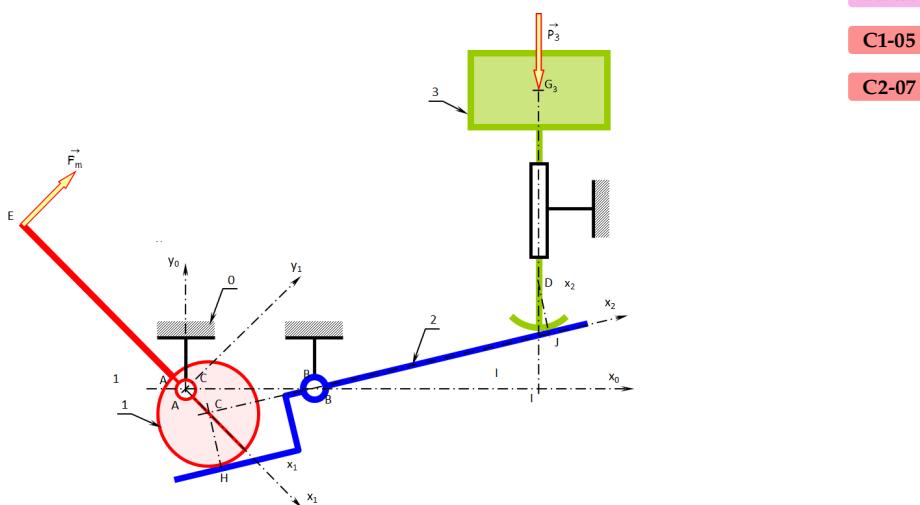


Application 1

Mécanisme de levage – Sujet

Ressources de l'équipe pédagogique La Martinière Monplaisir.

Le mécanisme représenté schématiquement ci-dessus est destiné à assurer le levage d'une charge liée au coulisseau (3) au moyen d'un levier à excentrique (1) et d'un balancier (2).



B2-14

C1-05

C2-07

Objectif

Objectif : Dans cette étude, on va mettre en évidence l'influence du frottement sur l'équilibre d'un système.

On note \vec{P}_3 le poids de la charge appliquée sur le coulisseau et \vec{F}_m l'effort appliqué en E par l'opérateur sur le levier à excentrique (1).

Paramétrage géométrique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= L_0 \vec{x}_0; \overrightarrow{AE} = -L_1 \vec{x}_1; \overrightarrow{BI} = d_0 \vec{x}_0; \overrightarrow{AC} = e_1 \vec{x}_1; \overrightarrow{HC} = R_1 \vec{y}_2; \overrightarrow{BJ} = \lambda_{32} \vec{x}_2; \overrightarrow{ID} = \\ &\lambda_{30} \vec{y}_0; \overrightarrow{JD} = R_3 \vec{y}_2; (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{(1/0)}; (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_{(2/0)}. \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps que toutes les liaisons sont sans frottement.

Question 1 Justifier que le système est statiquement plan.

Question 2 En écrivant les équations associées à l'équilibre de chacune des pièces, établir la relation liant F_m et P_3 à l'équilibre. *On cherchera à écrire le minimum d'équations.*

Question 3 Pour quelle(s) valeur(s) particulière(s) de $\theta_{1/0}$ l'équilibre est-il possible avec un effort F_m nul ?

Question 4 Établir les équations permettant de relier la translation $\lambda_{3/0}$ du coulisseau, la position angulaire $\theta_{(1/0)}$ et les constantes géométriques du mécanisme.

Question 5 En établissant un bilan de puissance, vérifier les relations obtenues.

On suppose que les contacts en H et J s'effectuent avec frottement de même coefficient f

Question 6 On suppose que les contacts en H et J s'effectuent avec frottement de même coefficient f . Reprendre la question 2 dans le cadre de cette hypothèse. On se place dans la situation de descente de la charge.

Distinguer deux situations, selon que J est situé au-dessus ou en dessous de l'axe (B, \vec{x}_0) .

Question 7 Définir le domaine de valeurs de $\theta_{(1/0)}$ pour lequel l'équilibre du système est possible sans exercer d'effort sur le levier (1) ($F_m = 0$).

Application 2

Suspension automobile – Sujet

Ressources de Florestan MATHURIN.

On s'intéresse à une suspension automobile dont on donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel ainsi qu'une modélisation. L'objectif est de vérifier si la suspension satisfait le niveau du critère d'affaissement statique maximal du cahier des charges, c'est à dire vérifier si la voiture, soumise à son propre poids, s'affaisse de moins ou de plus de 12 cm, suite à l'écrasement des amortisseurs.

B2-14

C1-05

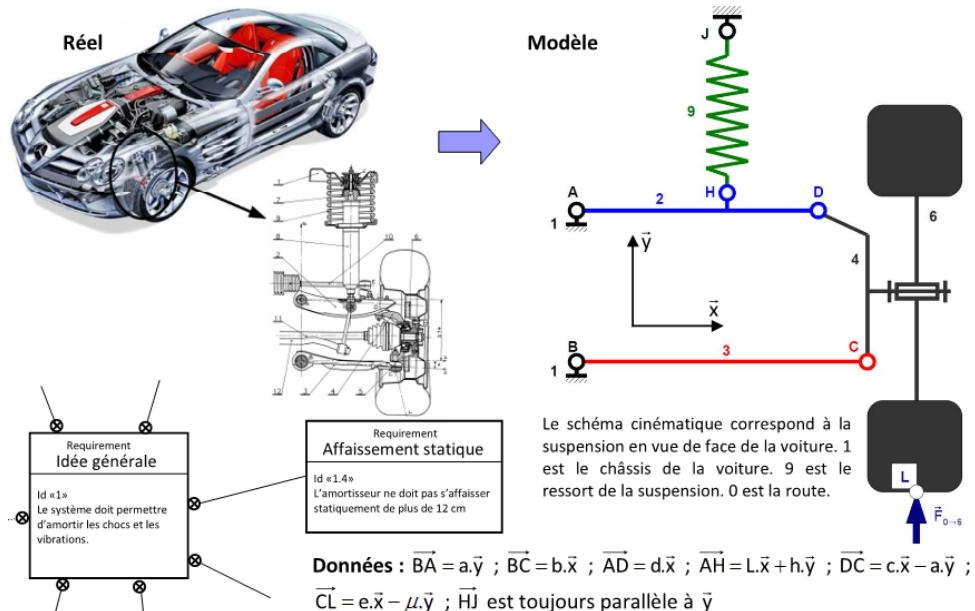
C2-07

Question 1 Déterminer toutes les inconnues d'effort en fonction de F_{06} .

Données : $a = 16\text{cm}$, $b = 33\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$, $d = 25\text{cm}$, $h = 3\text{cm}$, $L = 15\text{cm}$, $e = 9\text{cm}$, $\mu = 18\text{cm}$.

La raideur du ressort est $k = 100\,000\text{N/m}$. La masse de la voiture est de 2200 kg.

Question 2 Conclure quant à la capacité de la suspension de voiture à satisfaire l'exigence Affaissement statique du cahier des charges.



Application 3

Étude d'un robot Kuka – Sujet

D'après CCP MP 2010.

Mise en situation

Le robot Kuka, objet de cette étude, a pour objectif la palettisation de bidons utilisés en agriculture biologique (compléments permettant d'améliorer les qualités nutritives des produits agricoles).

Objectif

Suite à l'appui sur le bouton d'arrêt d'urgence, le robot doit immédiatement s'immobiliser dans la position courante. On souhaite alors vérifier que les freins équipant le robot sont suffisants pour assurer sa configuration d'équilibre dans le cas d'une charge maximale de 50 daN (préhenseur + bidon de 40 litres) et qu'il ne faudra pas mettre des actionneurs en parallèle.

On se place dans la situation particulière définie figure suivante avec $\alpha_2 = -90^\circ$ et $\alpha_3 = +90^\circ$.

On donne :

- $O_2O_3 = O_6O_7 = 1250 \text{ mm}$;
- $O_3O_{10} = O_8O_9 = 1350 \text{ mm}$;
- $O_2O_6 = O_3O_7 = O_3O_8 = O_9O_{10} = 500 \text{ mm}$;
- $\vec{P} = -500\vec{z}_4$.

On admettra pour simplifier que le point O_4 est situé sur l'axe \vec{x}_3 et que l'axe \vec{z}_4 passe par le point O_9 . De même, les poids propres des pièces seront négligés par rapport aux autres actions.

Les liaisons pivot sont supposées parfaites (pas de frottement).

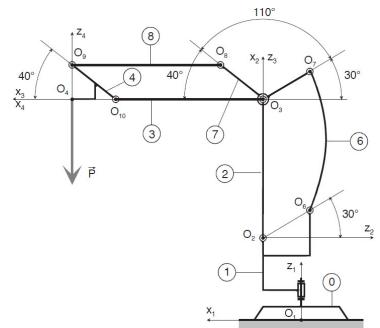
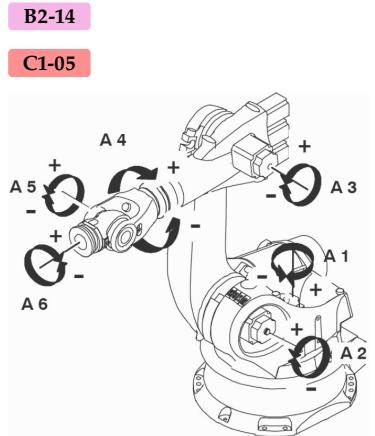
Les couples de freinage maxi Mf_2 et Mf_3 des freins associés aux moteurs M_2 et M_3 sont de 5 mN sur l'arbre moteur. On leur adjoint en série un réducteur de rapport 1/200.

Question 1 Réaliser le graphe de structure du mécanisme.

Question 2 Déterminer les actions de la barre 8 sur le poignet 4 et du bras 3 sur le poignet 4.

Question 3 En isolant l'ensemble 3 et 4 et en considérant les informations fournies dans le tableau suivant, déterminer l'expression du moment Mf_3 correspondant à l'action du frein sur la pièce 3 en O_3 .

Moteur	Axe	Monté sur	Entraîne	Nmaxi ($\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$)	Puissance (kW)	Réducteur	Frein (Nm)
M1	A1	0	1	3500	4,5	200	5
M2	A2	1	2	3500	3,5	200	5
M3	A3	2	3	3500	2,5	200	5
M4	A4	4	5	3500	1,5	100	5



Le dispositif de freinage ne permet qu'un couple maxi de 5 mN sur l'axe moteur.

Question 4 Quel est alors le couple de freinage disponible en sortie du réducteur ?

Question 5 Le maintien du freinage est-il assuré ?

On veut alors vérifier que le dispositif de freinage du moteur M_2 convient.

Question 6 En isolant la pièce 7, déterminer l'action de la barre 6 sur la pièce 7.

Question 7 En considérant l'ensemble 2, 3, 4, 7, 8, déterminer l'expression du moment M_{f_2} correspondant à l'action du frein sur la pièce 2 en O_2 . Calculer M_{f_2} .

Question 8 Le dispositif de freinage étant identique à celui de l'axe 3, le maintien du freinage est-il assuré ?

TD 1 : Modélisation d'un hayon de coffre électrique – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

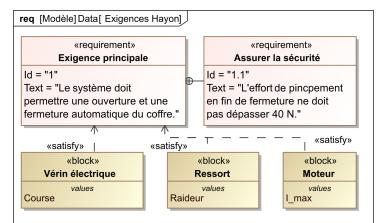
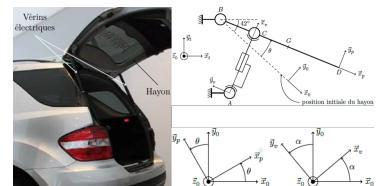
Mise en situation

Le PCS (Power Closure System), conçu par Valéo, est un système d'ouverture et de fermeture automatique de hayon de coffre automobile. Le système étant symétrique, les deux vérins sont ramenées dans le plan d'évolution de la porte de coffre et leur action mécanique s'exerçant sur la porte de coffre est supposée identique.

On donne un diagramme d'exigence partiel du système étudié.

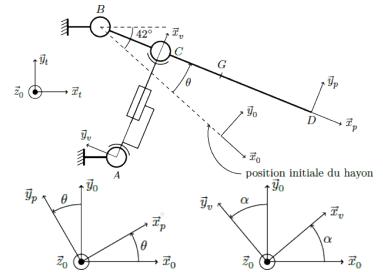
Objectif

- Déterminer les caractéristiques du vérin répondant au cahier des charges : longueur du vérin en position coffre ouvert et coffre fermé, course du vérin, raideur du ressort équipant le vérin.
- Déterminer le couple moteur maximal nécessaire pour le maintien en position du hayon.
- Déterminer le courant de pincement afin que l'effort de pincement soit inférieure à 40 N pendant 10 ms.



Le repère $(B; \vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_0)$ est lié à la Terre. L'accélération de la pesanteur s'écrit $\vec{g} = -g \vec{y}_t$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. La structure du véhicule et la porte de coffre sont en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) .

Le repère $(B; \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_0)$ est lié à la porte de coffre S_1 de masse $M = 30 \text{ kg}$. Le repère $(B; \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_0)$ est lié au corps du vérin. La sortie de tige par rapport au corps du vérin S_3 se fait dans la direction du vecteur \vec{x}_v . Les liaisons entre le corps du vérin S_3 et le bâti S_0 ainsi qu'entre la tige du vérin S_2 et la porte de coffre S_1 sont des liaisons rotules de centres respectifs A et C . Le point D représente l'extrémité de la porte du coffre. La hauteur du point D par rapport au sol suivant la verticale est de 0,7 m en position coffre fermé et de 1,8 m en position coffre ouvert.



Caractéristiques géométriques du vérin

Le centre d'inertie du coffre est situé en G tel que $\vec{BG} = \lambda \vec{x}_p$ avec $\lambda = 0,6 \text{ m}$.

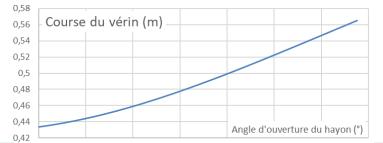
$\vec{AB} = -a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0$, $\vec{AC} = L\vec{x}_v$, $\vec{BC} = c\vec{x}_p$, $\vec{BD} = d\vec{x}_p$ avec $a = 0,55 \text{ m}$, $b = 0,14 \text{ m}$, $c = 0,14 \text{ m}$ et $d = 1 \text{ m}$. L'angle formé entre \vec{x}_0 et l'horizontale \vec{x}_t est $\theta_0 = 42^\circ$.

Question 1 Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

Question 2 Déterminer la longueur du vérin L en fonction de l'angle d'ouverture du coffre θ .

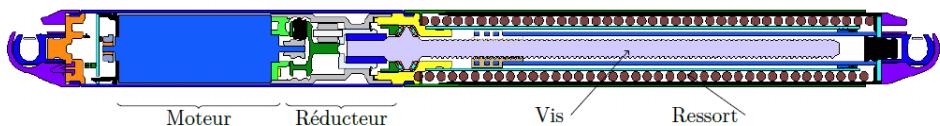
On donne la courbe donnant l'évolution de la course du vérin en fonction de l'ouverture du hayon.

Question 3 Déterminer les valeurs extrêmes de L , ainsi que la course du vérin.



Dimensionnement des caractéristiques du ressort

Les vérins utilisés sont constitués d'un moteur à courant continu, d'un réducteur à engrenage, d'une vis à billes et d'un ressort. Ce dernier permet d'assurer l'équilibre de la porte de coffre en cas de panne des vérins électriques.



On suppose dans un premier temps que le coffre est à l'équilibre.

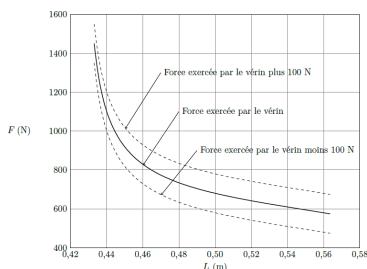
Question 4 Déterminer l'effort F exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de θ , α et des constantes du problème.

En exploitant les équations obtenues à partir de l'écriture de la fermeture géométrique obtenue précédemment, on montre que la relation entre θ et α s'écrit : $\tan \alpha = \frac{b + c \sin \theta}{-a + c \cos \theta}$.

On déduit de la question précédente le tracé de l'évolution de l'effort F nécessaire au maintien en équilibre du coffre en fonction de la longueur L du vérin.

On choisit d'utiliser un ressort précontraint au sein du vérin de manière à assister l'ouverture du coffre et à assurer l'équilibre du coffre sur une plage de fonctionnement maximal. On estime que les forces de frottement maximales au sein du vérin (essentiellement dues à la friction dans la vis) sont de l'ordre de $F_{\text{frot}} = 100 \text{ N}$.

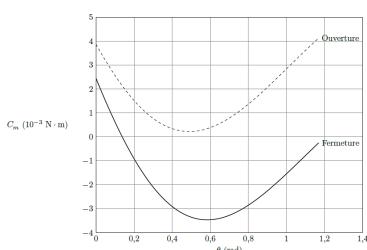
La figure précédente représente la force que doit exercer le vérin sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre de cette dernière en fonction de la longueur du vérin. Les courbes en pointillés représentent la force du vérin $\pm 100 \text{ N}$.



Question 5 Déterminer la raideur k du ressort et sa longueur à vide L_0 de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

La figure suivante représente l'évolution du couple moteur dans un vérin lors des phases d'ouverture et de fermeture du coffre.

Question 6 Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.

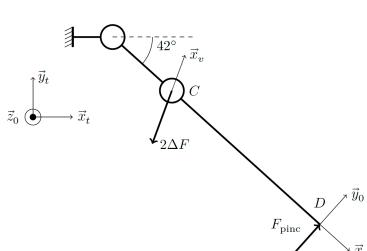


Réglage de la fonction sécurité des personnes

Pour limiter le risque d'accident lié au pincement d'un utilisateur, il est nécessaire de limiter le couple du moteur à courant continu durant la phase de fermeture du hayon.

On envisage la présence d'un obstacle empêchant la fermeture du coffre. On modélise l'action de l'obstacle sur la porte de coffre par un glisseur s'appliquant en D et s'exprimant $\vec{F}_{\text{pinc}} = F_{\text{pinc}} \vec{y}_p$.

On cherche à déterminer l'accroissement de couple moteur en cas de présence d'obstacle. On suppose ainsi que la porte de coffre est en équilibre sous l'effet du poids et de l'action des vérins. On ajoute ainsi l'effort de pincement F_{pinc} en D et on cherche l'accroissement d'effort $\Delta F \vec{x}_v$ qu'exercent chacun des vérins en C sur la porte en la supposant en équilibre.



On donne la relation entre le couple moteur et la force fournie par le vérin en régime quasi-statique : $C_m = \rho F$ avec $\rho = 7,89 \times 10^{-5}$ m.

Question 7 Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de ΔF l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

La constante de couple du moteur est donnée par $K_t = 9,5 \times 10^{-3}$ NmA⁻¹.

Question 8 En déduire la valeur numérique de l'accroissement ΔC_m de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

Synthèse

Question 9 Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminés.

TD 2 :

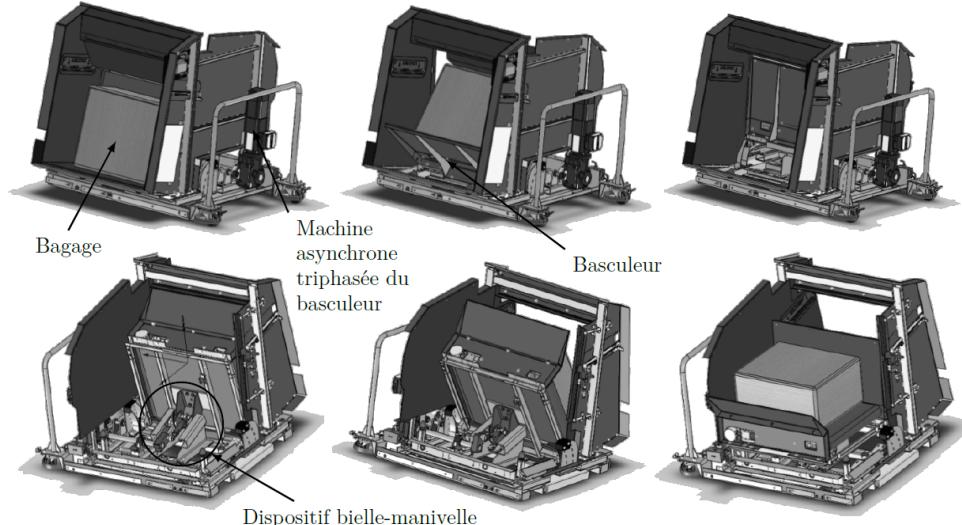
Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

Mise en situation

Le processus d'enregistrement des passagers dans les aéroports est en train de vivre une mutation en évoluant de la « banque d'enregistrement » classique vers une idée de « dépose bagages » automatisée. Cette évolution a été justifiée pour fluidifier le trafic passager notamment sur les destinations avec des fréquences très importantes, par exemple certains vols Paris-Province.

Le système DBA est constitué par un basculeur actionné par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone.



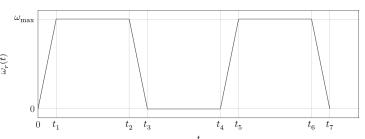
Recherche de la vitesse de rotation maximale

Objectif

Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).

Pour dimensionner correctement la machine asynchrone, la première étape est le calcul de la vitesse maximale de l'arbre moteur. On choisit comme loi de mouvement de rotation du moteur une loi en trapèze. On donne ainsi le profil de vitesse de rotation ω_r de l'arbre de sortie du réducteur par rapport au bâti.

Le rapport de réduction entre l'arbre moteur de vitesse de rotation et l'arbre de sortie de réducteur est noté $k = \frac{\omega_r}{\omega_{mot}} = \frac{1}{107,7}$. Compte tenu du temps de basculement du bagage de 8 s, les valeurs des temps sont les suivantes : $t_1 = 0,5$ s, $t_2 = 2,5$ s, $t_3 = 3$ s, $t_4 = 5$ s, $t_5 = 5,5$ s, $t_6 = 7,5$ s, $t_7 = 8$ s. L'arbre de sortie du motoréducteur doit faire un demi-tour entre 0 et t_3 , puis un demi-tour entre t_4 et t_7 .



Question 1 Déterminer ω_{\max} en fonction des différents t_i . Faire l'application numérique.

Question 2 En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale $\omega_{\text{mot max}}$. Faire l'application numérique et donner le résultat en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

Objectif

La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

Pour calculer le couple moteur maximal, on se place dans un cas quasi-statique et on néglige tous les effets dynamiques. Compte tenu de la construction du mécanisme (non linéaire), le couple moteur est variable et on le calcule dans une position particulière correspondant au couple maximal.

On note :

- S_0 le bâti;
- S_1 l'ensemble constitué par le chariot, le bagage et les galets, dont le centre de gravité est noté G et la masse est notée $m = 80 \text{ kg}$;
- S_2 la bielle DB de direction \vec{x}_2 ;
- S_3 l'arbre de sortie de réducteur et la manivelle $\overrightarrow{ED} = R\vec{x}_3$ avec $R = 86 \text{ mm}$.

Le mouvement est considéré comme plan. On néglige toutes les masses sauf celle de l'ensemble S_1 . Toutes les liaisons sont parfaites. Le référentiel lié au solide S_0 est considéré galiléen. On note l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Les liaisons entre S_0 et S_1 sont des liaisons sphère-plan de normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note I le point d'intersection des normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note $\overrightarrow{IB} = L_2\vec{x}_{12}$ et $\overrightarrow{IG} = x_G\vec{x}_0 + y_G\vec{y}_0$.

On note les angles α_i formés entre les vecteurs \vec{x}_0 et \vec{x}_i : $\alpha_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i)$ avec $i \in \{2; 3; 11; 12\}$.

La liaison entre S_1 et S_2 est une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) .

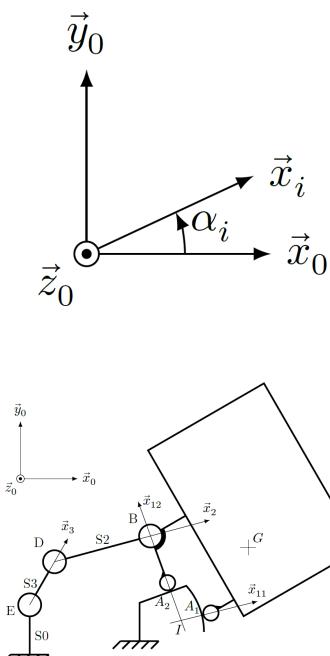
La liaison entre S_2 et S_3 est une liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) .

La liaison entre S_0 et S_3 est une liaison pivot d'axe (E_S, \vec{z}_0) .

On note F_B la norme de la résultante du torseur $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\}$.

Question 3 On note C_{red} le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle S_3 . Montrer que $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.

Dans la configuration choisie, on a $x_G = 506 \text{ mm}$, $L_2 = 140 \text{ mm}$, $\alpha_3 = 91^\circ$, $\alpha_{12} = 108^\circ$ et $\alpha_2 = 3^\circ$ (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).



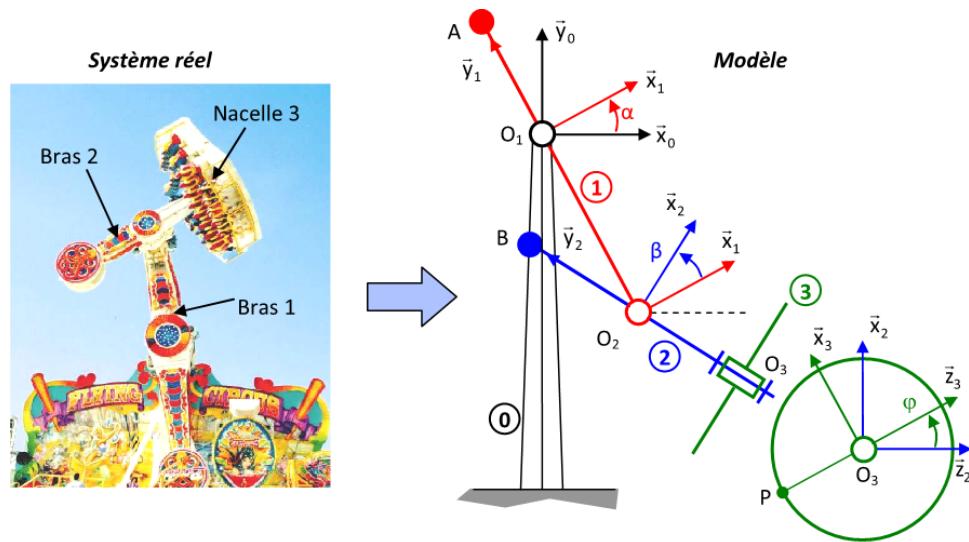
Question 4 En déduire la valeur numérique C_m du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

Application 4

Magic Arms – Sujet

Florestan Mathurin.

La manège Magic Arms dont la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 pièces disposées sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaires (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par ordinateur.



Le manège, schématisé ci-dessus, comporte :

- ▶ un bras principal 1 assimilé à une barre AO_1O_2 . Il est en liaison pivot parfait d'axe (O_1, \vec{z}_1) caractérisée par le paramètre α avec le bâti 0. On pose $\overrightarrow{O_1O_2} = -l_1\vec{y}_1$;
- ▶ un bras secondaire 2 assimilé à une barre BO_2O_3 . Il est en liaison pivot parfait d'axe (O_2, \vec{z}_2) caractérisée par le paramètre β avec le bras principal 1. On pose $\overrightarrow{O_2O_3} = -l_2\vec{y}_2$;
- ▶ une nacelle 2 assimilée à un disque de centre O_3 et de rayon R . Elle est en liaison parfaite d'axe (O_3, \vec{y}_2) caractérisée par le paramètre φ avec le bras 2. On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel P tel que $\overrightarrow{O_3P} = -R\vec{z}_3$.

Question 1 Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

Question 2 Calculer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 4 Calculer les produits vectoriels suivants : $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$, $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$, $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$.

Question 5 Calculer $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$, $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$ et $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

Question 6 Déterminer les valeurs des paramètres $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$ puis l'expression analytique des positions angulaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et $\varphi(t)$ dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes en sachant qu'à l'instant $t = 17$ s, on a $\alpha = 10,5$ rad, $\beta = 3,76$ rad et $\varphi = -10,676$ rad.

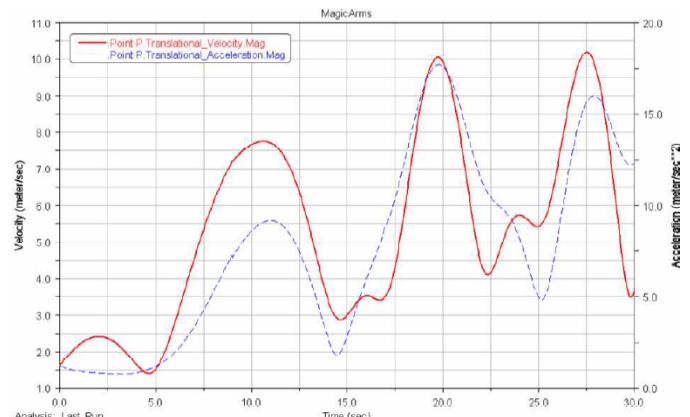
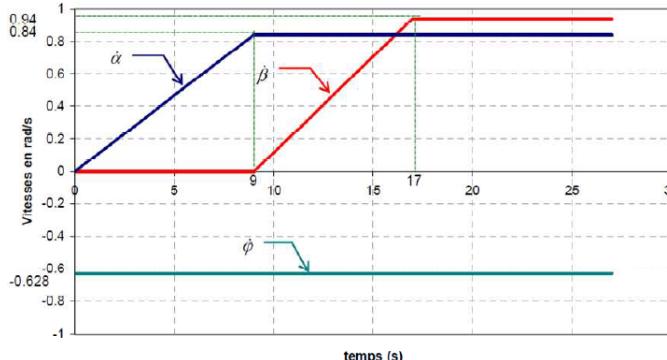
Question 7 Déterminer les valeurs numériques à l'instant $t_1 = 19,8$ s de α , β et φ .

Question 8 On pose $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2}\vec{x}_2 + V_{y2}\vec{y}_2 + V_{z2}\vec{z}_2$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2} , V_{y2} , V_{z2} puis les valeurs numériques de à $t_1 = 19,8$ s. (On donne : $l_1 = 3,9$ m, $l_2 = 2,87$ m, $R = 2,61$ m.)

Question 9 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$.

Question 10 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Le graphe ci-dessous (à droite), obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager P par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accélération du passager P par rapport au bâti 0 en fonction du temps.



Question 11 Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps $t_1 = 19,8$ s.

Question 12 Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

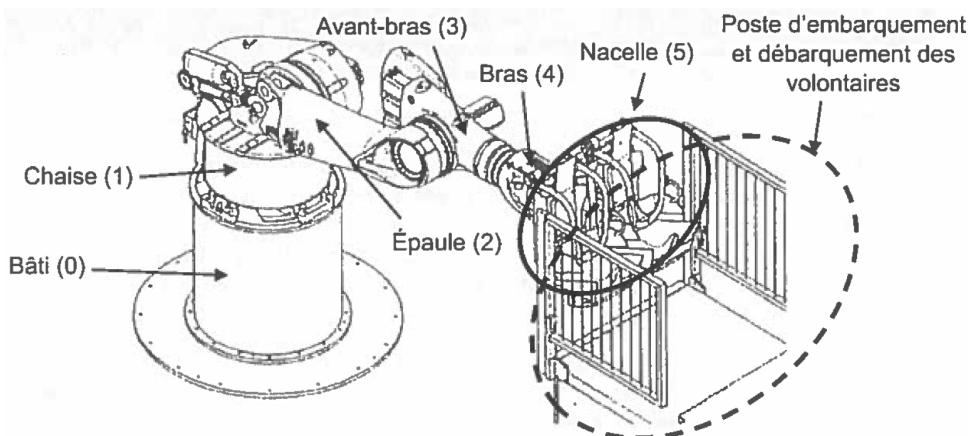
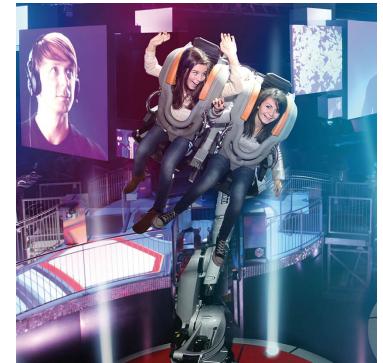
Application 5

Danse avec les robots – Sujet

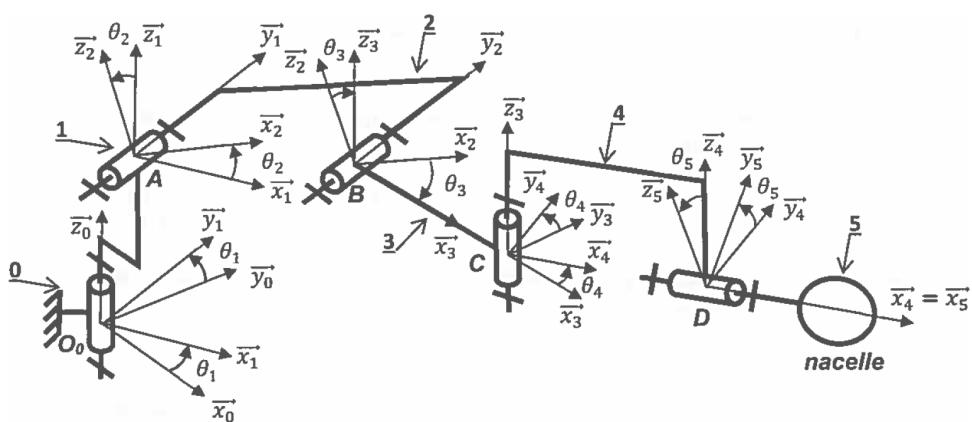
ICNA 2017.

« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remués au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.



On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

- ▶ On note $\mathcal{R}_0 = \left(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.
- ▶ On note $\mathcal{R}_1 = \left(O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$ le repère associé à la chaise 1 et $\theta_1 = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1 \right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1 \right)$ l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- ▶ On note $\mathcal{R}_2 = \left(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 \right)$ le repère associé à l'épaule 2, $\overrightarrow{O_0 A} = a \vec{z}_0 + b \vec{x}_1$ et $\theta_2 = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \right) = \left(\vec{z}_1, \vec{z}_2 \right)$ l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.

- On note $\mathcal{R}_3 = \left(B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 \right)$ le repère associé à l'avant-bras 3, $\overrightarrow{AB} = c\vec{x}_2$ et $\theta_3 = \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 \right) = \left(\vec{z}_2, \vec{z}_3 \right)$ l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- On note $\mathcal{R}_4 = \left(C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4 \right)$ le repère associé au bras 4, $\overrightarrow{BC} = d\vec{x}_3$ et $\theta_4 = \left(\vec{x}_3, \vec{x}_4 \right) = \left(\vec{y}_3, \vec{y}_4 \right)$ l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- On note $\mathcal{R}_5 = \left(D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5 \right)$ le repère associé à la nacelle 5, $\overrightarrow{CD} = e\vec{x}_4$ et $\theta_5 = \left(\vec{y}_4, \vec{y}_5 \right) = \left(\vec{z}_4, \vec{z}_5 \right)$ l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaire + harnais) est tel que $\overrightarrow{DG} = f\vec{x}_4 + h\vec{z}_5$.

On définit la position du point G dans la base $\mathcal{B}_0 = \left(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ telle que $\overrightarrow{O_0G} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$.

Question 1 Tracer les figures planes de changement de repère.

Question 2 Exprimer la position du point G suivant \vec{x}_0 .

Objectif

Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

Question 3 Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{V(G, 5/0)}$.

On limite désormais l'étude dans au cas où $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad s}^{-1}$, $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$.

Question 4 Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{\Gamma(G, 5/0)}$.

Question 5 Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.

Application 6

Robot de peinture – Sujet

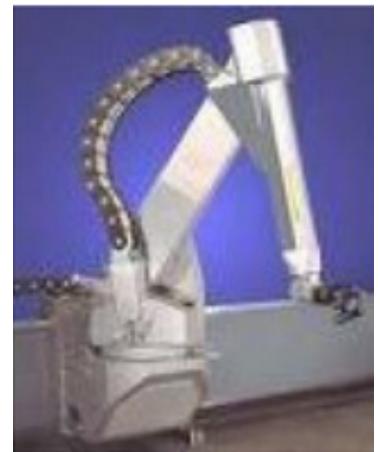
Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Robot de peinture

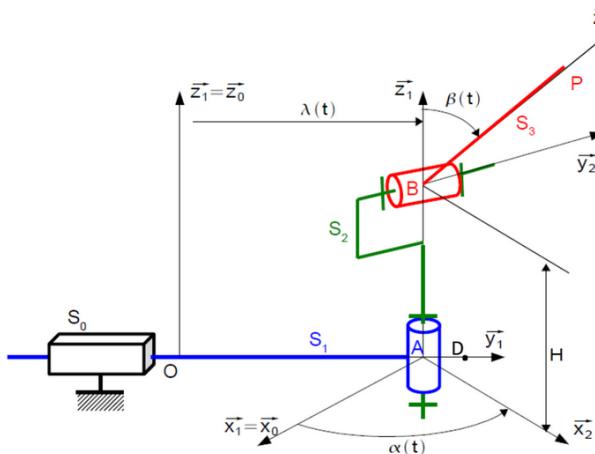
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



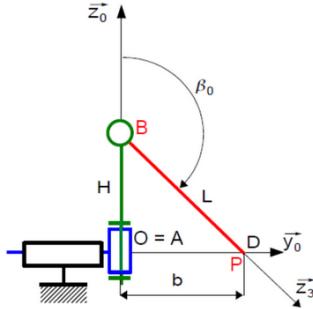
Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Shéma cinématique du robot



Position médiane (P est en D)
(et A en O)

Le chariot S_1 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en mouvement de translation de direction \vec{y}_0 par rapport au bâti S_0 de repère $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le corps S_2 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{z}_0) avec le chariot S_1 .

Le bras S_3 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{y}_2) avec le corps S_2 .

Question 1 Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

Question 2 Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_0$.

Question 6 Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants : $\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_2$, $\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$.

On a $\overrightarrow{OD} = b\vec{y}_0$ avec $b = \sqrt{L^2 - H^2}$. On désire que P décrive la droite (D, \vec{x}_0) à vitesse constante V , conformément au cahier des charges.

Question 7 Représenter sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, puis sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, les positions des points O, D, A, B et P du robot lorsque celui-ci est en position extrême (A est en D).

Question 8 Traduire, à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ le fait que P se déplace à la vitesse V selon \vec{x}_0 . En déduire $\dot{\beta}$.

Question 9 Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L, V, α et β_0 .

Question 10 A l'aide de la figure précédente, exprimer β_0 en fonction de b et L .

Question 11 Exprimer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V, b et α .

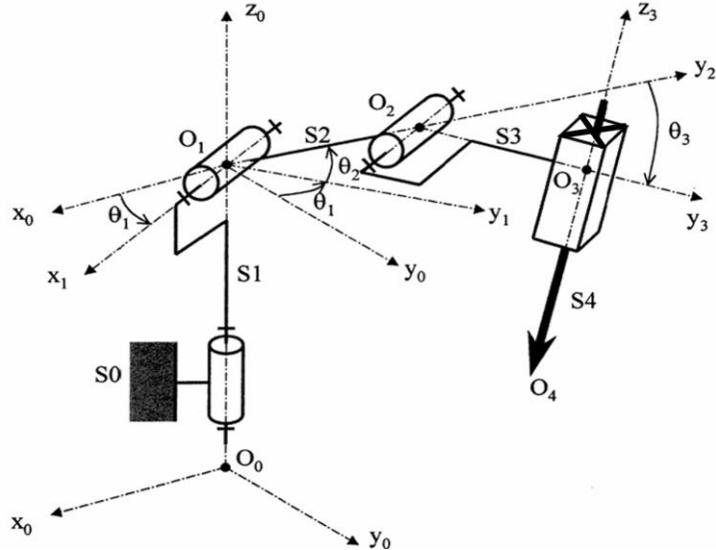
Application 7

Robot soudeur – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



Ce robot est constitué de cinq solides :

- ▶ le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que \vec{z}_0 vertical ascendant;
- ▶ le fût 1, de repère associé $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$;
- ▶ le bras 2, de repère associé $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$;
- ▶ l'avant-bras 3, de repère associé $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$;
- ▶ la buse 4, de repère associé $\mathcal{R}_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3$.

Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

Paramètres du mouvement :

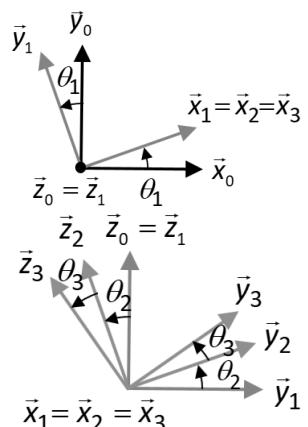
- ▶ $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- ▶ $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
- ▶ $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$;
- ▶ $\vec{O}_3\vec{O}_4 = \lambda \vec{z}_3$.

Caractéristiques géométriques :

- ▶ $\overrightarrow{O_0O_1} = L_1 \vec{z}_0$;
- ▶ $\overrightarrow{O_1O_2} = L_2 \vec{y}_2$;
- ▶ $\overrightarrow{O_2O_3} = L_3 \vec{y}_3$.

Les figures de changement de base sont données ci-contre.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :



- ▶ exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre O_0 et de rayon R .
- ▶ exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite (O_0, \vec{y}_0) : réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- ▶ exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant \vec{y}_0 soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante : V .

Objectif

Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

Question 1 Préciser une condition sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 2 Préciser deux conditions sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

Question 3 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point O_4 puis calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_4, 4/0)}$.

Question 4 Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ qui traduit l'exigence Ex3.

Question 5 On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position $\theta_1 = 0$, traduire alors la condition $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$ en deux relations vectorielles.

Question 6 En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.

===== Application =====

Application 8

Capsuleuse de bocaux – Galet – Sujet

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

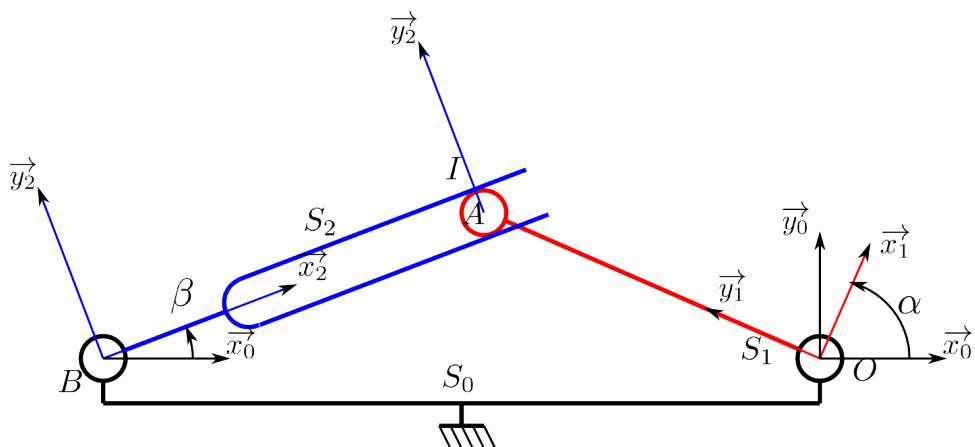
Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute.**

Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :

- $\mathcal{R} = \left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ le repère lié au bâti S_0 . On note $\overrightarrow{OB} = -L\vec{x}_0$ avec $L = 145 \text{ mm}$;
- $\mathcal{R}_1 = \left(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$ le repère lié à l'arbre S_1 . On pose $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$ avec $R = 141 \text{ mm}$ et $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. L'arbre S_1 est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a : $\dot{\alpha} = 10 \text{ tr/min}$;
- $\mathcal{R}_2 = \left(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 \right)$ le repère lié à l'arbre S_2 . On pose $\overrightarrow{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$, $\overrightarrow{AI} = r\vec{y}_2$ et $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$;



Question 1 Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

Question 2 Établir la loi entrée/sortie du système.

Question 3 Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

Question 4 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$.

Question 5 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

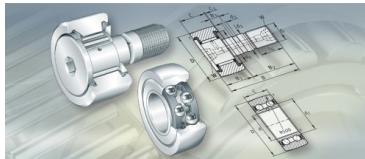
Question 6 En déduire l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$ dans la base \mathcal{R}_2 . On donne $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$.

Question 7 D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide S_1 par rapport à S_2 ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

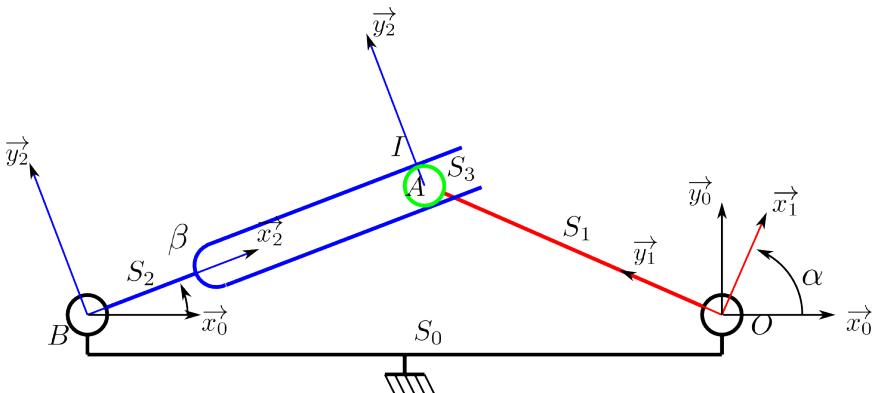
Question 8 $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$ est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse? Si oui, comment? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet S_3 en bout de l'arbre S_1 . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le S_2 . S_3 et S_1 sont en liaison pivot d'axe \vec{z}_0 et de centre A .



Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



Question 9 Quelle est la modification sur le paramétrage du système?

Question 10 Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement**?

Question 11 Calculer la vitesse de rotation du galet $\dot{\gamma}$ en commençant par exprimer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$? Indice : décomposer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ en fonction des mouvements connus.

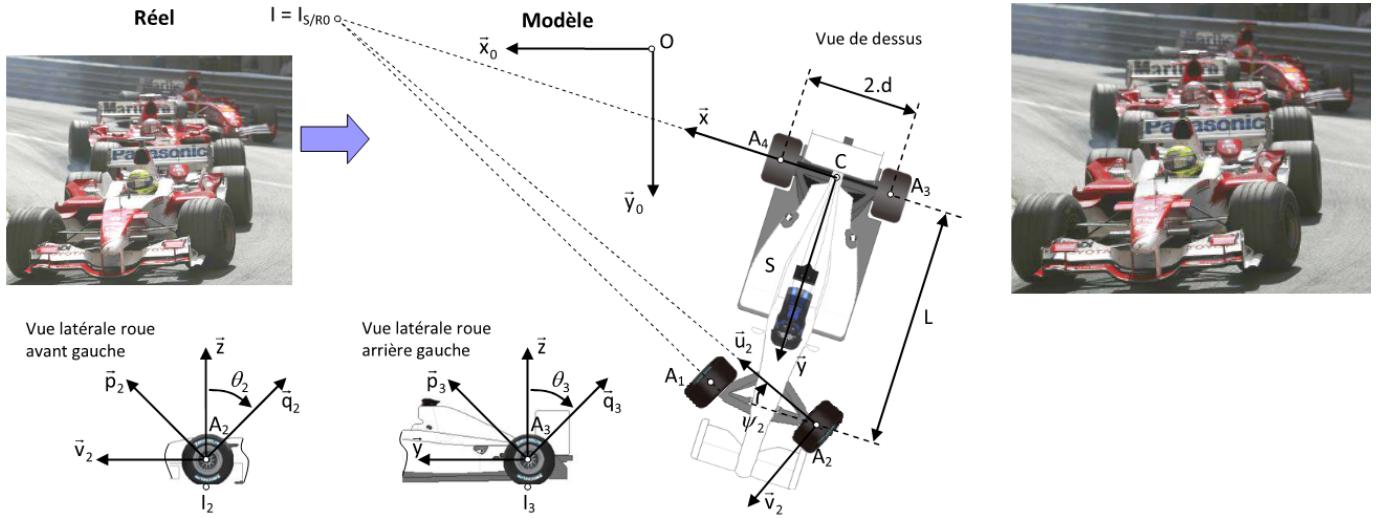
Question 12 Valider le choix du galet.

=====

Application 9

Étude des performances cinématiques en virage d'une Formule 1 – Sujet

Ressources de Florestan Mathurin.



Mise en situation

Une Formule 1 doit assurer un certain nombre d'exigences techniques afin d'assurer les meilleures performances en course tout en garantissant la sécurité du pilote. Une de ces exigences est que « le système doit tenir la trajectoire en phase de virage ». Pour y parvenir, le véhicule dispose d'une cinématique particulière permettant aux roues de tourner sur le sol en limitant le risque de glissement. On s'intéresse aux conséquences pratiques nécessaires pour assurer la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol. On supposera donc que les 4 roues roulent sans glisser dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Pour cette étude on considère que le véhicule est constitué d'un châssis (S) et de 4 roues (S_i) avec $i = 1, 2, 3, 4$. Le châssis est modélisé par un rectangle $A_1A_2A_3A_4$ tel que $\overrightarrow{A_4A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2d\vec{x}$ et $\overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2} = L\vec{y}$ où L correspond à l'empattement du véhicule et $2d$ à la voie.

On définit le repère $\mathcal{R}(C; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ attaché au châssis où le point C , origine du repère, est tel que $\overrightarrow{A_4C} = d\vec{x}$. Le véhicule est en phase de virage et on considère alors qu'il est en rotation par rapport au repère $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour du point $I_{S/R0} = I$, centre instantanée de rotation du mouvement. On pose $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x})$ angle de rotation du châssis par rapport à \mathcal{R}_0 .

On définit le repère $\mathcal{R}_i(A_i; \vec{u}_i, \vec{p}_i, \vec{q}_i)$ attaché à chaque roue (S_i). Ces 4 roues de rayon R sont en liaison pivot avec le châssis (S) suivant les axes (A_i, \vec{u}_i) avec $i = 1, 2, 3, 4$.

On pose $\theta_i = (\vec{z}, \vec{q}_i)$ angle de rotation de la roue i par rapport au châssis. Afin d'assurer la direction du véhicule, les 2 roues pivotent d'un angle ψ_1 suivant l'axe (A_i, \vec{z}) pour la roue 1 et d'un angle ψ_2 suivant l'axe (A_2, \vec{z}) pour la roue 2 avec $\psi_1 = (\vec{x}, \vec{u}_1) = (\vec{y}, \vec{v}_1)$ et $\psi_2 = (\vec{x}, \vec{u}_2) = (\vec{y}, \vec{v}_2)$. On considère que le contact

sol/roue et assimilable à un contact ponctuel en I de normale (I, \vec{z}) tel que $\overrightarrow{I_i A_i} = R \vec{z}$.

Question 1 Établir les figures géométrales utiles.

Question 2 Écrire la condition de roulement sans glissement de la roue (S_1) par rapport au sol \mathcal{R}_0 . En déduire une relation vectorielle simple entre $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$ et $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$.

Question 3 Donner la forme simple du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$ écrit en I . En déduire alors $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)}$ et $\overrightarrow{II_1}$ (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

Question 4 Donner la forme simple du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_1/S)\}$ écrit en A_1 . En déduire alors $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega(S_1/S)}$ et $\overrightarrow{A_1 I_1}$ (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

Question 5 Déduire des relations précédentes que $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{A_1 I_1} = \vec{0}$.

Question 6 On pose $\overrightarrow{IA_1} = a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1 + c\vec{z}$, montrer que l'on a nécessairement $a = -\frac{R\dot{\theta}_1}{\dot{\beta}}$ et $b = 0$ pour que la relation obtenue question précédente soit respectée.

Question 7 Montrer que l'axe (D_1) de la roue (S_1) passe par I , puis en déduire que l'axe (D_i) de la roue (S_i) passe par I .

On pose par la suite $\overrightarrow{IC} = \rho \vec{x}$ et on note $\overrightarrow{V(C, S/R)} = V \vec{y}$ (ρ est le rayon du virage et V la vitesse du véhicule).

Question 8 À partir de $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$ exprimé en I , quelle relation simple existe-t-il entre V et ρ ?

Question 9 En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les vitesses de rotation $\dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_4$ des deux roues arrières (S_3) et (S_4) en fonction de ρ , R , d et V . Que constate-t-on ?

Question 10 En déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu arrière pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en I_3 et I_4 .

On considère que le véhicule roule à 90 km/h, les roues ont pour diamètre 80 cm et le virage décrit une courbe telle que la vitesse angulaire du véhicule $\dot{\beta} = 0,1$ rad/s. On donne $d = 1$ m.

Question 11 Déterminer graphiquement les vitesses des roues S_1, S_2, S_3, S_4 en I_1, I_2, I_3, I_4 . Utiliser une échelle judicieuse pour les vitesses et justifier les constructions.

Question 12 Que constate-t-on sur les roues avant et en déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu avant pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en I_1 et I_2 .