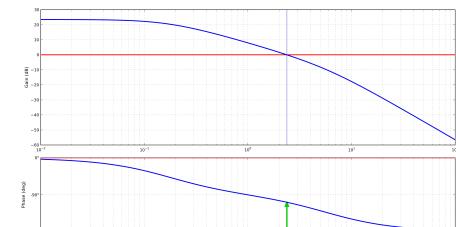
### Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

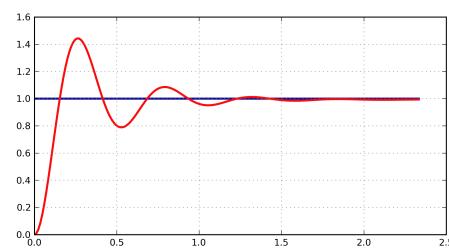
Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



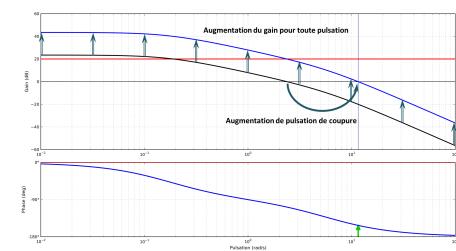
$T_{5\%} : 0,781 \text{ s}$  – Écart statique : 0,07



Marge de phase 71,94 °



$T_{5\%} : 0,88 \text{ s}$  – Écart statique : tend  $\rightarrow 0$



Marge de phase 6,43 °

### Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- ▶ d'améliorer la précision;
- ▶ d'augmenter la vivacité;
- ▶ d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- ▶ de diminuer l'amortissement;
- ▶ de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode –

#### Réglage de la marge de phase :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0\text{dB}}$  tel que  $\varphi(\omega_{0\text{dB}})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

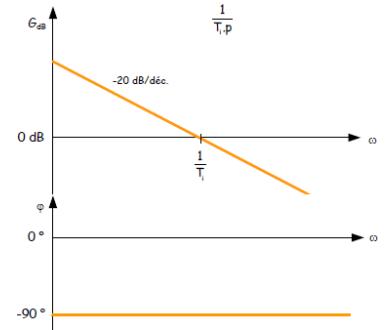
## 12.3 Les correcteurs à action intégrale

### 12.3.1 Le correcteur intégral pur

#### Définition – Correcteur I

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .



#### Résultat –

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

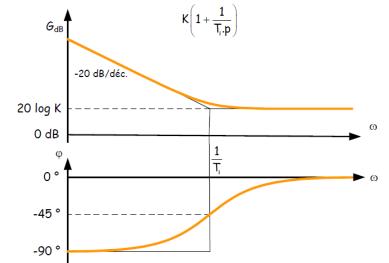
Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

### 12.3.2 Le correcteur proportionnel intégral

#### Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ .



En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

#### Résultat – Correcteur PI

- ▶ augmente l'amortissement;
- ▶ augmente la rapidité;
- ▶ augmente la précision.

#### Méthode –

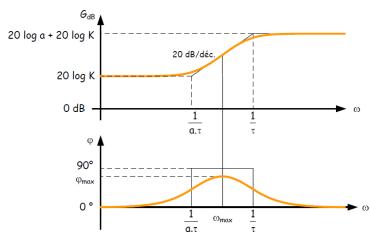
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- ▶ On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- ▶ La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la

pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} << \omega_{0\text{dB}}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_{0\text{dB}}}$ .

### Remarque

Une autre possibilité pour régler  $T_i$  est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$  avec  $\tau_1 >> \tau_2$ .  $\tau_1$  ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre  $T_i = \tau_1$  afin de supprimer l'effet du pôle associé à  $\tau_1$ .

## 12.4 Le correcteur à avance de phase



### Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1 + \alpha \tau p}{K \frac{1 + \tau p}{1 + \tau p}}$  avec  $\alpha > 1$ .

### Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{\alpha \tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

### Remarque

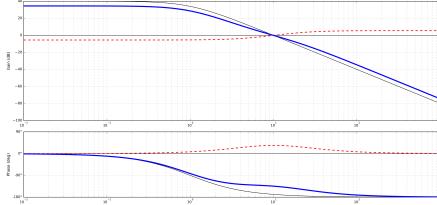
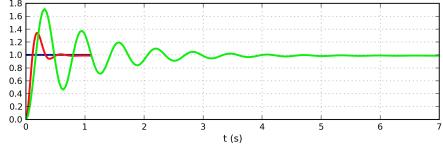
On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

### Démonstration

Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha \tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{\alpha \tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau \sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ ,  $a = 3,54$ ,  $T = 0,053$  s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

#### Méthode –

- En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que le gain est nul.
- On calcule  $\varphi(\omega_{0dB})$ .
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule  $a$ .
- On calcule  $\tau$ .
- On calcule  $K$ .

## 12.5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction		
	Si $K_p$ augmente		
Proportionnel $K_p$	Marges	↔	
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	↔	Si mal réglé
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	↔	(Cf : classe)
	Précision	↔	
	Rapidité	↔	



# Application 1

## Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

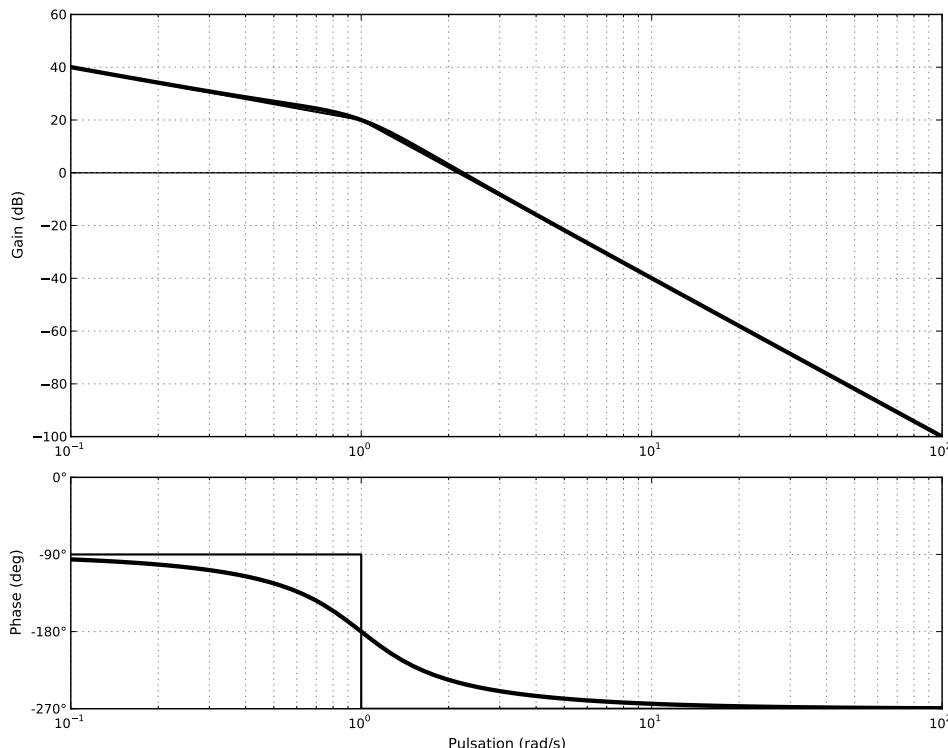
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.

D'après ressources P. Dupas.

C1-02

C2-04



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Éléments de correction**

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20 \text{ dB}$ .
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35 \text{ dB}$ .
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

D'après ressources P. Dupas.

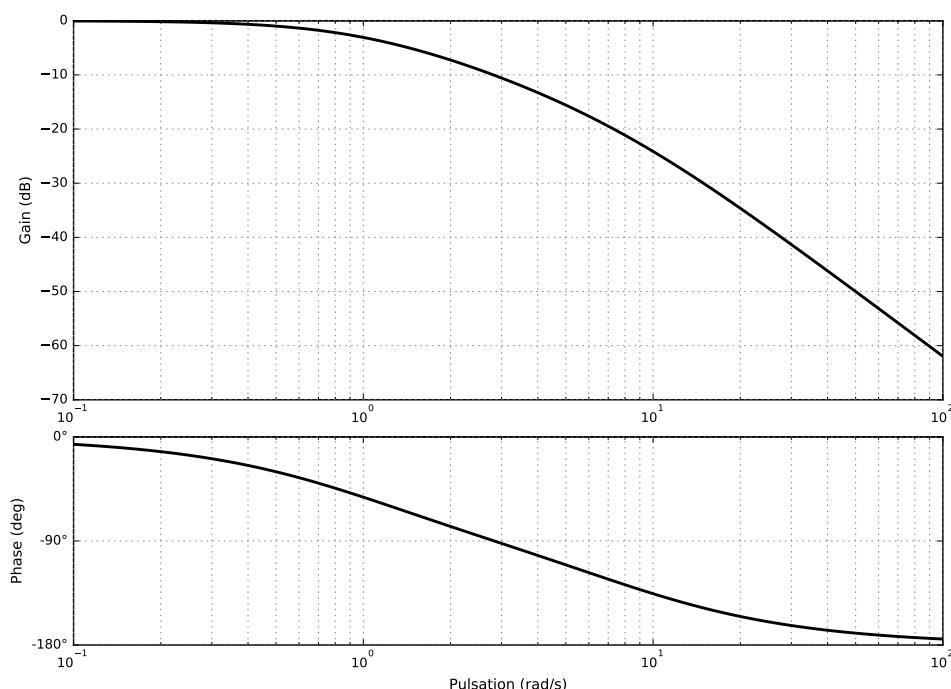
**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

**Correcteur proportionnel intégral**

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 5** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Question 6** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

**Éléments de correction**

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.

# Application 1

## Réglage de correcteurs P et PI – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

C1-02

C2-04

#### Correction

- On cherche  $\omega$  tel que  $G_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$  :  $G_{dB}(\omega) = -20 \log(10) - 20 \log \omega - 20 \log \left( \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} \right)$

On trouve  $\omega = 2,21 \text{ rad/s}$  et  $M_\varphi = -60^\circ$ . Le système est instable.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

#### Correction

Pour  $\varphi = -180^\circ$ , on a  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  et  $M_G = -20 \text{ dB}$ . Le système est instable.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

#### Correction

Pour  $\varphi = -135^\circ$  on a  $\omega = 0,62 \text{ rad/s}$ . On trouve un gain proportionnel de 0,054.  
La marge de gain est alors de 5,35 dB ce qui est inférieur aux 10 dB demandés.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

#### Correction

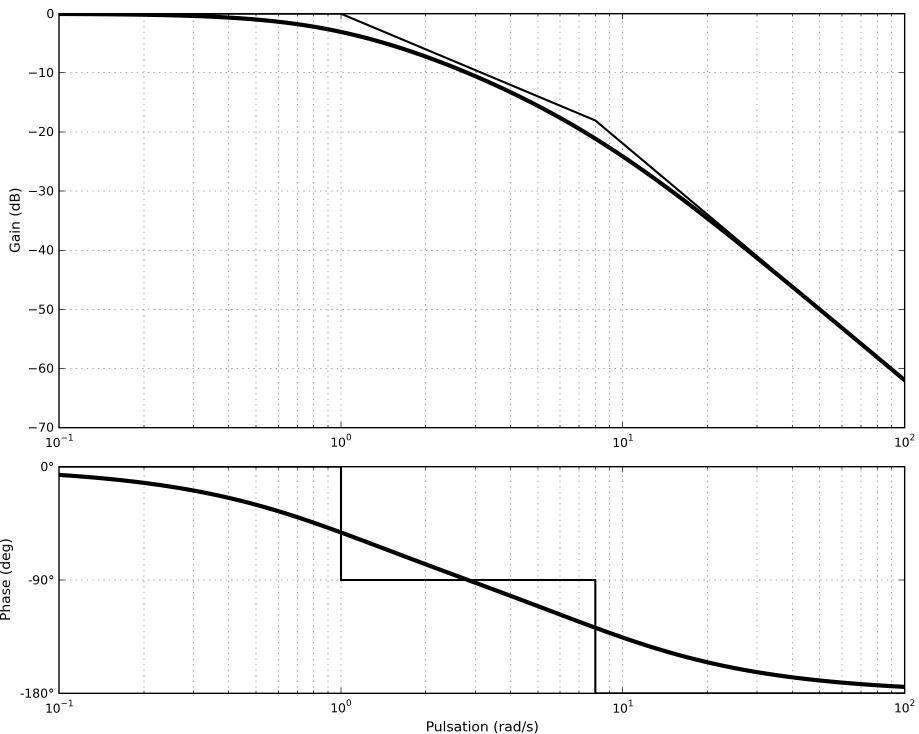
Pour  $\varphi = -180^\circ$  on a  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . On trouve un gain proportionnel de 0,316.  
La marge de phase est alors de  $70^\circ$  ( $\omega = 0,0333 \text{ rad/s}$ ).

### Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

**Question 5** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

### Correction



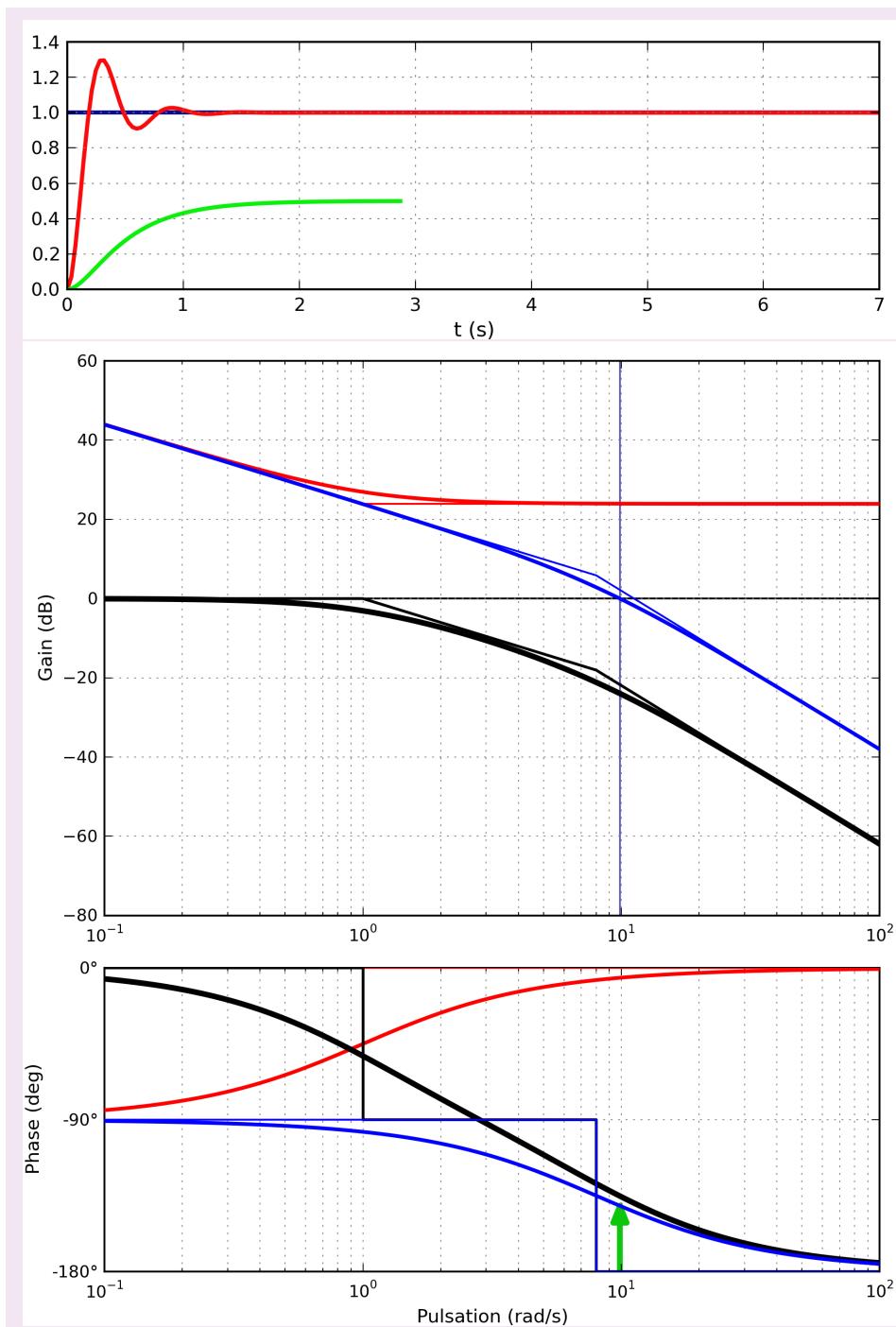
**Question 6** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

### Correction

- ▶ On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan \omega/8 \Rightarrow \tan 135^\circ = \frac{\omega + \omega/8}{1 - \omega^2/8}$   
 $\Leftrightarrow -1 + \omega^2/8 - 9\omega/8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 9\omega - 8 = 0$ .  $\Delta = 81 + 32 = 10,63^2$ .  $\omega = \frac{9 \pm 10,63}{2} = 9,82$  rad/s.
- ▶ Calculons  $G_{dB}(9,82) = -23,9$  dB. Il faut donc augmenter le gain de 23,9 dB soit  $K_p = 10^{23,9/20} = 15,7$ .
- ▶ On choisit  $\tau$  pour ne pas modifier la marge de phase. Il faut donc que le déphasage de  $0^\circ$  du correcteur ait lieu avant 9,82 rad/s. De manière usuelle on prend  $\frac{1}{\tau} = \frac{9,82}{10} = 0,982$  rad/s.
- ▶ Au final, on a  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

### Correction





# Application 2

## Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

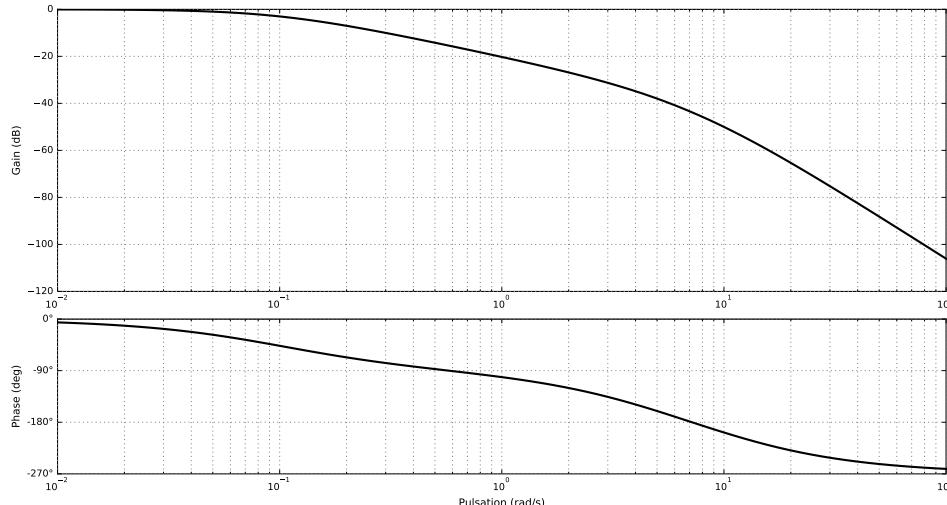
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

### Correcteur à avance de phase

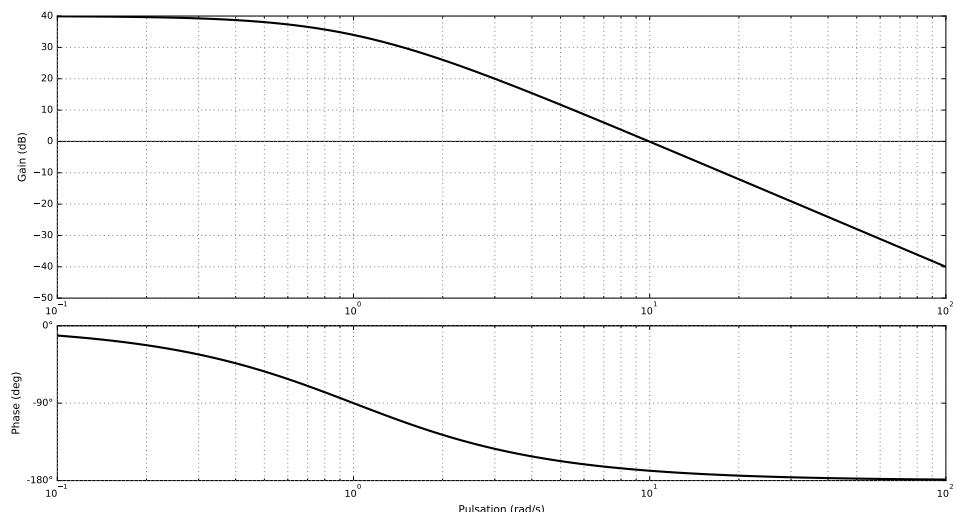
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de

#### Éléments de correction

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .

$$\text{phase de la forme } C(p) = K \frac{1 + \alpha \tau p}{1 + \tau p}.$$

**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .



**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

#### Éléments de correction

$$\begin{aligned} 1. \\ 2. \quad C(p) &= \\ 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}. \\ 3. \end{aligned}$$

# Application 2

## Réglage de correcteurs P et AP – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

#### Correction

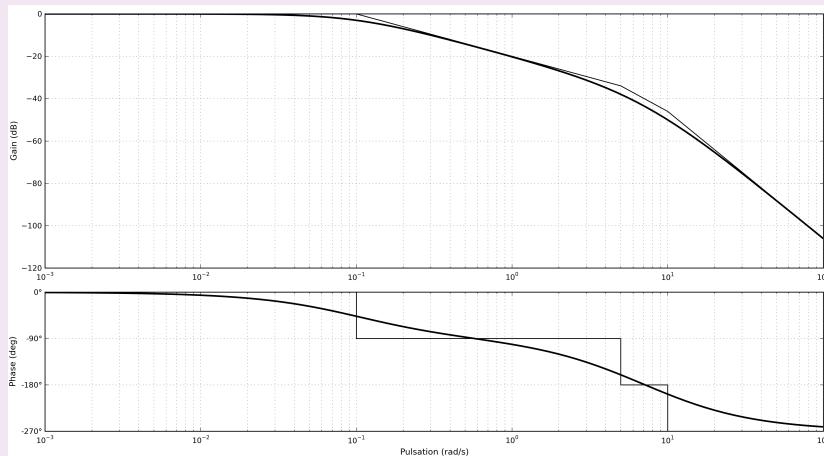
Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon.  $K_{BO} = 1$ . L'écart statique est de  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

C1-02

C2-04

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

#### Correction



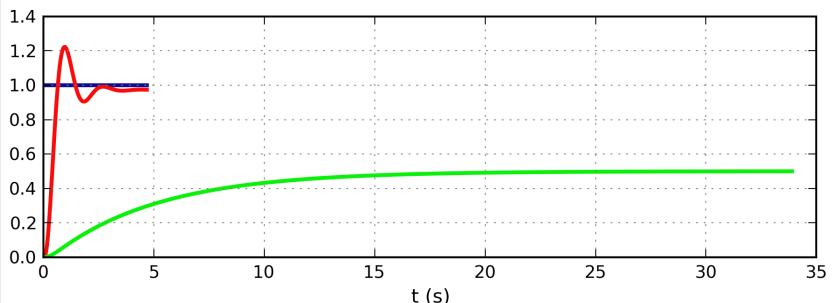
**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

#### Correction

- On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$ .  
 $\varphi(\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \omega = 2,95 \text{ rad s}^{-1}$  (solveur Excel).
- Calculons  $G_{dB}(\omega) = -20 \log \left( \sqrt{1 + 10^2 \omega^2} \right) - 20 \log \left( \sqrt{1 + 0,1^2 \omega^2} \right) -$

$20 \log \left( \sqrt{1 + 0,2^2 \omega^2} \right) = -31 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de 31 dB soit  $K_P = 10^{31/20} = 35,48$ .

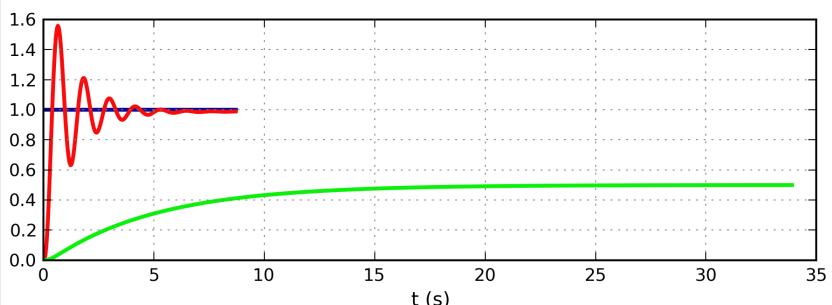
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+35,48} = 0,027$ .
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 12 \text{ dB}$ .



**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

#### Correction

- On commence par résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 44 \text{ dB}$ .
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit  $20 \log K_P = 38 \Rightarrow K_P = 10^{38/20} = 79$ .
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+79} = 0,0125$ .
- La marge de phase est alors de  $19^\circ$ .



### Correcteur à avance de phase

**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

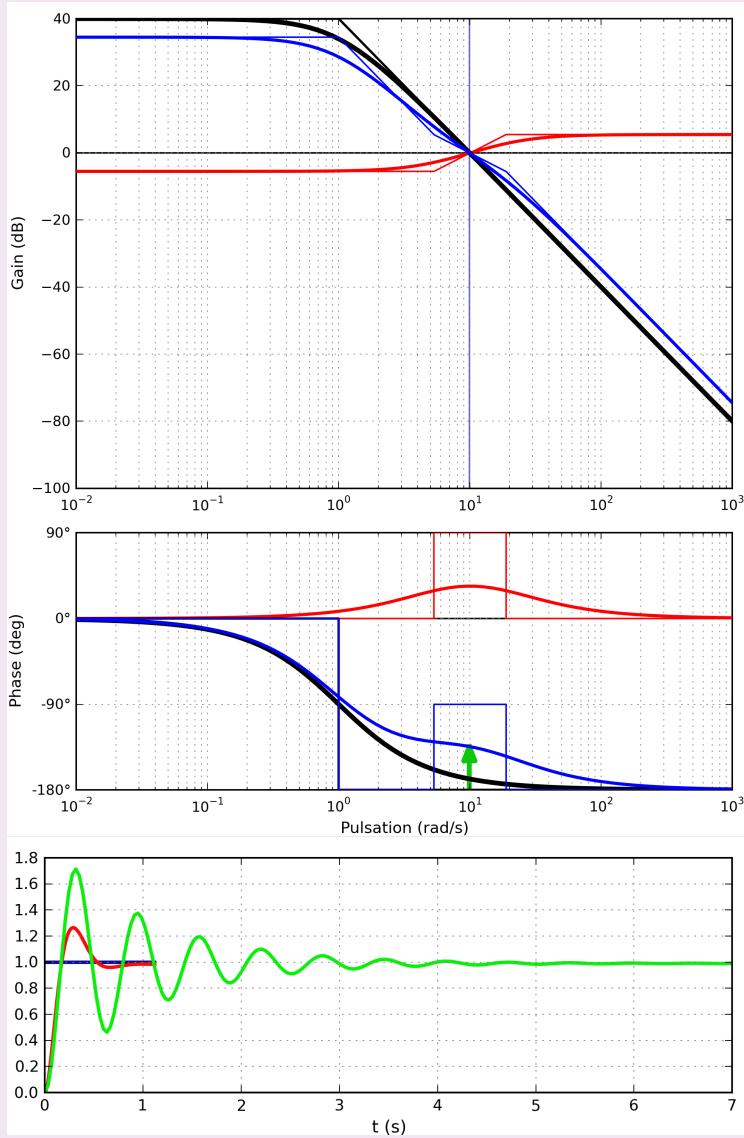
#### Correction

- $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(100) - 20 \log(1 + \omega^2)$ .  $G_{\text{dB}}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + \omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99} \Rightarrow \omega = 9,95 \text{ rad/s}$ .
- $\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$  et  $\varphi(9,95) = -2,94 \text{ rad} = -169^\circ$  soit une marge de phase de  $11^\circ$ ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de  $34^\circ$ .
- $\varphi_{\text{max}} = \arcsin \left( \frac{a-1}{a+1} \right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\text{max}}) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = -\frac{\sin(\varphi_{\text{max}}) + 1}{\sin(\varphi_{\text{max}}) - 1} = 3,54$ .

►  $\tau = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s.}$

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

### Correction



### Éléments de correction

- 1.
2.  $C(p)$
3.  $0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}.$



# Application 3

## Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

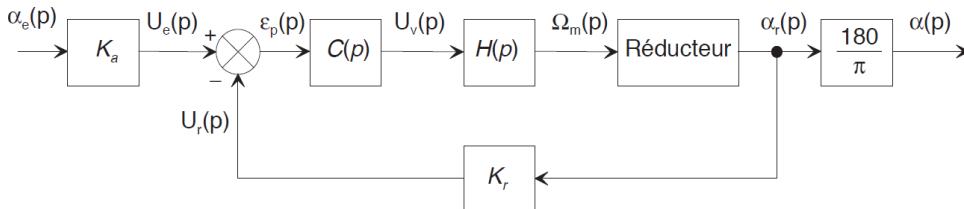
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $t'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

**Question 8** La valeur de  $K_{\text{BO}}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

#### Éléments de correction

1.  $R(p) = \frac{1}{Np}$ .
2.  $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$ .
3.  $T(p) = \frac{K_{\text{BO}}}{p(1 + \tau'_m p)}$  avec  

$$K_{\text{BO}} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$
.
4.  $K_{\text{BO}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$ .
5.  $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$ .
6.  $\varepsilon_S = 0$ .
7.  $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$ .
8.  $\varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{\text{BO}}}$ .

# Application 3

## Réglage de correcteurs P – Corrigé

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

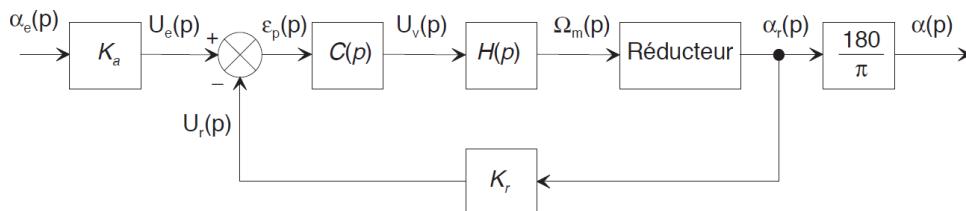
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

### Correction

D'une part le réducteur permet de réduire la vitesse. D'autre part, le schéma-bloc permet de convertir une vitesse en position. Il joue donc le rôle d'intégrateur. On a donc  $R(p) = \frac{1}{Np}$

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

### Correction

On a  $\epsilon(p) = K_a \alpha_e(p) - K_r \alpha_r(p) = K_a \alpha_e(p) - K_r \frac{\pi}{180} \alpha(p)$ . Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc  $K_a = K_r \frac{\pi}{180}$ .

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $t'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

#### Correction

$$\text{On a } T(p) = C(p)H(p)R(p)K_r = K_c \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{Np} K_r. \text{ On a donc } K_{BO} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

#### Correction

Pour un premier ordre intégré, la phase est de  $135^\circ$  en  $\frac{1}{\tau'_m}$ . Le gain (dB) de la boucle ouverte doit donc être nul pour cette pulsation ou encore que le module soit unitaire.

$$\begin{aligned} |T(p)| = 1 &\Rightarrow \left| K_c \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{Np} K_r \right| = 1 \Rightarrow \frac{K_c K'_m K_r}{N} \left| \frac{1}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{p} \right| = 1 \Rightarrow \frac{K_c K'_m K_r}{N} \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = 1 \\ &\Rightarrow K_c = \frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} \Rightarrow K_c = \frac{\sqrt{2}}{K_{BO}} \end{aligned}$$

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

#### Correction

$$\Rightarrow K_c = \frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r}$$

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

#### Correction

La BO du système est de classe 1. Pour une entrée échelon, l'écart statique est nul.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

#### Correction

$$\alpha_e(t) = 105t \text{ et } \alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$$

**Question 8** La valeur de  $K_{BO}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

**Correction**

$$\text{L'écart de trainage est donné par } \varepsilon_t = \frac{105K_a}{K_{\text{BO}}} = \frac{105K_r \frac{\pi}{180}}{\frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} K'_m K_r} = \frac{105\pi K_r \tau'_m}{180\sqrt{2}}.$$

$$\text{AN : } \varepsilon_t = \frac{105 \times \pi \times 4 \times 5 \times 10^{-3}}{180\sqrt{2}} = 0,02^\circ. \text{ Le CDC est respecté.}$$



## TD 1

# Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

C1-02

C2-04

### Objectif

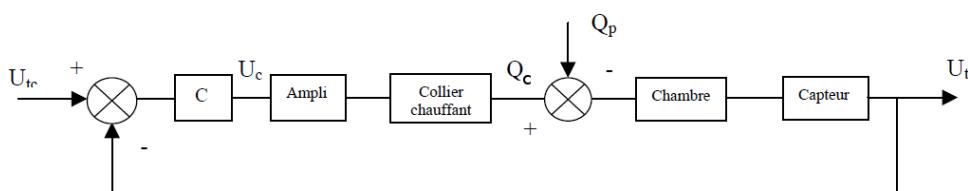
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

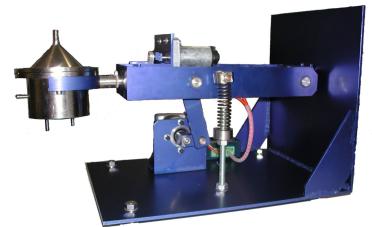
Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.

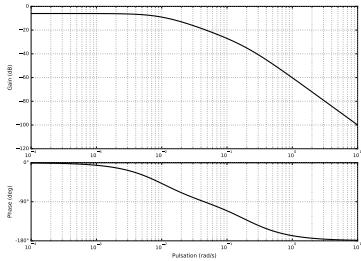


$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$



## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.



**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

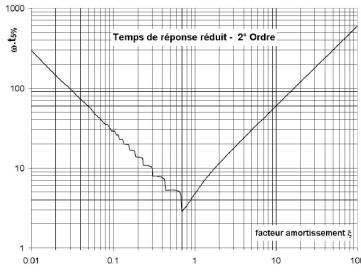
**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .



**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.

### Éléments de correction

1. 218 s.
2.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ( $M_G \rightarrow \infty$ ,  $M_\varphi$  non définie).
5.  $K = 9$ .
6. 50 s,
7.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
8.  $U_a = 450$  V.
9.  $K = 10$  et  $T_i = 100$  s.
10.  $\varepsilon_p = 0$ .

# TD 1

## Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Corrigé

CCP – PSI – 2006.

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

C1-02

C2-04

### Objectif

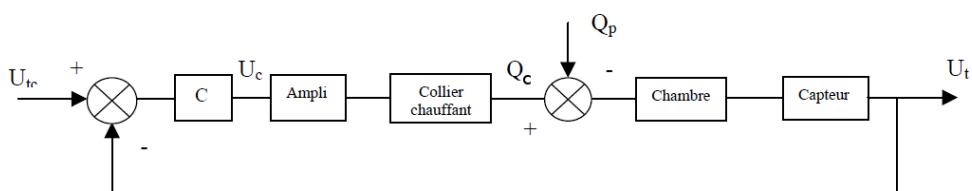
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$



## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

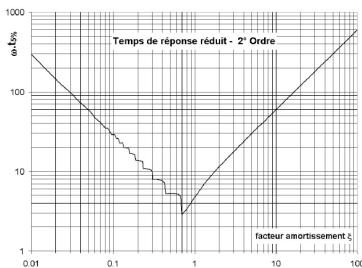
**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .



**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponse du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.

**Q20 – Temps de réponse du système régulé**

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{ic}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$

car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre  $\omega_n$  telle que :  $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement  $\xi$  tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \neq 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$  Incompatible avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

**Q21 – Ecart de position – Ecart de traînage**

Fonction de transfert de classe 0 (zéro)  $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{array} \right.$$

$\varepsilon_p = 0,66$    66 % Incompatible avec le cahier des charges.

**Q22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.**

On procède par superposition :  $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure  $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$  ;  $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6dB - 10 \cdot \log(1+25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \log(1+10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\arctan(5 \cdot \omega) - \arctan(100 \cdot \omega)$$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	- 9	- 27	- 60
$\varphi$ ( $^\circ$ )	- 48	- 115	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante

### Q23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain :  $M_G = \infty$

Marge de phase :  $M_\varphi = 180^\circ$

### Q 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler  $K$  afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à  $2,3 \text{ dB}$ , car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

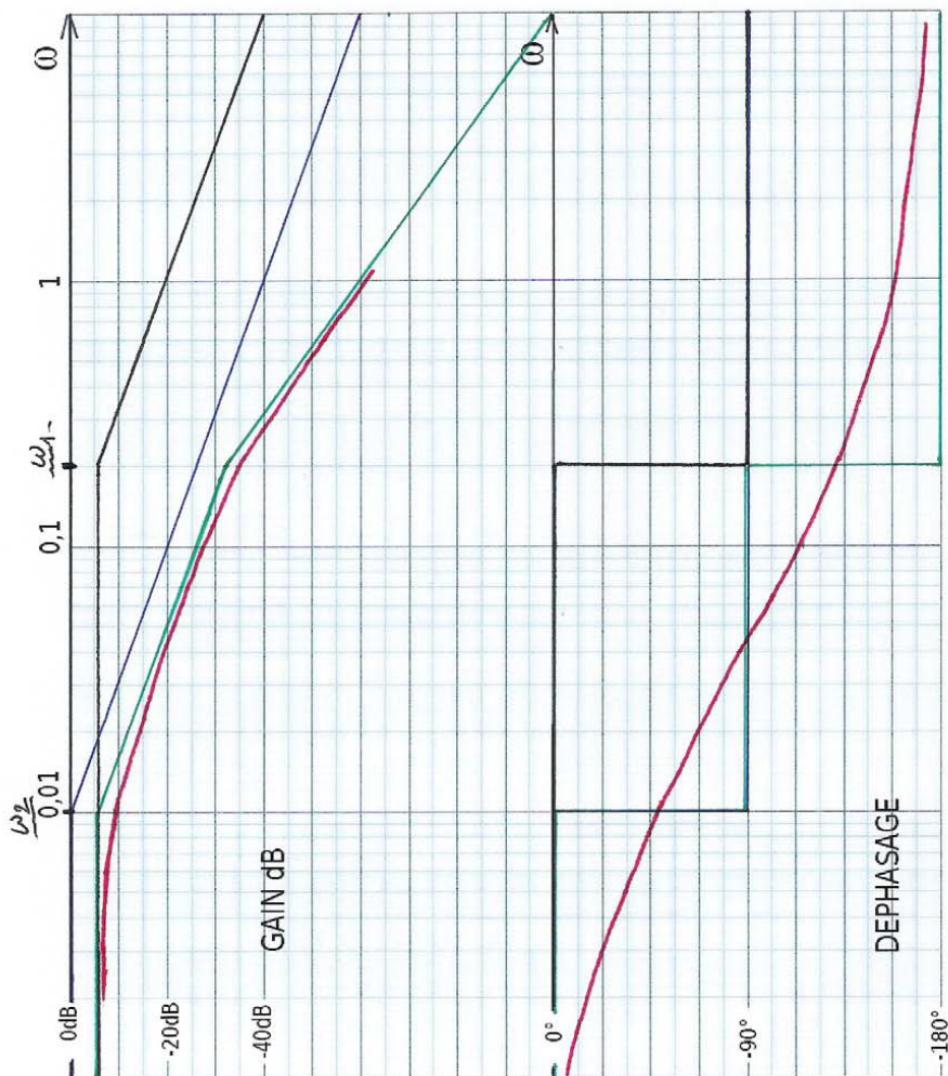
On règle  $K$  de telle sorte que  $\xi \geq 1$  ; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

**Question 22 :** Tracé de Bode



$$\text{Pulsion propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot K}{500}}$$

$$\text{Facteur d'amortissement, il est tel que : } \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} ,$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1 + 0,5 \cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** :  $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$

On choisit **K=9** alors  **$\xi \approx 1$**  la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de **20 Log 9**, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

### O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>bo</sub>)

La marge de gain est inchangée : **M<sub>G</sub> = ∞**

On relève : **M<sub>φ</sub> = 90°** **La stabilité est assurée.**

$$\text{Pulsion propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow t_{5\%} = 50 \text{ s}$  **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro) } \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

**$\varepsilon_p = 0,55$**  **55 %** **Incompatible** avec le cahier des charges.

### O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U<sub>tc</sub> est de 5 V

A 17° C correspond  $U_c = 0 \text{ V}$ , donc  $U_t = 0 \text{ V}$ .

Si  $U_{tc} = 5 \text{ V} \Rightarrow U_c = 45 \text{ V}$ . ( $U_c = K \cdot \varepsilon$ )

Alors **U<sub>a</sub> = 450 V** Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

### O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait par **compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps  $T_i$  du correcteur égale à la **constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain  $K$  du correcteur afin que la **réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit  $\xi = 1$ ). Le choix de  $T_i$  devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors :  $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors :  $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors :  $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors :  $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit  $\xi = 1$  la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors :  $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours :  $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$  puisque  $\xi = 1$

Tableau des valeurs de  $K$ ,  $\omega_n$ ,  $t_{5\%}$  en fonction du choix de  $T_i$

$T_i$	$K$	$\omega_n$	$t_{5\%}$	Commentaires
5 s	$25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$ rd/s	1 000 s	A rejeter
<b>100 s</b>	10	0,1 rd/s	<b>50 s</b>	<b>A RETENIR</b>

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100 \omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

$$\text{Gain : } G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + 25 \cdot \omega^2)$$

$$\text{Argument : } \varphi = -90^\circ - \arctan(5\omega)$$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
$\varphi$ ( $^\circ$ )	- 93	- 117 $^\circ$	- 135	- 169

*Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations*

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O. , le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations  $\varphi = -90^\circ$  et  $\varphi = -180^\circ$  .

*Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>b03</sub>)*

La marge de gain est inchangée :  $M_G = \infty$

On relève :  $M_\varphi \approx 77^\circ$

**La stabilité est assurée.**

*O 28 – Nouvel écart de position*

Le système est de classe 1  $\Rightarrow \varepsilon_p = 0$

## TD 2

# Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

*La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.*

C1-02

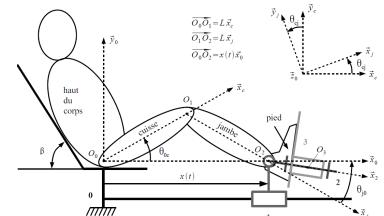
C2-04

#### Objectif

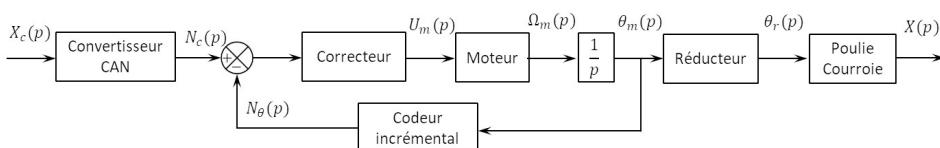
L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsion au gain unité	$50 \text{ rad s}^{-1}$



La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



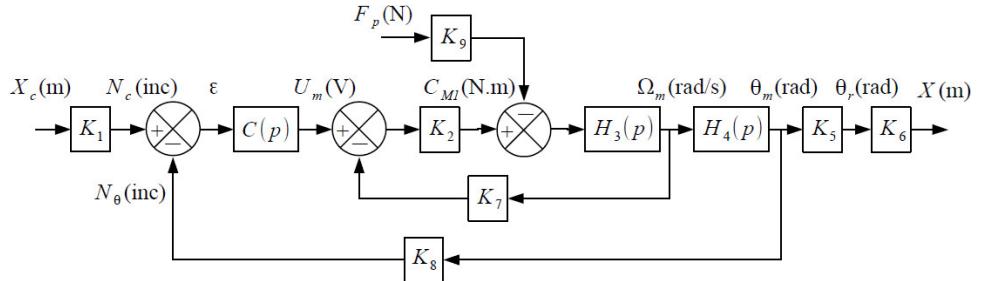
Soit le modèle donné dans la figure ci-contre.

## Éléments de modélisation<sup>1</sup>

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.

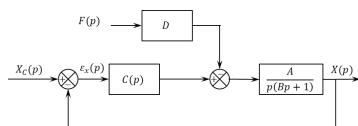


Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied;
- $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur;
- $r = 46,1 \times 10^{-3}$  m le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie;
- $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.



Pour la suite du sujet on gardera les constantes  $A, B$  et  $D$ , avec  $A = 6700 \text{ m/V}$ ,  $B = 0,01 \text{ s}$  et  $D = 6 \text{ V/N}$ .

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .

## Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_i$ .

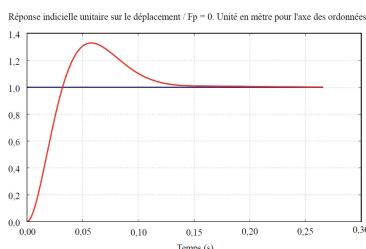
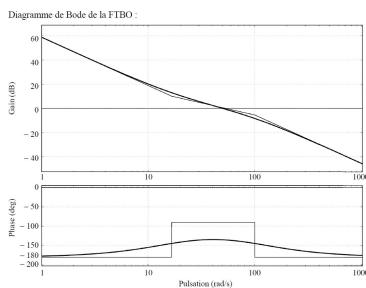
**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système

$$\text{FTBO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$$
 en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.



On donne sur le document réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

## TD 2

# Machine de rééducation SysReeduc – Corrigé

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

Soit le modèle donné dans la figure ci-contre.

C1-02

C2-04

### Éléments de modélisation<sup>2</sup>

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

#### Correction

On a :

- ▶  $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$  et  $C_{M1}(p) = k_t I(p)$  donc  $K_2 = \frac{k_t}{R}$ ;
- ▶  $E(p) = k_e \Omega_m(p)$  et donc  $K_7 = k_e$ ;
- ▶  $(M + m) r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m) r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$  et donc  $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M + m) r^2 \rho_1^2 p}$ ;
- ▶  $H_4(p)$  permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et  $H_4(p) = \frac{1}{p}$ ;
- ▶ un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit  $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$ ;
- ▶ en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement  $K_5 = \rho_1$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres);
- ▶ enfin,  $K_1$  convertit des mètres en incrément.  $X_c$  est la consigne que doit respectée  $X$ . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc  $\varepsilon = 0$  et  $X = X_c$  soit  $\varepsilon = 0 = K_1 X_c - K_8 \theta_m = K_1 X_c - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$ . Au final,  $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

2: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.



**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera  $A, B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$  et  $K_8$ .

**Correction**

$$\text{On montre } A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t} \text{ et } D = \frac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}.$$

**Correction proportionnelle**

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Correction**

$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon_x(p) &= X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left( (C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( 1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( \frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &= \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F(p) \end{aligned}$$

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

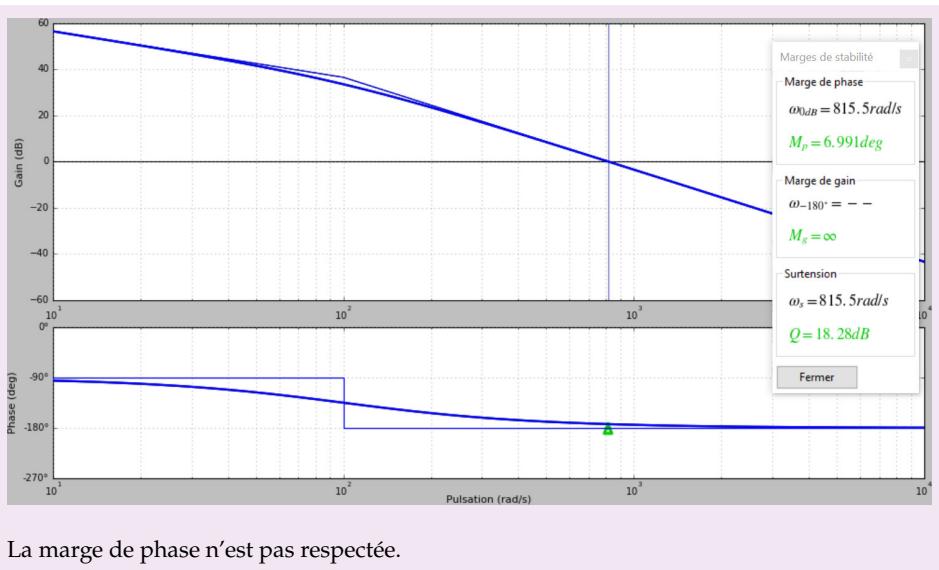
$$\begin{aligned} \text{On a : } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F_p \\ &= \frac{D}{K_C} F_p \end{aligned}$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

**Correction**

$$\text{On a } \text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}.$$



La marge de phase n'est pas respectée.

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_i$ .

### Correction

$$\varepsilon_x(p) = -\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}F(p)$$

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

### Correction

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pT_ip(Bp+1)}{pT_ip(Bp+1)+AK_i(T_ip+1)} X_0 + \frac{ADT_ip}{T_ip(Bp+1)+AK_i(T_ip+1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système  $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Correction**

$$\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = \frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}.$$

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Correction**

On souhaite que pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi(\omega) = -135^\circ$ .

$$\begin{aligned} \arg(\text{FTBO}(j\omega)) &= \arg\left(\frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}\right) = -180 - \arg((Bp + 1)) + \arg(1 + T_i p) \\ &= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i \omega. \text{ En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s.} \end{aligned}$$

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

**Correction**

On souhaite que  $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$  pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$|\text{FTBO}(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2 \omega^2 + 1}} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{T_i \omega} = \frac{AK_i}{T_i \omega^2} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{B^2 \omega^2 + 1}}.$$

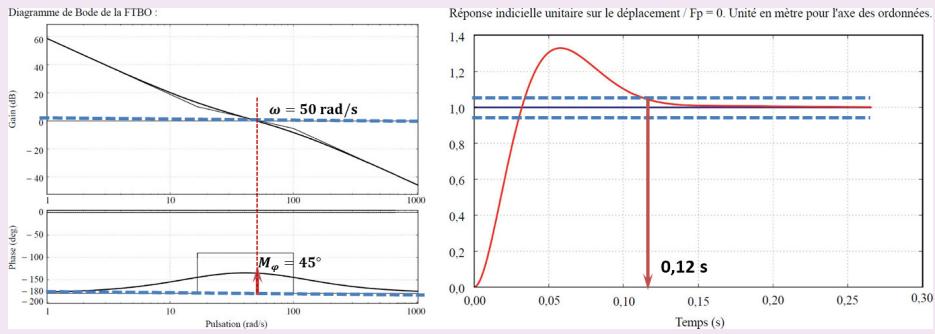
$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i \omega^2 \sqrt{B^2 \omega^2 + 1}}{A \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

### Correction

- Ecart de position : nul  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de gain : infine  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de phase :  $\approx 45^\circ$   $\Rightarrow$  Exigence OK.





## TD 3

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

## Mise en situation

### Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

C1-02

C2-04

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure ci-contre.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel est le suivant :

- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$  ;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  ;

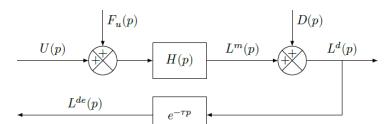


FIGURE 12.1 – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

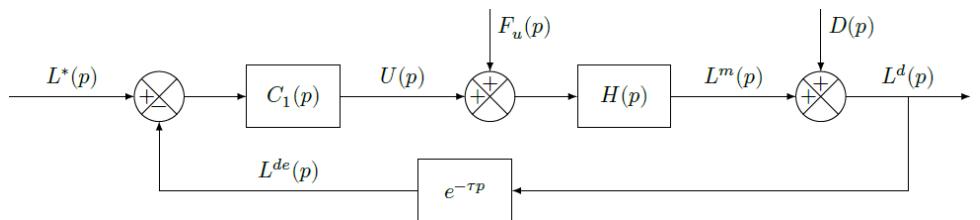
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms;
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms.

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- ▶ de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- ▶ d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- ▶ de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

### Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure suivante.



**FIGURE 12.2 – Structure de commande à une boucle**

En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

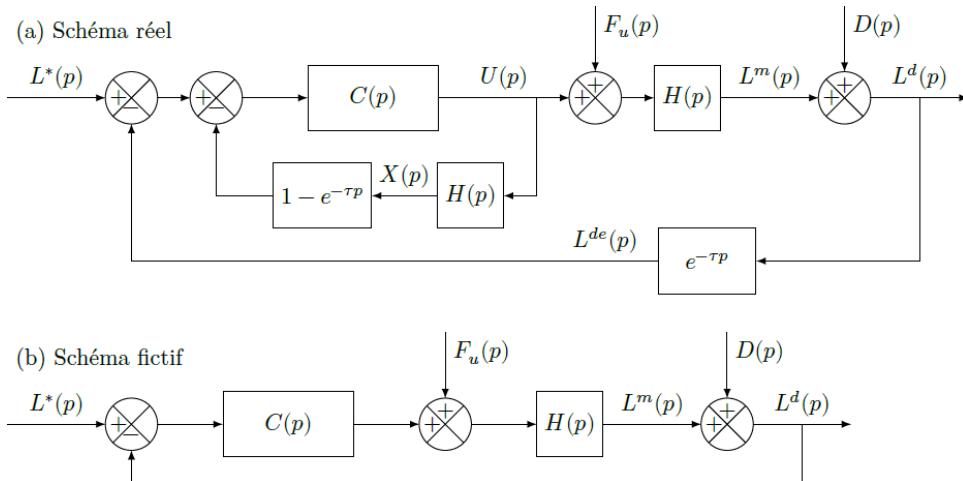
**Question 1** La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure ;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

## Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).



**FIGURE 12.3 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard**

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

## Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et

on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;

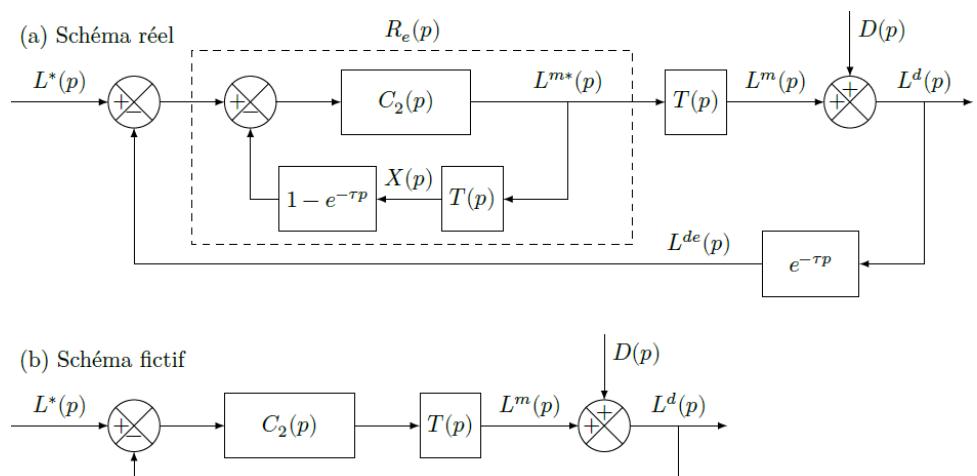
- la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

- $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.



**FIGURE 12.4 – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée**

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point de vue interne.

### Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

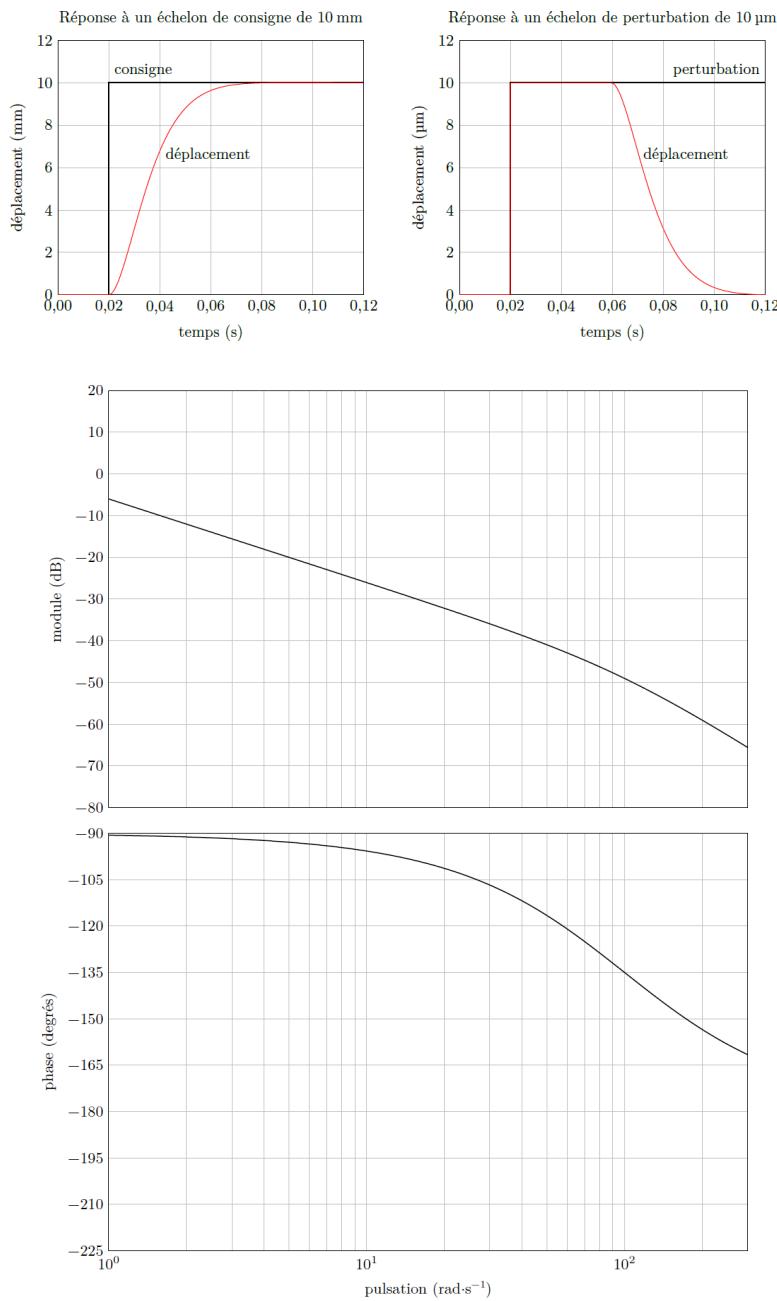


Figure B Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{0.5}{p(1 + 0.01p)}$



## TD 3

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

## Mise en situation

### Analyse d'une structure mono-boucle

C1-02

C2-04

**Question 1** La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

#### Correction

La fonction de transfert de la FTBO non corrigée est donc  $F_{BO}(p) = H(p)e^{-\tau p}$ .

On note  $G_{dB}(\omega)$  le gain de la fonction de transfert et  $\varphi(\omega)$  la phase.

$e^{-\tau j\omega}$  est un nombre complexe de gain 1 et de phase  $-\tau\omega = -0,04\omega$  (en rad). En degrés, le retard ajoute un déphasage de  $-0,04\omega \frac{180}{\pi}$ . Ainsi :

- ▶ pour  $\omega = 1$  rad/s, la phase est baissée de  $2^\circ$ ,
- ▶ pour  $\omega = 10$  rad/s, la phase est baissée de  $20^\circ$ ,
- ▶ pour  $\omega = 50$  rad/s, la phase est baissée de  $100^\circ$ ,
- ▶ pour  $\omega = 100$  rad/s, la phase est baissée de  $220^\circ$ ...

Ce qui permet de modifier le diagramme de bode de la phase.

C1-02

C2-04

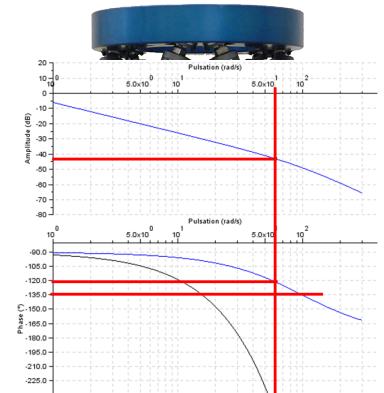


FIGURE 12.5 – FTBO retardée.

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

### Correction

D'après le cahier des charges :

- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour le système non retardé, le correcteur PI permettra de remonter le gain de 45 dB afin d'obtenir la pulsation de coupure souhaitée. En réglant  $T_i$  tel que  $1/T_i = 60/10$ , on pourra conserver une marge de phase de 55 à 60° ce qui est compatible avec le cahier des charges (ou la marge de phase à 45° en affinant la valeur de  $T_i$ ).

Pour le système retardé, le correcteur PI permettra de régler la pulsation de coupure, mais la phase est trop basse pour espérer la corriger ainsi.

## Structure de commande adaptée à un système avec retard

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

### Correction

Le système non corrigé a une marge de phase de 60°. On veut que la pulsation de coupure soit de 60 rad/s.

On cherche donc  $T_i$ , tel que  $\arg\left(K \frac{T_i p + 1}{T_i p}\right) = -15^\circ$  pour 60 rad/s. Soit  $\arctan(60T_i) - 90 = -15$  soit  $T_i = \frac{\tan 75}{60} \simeq 0,062 \text{ s}$ .

De plus pour que la pulsation de coupure soit à 60 rad/s, il faut que  $\left|K \frac{T_i p + 1}{T_i p}\right| = 10^{45/20}$  pour 60 rad/s.

$$\text{On a donc } K \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} = 60T_i \times 10^{45/20} \text{ et } K = \frac{0,062 \times 60 \times 10^{45/20}}{\sqrt{0,062^2 \times 60^2 + 1}} = 171.$$

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeure  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

**Correction**

Pour le schéma  $a$ , on a  $U(p) = -L^d(p)e^{-\tau p} \times \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$  et  $L^d(p) = H(p)(U(p) + F_u(p))$ . On a donc  $U(p) = -H(p)(U(p) + F_u(p))e^{-\tau p} \times \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$ .

$$\Rightarrow U(p) \left( 1 + \frac{C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})} \right) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$$

$$\Rightarrow U(p) \frac{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p}) + C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})} = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$$

$$\Rightarrow U(p) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p}) + C(p)H(p)e^{-\tau p}}$$

$$\Rightarrow U(p) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)}$$

On a alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{K \frac{1 + T_i p}{T_i p} \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)} F_0 e^{-\tau p}}{1 + K \frac{1 + T_i p}{T_i p} \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}} = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{0,5K(1 + T_i p)F_0 e^{-\tau p}}{T_i p^2(1 + 0,01p) + 0,5K(1 + T_i p)} = -F_0$$

Le signal de commande sera ensuite intégré par la fonction de transfert  $H(p)$ .  $X(p)$  divergera donc. La commande n'est donc pas stable.

**Analyse d'une structure de commande à deux boucles**

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point vue interne.

**Correction**

On a  $L^m(p) = -L^d(p)e^{-\tau p} \frac{C_2(p)}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} T(p)$  et  $L^d(p) = L^m(p) + D(p)$ . Ainsi,

$$L^m(p) = -(L^m(p) + D(p))e^{-\tau p} \frac{C_2(p)}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} T(p)$$

$$\Rightarrow L^m(p) \left( 1 + \frac{C_2(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} \right) = -\frac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)}$$

$$\Rightarrow L^m(p)(1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p) + C_2(p)T(p)e^{-\tau p}) = -C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}$$

$$\Rightarrow L^m(p) = -\frac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)T(p)}$$

$$K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} e^{-\tau p}$$

On a donc  $L^m(p) = -\frac{K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} e^{-\tau p}}{1 + K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}} D(p)$

$$= -\frac{K_2 \frac{T_{i2}p + 1}{T_{i2}p} \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} e^{-\tau p}}{1 + K_2 \frac{T_{i2}p + 1}{T_{i2}p} \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}} D(p) = -\frac{K_2(T_{i2}p + 1)e^{-\tau p}}{T_{i2}p(1 + 0,05p)^2 + K_2(T_{i2}p + 1)} D(p)$$

On a alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pL^m(p) = -D_0 \frac{K_2}{K_2} = -D_0$ .

On a alors  $L^d(t) = D_0 - D_0 = 0$ .

## Retour sur le cahier des charges

**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

### Correction

D'après le cahier des charges :

- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms, le temps de réponse à 5% mesuré est de  $0,06 - 0,02 = 0,04 \text{ s} < 0,05 \text{ s}$ . Critère validé;
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms. Le temps de réponse à 5% mesuré vis-à-vis de la perturbation est de 80 ms. CDC respecté.

# TD 4

## Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

C1-02

C2-04

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

### Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne

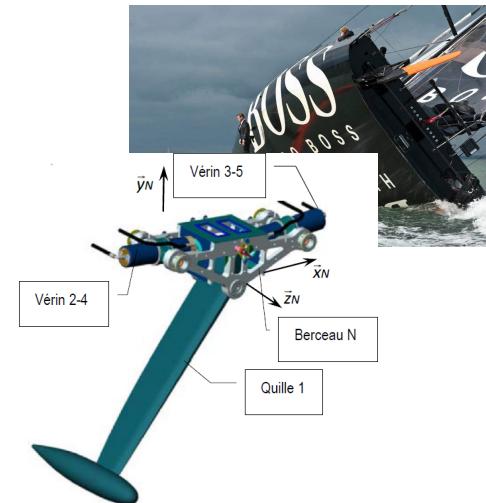
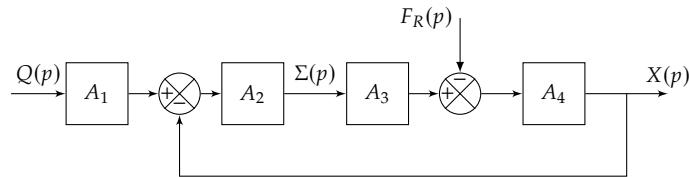


FIGURE 12.6 – Modèle volumique 3D

et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



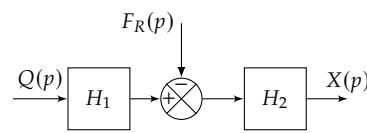
On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
  - $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
  - $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
  - $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].
- $$\begin{aligned} & \bullet q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt} \text{ (a);} \\ & \bullet M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t) \text{ (b).} \end{aligned}$$

On a :

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

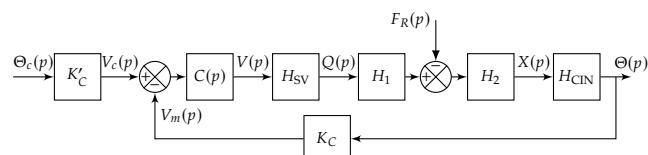
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1$  V/ $^\circ$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  $H_{CIN} = K_\theta$  [ $^\circ.m^{-1}$ ];
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.

## Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe suivante donnant les évolutions du débit  $q(t)$  fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande  $v(t)$ .

Ainsi :

- pour  $v(t) > -v_{\max}$  et  $v(t) < v_{\max}$  :  $H_{SV} = K_{SV} \left[ \text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \right]$
- pour  $v(t) < -v_{\max}$  :  $q(t) = -q_{\max}$  ;
- pour  $v(t) > v_{\max}$  :  $q(t) = +q_{\max}$  ,  $v_{\max} = 10 \text{ V}$ .

Le système n'est pas encore corrigé,  $C(p) = 1$  et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de  $45^\circ$ . Cette demande est modélisée par une consigne  $\theta_c(t)$  en échelon, soit :  $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$  avec  $\theta_0 = 45^\circ$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t > 0$ . La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve  $q(t)$  et la position angulaire de la quille  $\theta(t)$ .

Sur la figure précédente, la courbe représentative de  $q(t)$  présente un palier où  $q(t)$  garde une valeur constante.

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{SV}$  ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

## Comportement pour une commande de faible amplitude

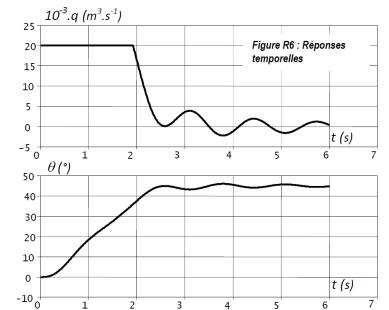
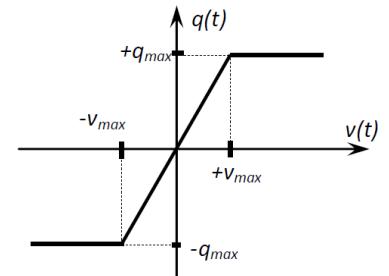
On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^\circ$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV} H_1 H_2 K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ .

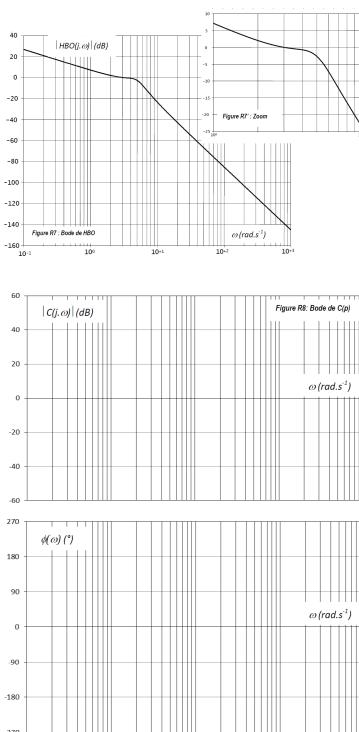
**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^\circ$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassemens, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).





À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ . Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :  $\sin [\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$  et  $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ .

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 13** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$ ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

### Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{COR}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

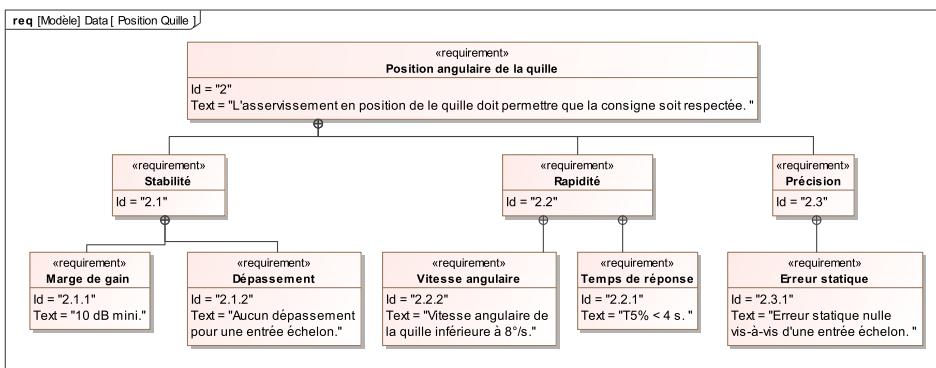
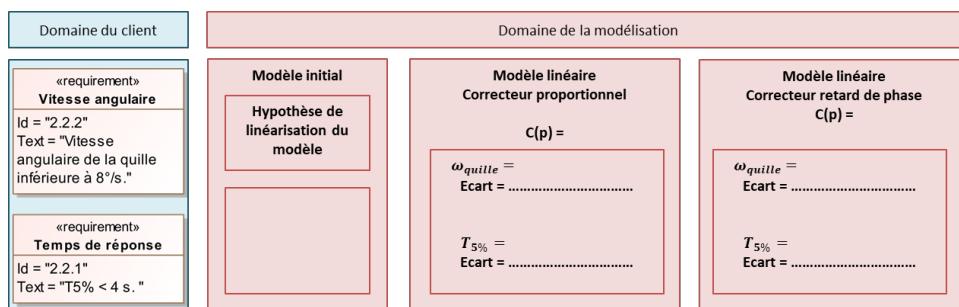
**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



### Éléments de correction

1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .
4.  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ . Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02$ ,  $T = 0,127 \text{ s}$ ,  $\phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$ .
14.  $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .





# TD 4

## Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

#### Objectif

C1-02

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

C2-04

### Modélisation du vérin

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.



#### Correction

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ .

En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ .

Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{S2B}{V}, A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ .

On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ .

Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .

**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

#### Correction

**Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$ .

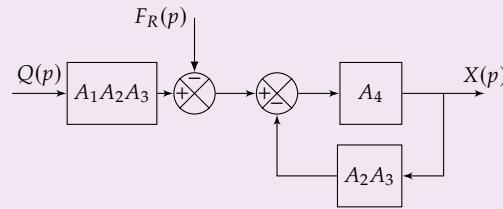
Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) =$

$A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1A_2A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\begin{aligned} \text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) &= \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} \\ &= \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}. \end{aligned}$$

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

#### Correction

Dans ce cas,  $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .

### Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{SV}$  ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

#### Correction

En début de simulation, il y a une saturation du débit à  $20 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ . La tension de commande en régime saturé étant de 10 V, on a  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$ .

Jusqu'à 1,9 seconde, le retour n'a aucune influence sur la commande. On est donc en BO. Au-delà, la régulation entre en jeu. On est donc en BF.

**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

**Correction**

Exigences	Niveau	Simulation	Validation
Stabilité : C11 : Marge de gain C12 : Dépassement vis-à-vis d'une entrée en échelon	10 dB Aucun	– Dépassement faible	– NON
Rapidité : C21 : Temps de réponse à 5 % C22 : Vitesse angulaire de rotation de la quille	4 s maxi 8°/s maxi	≈ 2,5 s ≈ 20° s <sup>-1</sup>	OUI NON
Précision C3 : Erreur statique vis-à-vis d'une entrée en échelon	Nulle	Difficile à mesurer	–

**Comportement pour une commande de faible amplitude**

**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Correction**

En BO, on va avoir  $v(0^+) = 5 \cdot K'_C = 5,5 \text{ V}$ .  
 $v(0^+) < 10 \text{ V}$ . On est ici en BO. La tension ne peut donc pas dépasser la tension de saturation.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

**Correction**

Pour de telles tension, on est donc en régime **linéaire**.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{\text{BO}}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Correction**

On a :  $H_{\text{BO}}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ . En conséquences,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$  et  $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$ .

On a donc une asymptote de  $-20 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $-60 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$ .

De plus, pour  $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$ .

**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Correction**

On a  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la

différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

#### Correction

L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) :  $\Delta K = 20 \log \left( \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{2 \times 0,3\sqrt{1-0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB.}$

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{\text{COR}} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

#### Correction

On a  $b > 1$  donc  $T < bT$  et  $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$ .

Pour  $\omega < \frac{1}{bT}$  on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour  $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de  $-180^\circ$ .

Pour  $\omega > \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de  $0^\circ$ .

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

#### Correction

$$|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1+b}{1+b} = -10 \log b.$$

**Question 13** Pour  $K_{\text{COR}} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{\text{BO}}$  à  $\omega^*$  :

- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

#### Correction

D'une part, on veut que  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = -4,8$  soit  $10 \log b = 4,8$  et  $b = 3,02$ . D'autre part,  $\omega^* = \omega_r$  et  $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127 \text{ s.}$

Par ailleurs, on a donc  $\phi(\omega^*) = \arcsin \left( \frac{1-b}{1+b} \right) = \arcsin \left( \frac{1-3,02}{1+3,02} \right) \simeq -28,79^\circ.$

## Validation du cahier des charges

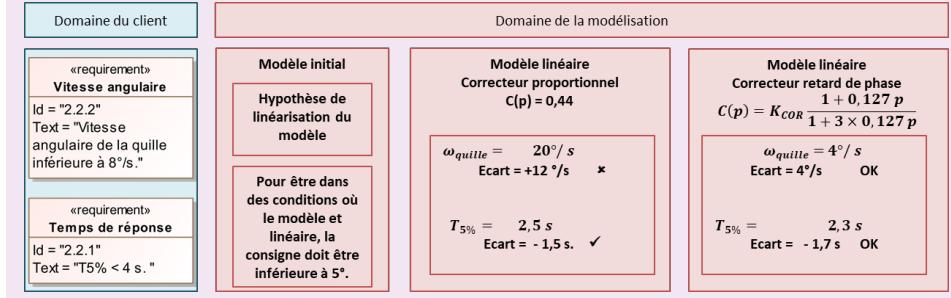
**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

### Correction

En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement  $2/0,5 \approx 4^\circ/s$ .  
 $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/s < 8^\circ/s$ .  
CDCF validé.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

### Correction





# TD 5

## Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

C1-02

C2-04

### Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	<b>Ecart statique</b> en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	<b>Ecart de traînage</b> (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	<b>Marge de phase</b>	$M\varphi \geq 45^\circ$
	<b>Pulsation de coupure en boucle ouverte</b> (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$



### Modélisation du moteur à courant continu<sup>3</sup>

Hypothèses et données :

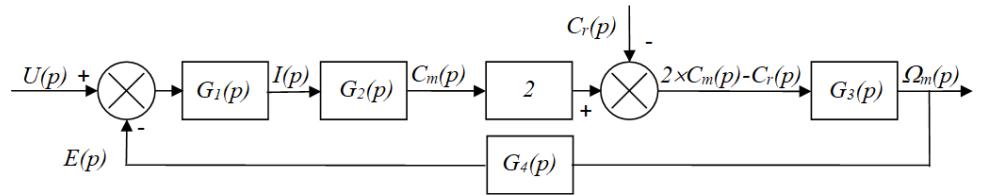
- ▶ on suppose les conditions initiales nulles ;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- ▶  $L = 0,59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur ;
- ▶  $R = 0,0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur ;
- ▶  $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur) ;
- ▶  $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$  ;
- ▶ loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.

3: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$  ;
- ▶  $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs ;
- ▶  $i(t)$  intensité traversant un moteur ;
- ▶  $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur ;
- ▶  $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur ;
- ▶  $c_m(t)$  couple d'un seul moteur ;
- ▶  $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.



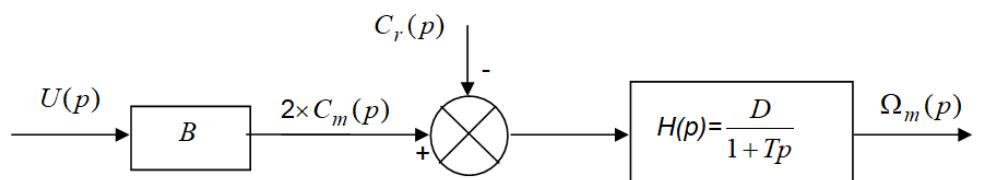
**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).

**Question 3** Choisir et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



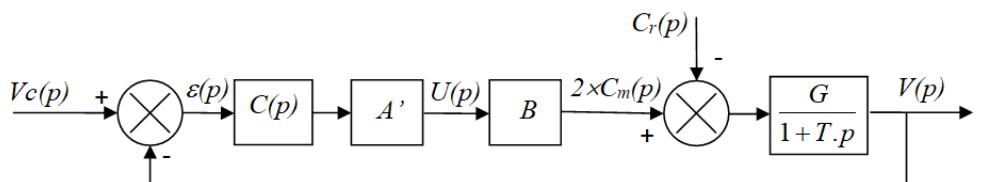
**Question 4** Donner la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- ▶ La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain  $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E = 0,1 \text{ m}$  (réducteur et rayon de la poulie).

**Question 5** Déterminer l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$  sN ;  $G = 6 \cdot 10^{-5}$  m/(sNm) et  $T = 0,47$  s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

## Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 6** Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 7** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s. Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 8** Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270$  Nm qui modéliseraient la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 9** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460$  Nm qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 10** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 11** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

## Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur  $C(p) = \frac{C_i}{p}$ .

**Question 12** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

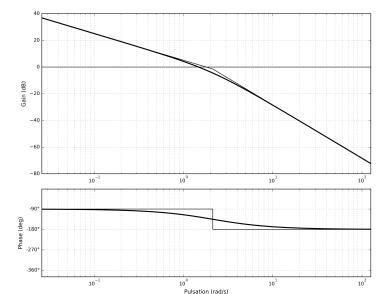
**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracer également l'allure des courbes.

**Question 14** Donner la valeur maximale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 15** Trouver la valeur minmale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier.

**Question 16** On suppose  $C_r(p)=0$ . Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s.

**Question 17** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculer numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270$  Nm qui modéliseraient la descente des « Arcs ».



**FIGURE 12.9** – Diagramme de Bode correspondant à la question 13.

**Question 18** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 19** Calculer l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 20** Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 21** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de  $-135^\circ$  ?

**Question 22** Tracer en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a>1$ . Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

**Question 23** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculer numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

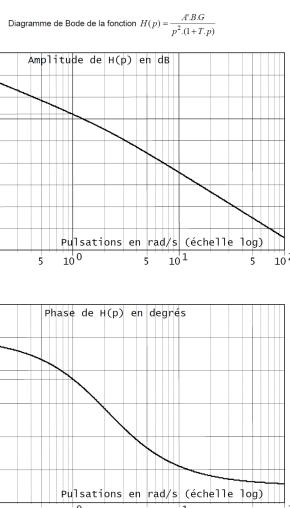
Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 24** Donner l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 25** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

**Question 26** Calculer numériquement la valeur à donner à  $K$  pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

**Question 27** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.



**Question 28** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ?

Justifier.

### Éléments de correction

1.  $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$ ,  $G_2(p) = k_T$ ,  $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$ ,  $G_1(p) = k_E$ .
2.  $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$  et  $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ .
3.  $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$  et  $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$ .
4.  $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$ ,  $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}\text{Nm}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .
5.  $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0  $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$ .
8.  $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$  – à vérifier.
9.  $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$ .
10.  $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varepsilon''_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$ .
11.  $C_0$  infini
12.  $\text{FTBO}(p) = \frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14.  $\omega_{0 \text{ dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$  et  $C_i \leq 1,67$ .
15.  $C_i \geq 0,61$ .
16. FTBO de classe 1  $\varepsilon'_S = 0$ .
17. Intégrateur en amont de la perturbation  $\varepsilon''_S = 0$ .
18. CDCF OK.
19.  $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
- 22.
23.  $a = 32,16$
24.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25.  $\tau = 0,176 \text{ s}$
26.  $K = 0,109$
- 27.
- 28.



# TD 5

## Vanoise Express – Corrigé

E3A – PSI – 2014.

C1-02

C2-04

### Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	<b>Ecart statique</b> en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	<b>Ecart de traînage</b> (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	<b>Marge de phase</b>	$M\varphi \geq 45^\circ$
	<b>Pulsation de coupure en boucle ouverte</b> (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$



### Modélisation du moteur à courant continu<sup>4</sup>

Hypothèses et données :

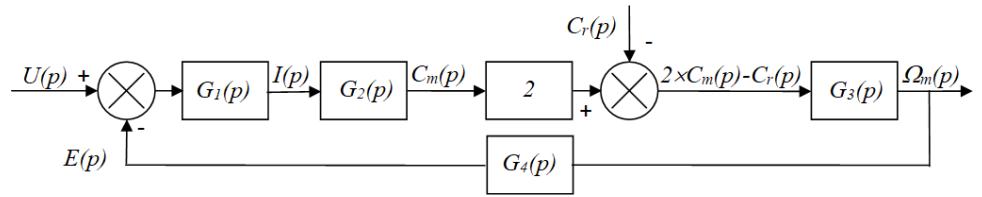
- ▶ on suppose les conditions initiales nulles ;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- ▶  $L = 0,59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur ;
- ▶  $R = 0,0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur ;
- ▶  $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur) ;
- ▶  $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$  ;
- ▶ loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.

4: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

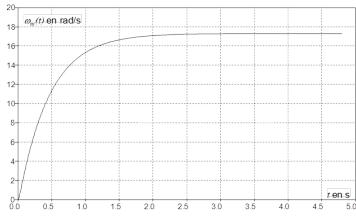
- ▶ on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$  ;
- ▶  $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs ;
- ▶  $i(t)$  intensité traversant un moteur ;
- ▶  $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur ;
- ▶  $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur ;
- ▶  $c_m(t)$  couple d'un seul moteur ;
- ▶  $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.



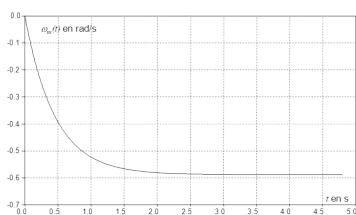
**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

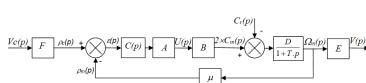
1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).



**FIGURE 12.10** – Réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V.



**FIGURE 12.11** – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m.



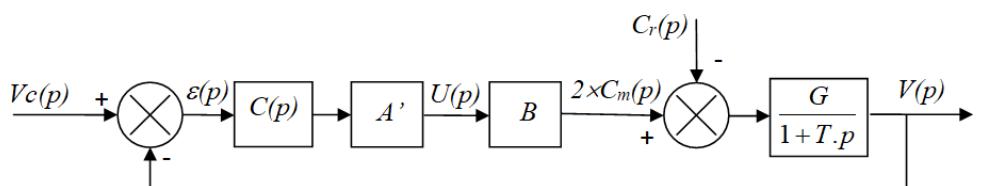
**Question 4** Donner la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- ▶ La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain  $\mu = 0,716 \text{ V s}/\text{rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E = 0,1 \text{ m}$  (réducteur et rayon de la poulie).

**Question 5** Déterminer l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$  sN ;  $G = 6 \cdot 10^{-5}$  m/(sNm) et  $T = 0,47$  s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

## Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 6** Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 7** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s. Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 8** Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270$  Nm qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 9** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460$  Nm qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 10** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 11** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

## Utilisation d'un correcteur intégral

$$\text{On choisit maintenant le correcteur } C(p) = \frac{C_i}{p}.$$

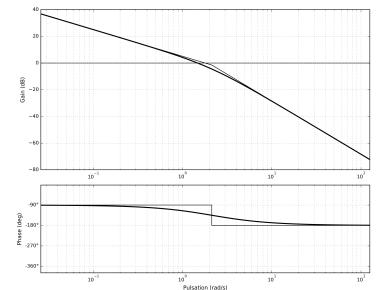
**Question 12** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $\text{FTBO}(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de Bode de  $\text{FTBO}(p)$ . Tracer également l'allure des courbes.

**Question 14** Donner la valeur maximale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 15** Trouver la valeur minmale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier. Il faut que la pulsation de coupure à 0 dB soit supérieure à 1 rad/s. Sur la BO non corrigée, on mesure que le gain vaut 4,23 dB pour cette pulsation. On a donc  $C_{i\min} = 0,61$ .

**Question 16** On suppose  $C_r(p)=0$ . Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s.



**FIGURE 12.12 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13.**

**Question 17** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculer numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon_s''$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modélisera la descente des « Arcs ».

**Question 18** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 19** Calculer l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 20** Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 21** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de  $-135^\circ$  ?

**Question 22** Tracer en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$ . Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

**Question 23** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculer numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

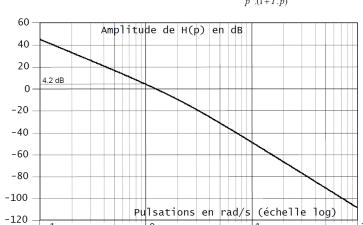
Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 24** Donner l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 25** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

**Question 26** Calculer numériquement la valeur à donner à  $K$  pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$



**Question 27** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.

**Question 28** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifier.

### Éléments de correction

1.  $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$ ,  $G_2(p) = k_T$ ,  $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$ ,  $G_4(p) = k_E$ .
2.  $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$  et  $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ .
3.  $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$  et  $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$ .
4.  $B = \frac{\mu}{E} = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$ ,  $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} \text{ Nm}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .
5.  $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0  $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$ .
8.  $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$  – à vérifier.
9.  $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$ .
10.  $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varepsilon''_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$ .
11.  $C_0$  infini
12. FTBO( $p$ ) =  $\frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14.  $\omega_{0 \text{ dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$  et  $C_i \leq 1,67$ .
15.  $C_i \geq 0,61$ .
16. FTBO de classe 1  $\varepsilon'_S = 0$ .
17. Intégrateur en amont de la perturbation  $\varepsilon''_S = 0$ .
18. CDCF OK.
19.  $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21.  $70^\circ$  de phase à ajouter.
- 22.
23.  $a = 32,16$
24.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25.  $\tau = 0,176 \text{ s}$
26.  $K = 0,109$
- 27.
- 28.



## TD 6

# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway – Sujet

Centrale Supelec – PSI – 2008.

### Présentation

#### Étude du régulateur de la boucle de vitesse

C1-02

C2-04

#### Objectif

Déterminer un régulateur de vitesse permettant d'atteindre les exigences suivantes :

- ▶ écart nul en régime permanent pour une consigne de vitesse constante et un effort perturbateur, dû à la poussée des passagers, constant;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  pour un modèle nominal qui sera précisé par la suite;
- ▶ bande passante la plus grande possible compte tenu de la contrainte de marge de phase;
- ▶ temps de réponse inférieur à 0,2 s en réponse à une variation en échelon de l'effort perturbateur.

La chaîne de régulation de vitesse est décrite par le schéma-blocs suivant où la fonction de transfert représente la chaîne de mesure de vitesse comportant un filtre du 1<sup>er</sup> ordre, de constante de temps  $\tau_f = 10$  ms, permettant de limiter l'impact des bruits de mesure et  $G$  est le gain de l'amplificateur de puissance alimentant le moteur.

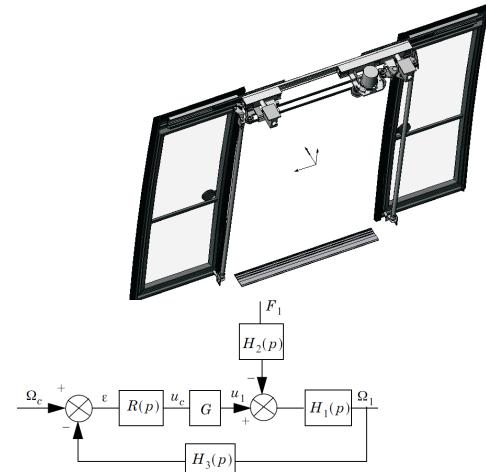
On choisit d'adopter pour cette chaîne un régulateur de type proportionnel-intégral dont la fonction de transfert est :  $R(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)$ .

**Question 1** Au regard des exigences du cahier des charges, justifier le choix de ce type de régulateur.

On cherche d'abord à évaluer le temps de réponse vis-à-vis des perturbations.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  entre les perturbations dues à la poussée des passagers et la vitesse du moteur, en fonction des différentes fonctions de transfert de la figure précédente. Montrer que la réponse fréquentielle peut être approchée par la relation :

$$\|T(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \min \left( \|H_1(j\omega)\|, \left\| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right\| \right)$$



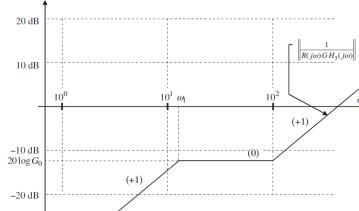
$$= ||H_2(j\omega)|| |M(j\omega)|.$$

Pour la suite, on adopte les modèles de commande simplifiés suivants :

$$H_1(p) = \frac{10}{p} \quad H_2(p) = 0,05 \quad H_3(p) = \frac{0,1}{1 + 0,01p} \quad G = 10.$$

Afin de limiter le périmètre de l'étude, on adopte sans justification les hypothèses suivantes :

- $1/T_i < 100 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- la situation considérée est celle de la figure suivante représentant le diagramme asymptotique de la fonction  $\left| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right|_{\text{dB}}$  où  $20 \log G_0 < 0$ .



**Question 3** Exprimer  $G_0$  en fonction de  $K_r$ . En utilisant la figure précédente, tracer le diagramme asymptotique de la fonction  $||H_1(j\omega)||$  (veiller au respect des pentes) et celui de  $||M(j\omega)||$  en adoptant l'approximation de la question précédente.

**Question 4** En déduire alors une approximation de la fonction de transfert  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en exprimant toutes les brisures en fonction de  $K_r$  et  $T_i$ .

**Question 5** Proposer une nouvelle expression approchée de  $T(p)$  sous la forme  $T_a(p) = \frac{N(p)}{1 + \tau p}$  où  $N(p)$  est le numérateur de  $T(p)$ ? En utilisant la forme approchée de  $T_a(p)$ , déterminer l'évolution de la vitesse  $\Omega_1(t)$  en réponse à un échelon de la force de perturbation et tracer son allure.

**Question 6** En se référant à des fonctions types connues donner, en fonction de  $T_i$ , un ordre de grandeur du temps de réponse vis-à-vis de la force perturbatrice.

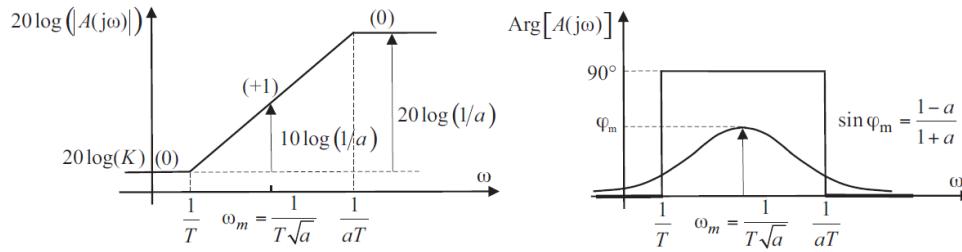
**Question 7** Justifier alors l'intérêt d'adopter pour  $T_i$  la valeur la plus petite possible.

**Question 8** En vous aidant de tracés succincts de diagrammes de Bode, analyser la stabilité du système bouclé dans les deux cas :  $\frac{1}{T_i} > 100 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{1}{T_i} < 100 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 9** En prenant  $K_r = 1$ , tracer les diagrammes de Bode asymptotiques (module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée et l'allure de la courbe réelle du diagramme de phase. Veiller à effectuer ce tracé de façon à respecter une situation stable du système en boucle fermée.

**Question 10** En utilisant la représentation dans le plan de Bode donnée figure suivante, déterminer quelle est la valeur  $T_{i\min}$  la plus petite possible que l'on peut conférer à  $T_i$  compatible avec la marge de phase minimale exigée par le cahier des charges (cette fonction servira uniquement à calculer en plaçant judicieusement pour obtenir la marge de phase souhaitée).

Diagrammes de Bode de la fonction  $A(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + aTp}$  ;  $a < 1$



**Question 11** En conservant la valeur  $T_{i\min}$  calculée précédemment, en déduire alors la valeur du gain  $K_r$  du régulateur permettant d'assurer la marge de phase souhaitée.

**Question 12** Vérifier si le cahier des charges est validé, et conclure sur l'adéquation du régulateur calculé vis-à-vis du problème posé.



## TD 6

# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway – Corrigé

Centrale Supelec – PSI – 2008.

## Présentation

### Étude du régulateur de la boucle de vitesse

C1-02

C2-04

#### Objectif

Déterminer un régulateur de vitesse permettant d'atteindre les exigences suivantes :

- ▶ écart nul en régime permanent pour une consigne de vitesse constante et un effort perturbateur, dû à la poussée des passagers, constant;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  pour un modèle nominal qui sera précisé par la suite;
- ▶ bande passante la plus grande possible compte tenu de la contrainte de marge de phase;
- ▶ temps de réponse inférieur à 0,2 s en réponse à une variation en échelon de l'effort perturbateur.

La chaîne de régulation de vitesse est décrite par le schéma-blocs suivant où la fonction de transfert représente la chaîne de mesure de vitesse comportant un filtre du 1<sup>er</sup> ordre, de constante de temps  $\tau_f = 10$  ms, permettant de limiter l'impact des bruits de mesure et  $G$  est le gain de l'amplificateur de puissance alimentant le moteur.

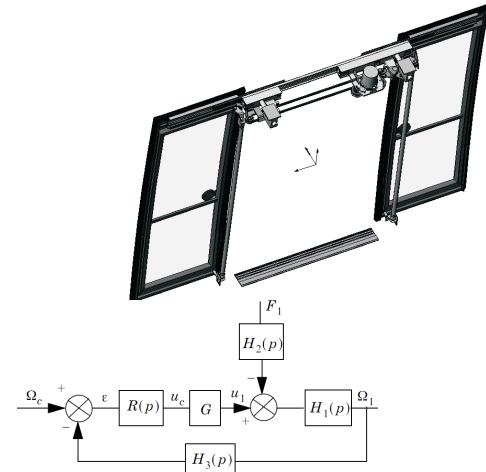
On choisit d'adopter pour cette chaîne un régulateur de type proportionnel-intégral dont la fonction de transfert est :  $R(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)$ .

**Question 1** Au regard des exigences du cahier des charges, justifier le choix de ce type de régulateur.

On cherche d'abord à évaluer le temps de réponse vis-à-vis des perturbations.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  entre les perturbations dues à la poussée des passagers et la vitesse du moteur, en fonction des différentes fonctions de transfert de la figure précédente. Montrer que la réponse fréquentielle peut être approchée par la relation :

$$\|T(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \min \left( \|H_1(j\omega)\|, \left\| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right\| \right)$$



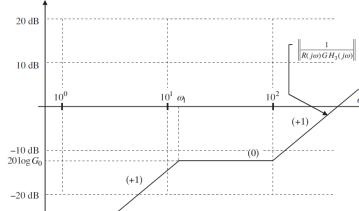
$$= ||H_2(j\omega)|| |M(j\omega)|.$$

Pour la suite, on adopte les modèles de commande simplifiés suivants :

$$H_1(p) = \frac{10}{p} \quad H_2(p) = 0,05 \quad H_3(p) = \frac{0,1}{1 + 0,01p} \quad G = 10.$$

Afin de limiter le périmètre de l'étude, on adopte sans justification les hypothèses suivantes :

- $1/T_i < 100 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- la situation considérée est celle de la figure suivante représentant le diagramme asymptotique de la fonction  $\left| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right|_{\text{dB}}$  où  $20 \log G_0 < 0$ .



**Question 3** Exprimer  $G_0$  en fonction de  $K_r$ . En utilisant la figure précédente, tracer le diagramme asymptotique de la fonction  $||H_1(j\omega)||$  (veiller au respect des pentes) et celui de  $||M(j\omega)||$  en adoptant l'approximation de la question précédente.

**Question 4** En déduire alors une approximation de la fonction de transfert  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en exprimant toutes les brisures en fonction de  $K_r$  et  $T_i$ .

**Question 5** Proposer une nouvelle expression approchée de  $T(p)$  sous la forme  $T_a(p) = \frac{N(p)}{1 + \tau p}$  où  $N(p)$  est le numérateur de  $T(p)$ ? En utilisant la forme approchée de  $T_a(p)$ , déterminer l'évolution de la vitesse  $\Omega_1(t)$  en réponse à un échelon de la force de perturbation et tracer son allure.

**Question 6** En se référant à des fonctions types connues donner, en fonction de  $T_i$ , un ordre de grandeur du temps de réponse vis-à-vis de la force perturbatrice.

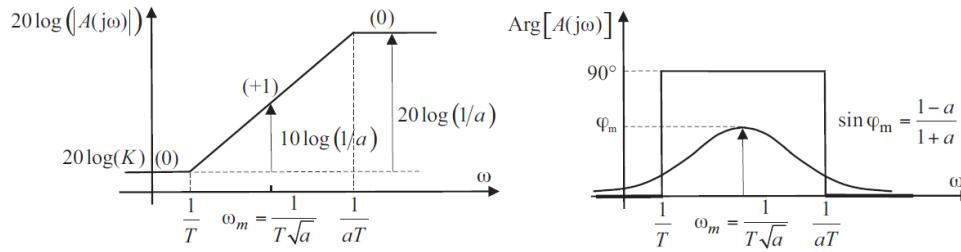
**Question 7** Justifier alors l'intérêt d'adopter pour  $T_i$  la valeur la plus petite possible.

**Question 8** En vous aidant de tracés succincts de diagrammes de Bode, analyser la stabilité du système bouclé dans les deux cas :  $\frac{1}{T_i} > 100 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{1}{T_i} < 100 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 9** En prenant  $K_r = 1$ , tracer les diagrammes de Bode asymptotiques (module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée et l'allure de la courbe réelle du diagramme de phase. Veiller à effectuer ce tracé de façon à respecter une situation stable du système en boucle fermée.

**Question 10** En utilisant la représentation dans le plan de Bode donnée figure suivante, déterminer quelle est la valeur  $T_{i\min}$  la plus petite possible que l'on peut conférer à  $T_i$  compatible avec la marge de phase minimale exigée par le cahier des charges (cette fonction servira uniquement à calculer en plaçant judicieusement pour obtenir la marge de phase souhaitée).

Diagrammes de Bode de la fonction  $A(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + aTp}$  ;  $a < 1$



**Question 11** En conservant la valeur  $T_{i\min}$  calculée précédemment, en déduire alors la valeur du gain  $K_r$  du régulateur permettant d'assurer la marge de phase souhaitée.

**Question 12** Vérifier si le cahier des charges est validé, et conclure sur l'adéquation du régulateur calculé vis-à-vis du problème posé.



## TD 7

# Vision en réalité augmentée pour hélicoptère ★ – Sujet

Concours Centrale Supelec 2014.

### Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

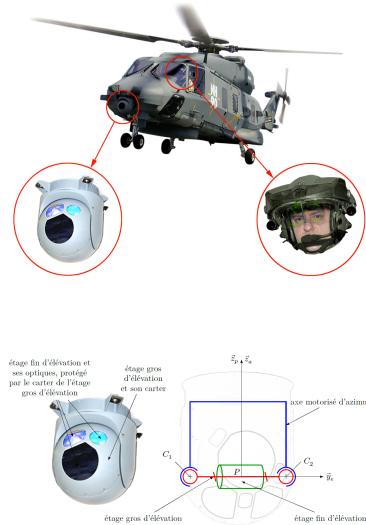
Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse  $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$  est établie par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$ . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  obtenues par la centrale inertuelle du porteur.

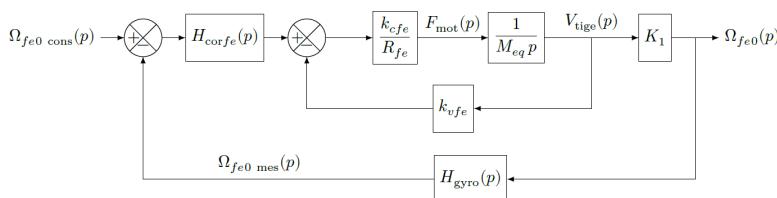
C1-02

C2-04



Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

$$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}, k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}, \\ \text{on note } K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}, R_{fe} = 7,5 \Omega.$$



Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que  $H_{corfe}(p) = 1$ .

**Question 1** Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0\ cons}(p)}$ , en fonction de  $K_1$ ,  $\tau_{gyro}$ ,  $M_{eq}$ ,  $K_{fe}$  et  $R_{fe}$ .

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que  $H_{fe1}(p)$  peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :  $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$ .

**Question 2** En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en en rapidité et en précision.

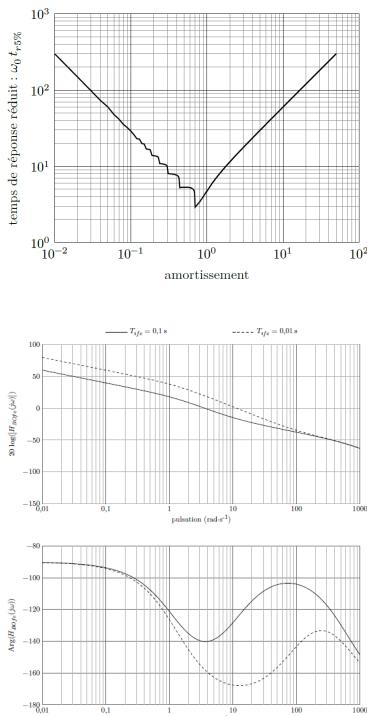
On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme  $H_{cor\ fe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right)$ . La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors

$$H_{BOfe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}$$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de  $H_{BOfe}(j\omega)$  pour  $K_{pfe} = 1$  et  $T_{ife} = 0,1$  s puis  $T_{ife} = 0,01$  s.

**Question 3** Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de  $H_{BOfe}(j\omega)$  (Bode) pour  $T_{ife} = 0,1$  s, en indiquant la pulsation  $\frac{1}{T_{ife}}$ .

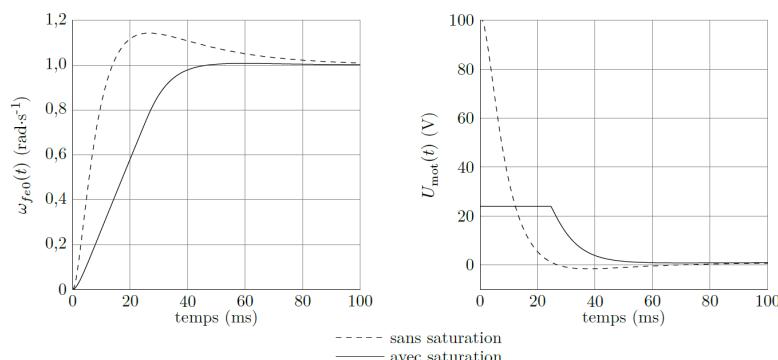
La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation  $\omega_{max}$  telle que  $\omega_{max} \in \left[ \frac{1}{T_{ife}} ; 600 \right] \text{ rad s}^{-1}$ .



**Question 4** En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de  $\omega_{max}$ , calculer la valeur de  $T_{ife}$  comprise dans la décade [0,01 s; 0,1 s] qui permet de régler ce maximum à  $-120^\circ$ .

**Question 5** Pour le réglage de  $T_{ife}$  calculé à la question précédente avec  $K_{pfe} = 1$  et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de  $K_{pfe}$  qui permet de respecter le critère de marge de phase.

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$ . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$  déterminés précédemment. La réponse simulée  $\omega_{fe0}(p)$  de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon  $\omega_{fe0\ cons}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$  est donnée sur la figure suivante.



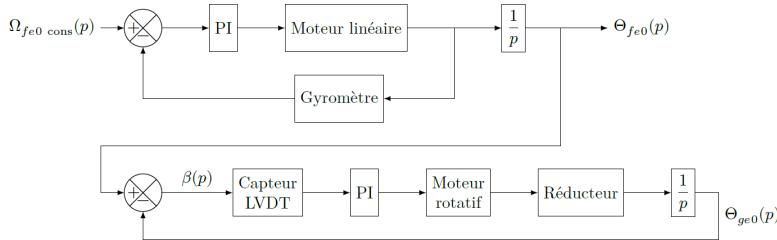
**Question 6** D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

## Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

### Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$ , c'est-à-dire que l'angle  $\beta(t)$  doit rester dans l'intervalle  $[-5^\circ, +5^\circ]$ . Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$ . Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.



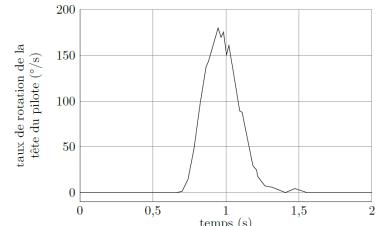
La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut alors être utilisé comme signal de consigne envoyé à l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

**Question 7** À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  exprimé en  $\text{rad s}^{-1}$ , sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de  $\theta_{fe0\ cons}(t)$ , exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

**Question 8** À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

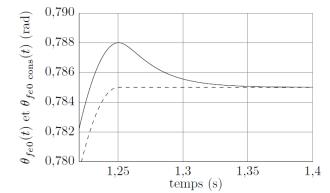
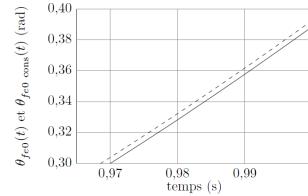
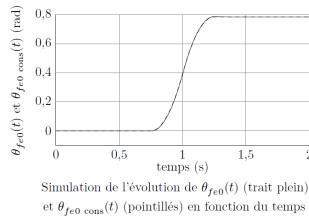
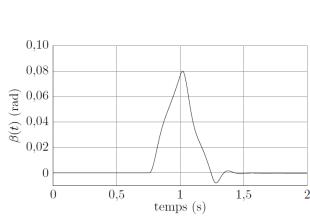
Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$  pour le signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.



**Question 9** À partir des figures suivantes :

- ▶ vérifier si l'hypothèse  $\vec{u} \simeq \vec{z}_e$  reste valide ;
- ▶ pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures, conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

**TABLE 12.1 – Zooms de  $\theta_{fe0}(t)$  (trait plein) et  $\theta_{fe0\ cons}(t)$  (pointillés)**  
en fonction de temps



# TD 7

## Vision en réalité augmentée pour hélicoptère ★ – Corrigé

Concours Centrale Supelec 2014.

### Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

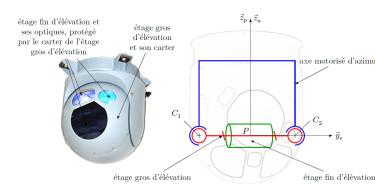
Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse  $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$  est établie par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$ . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  obtenues par la centrale inertuelle du porteur.

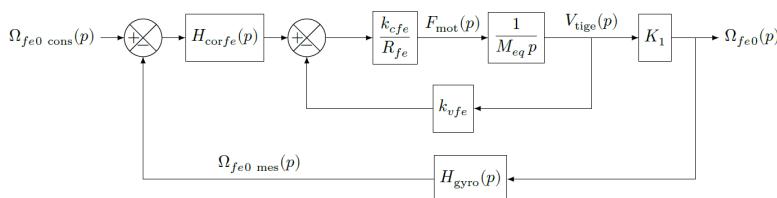
C1-02

C2-04



Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

$$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}, k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}, \\ \text{on note } K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}, R_{fe} = 7,5 \Omega.$$



Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que  $H_{corfe}(p) = 1$ .

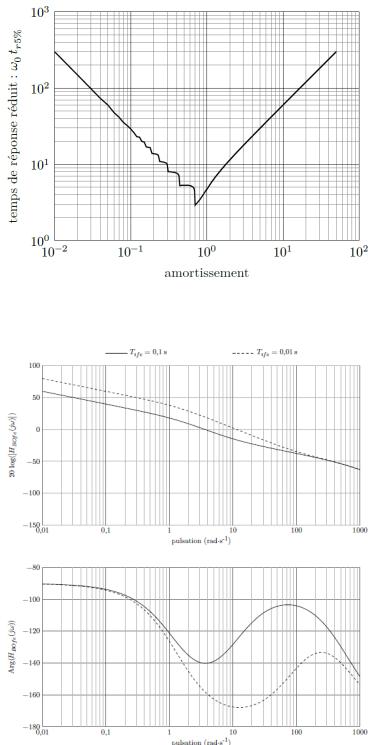
**Question 1** Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0 \text{ cons}}(p)}$ , en fonction de  $K_1$ ,  $\tau_{\text{gyro}}$ ,  $M_{\text{eq}}$ ,  $K_{fe}$  et  $R_{fe}$ .

#### Correction

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que  $H_{fe1}(p)$  peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :  $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$ .

**Question 2** En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en rapidité et en précision.

#### Correction



On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme  $H_{cor fe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife} p} \right)$ . La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors

$$H_{BOfe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife} p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}.$$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de  $H_{BOfe}(j\omega)$  pour  $K_{pfe} = 1$  et  $T_{ife} = 0,1$  s puis  $T_{ife} = 0,01$  s.

**Question 3** Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de  $H_{BOfe}(j\omega)$  (Bode) pour  $T_{ife} = 0,1$  s, en indiquant la pulsation  $\frac{1}{T_{ife}}$ .

#### Correction

La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation  $\omega_{\max}$  telle que  $\omega_{\max} \in \left[ \frac{1}{T_{ife}}; 600 \right] \text{ rad s}^{-1}$ .

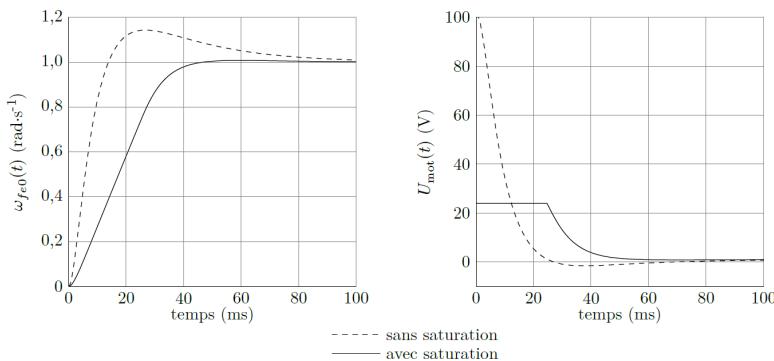
**Question 4** En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de  $\omega_{\max}$ , calculer la valeur de  $T_{ife}$  comprise dans la décade [0,01 s; 0,1 s] qui permet de régler ce maximum à  $-120^\circ$ .

#### Correction

**Question 5** Pour le réglage de  $T_{ife}$  calculé à la question précédente avec  $K_{pfe} = 1$  et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de  $K_{pfe}$  qui permet de respecter le critère de marge de phase.

#### Correction

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$ . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$  déterminés précédemment. La réponse simulée  $\omega_{fe0}(p)$  de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon  $\omega_{fe0\ cons}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$  est donnée sur la figure suivante.



**Question 6** D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

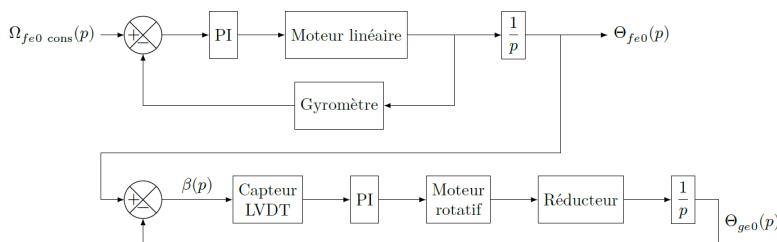
### Correction

## Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

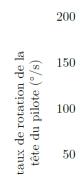
### Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$ , c'est-à-dire que l'angle  $\beta(t)$  doit rester dans l'intervalle  $[-5^\circ, +5^\circ]$ . Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$ . Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.



La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut alors être utilisé comme signal de consigne envoyé à l'axe motorisé d'élévation du FLIR.



Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

**Question 7** À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  exprimé en rad s<sup>-1</sup>, sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de  $\theta_{fe0\ cons}(t)$ , exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

#### Correction

**Question 8** À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

#### Correction

Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo}(t)$  pour le signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.

**Question 9** À partir des figures suivantes :

- ▶ vérifier si l'hypothèse  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$  reste valide;
- ▶ pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures, conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

#### Correction