

Application 1

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E) – Sujet

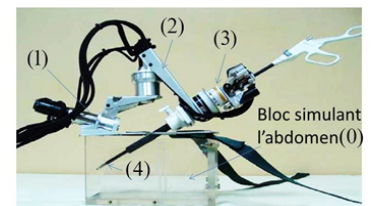
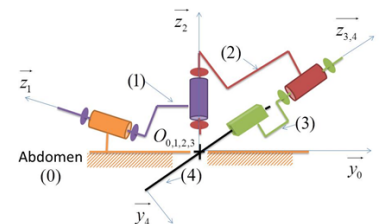
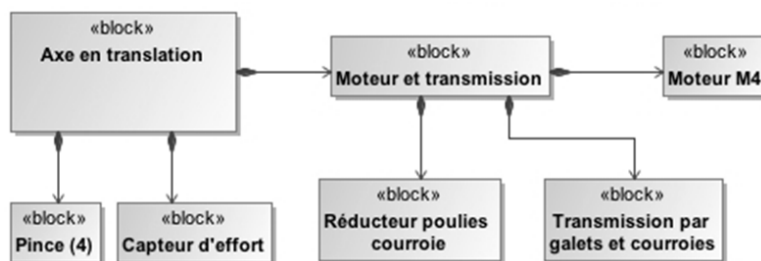
Concours Commun Mines Ponts 2016.

Mise en situation

Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moto réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).

Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

Équation de mouvement

Hypothèses

- La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- Les axes de rotation du MC²E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- L'instrument chirurgical est vertical.
- Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- Tous les galets G_i ont même rayon noté \mathcal{R}_g et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points I_1 à I_6 .

Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

- La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primitif pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Modélisation simplifiée du problème

- La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée $\omega_m(t)\vec{x}_0$ où $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$ (vitesse de rotation avant réduction de rapport r).
- La poulie motrice a un rayon R_i et tourne à la vitesse $\omega_i(t)$ (vitesse de rotation après réduction de rapport r).
- La poulie réceptrice a un rayon R_e et tourne à la vitesse $\omega_e(t)$.
- Les deux pignons en contact ont même rayon primitif, supposé égal à R_e .
- Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté $\vec{C}_m = C_m\vec{x}_0$.
- L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} R(\text{ressort} \rightarrow 4) = -kz(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_4}$ où O_4 est le point de contact entre la pince (4) et le ressort, k la raideur du ressort et $z(t)$ la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.
- On note $\vec{V}(O_4, 4/0) = v(t)\vec{z}_0 = \frac{dz(t)}{dt}\vec{z}_0$.
- Les masses des courroies sont négligées.

Données

- I_m , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- I_r , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- I_i , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_i , par rapport à son axe de rotation.
- I_e , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation.
- I_p , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation.
- I_g , moment d'inertie de chaque galet G_i , de rayon R_g , par rapport à son axe de rotation.
- m_4 , masse de la pince (4).
- $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$, rapport de réduction constant du motoréducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

Travail demandé

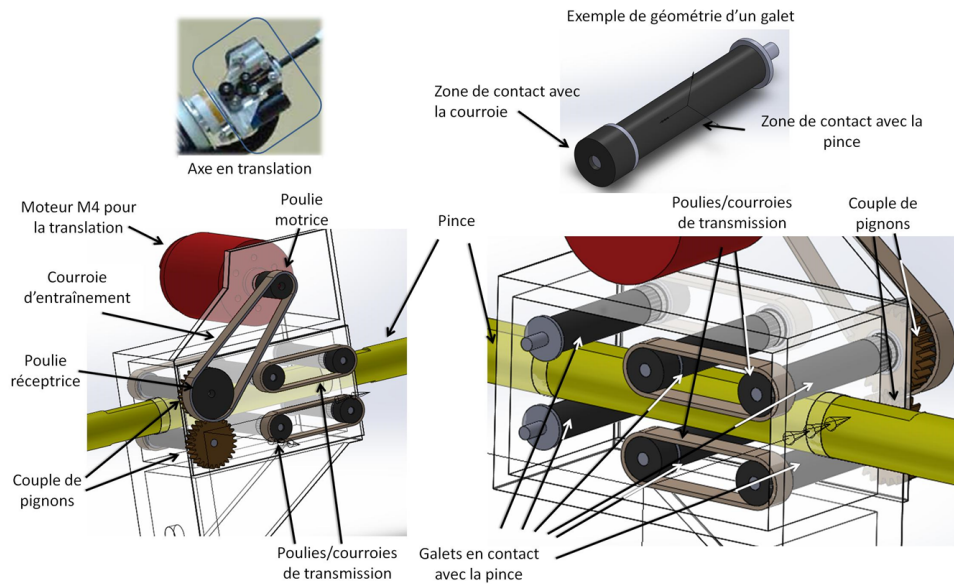
Question 1 Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.

Question 2 Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

Question 3 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.

Question 4 Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

Question 5 Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0), déterminer l'expression du terme $C_e(t)$ en fonction des données du problème et de $\theta_m(t)$.



Application 1

Concours Commun Mines Ponts 2016.

Mise en situation

Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

Équation de mouvement

Travail demandé

Question 1 Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.

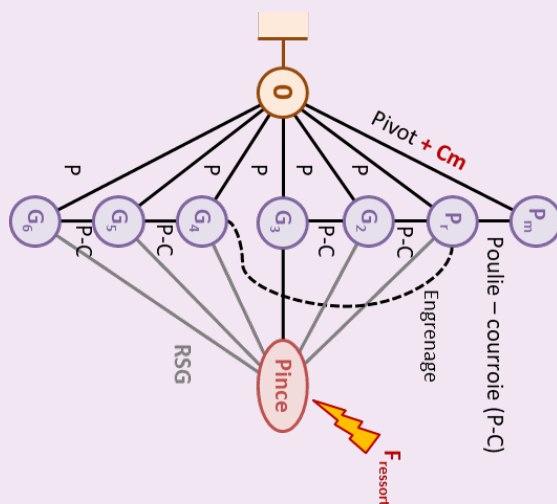
Correction

On a $\omega_i(t) = r\omega_m(t)$. De plus $\frac{\omega_e(t)}{\omega_i(t)} = \frac{R_i}{R_e} \iff \omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}\omega_i(t)$ et donc : $\omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}r\omega_m(t)$.

Enfin, $v(t) = R_g\omega_e(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e}\omega_m(t)$. Les conditions initiales étant nulles, $z(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e}\theta_m(t)$.

Question 2 Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

Correction



Question 3 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0) . Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.

Correction

Tous les solides sont en mouvement « simples » par rapport au référentiel galiléen. On a :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_m \omega_m(t)^2 + \frac{1}{2} (I_r + I_i) \omega_i(t)^2 + \frac{1}{2} (I_e + 2I_p + 6I_g) \omega_e(t)^2 + \frac{1}{2} m_4 v(t)^2$$

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_m \omega_m(t)^2 + \frac{1}{2} (I_r + I_i) (r \omega_m(t))^2 + \frac{1}{2} (I_e + 2I_p + 6I_g) \left(\frac{R_i}{R_e} r \omega_m(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 \left(R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t) \right)^2$$

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \left(I_m + (I_r + I_i) r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g) \left(\frac{R_i}{R_e} r \right)^2 + m_4 \left(R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right) \omega_m(t)^2$$

$$\text{On a donc } J = I_m + (I_r + I_i) r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g) \left(\frac{R_i}{R_e} r \right)^2 + m_4 \left(R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2.$$

Question 4 Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

Correction

On isole l'ensemble.

Bilan des puissances extérieures

- Action du ressort : $\mathcal{P}(\text{ressort} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = -kz(t)v(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$.
- Action du moteur : $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = C_m \omega_m(t)$.
- Action de la pesanteur : $\mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = 0$ (La pesanteur est compensée par un système de compensation).

Bilan des puissances intérieures Toutes les liaisons étant supposées parfaites, $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$.

Question 5 Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0) , déterminer l'expression du terme $C_e(t)$ en fonction des données du problème et de $\theta_m(t)$.

Correction

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on a : $J \dot{\omega}_m(t) \omega_m(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t) +$

$$C_m \omega_m(t) \Rightarrow J \dot{\omega}_m(t) = -k \left(R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t) + C_m.$$

En utilisant l'équation différentielle du mouvement on a alors : $C_e(t) = k \left(R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t)$.

Application 2

Chariot élévateur à bateaux – Sujet

X – ENS – PSI – 2012.

Présentation

Le chariot élévateur, objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- ▶ du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- ▶ du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.

Phase de levage du bateau

Objectif

Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

- ▶ req 102 : vitesse de levage en charge : $0,33 \text{ m s}^{-1}$;
- ▶ req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la figure ci-contre. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble $S=\{T5,T6,T7,T8,T9,T10,T11\}$ est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble S. Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon T12 qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est F_V (considéré comme constant). On note I_{T12} le moment d'inertie de la poulie T12 par rapport à son axe de rotation, R_{T12} son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère \mathcal{R}_3 peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes \vec{z}_{T3} et \vec{z}_0 sont confondus pour les conditions de l'étude.

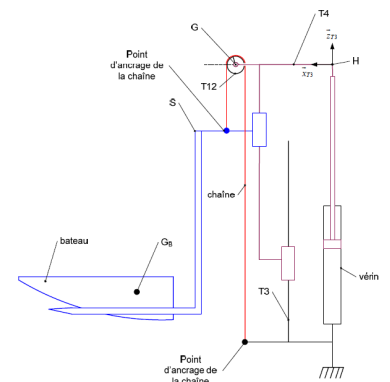
Question 1 Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

Phase de déplacement

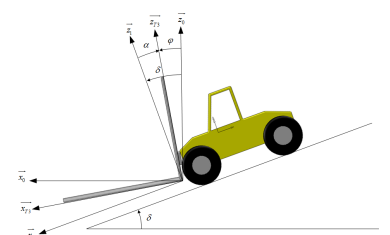
La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible

C1-05

C2-08

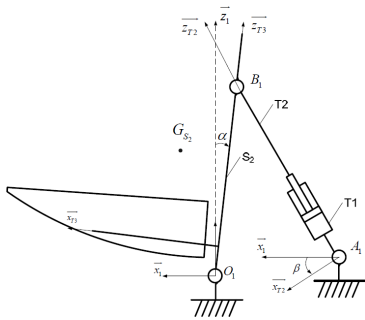


Solide	Masse
Ensemble (S)	m_S
Bateau (B)	m_B
Mât inférieur (T3)	m_{T3}
Mât supérieur (T4)	m_{T4}
Chaîne (C)	négligée



amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1, T2 et T1', T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

- l'angle de basculement $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$;
- l'angle de la pente $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$;
- l'angle à asservir $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$.



Question 2 Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle $\varphi(t)$ qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.

Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- l'ensemble $S_2 = \{T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, B\}$ en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot 1 de centre de gravité G_{S_2} . Le moment d'inertie de l'ensemble S_2 par rapport à l'axe sera noté J_{S_2} et sa masse m_{S_2} . La liaison pivot entre l'ensemble S_2 et le chariot (bâti) génère un couple résistant $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$ et $\vec{O_1 O_{G_{S_2}}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T3}$;
- un vérin équivalent $V = \{T1, T2\}$ dont le corps est en liaison pivot d'axe (A_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot (bâti) et la tige en liaison pivot d'axe (B_1, \vec{y}_0) par rapport à l'ensemble S_2 . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T2}$ où $p(t)$ est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose $\vec{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$. Le paramétrage est tel que si $\alpha = 0$ alors $\lambda = 0$.

Question 3 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq} .

Application 2

Chariot élévateur à bateaux – Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

Présentation

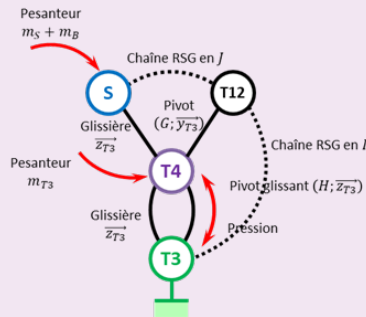
Question 1 Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

C1-05

C2-08

Correction

On isole l'ensemble : {bateau ; S ; chaîne ; T12 ; T4}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$.



Relation cinématique :

- $\vec{V}(G, S/T_3) = V_B \vec{z}$ et $\vec{V}(G, T_4/T_3) = V_V \vec{z}$
- $\vec{V}(G, S/T_3) = \vec{V}(G, S/T_{12}) + \vec{V}(G, T_{12}/T_4) + \vec{V}(G, T_4/T_3)$
 - $\vec{V}(G, S/T_{12}) = \vec{V}(J, S/T_{12}) + \vec{G} \wedge \vec{\Omega}(S/T_{12}) = R \vec{x} \wedge \omega(T_4/T_{12}) \vec{y} = R\omega(T_4/T_{12}) \vec{z}$
 - $V_B = R\omega(T_4/T_{12}) + V_V$
- $\vec{V}(G, S/T_3) = \vec{V}(G, S/T_{12}) + \vec{V}(G, T_{12}/T_3)$
 - $\vec{V}(G, T_{12}/T_3) = \vec{V}(I, T_{12}/T_3) + \vec{G} \wedge \vec{\Omega}(T_{12}/T_3) = -R \vec{x} \wedge \omega(T_{12}/T_4) \vec{y} = R\omega(T_4/T_{12}) \vec{z}$
 - $V_B = R\omega(T_4/T_{12}) + R\omega(T_4/T_{12}) = 2R\omega(T_4/T_{12})$
- $V_B = V_B/2 + V_V \iff V_B = 2V_V$ et $\omega(T_4/T_{12}) = -\frac{V_B}{2R}$.

(Remarque : erreur de signe éventuelle sur $\omega(T_{12}/T_4)$, non pénalisante pour la suite. ...)

Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{matrix} -(m_S + m_B)g \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{G_B} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_B \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G_B} = -(m_S + m_B)g V_B$;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{matrix} -m_{T4}g \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{G_{T4}} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_V \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G_{T4}} = -m_{T4}g V_V = -\frac{1}{2}m_{T4}g V_B$;
- $\mathcal{P}(\text{pre} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{matrix} F_V \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_H \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_V \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G_B} = F_V V_V = \frac{1}{2}F_V V_B$.
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = 0$: glissière et pivot glissant sans frottement
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow 12/\mathcal{R}_g) = 0$: roulement sans glissement.

$$\blacktriangleright \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = V_B \left(\frac{1}{2} F_V - \frac{1}{2} m_T 4g - (m_S + m_B)g \right)$$

Bilan des puissances intérieures :

$$\blacktriangleright \mathcal{P}(E \leftrightarrow =).$$

Calcul de l'énergie cinétique :

$$\blacktriangleright \mathcal{E}_c(S/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B)V_B^2 \text{ (mouvement de translation du bateau par rapport au référentiel galiléen);}$$

$$\blacktriangleright \mathcal{E}_c(T_4/3) = \frac{1}{2}m_T 4V_V^2 = \frac{1}{8}m_T 4V_B^2 \text{ (mouvement de translation du vérin par rapport au référentiel galiléen);}$$

$$\blacktriangleright \mathcal{E}_c(T_{12}/3) = \frac{1}{2}J\omega(T_{12}/3)^2 = \frac{1}{2}\frac{JV_B^2}{4R^2} \text{ (mouvement de rotation et translation du solide 12 – masse négligeable) (Remarque : le terme } 1/4 \text{ n'apparaît pas sur le corrigé initial).}$$

$$\blacktriangleright \mathcal{E}_c(E/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B + 1/4m_T 4 + J/(4R^2))V_B^2$$

$$\blacktriangleright \frac{d}{dt}[E_c(t)] = \left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2} \right) V_B \gamma \text{ et } \gamma = \frac{d}{dt}[V_B(t)].$$

Au final : $\left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2} \right) V_B \gamma = V_B \left(\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g \right)$ et $\gamma = \frac{\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g}{m_S + m_B + 1/4m_T 4 + \frac{J}{4R^2}}$. Cette valeur permet de valider l'exigence 1.1.3 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère 1.1.2) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire ($t = \frac{V_{\text{levage}}}{\gamma}$).

Phase de déplacement

Question 2 Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle $\varphi(t)$ qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

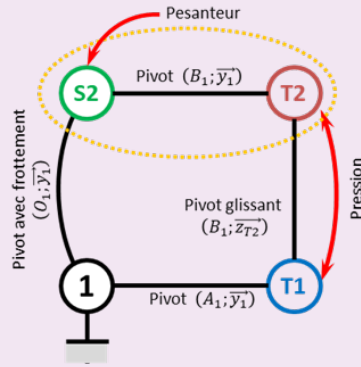
Correction

Quand le chariot avance à vitesse constante ($\varphi_{dec} = 0$), il faut que l'angle $\varphi(t)$ soit nul. Il faut donc envoyer une consigne $\varphi_c = -\delta$.

Question 3 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{eq}\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S2}gx_{G_{S2}}$. Exprimer J_{eq} .

Correction

On isole l'ensemble $E = \{S2; T2\}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen : $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt}[\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$



Calcul des puissances externes :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{c} -m_{S_2} g \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_{S_2}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_2/1)} = \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ V(G_{S_2}, S_2/1) = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3} \end{array} \right\}_{G_{S_2}}$
 $= (-m_{S_2} g \vec{z}_1) \cdot (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}) = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha)$
 $\frac{V(G_{S_2}, S_2/1)}{V(O_1, S_2/1)} = \frac{V(O_1, S_2/1)}{V(O_1, S_2/1)} - (x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T_3}) \wedge \dot{\alpha} \vec{y}_1 = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}.$
- $\mathcal{P}(1 \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{c} -L_{12} \vec{x}_1 - \mu \dot{\alpha} \vec{y}_1 + N_{12} \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_1} = -\mu \dot{\alpha}^2$
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{pivot glissant}} = 0$ (pivot glissant sans frottement)
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{vérin}} = \left\{ \begin{array}{c} p(t) S \vec{z}_{T_2} \\ - \end{array} \right\}_{B_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right\}_{B_1} = p(t) S \dot{\lambda} = p(t) S \frac{\dot{\alpha}}{k}$
- $\mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha) - \mu \dot{\alpha}^2 + p(t) S \dot{\alpha} / k.$

Calcul des puissances internes $\mathcal{P}(E \leftrightarrow E)$ pas de frottement dans la liaison pivot.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S2 sont à prendre en contact (elles sont négligeables pour T2).

$$\mathcal{E}_c(S_2/1) = \frac{1}{2} J_{S_2} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{S_2} V(G_{S_2}, S_2/1)^2 = \frac{1}{2} (J_{S_2} + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)) \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\alpha}^2$$

avec $J_{eq} = J_{S_2} + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2).$

On trouve donc, au final :

$$J_{eq} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} = \frac{p(t) S}{k} + m_{S_2} g (x_{G_{S_2}} \cos \alpha - z_{G_{S_2}} \sin \alpha).$$

Si on suppose l'angle α nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.

Application 3

Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Sujet

Centrale MP 2004.

Mise en situation

Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.

Détermination de la motorisation

Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Faire monter ou descendre l'ascenseur	
Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente V_L lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	course = $0,8 \text{ m}$ $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide V_R : respecter la durée t_a de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s}$ (mini)

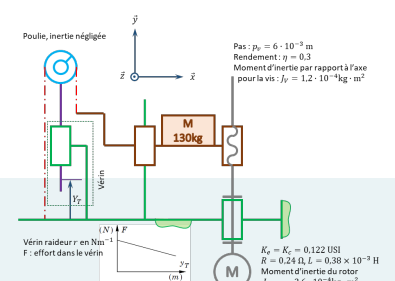
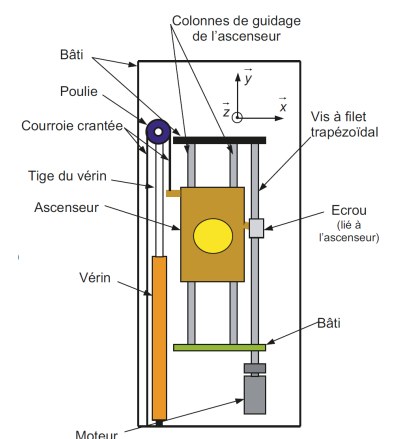
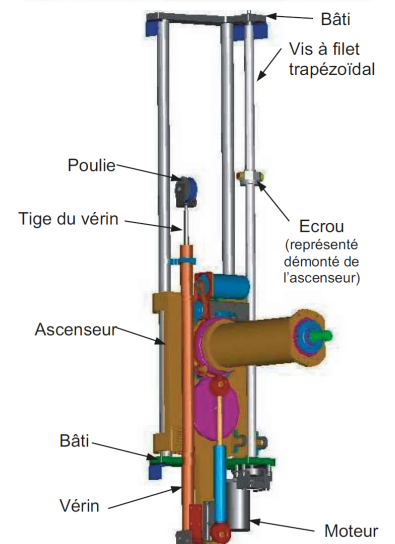
Question 1 Déterminer la fréquence de rotation du moteur ω en fonction de la vitesse de déplacement V de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum ω_{maxi} que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

1. départ en position basse ($y = 0$ à l'instant $t = 0$);

C1-05

C2-08



2. mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante a pour atteindre la vitesse V_R rapide en respectant les contraintes du cahier des charges ;
3. arrêt de l'ascenseur à la position $y = 0,8 \text{ m}$ (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à t_a).

Question 2 Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement y de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

Solution sans assistance

On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé Σ (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.

On notera :

- $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- C le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$, du système isolé. Mettre $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ sous la forme : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$. Donner l'expression littérale de la masse équivalente M_e et faire l'application numérique.

Question 4 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Question 5 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire P_0 de ce moteur.

Question 6 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

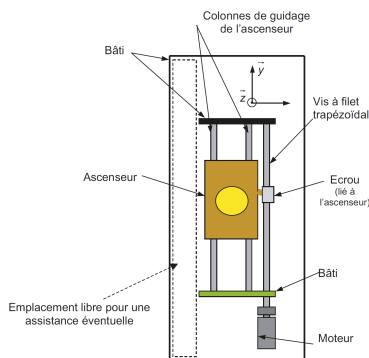
Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

Question 7 Faire un schéma de principe de ce dispositif.

Question 8 Donner l'expression littérale de la masse équivalente M'_e et faire l'application numérique.



Question 9 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Question 10 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur.

Question 11 En déduire la puissance nécessaire P du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Question 12 Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$ et de hauteur $1,4 \text{ m}$. Cette solution est-elle envisageable ?

Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

Question 13 Faire un schéma de principe du dispositif.

Question 14 L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum $F_{c \text{ maxi}}$ qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement y de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal D supérieur à $0,1 \text{ m}$. Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$ et de module de Coulomb $G = 82\,000 \text{ MPa}$. On prendra un coefficient de sécurité $s = 2$. Pour que le ressort résiste à l'effort maximal

$F_{c \text{ maxi}}$, il doit avoir un diamètre $d \geq \sqrt[3]{\frac{8F_{c \text{ maxi}}Ds}{\pi R_{eg}}}$, c'est-à-dire $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c \text{ maxi}}}$.

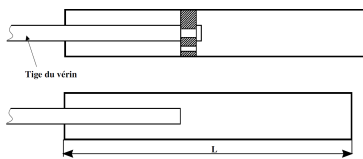
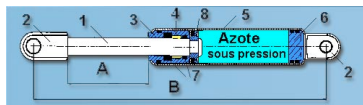
Pour obtenir un ressort de raideur r il faut un nombre de spires $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$, c'est-à-dire $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$.

Question 15 La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

Question 16 Déterminer la relation existant entre le déplacement y de l'ascenseur et le déplacement y_T de la tige du vérin. En déduire la course Δy_T nécessaire de la tige du vérin à gaz.



Question 17 Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté F_c . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort F développé par le vérin et l'effort de compensation F_c . En déduire l'effort minimum F_{\min} développé par le vérin.

Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-contre.

Question 18 Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

Question 19 Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre $d = 15 \times 10^{-3}$ m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée p_2 .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand $D = 57 \times 10^{-3}$ m. L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale $L = 1$ m. Soient p_1, F_1, V_1 la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et p_2, F_{\min}, V_2 pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

Question 20 Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de F_1, F_{\min} et Δy_T . Exprimer F_{\min} en fonction de p_2 et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer F_1 en fonction de p_1 et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur r de ce vérin à gaz en fonction de F_{\min}, d, D, L et Δy_T .

Question 21 On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur L et calculer la raideur r .

On prendra $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$ pour la suite du problème.

Question 22 Déterminer l'effort maximal F_{\max} développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de F .

Question 23 Déterminer la relation $F = F(y_T)$.

On considérera dans cette question que l'effort de compensation F_c est constant.

Question 24 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de $a, M_e, F_c, M...$

Question 25 Exprimer ensuite a en fonction de $C, M_e, F_c, M...$

Question 26 En déduire la valeur du couple maximum C_{\max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur (prendre $F_c = 1300 \text{ N}$).

Question 27 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Synthèse

Question 28 On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

Application 3

Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Corrigé

Centrale MP 2004.

Mise en situation

C1-05

C2-08

Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »



Détermination de la motorisation

Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Question 1 Déterminer la fréquence de rotation du moteur ω en fonction de la vitesse de déplacement V de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum ω_{\max} que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

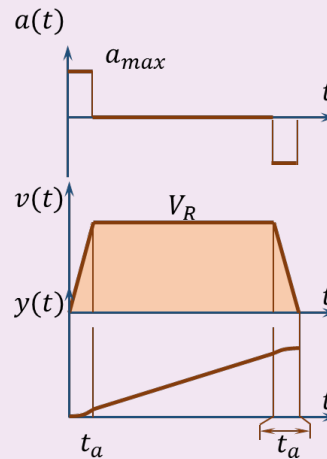
Correction

On a $V = \omega \frac{p_v}{2\pi}$ et donc $\omega_{\max} = V_R \frac{2\pi}{p_v}$.

Application numérique : $\omega_{\max} = 0,15 \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ rad s}^{-1} = 1500 \text{ tr min}^{-1}$.

Question 2 Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement y de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

Correction



L'accélération a_{\max} est donnée par $a_{\max} = \frac{V_R}{t_a} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375 \text{ m s}^{-2}$.

Les distances parcourues correspondent à l'aire sous la courbe du profil de vitesse. La distance d'accélération et de décélération sont données par $d_a = \frac{1}{2} V_R t_a = \frac{1}{2} 0,15 \times 0,4 = 0,03 \text{ m}$.

En conséquence, la distance à parcourir à vitesse constante est $d_c = 0,8 - 2 \times 0,03 = 0,74 \text{ m}$.

Le temps pour parcourir cette distance est $t_c = \frac{d_c}{V_R} = \frac{0,74}{0,15} = 4,93 \text{ s}$.

Solution sans assistance

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$, du système isolé. Mettre $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ sous la forme : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$. Donner l'expression littérale de la masse équivalente M_e et faire l'application numérique.

Correction

Calcul de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} (J_R + J_V) \left(V \frac{2\pi}{p_v} \right)^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \left((J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M \right) V^2$.

On a donc $M_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 130 = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 150 = 547 \text{ kg}$.

Question 4 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C.

Correction

- On isole Σ .
- Bilan des puissances intérieures : liaisons parfaites $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.
- Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \text{Asc.}/0) = -MgV$;
- $\mathcal{P}(\text{mot} \rightarrow \text{Asc.}/0) = C\omega$.

► Calcul de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}M_e V^2$

On applique le théorème de l'énergie cinétique : $M_e V \dot{V} = C \frac{V 2\pi}{p_v} - MgV$ et donc $M_e \dot{V} = C \frac{2\pi}{p_v} - Mg$. Au final, $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg)$.

Question 5 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire P_0 de ce moteur.

Correction

Le couple maximal est nécessaire en phase d'accélération.

$$C_{\text{Max}} = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg)$$

$$= \frac{6 \times 10^{-3}}{2\pi} (547 \times 0,15 + 130 \times 9,81) = 1,4 \text{ Nm.}$$

La puissance nécessaire est alors $P_0 = C_{\text{Max}} \cdot \omega_{\text{maxi}} = 1,4 \times 157 = 222 \text{ W}$.

Question 6 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

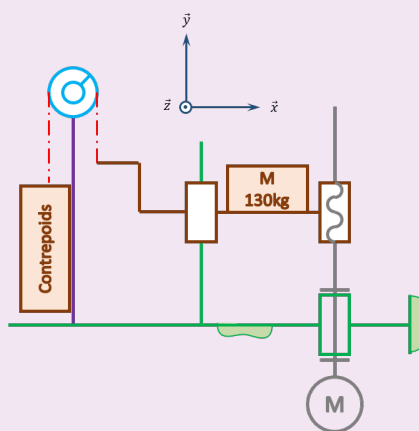
Correction

Le rendement n'a vraiment de sens qu'en régime permanent. Ici, le rendement va nous permettre de majorer la puissance motrice nécessaire. On a $P = \frac{222}{0,3} = 740 \text{ W}$.

Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Question 7 Faire un schéma de principe de ce dispositif.

Correction



Question 8 Donner l'expression littérale de la masse équivalente M'_e et faire l'application numérique.

Correction

En prenant un contrepoids de même masse que l'ascenseur et en négligeant l'inertie de la poulie, le contrepoids se déplaçant à la même vitesse que l'ascenseur (mais dans un sens opposé), on a $M'_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + 2M$, soit $M'_e = 677 \text{ kg}$

Question 9 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C .

Correction

Par rapport au TEC effectué précédemment, il faut ajouter la puissance des actions de pesanteurs sur le contrepoids. Cette puissance est opposée à la puissance des actions de pesanteur sur l'ascenseur. $C = \frac{p_v}{2\pi} M'_e \dot{V}$.

Question 10 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur.

Correction

$C_{\text{Max}} = 0,24 \text{ Nm}$, $P_0 = 38 \text{ W}$.

Question 11 En déduire la puissance nécessaire P du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Correction

Avec les mêmes précautions que précédemment, $P = 127 \text{ W}$.

Question 12 Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$ et de hauteur $1,4 \text{ m}$. Cette solution est-elle envisageable?

Correction

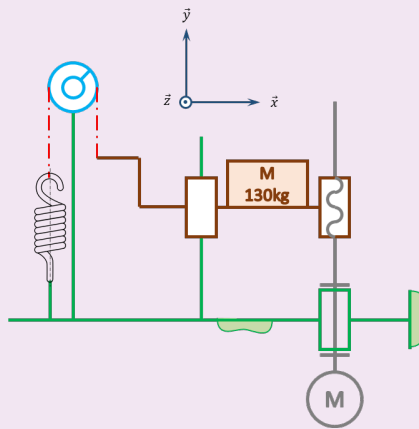
Au vu de la section disponible, la hauteur du contrepoids sera de $\frac{130}{0,1 \times 0,2 \times 9 \times 10^3} = 0,72 \text{ m}$. Le contrepoids doit pouvoir se déplacer de $0,8 \text{ m}$ soit un encombrement total de $1,52 \text{ m}$ supérieur à $1,4 \text{ m}$ disponible.

Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

Question 13 Faire un schéma de principe du dispositif.

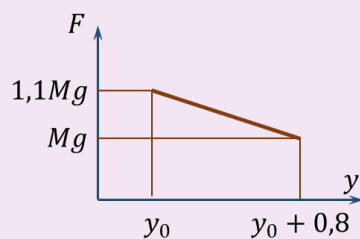
Correction



Question 14 L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum $F_{c \text{ maxi}}$ qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement y de l'ascenseur.

Correction

La course maximale est de 0,8 m. La charge à compenser correspond au poids de l'ascenseur soit Mg . Lorsque l'ascenseur sera en bas, y sera minimal et le ressort sera tendu. L'effort sera donc maximal, soit $1,1Mg$. Lorsque l'ascenseur sera en haut, y sera maximal et le ressort sera « au repos ». L'effort doit compenser le poids. La raideur doit être de la forme

$$k = \frac{1,1Mg - Mg}{0,8} = \frac{0,1 \times 130 \times 9,81}{0,8} \approx 159,4 \text{ N m}^{-1}.$$


Question 15 La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

Correction

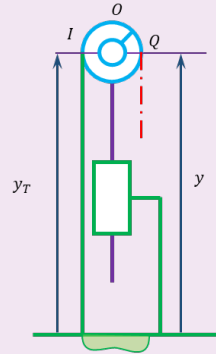
Dans les conditions proposées ci-dessus, on a $d = 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{1,1 \times Mg} = 0,011 \text{ m}$. Le nombre de spires serait alors $n = 872$. Si les spires sont jointives, on a une longueur de ressort minimale de $dn = 9,47 \text{ m}$ ce qui dépasse très largement les dimensions de la machine.

Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Question 16 Déterminer la relation existant entre le déplacement y de l'ascenseur et le déplacement y_T de la tige du vérin. En déduire la course Δy_T nécessaire de la tige du vérin à gaz.

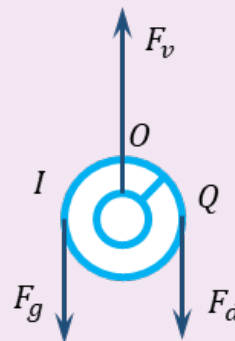
Correction

En utilisant le roulement sans glissement de la poulie par rapport à la courroie en I on montre que $y_T = \frac{1}{2}y$.



Question 17 Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté F_c . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort F développé par le vérin et l'effort de compensation F_c . En déduire l'effort minimum F_{mini} développé par le vérin.

Correction



Si on néglige la masse de la poulie, on peut appliquer le PFS (à la place du PFD).

- On isole la poulie de rayon R .
- La poulie est soumise au brin de gauche, au brin de droite et à l'effort du vérin.
- TMS en O, centre de la pivot : $F_g R - R F_d = 0$ soit $F_g = F_d$.
- TRS : $2F_d + F_v = 0$.

En reprenant les notations de la question, on a $2F_c = F$. Comme au minimum, $F_c = Mg$, on a donc $F_{\text{mini}} = 2Mg = 2550,6 \text{ N}$.

Question 18 Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

Correction

Soit D le diamètre du vérin et d le diamètre de la tige.

Dans le premier cas, on a, dans la chambre droite, $F_d = +p\pi \frac{D^2 - d^2}{4}$ et $F_g = -p\pi \frac{D^2}{4}$. La résultante des forces est donc $F_g + F_d = -p\pi \frac{d^2}{4}$.

Dans le second cas, l'effort est $-p\pi \frac{d^2}{4}$. Les deux modèles sont donc équivalents.

Question 19 Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre $d = 15 \times 10^{-3}$ m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée p_2 .

Correction

On a $p_2 = \frac{F_{\text{mini}}}{\pi d^2 / 4} = 14\,433\,443$ Pa soient 144 bars.

Question 20 Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de F_1 , F_{mini} et Δy_T . Exprimer F_{mini} en fonction de p_2 et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer F_1 en fonction de p_1 et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur r de ce vérin à gaz en fonction de F_{mini} , d , D , L et Δy_T .

Correction

$$\blacktriangleright r = \frac{F_1 - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}.$$

$$\blacktriangleright F_{\text{mini}} = p_2 \frac{\pi d^2}{4}, F_1 = p_1 \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$\blacktriangleright \text{On a } p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}} V_1 = F_1 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}} \frac{V_1}{V_2} = F_1. \text{ D'où } r = \frac{F_{\text{mini}} \frac{V_1}{V_2} - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\Delta y_T}.$$

Par ailleurs, $V_1 - V_2 = \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$; donc $V_2 = L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$.

$$\text{On a donc } r = F_{\text{mini}} \frac{\frac{V_1 - V_2}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{\frac{L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}}{\Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{\frac{\Delta y_T d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$$

Question 21 On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur L et calculer la raideur r .

Correction

Pour avoir la raideur la plus faible, il faut la longueur la plus grande soit 1 m. $r = F_{\text{mini}} \frac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

On prendra $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$ pour la suite du problème.

Question 22 Déterminer l'effort maximal F_{Maxi} développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de F .

Correction

$F_{\text{Maxi}} = F_{\text{Mini}} + r \Delta y_T = 2550 + 180,4 = 2622 \text{ N}$.
La variation d'effort est de $\frac{72}{2550} \approx 3 \%$.

Question 23 Déterminer la relation $F = F(y_T)$.

Correction

$F = 2622 - r y_T$.

On considérera dans cette question que l'effort de compensation F_c est constant.

Question 24 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de a , M_e , F_c , M ...

Correction

En reprenant l'expression précédente et en ajoutant l'effort de la courroie F_c (de sens opposé au poids), on a $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg - F_c)$.

Question 25 Exprimer ensuite a en fonction de C , M_e , F_c , M ...

Correction

On a $a = \dot{V}$ et $a = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\pi C}{p_v} + F_c - Mg \right)$.

Question 26 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur (prendre $F_c = 1300 \text{ N}$).

Correction

On reprend l'expression de C et on a $C = 0,22 \text{ Nm}$. $P_0 = 34,4 \text{ W}$

Question 27 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Correction

$$P = 115 \text{ W}$$

Synthèse

Question 28 On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante?

Correction

Application 4

Mesure d'inertie – Sujet

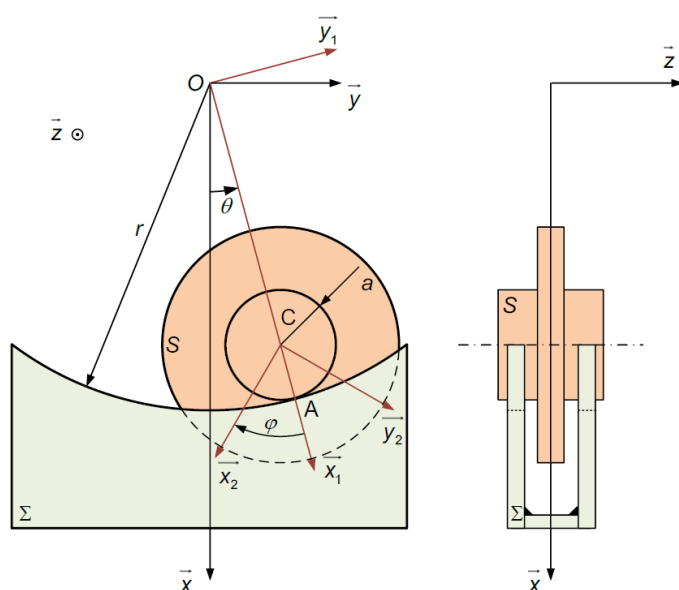
Un classique ...

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .

C1-05

C2-08



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- ▶ soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5$ s.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega =$

$$\sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}.$$

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .

Application 4

Mesure d'inertie – Corrigé

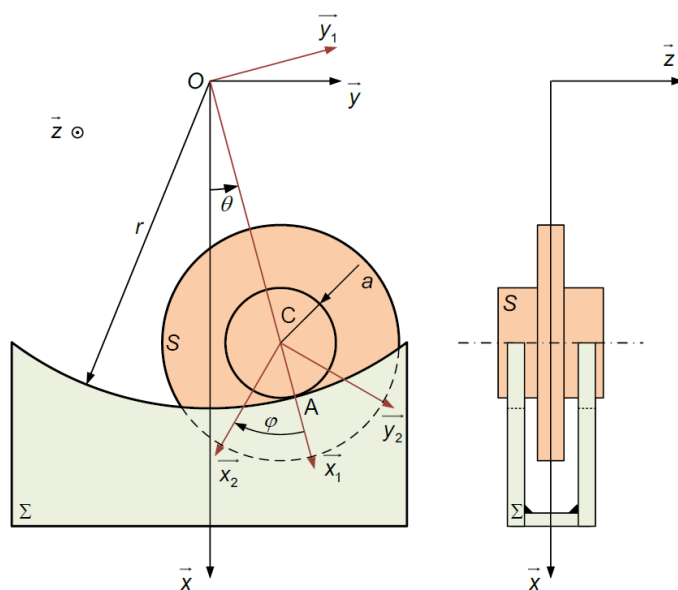
Un classique ...

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .

C1-05

C2-08



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- ▶ soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5$ s.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega =$

$$\sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}.$$

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .

TD 1

Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

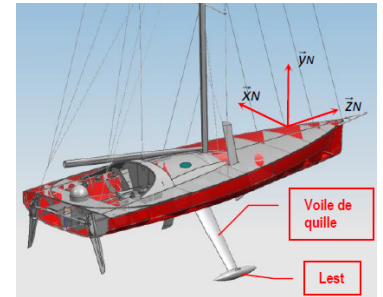
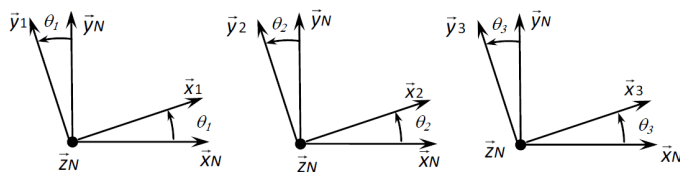


FIGURE 1.1 – Modèle volumique 3D

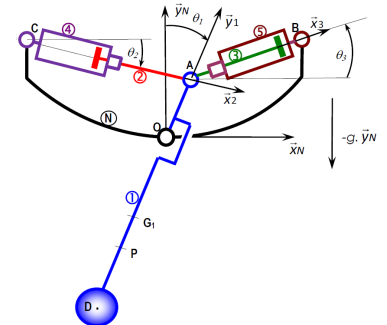


FIGURE 1.2 – Modèle 2D

FIGURE 1.3 – Paramétrage

Données géométriques, massiques et inertielles $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{y_1}$;

$$\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}; \overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\overrightarrow{x_3},$$

- Solide 1, masse M_1 , centre d'inertie G_1 , $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\overrightarrow{y_1}$, $I_{G_1}(1) =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 2, masse M_2 , centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\overrightarrow{x_2}$, $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 3, masse $M_3 = M_2$, centre d'inertie G_3 , $\overrightarrow{AG_3} = L_2\overrightarrow{x_3}$,

$$I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 4, masse M_4 , centre d'inertie C , $I_C(4) =$

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 5, masse M_5 , centre d'inertie B , $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_C$.
- Action de pression de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_B$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action hydrodynamique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_P$ avec $\overrightarrow{OP} = -h\overrightarrow{y_1}$.

Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

1. $\overrightarrow{V}(G_1, 1/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles ;
2. $\overrightarrow{V}(G_2, 2/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles ;
3. $\overrightarrow{V}(G_3, 3/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles ;
4. $\overrightarrow{V}(A, 2/4)$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

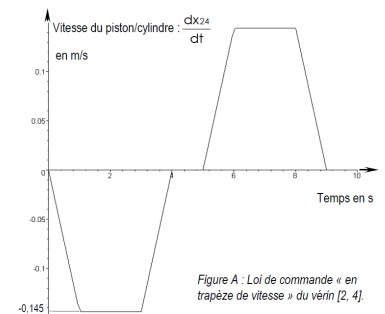
Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure 1.4.

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\text{ s}$, $t = 1\text{ s}$, $t = 3\text{ s}$ et $t = 4\text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.



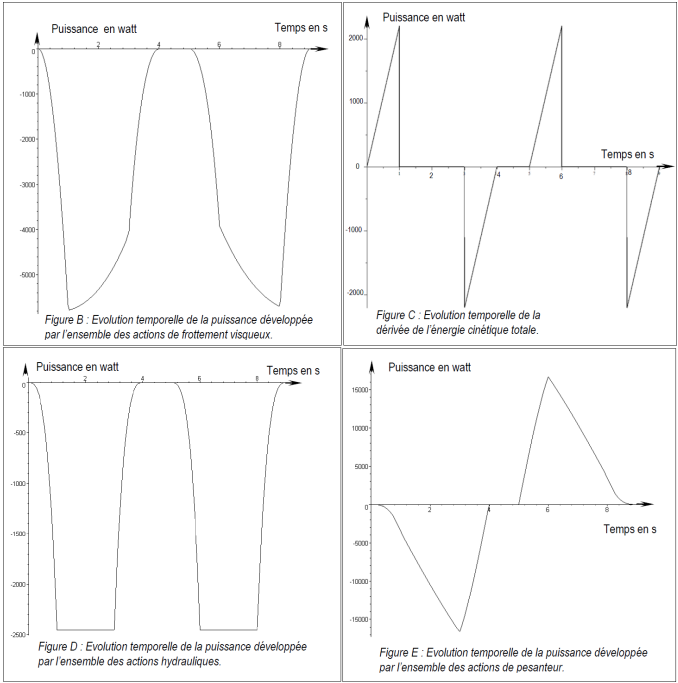


FIGURE
puissan

TD 1

Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

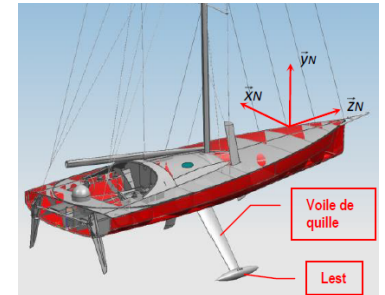
C1-05

C2-08

Mise en situation

Objectif

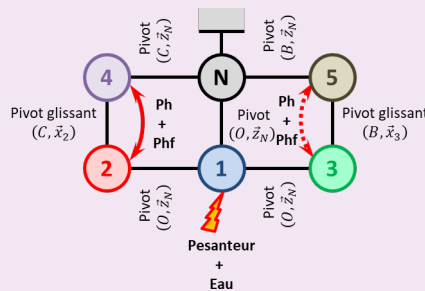
L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.



Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Correction



Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

- $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles ;
- $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles ;
- $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles ;
- $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Correction

$$\begin{aligned}
 1. \quad \overrightarrow{V(G_1, 1/N)} &= \overrightarrow{V(O, 1/N)} + \overrightarrow{G_1 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1 \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_N = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1. \\
 2. \quad \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R \vec{y}_1 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2. \\
 \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(x_{24}(t) \vec{x}_2 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = \\
 &= \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R\vec{y}_1 + L_2\vec{x}_3)}{dt} \right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1\vec{x}_1 + L_2\dot{\theta}_3\vec{y}_3. \\
\text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(-x_{35}(t)\vec{x}_3 + L_2\vec{x}_3)}{dt} \right]_{R_N} = \\
&= -\dot{x}_{35}(t)\vec{x}_3 + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2)\vec{y}_3. \\
4. \quad \overrightarrow{V(A, 2/4)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{CA}}{dt} \right]_{R_4} = \left[\frac{d(x_{24}(t)\vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t)\vec{x}_2.
\end{aligned}$$

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

Correction

$$\begin{aligned}
1. \quad \mathcal{E}_c(1/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(1/N) \} \otimes \{ \mathcal{E}(1/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(1/N)}}{\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}} \right\}_{G_1} \otimes \\
&\left\{ \frac{M_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/N)}}{\sigma(G_1, 1/N)} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \vec{z}_N}{L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1}{\dot{\theta}_1 (-D_1 \vec{y}_N + C_1 \vec{z}_N)} \right\}_{G_1} \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_1^2 (-D_1 \vec{y}_N + C_1 \vec{z}_N) \vec{z}_N + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_1^2 C_1 + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \\
&\frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2). \\
2. \quad \mathcal{E}_c(2/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(2/N) \} \otimes \{ \mathcal{E}(2/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/N)}}{\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}} \right\}_{G_2} \otimes \\
&\left\{ \frac{M_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/N)}}{\sigma(G_2, 2/N)} \right\}_{G_2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_2 \vec{z}_N}{\dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 (\dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2)}{\dot{\theta}_2 B_2 \vec{z}_N} \right\}_{G_1} \\
&= \frac{1}{2} \left(B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2)^2 \right) = \\
&\frac{1}{2} \left(B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2) \right). \\
3. \quad \mathcal{E}_c(4/N) &= \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2.
\end{aligned}$$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements ;
- $\mathcal{P}\left(4 \overset{\text{Ph}}{\leftrightarrow} 2\right) = \{\mathcal{T}(4 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/4)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}}{\mathcal{M}(A, 4 \rightarrow 2)} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/4)}}{V(A, 2/4)} \right\}_A$
 $= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{V(A, 2/4)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \end{array} \right\}_A = F_{h2}\dot{x}_{24};$
- $\mathcal{P}\left(4 \overset{\text{Phf}}{\leftrightarrow} 2\right) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{V(A, 2/4)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \end{array} \right\}_A = -k\dot{x}_{24}^2(t);$
- $\mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Ph}}{\leftrightarrow} 5\right) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{V(A, 3/5)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A$
 $= F_{h3}\dot{x}_{35}(t);$
- $\mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Phf}}{\leftrightarrow} 5\right) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{V(A, 3/5)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A = -k\dot{x}_{35}^2(t).$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements ;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \frac{\overrightarrow{0}}{V(G_1, 1/R_N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G_1}$
 $= -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \overrightarrow{y_N} = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_2 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_{G_1}$
 $= -M_2 g \overrightarrow{y_N} \left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2} \right) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 -$

$$\begin{aligned}
& M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2; \\
\blacktriangleright \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) &= -M_3 g \vec{y}_N \left(-\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3 \right) \\
&= -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3); \\
\blacktriangleright \mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) &= \{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P \otimes \\
&\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ h \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_P \\
&= F_t h \dot{\theta}_1;
\end{aligned}$$

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

Correction

$$\text{On a : } \mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$$

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 3 \text{ s}$ et $t = 4 \text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4 \text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Correction

D'après UPSTI. À 1 s , $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14\,500 \text{ W}$ à 3 s $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22\,500 \text{ W}$ Maximum à environ $22,5 \text{ kW}$. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur $[5 \text{ s}; 8 \text{ s}]$).

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW . Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Correction

D'après UPSTI. La différence est de $7,5 \text{ kW}$. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...