

12 Correction des SLCI

12.1 Pourquoi corriger un système ?

Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- ▶ plus précis;
- ▶ plus amorti;
- ▶ plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.

Résultat –

- ▶ D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- ▶ D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- ▶ D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

C1-02

C2-04

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

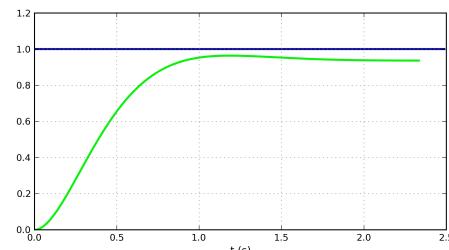
Florestan Mathurin, Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

12.2 Le correcteur proportionnel

Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert $C(p) = K$.

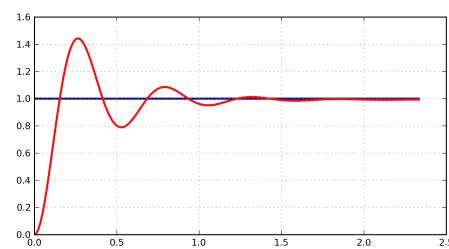
Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($K = 15$, $\xi = 3$, $\omega = 1$).



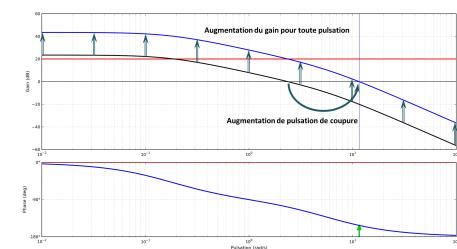
$T_{5\%} : 0,781 \text{ s} - \text{Écart statique} : 0,07$



Marge de phase $71,94^\circ$



$T_{5\%} : 0,88 \text{ s} - \text{Écart statique} : \text{tend} \rightarrow 0$



Marge de phase $6,43^\circ$

Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- ▶ d'améliorer la précision;
- ▶ d'augmenter la vivacité;
- ▶ d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- ▶ de diminuer l'amortissement;
- ▶ de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

Méthode –

Réglage de la marge de phase :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche $\omega_{0 \text{ dB}}$ tel que $\varphi(\omega_{0 \text{ dB}})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant BO non corrigée, on calcule $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}})$.
- ▶ On cherche K_p tel que $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}}) = 0$

Réglage de la marge de gain :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{-180° tel que $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$.
- ▶ On cherche K_p tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

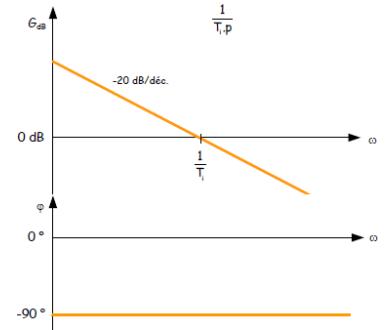
12.3 Les correcteurs à action intégrale

12.3.1 Le correcteur intégral pur

Définition – Correcteur I

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$.



Résultat –

Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

Inconvénients

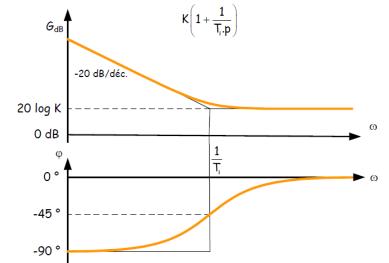
Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

12.3.2 Le correcteur proportionnel intégral

Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = K \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$.



En développant on obtient $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$. Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si $K > 1$ la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

Résultat – Correcteur PI

- ▶ augmente l'amortissement;
- ▶ augmente la rapidité;
- ▶ augmente la précision.

Méthode –

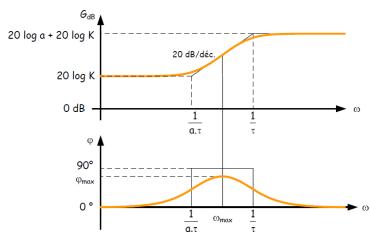
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{0dB} tel que $\varphi(\omega_{0dB})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{dB}(\omega_{0dB})$.
- ▶ On cherche K tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- ▶ La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la

pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que $\frac{1}{T_i} << \omega_{0\text{dB}}$. Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc $T_i = \frac{10}{\omega_{0\text{dB}}}$.

Remarque

Une autre possibilité pour régler T_i est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ avec $\tau_1 >> \tau_2$. τ_1 ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre $T_i = \tau_1$ afin de supprimer l'effet du pôle associé à τ_1 .

12.4 Le correcteur à avance de phase



Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1 + \alpha \tau p}{K \frac{1 + \tau p}{1 + \tau p}}$ avec $\alpha > 1$.

Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre $\frac{1}{\alpha \tau}$ et $\frac{1}{\tau}$. On montre que $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)$ et ce pour une pulsation $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$.

Remarque

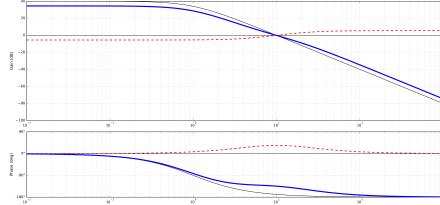
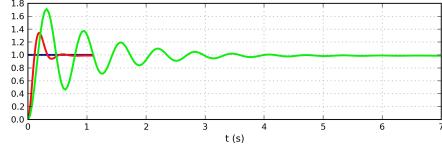
On peut prendre $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$ pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

Démonstration

Pour déterminer ω_{\max} on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$. On peut aussi remarquer « graphiquement » que ω_{\max} est situé au milieu des deux pulsations de coupures : $\frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha \tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{\alpha \tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau \sqrt{a}}\right)$ et $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$.

D'autre part, il faudrait calculer $\varphi(\omega_{\max})$...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$, $a = 3,54$, $T = 0,053$ s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

Méthode –

- En utilisant la BO non corrigée on cherche ω_{0dB} tel que le gain est nul.
- On calcule $\varphi(\omega_{0dB})$.
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule a .
- On calcule τ .
- On calcule K .

12.5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction		
	Si K_p augmente		
Proportionnel K_p	Marges	↔	
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	↔	Si mal réglé
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	↔	(Cf : classe)
	Précision	↔	
	Rapidité	↔	

Application 1

Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

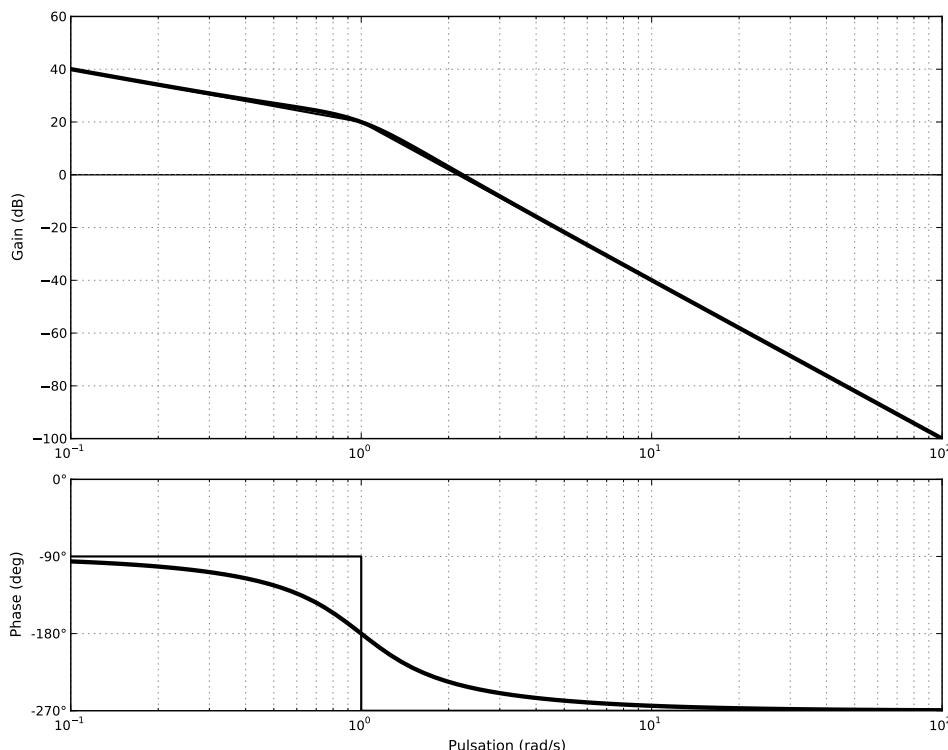
D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de 45° et une marge de gain de 10 dB.

C1-02

C2-04

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45° . Vérifier la marge de gain.

Éléments de correction

1. $M_\varphi = -60^\circ$.
2. $M_G = -20 \text{ dB}$.
3. $K_p = 0,054$ et $M_G = 5,35 \text{ dB}$.
4. $K_p = 0,0316$ et $M_\varphi = 70^\circ$.

D'après ressources P. Dupas.

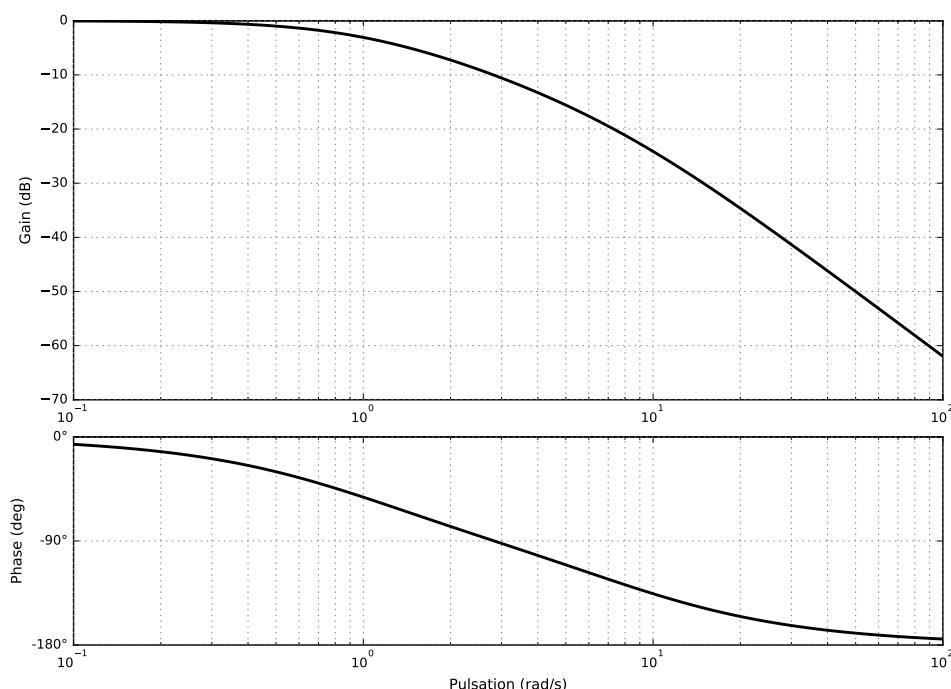
Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

Correcteur proportionnel intégral

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de 45° en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$.

Question 5 Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



Question 6 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45° .

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Éléments de correction

- 1.
2. $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$.
- 3.

Application 1

Réglage de correcteurs P et PI – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

C1-02

C2-04

Correction

- On cherche ω tel que $G_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$: $G_{dB}(\omega) = -20 \log(10) - 20 \log \omega - 20 \log \left(\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} \right)$

On trouve $\omega = 2,21 \text{ rad/s}$ et $M_\varphi = -60^\circ$. Le système est instable.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Correction

Pour $\varphi = -180^\circ$, on a $\omega = 1 \text{ rad/s}$ et $M_G = -20 \text{ dB}$. Le système est instable.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45° . Vérifier la marge de gain.

Correction

Pour $\varphi = -135^\circ$ on a $\omega = 0,62 \text{ rad/s}$. On trouve un gain proportionnel de 0,054.
La marge de gain est alors de 5,35 dB ce qui est inférieur aux 10 dB demandés.

Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

Correction

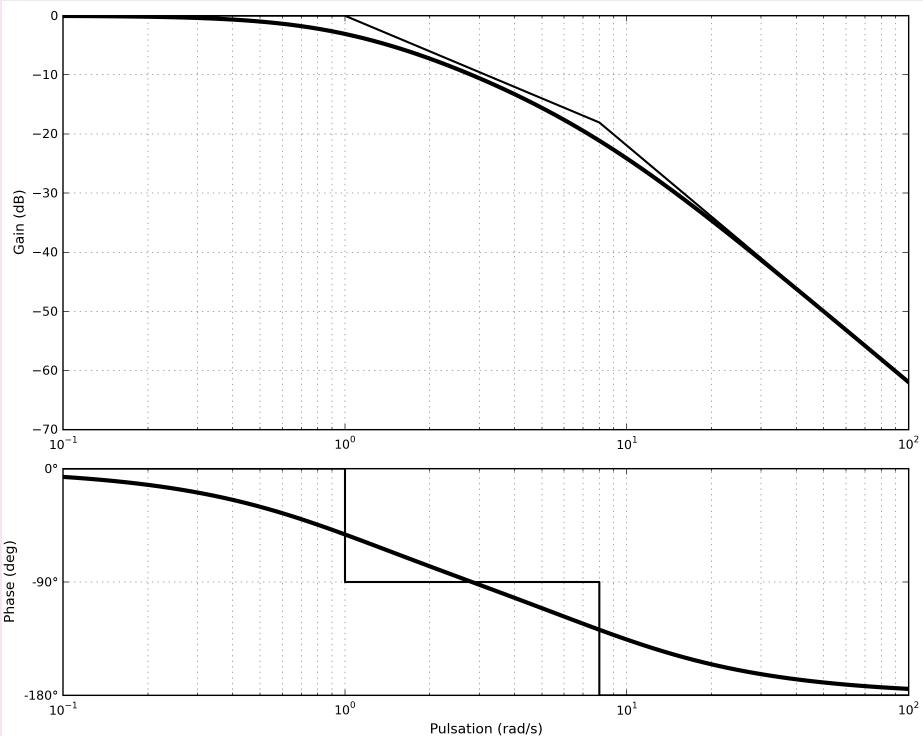
Pour $\varphi = -180^\circ$ on a $\omega = 1 \text{ rad/s}$. On trouve un gain proportionnel de 0,316.
La marge de phase est alors de 70° ($\omega = 0,0333 \text{ rad/s}$).

Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Question 5 Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

Correction



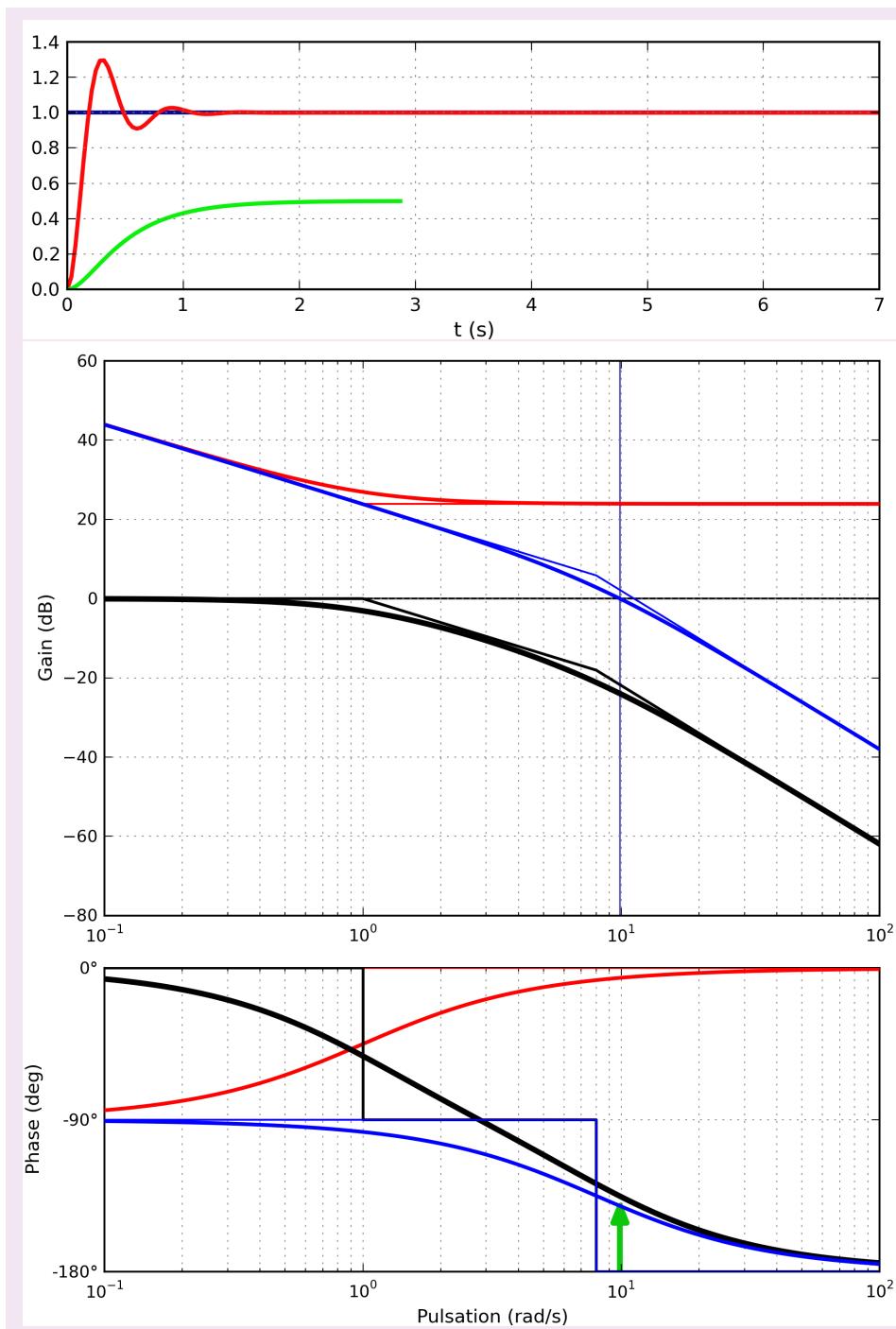
Question 6 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45° .

Correction

- ▶ On résout $\varphi(\omega) = -135^\circ$: $\varphi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan \omega/8 \Rightarrow \tan 135^\circ = \frac{\omega + \omega/8}{1 - \omega^2/8}$
 $\Leftrightarrow -1 + \omega^2/8 - 9\omega/8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 9\omega - 8 = 0$. $\Delta = 81 + 32 = 10,63^2$. $\omega = \frac{9 \pm 10,63}{2} = 9,82$ rad/s.
- ▶ Calculons $G_{dB}(9,82) = -23,9$ dB. Il faut donc augmenter le gain de 23,9 dB soit $K_p = 10^{23,9/20} = 15,7$.
- ▶ On choisit τ pour ne pas modifier la marge de phase. Il faut donc que le déphasage de 0° du correcteur ait lieu avant 9,82 rad/s. De manière usuelle on prend $\frac{1}{\tau} = \frac{9,82}{10} = 0,982$ rad/s.
- ▶ Au final, on a $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$.

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Correction



Application 2

Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

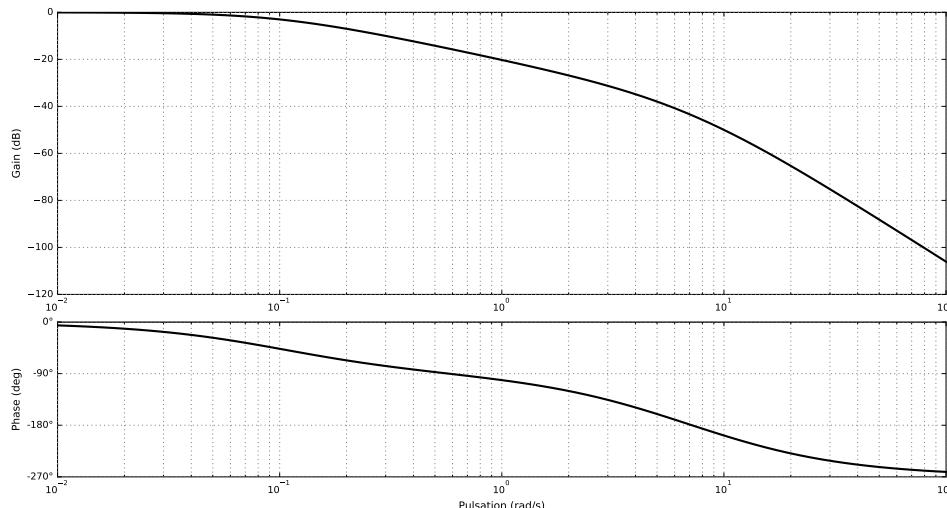
Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

C1-02

C2-04

Question 1 Déterminer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

Question 2 Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



Question 3 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45° . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Question 4 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

Correcteur à avance de phase

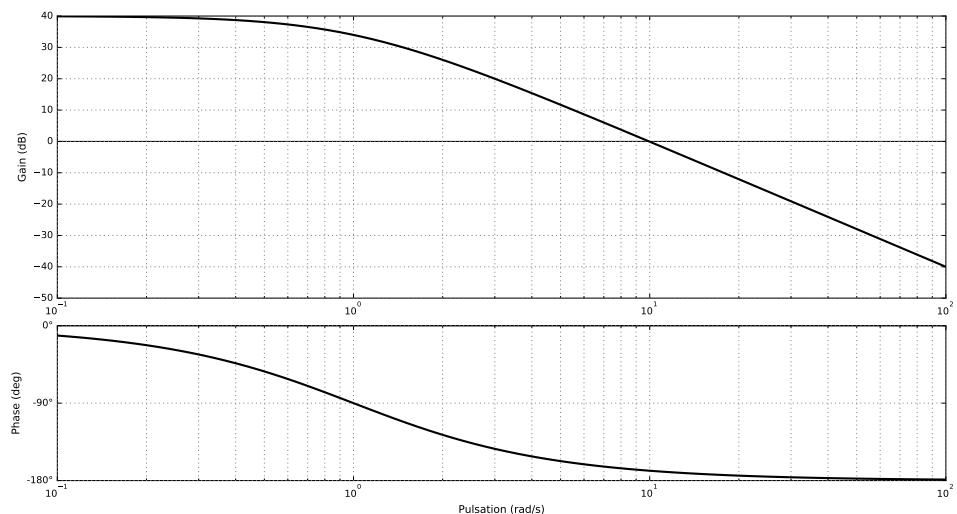
Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de

Éléments de correction

1. $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$.
2. .
3. $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$.
4. $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$ et $M_G = 38 \text{ dB}$ soit $K_P = 79$.

$$\text{phase de la forme } C(p) = K \frac{1 + \alpha \tau p}{1 + \tau p}.$$

Question 5 Justifier le tracer du diagramme de Bode de $G(p)$.



Question 6 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45° .

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Éléments de correction

$$\begin{aligned}
 1. \\
 2. \quad C(p) &= \\
 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p} \\
 3.
 \end{aligned}$$

Application 2

Réglage de correcteurs P et AP – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

Question 1 Déterminer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

C1-02

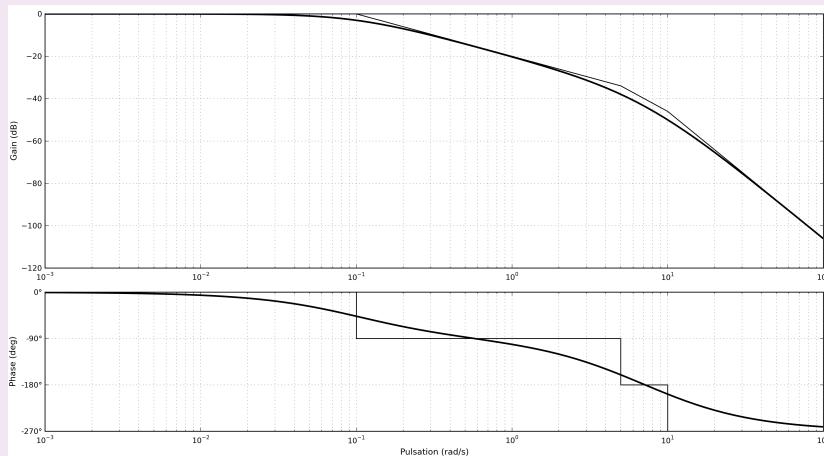
C2-04

Correction

Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon. $K_{BO} = 1$. L'écart statique est de $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Question 2 Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Correction



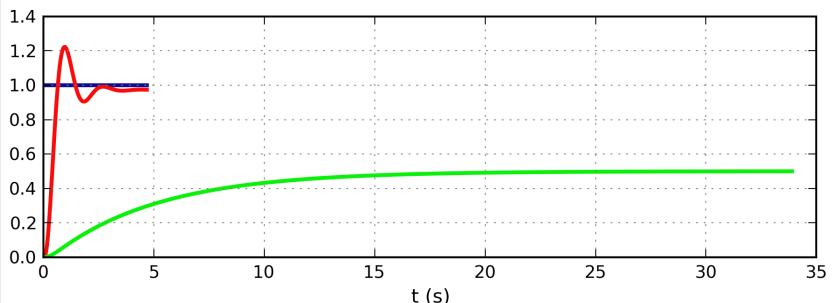
Question 3 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45° . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Correction

- On résout $\varphi(\omega) = -135^\circ$: $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$.
 $\varphi(\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \omega = 2,95 \text{ rad s}^{-1}$ (solveur Excel).
- Calculons $G_{dB}(\omega) = -20 \log(\sqrt{1 + 10^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + 0,1^2\omega^2}) -$

$20 \log \left(\sqrt{1 + 0,2^2 \omega^2} \right) = -31 \text{ dB}$. Il faut donc augmenter le gain de 31 dB soit $K_P = 10^{31/20} = 35,48$.

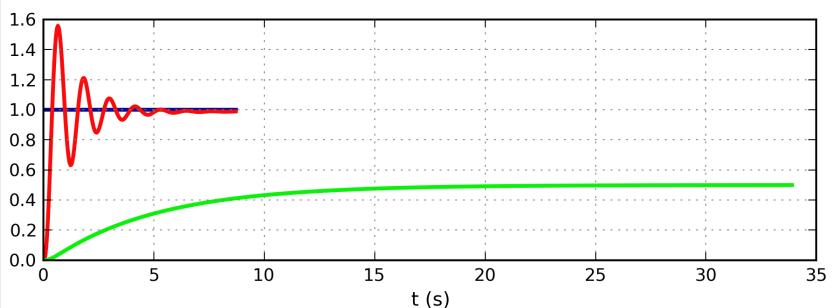
- On a alors un écart statique de $\frac{1}{1+35,48} = 0,027$.
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre $\varphi(\omega) = -180^\circ$. On obtient $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$ et $M_G = 12 \text{ dB}$.



Question 4 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

Correction

- On commence par résoudre $\varphi(\omega) = -180^\circ$. On obtient $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$ et $M_G = 44 \text{ dB}$.
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit $20 \log K_P = 38 \Rightarrow K_P = 10^{38/20} = 79$.
- On a alors un écart statique de $\frac{1}{1+79} = 0,0125$.
- La marge de phase est alors de 19° .



Correcteur à avance de phase

Question 5 Justifier le tracer du diagramme de Bode de $G(p)$.

Question 6 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45° .

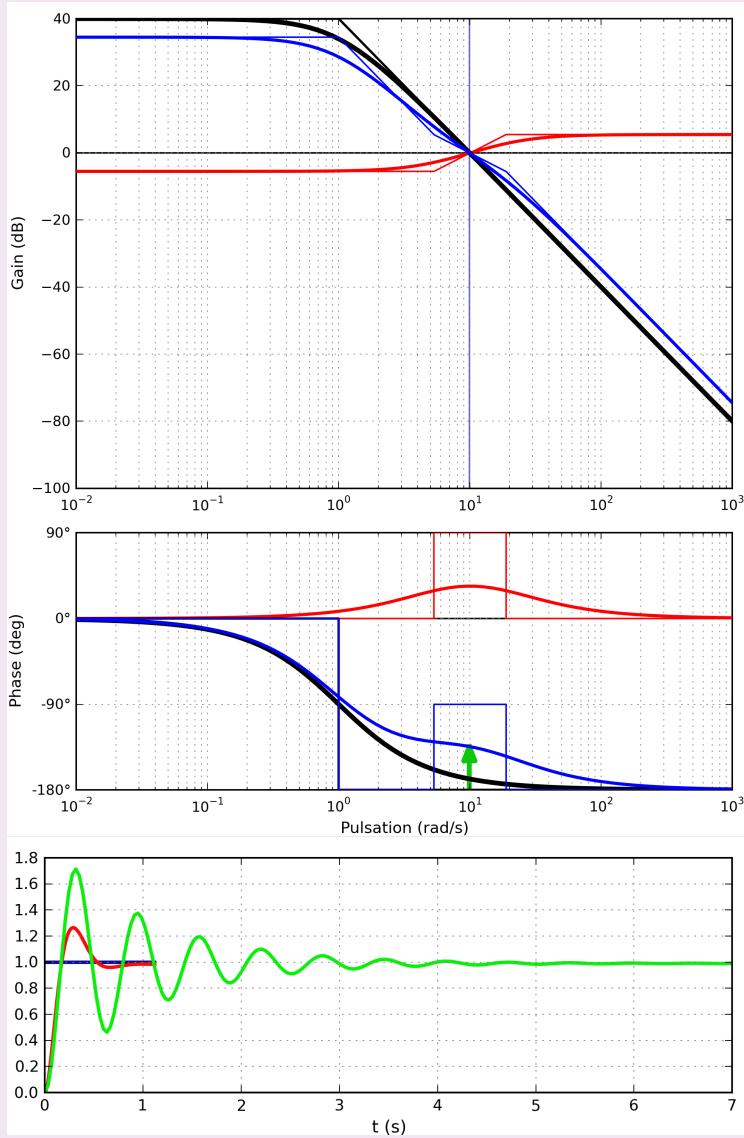
Correction

- $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(100) - 20 \log(1 + \omega^2)$. $G_{\text{dB}}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + \omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99} \Rightarrow \omega = 9,95 \text{ rad/s}$.
- $\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$ et $\varphi(9,95) = -2,94 \text{ rad} = -169^\circ$ soit une marge de phase de 11° ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de 34° .
- $\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{a-1}{a+1} \right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\max}) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = -\frac{\sin(\varphi_{\max}) + 1}{\sin(\varphi_{\max}) - 1} = 3,54$.

► $\tau = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s.}$

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Correction



Éléments de correction

- 1.
2. $C(p)$
3. $0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}.$

Application 3

Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bi-dons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

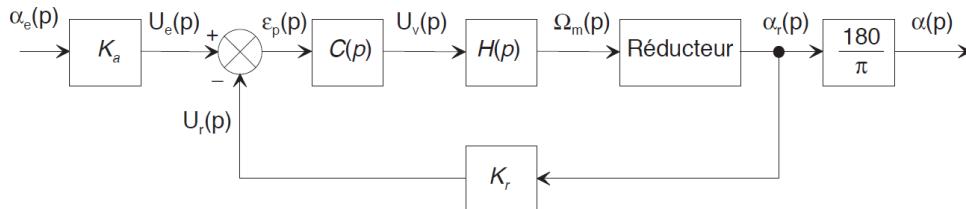
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$: gain du capteur de position;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degrés;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c ;
- $N = 200$: rapport de transmission.

C1-02

C2-04

Objectif

- On souhaite une marge de phase de 45° .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de 105° s^{-1} .



Question 1 Déterminer la fonction de transfert $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$ du réducteur.

Question 2 Déterminer le gain K_a de l'adaptateur.

Question 3 Déterminer, en fonction notamment de K'_m et t'_m , la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté K_{BO} .

On souhaite une marge de phase de 45° .

Question 4 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Question 5 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Question 6 Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de 105° s^{-1} .

Question 7 Déterminer l'expression de $\alpha_e(t)$ correspondant à une consigne de vitesse de 105°s^{-1} . En déduire $\alpha_e(p)$.

Question 8 La valeur de K_{BO} définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

Éléments de correction

1. $R(p) = \frac{1}{Np}$.
2. $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$.
3. $T(p) = \frac{K_{\text{BO}}}{p(1 + \tau'_m p)}$ avec

$$K_{\text{BO}} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$
.
4. $K_{\text{BO}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$.
5. $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$.
6. $\varepsilon_S = 0$.
7. $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$.
8. $\varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{\text{BO}}}$.

Application 3

Réglage de correcteurs P – Corrigé

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

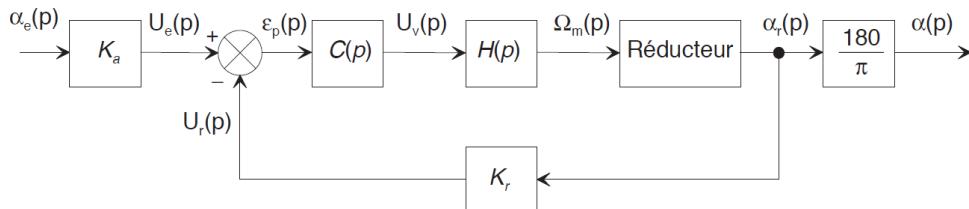
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$: gain du capteur de position;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degrés;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c ;
- $N = 200$: rapport de transmission.

C1-02

C2-04

Objectif

- On souhaite une marge de phase de 45° .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de 105° s^{-1} .



Question 1 Déterminer la fonction de transfert $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$ du réducteur.

Correction

D'une part le réducteur permet de réduire la vitesse. D'autre part, le schéma-bloc permet de convertir une vitesse en position. Il joue donc le rôle d'intégrateur. On a donc $R(p) = \frac{1}{Np}$

Question 2 Déterminer le gain K_a de l'adaptateur.

Correction

On a $\epsilon(p) = K_a \alpha_e(p) - K_r \alpha_r(p) = K_a \alpha_e(p) - K_r \frac{\pi}{180} \alpha(p)$. Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc $K_a = K_r \frac{\pi}{180}$.

Question 3 Déterminer, en fonction notamment de K'_m et t'_m , la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté K_{BO} .

Correction

$$\text{On a } T(p) = C(p)H(p)R(p)K_r = K_c \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{Np} K_r. \text{ On a donc } K_{BO} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$

On souhaite une marge de phase de 45° .

Question 4 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Correction

Pour un premier ordre intégré, la phase est de 135° en $\frac{1}{\tau'_m}$. Le gain (dB) de la boucle ouverte doit donc être nul pour cette pulsation ou encore que le module soit unitaire.

$$|T(p)| = 1 \Rightarrow \left| K_c \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{Np} K_r \right| = 1 \Rightarrow \frac{K_c K'_m K_r}{N} \left| \frac{1}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{p} \right| = 1 \Rightarrow \frac{K_c K'_m K_r}{N} \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = 1 \\ \Rightarrow K_c = \frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} \Rightarrow K_c = \frac{\sqrt{2}}{K_{BO}}$$

Question 5 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Correction

$$\Rightarrow K_c = \frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r}$$

Question 6 Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Correction

La BO du système est de classe 1. Pour une entrée échelon, l'écart statique est nul.

On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de 105°s^{-1} .

Question 7 Déterminer l'expression de $\alpha_e(t)$ correspondant à une consigne de vitesse de 105°s^{-1} . En déduire $\alpha_e(p)$.

Correction

$$\alpha_e(t) = 105t \text{ et } \alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$$

Question 8 La valeur de K_{BO} définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

Correction

$$\text{L'écart de trainage est donné par } \varepsilon_t = \frac{105K_a}{K_{\text{BO}}} = \frac{105K_r \frac{\pi}{180}}{\frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} K'_m K_r} = \frac{105\pi K_r \tau'_m}{180\sqrt{2}}.$$

$$\text{AN : } \varepsilon_t = \frac{105 \times \pi \times 4 \times 5 \times 10^{-3}}{180\sqrt{2}} = 0,02^\circ. \text{ Le CDC est respecté.}$$

TD 1

Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

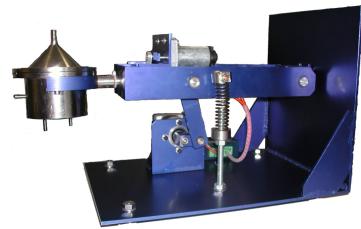
C1-02

C2-04

Objectif

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

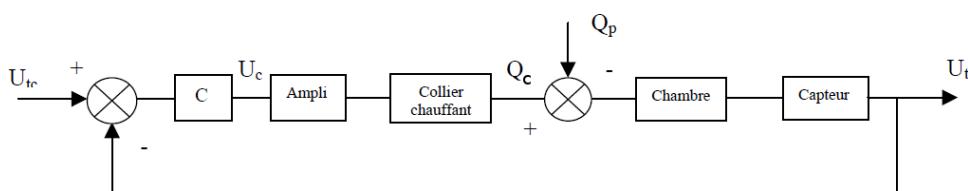
- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi ;
- ▶ précision de la température : $\pm 0,5^\circ$ pour un échelon de 20° .



Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

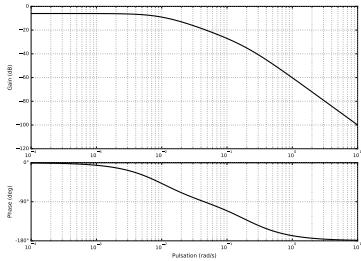
- ▶ U_{tc} : tension de consigne ;
- ▶ U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- ▶ U_a : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- ▶ q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- ▶ q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.



Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

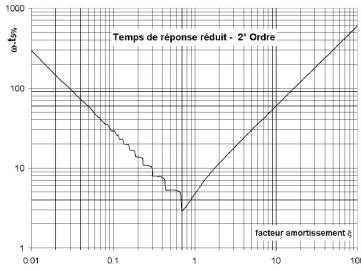
Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.



Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

Éléments de correction

1. 218 s.
2. $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$ et $\varepsilon_v = \infty$.
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ($M_G \rightarrow \infty$, M_φ non définie).
5. $K = 9$.
6. 50 s,
7. $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$ et $\varepsilon_v = \infty$.
8. $U_a = 450$ V.
9. $K = 10$ et $T_i = 100$ s.
10. $\varepsilon_p = 0$.

TD 1

Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Corrigé

CCP – PSI – 2006.

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

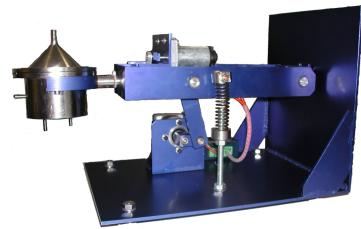
C1-02

C2-04

Objectif

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

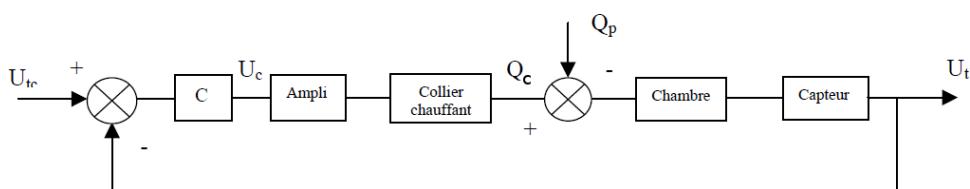
- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi ;
- ▶ précision de la température : $\pm 0,5^\circ$ pour un échelon de 20° .



Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶ U_{tc} : tension de consigne ;
- ▶ U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- ▶ U_a : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- ▶ q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- ▶ q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

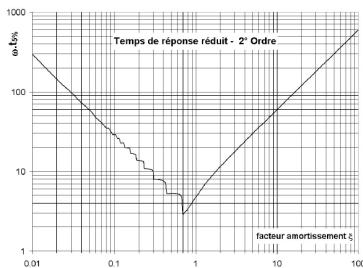
Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.



Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponse du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

Q20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{ic}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$

car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre ω_n telle que : $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement ξ tel que : $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \neq 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$ Incompatible avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

Q21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro) \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{array} \right.$$

$\varepsilon_p = 0,66$ 66 % Incompatible avec le cahier des charges.

Q22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition : $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$; $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6dB - 10 \cdot \log(1+25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \log(1+10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\arctan(5 \cdot \omega) - \arctan(100 \cdot \omega)$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	- 9	- 27	- 60
φ ($^\circ$)	- 48	- 115	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante

Q23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain : $M_G = \infty$

Marge de phase : $M_\varphi = 180^\circ$

Q 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler K afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à $2,3 \text{ dB}$, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

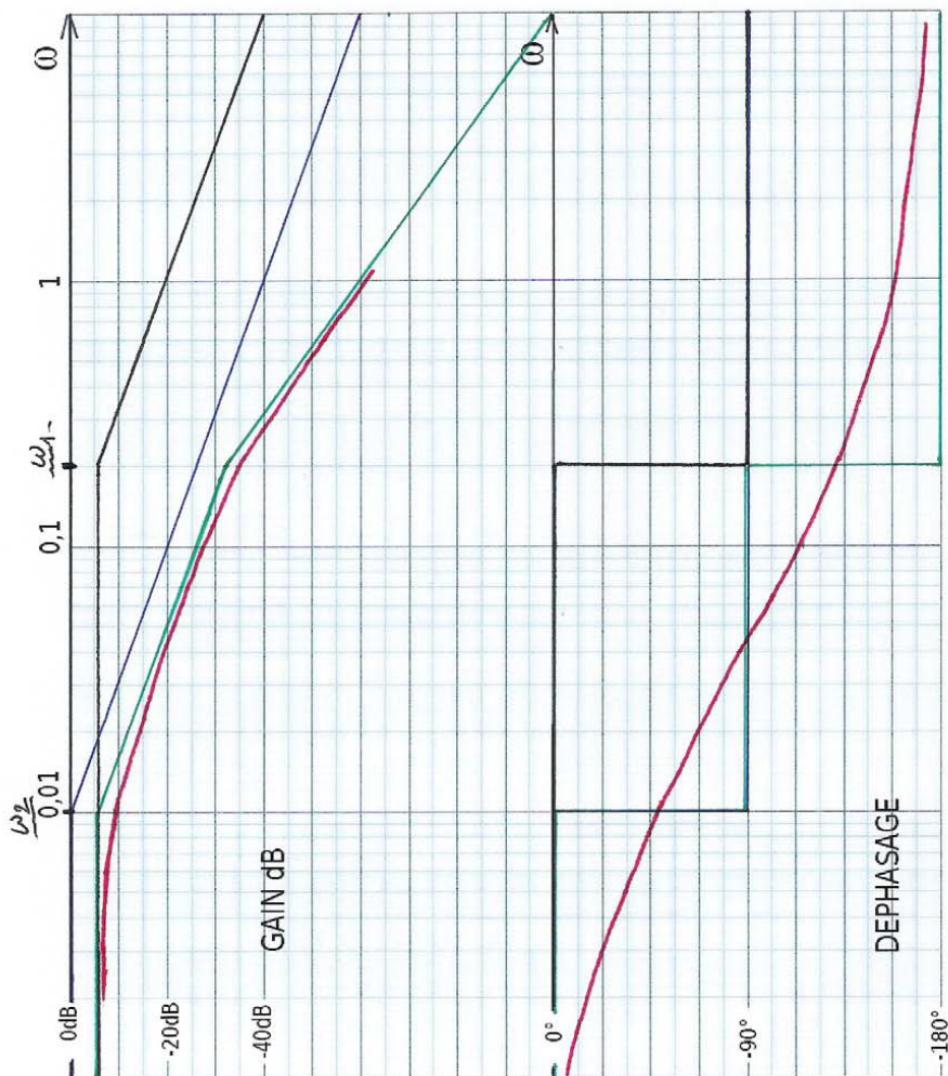
On règle K de telle sorte que $\xi \geq 1$; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

Question 22 : Tracé de Bode



$$\text{Pulsion propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot K}{500}}$$

$$\text{Facteur d'amortissement, il est tel que : } \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} ,$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1 + 0,5 \cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** : $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$

On choisit **K=9** alors **$\xi \approx 1$** la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de **20 Log 9**, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo})

La marge de gain est inchangée : **M_G = ∞**

On relève : **M_φ = 90°** **La stabilité est assurée.**

$$\text{Pulsion propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow t_{5\%} = 50 \text{ s}$ **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro) } \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

$\varepsilon_p = 0,55$ **55 %** **Incompatible** avec le cahier des charges.

O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U_{tc} est de 5 V

A 17° C correspond $U_c = 0 \text{ V}$, donc $U_t = 0 \text{ V}$.

Si $U_{tc} = 5 \text{ V} \Rightarrow U_c = 45 \text{ V}$. ($U_c = K \cdot \varepsilon$)

Alors **U_a = 450 V** Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait par **compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps T_i du correcteur égale à la **constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain K du correcteur afin que la **réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit $\xi = 1$). Le choix de T_i devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors : $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors : $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors : $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors : $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit $\xi = 1$ la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors : $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours : $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$ puisque $\xi = 1$

Tableau des valeurs de K , ω_n , $t_{5\%}$ en fonction du choix de T_i

T_i	K	ω_n	$t_{5\%}$	Commentaires
5 s	$25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$ rd/s	1 000 s	A rejeter
100 s	10	0,1 rd/s	50 s	A RETENIR

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100 \omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

$$\text{Gain : } G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + 25 \cdot \omega^2)$$

$$\text{Argument : } \varphi = -90^\circ - \arctan(5\omega)$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
φ ($^\circ$)	- 93	- 117 $^\circ$	- 135	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O. , le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations $\varphi = -90^\circ$ et $\varphi = -180^\circ$.

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{b03})

La marge de gain est inchangée : $M_G = \infty$

On relève : $M_\varphi \approx 77^\circ$

La stabilité est assurée.

O 28 – Nouvel écart de position

Le système est de classe 1 $\Rightarrow \varepsilon_p = 0$

TD 2

Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

C1-02

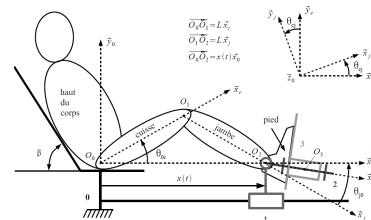
C2-04

Objectif

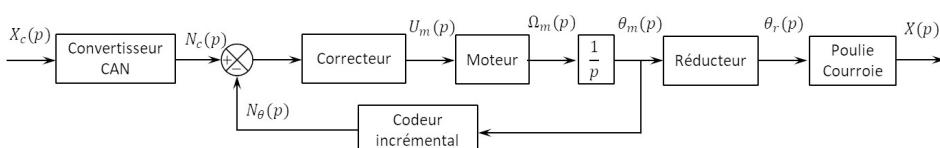
L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de réeduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s^{-1}



La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



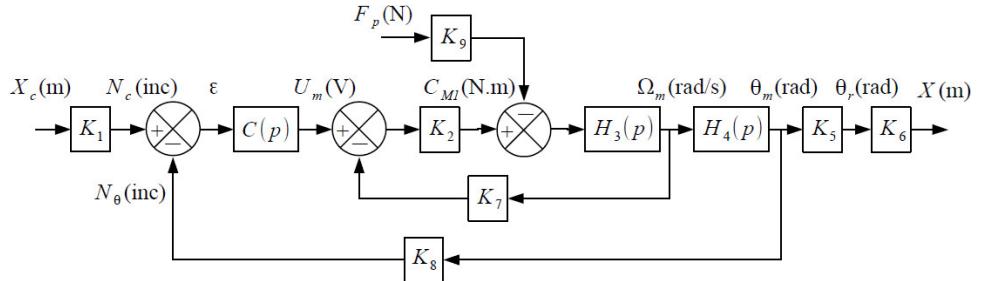
Soit le modèle donné dans la figure ci-contre.

Éléments de modélisation¹

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.

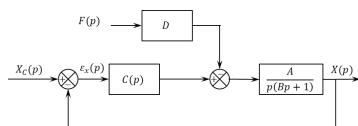


Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- M la masse du chariot et m la masse du support de pied;
- $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur;
- $r = 46,1 \times 10^{-3}$ m le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie;
- $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D , avec $A = 6700 \text{ m/V}$, $B = 0,01 \text{ s}$ et $D = 6 \text{ V/N}$.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_c .

Question 4 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 5 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

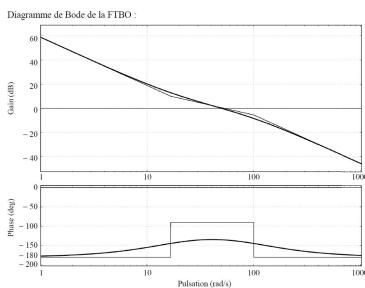
Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système

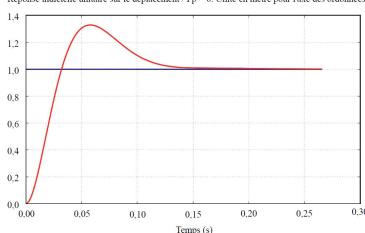
$$\text{FTBO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$$
 en supposant que $F_p = 0$.

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.



Réponse indicelle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



On donne sur le document réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

TD 2

Machine de rééducation SysReeduc – Corrigé

CCP PSI 2013.

Mise en situation

C1-02

C2-04

Éléments de modélisation²

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

Correction

On a :

- ▶ $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- ▶ $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- ▶ $(M + m) r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m) r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M + m) r^2 \rho_1^2 p}$;
- ▶ $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- ▶ un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- ▶ en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres);
- ▶ enfin, K_1 convertit des mètres en incrément. X_c est la consigne que doit respectée X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_c - K_8 \theta_m = K_1 X_c - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

2: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.



Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

Correction

$$\text{On montre } A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t} \text{ et } D = \frac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}.$$

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_c .

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon_x(p) &= X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left((C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(\frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &= \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F(p) \end{aligned}$$

Question 4 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

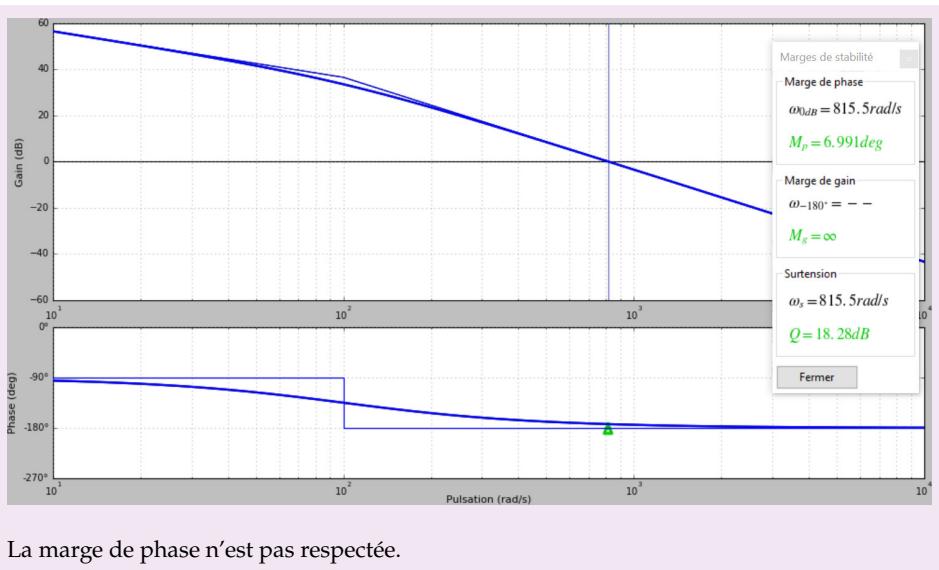
$$\begin{aligned} \text{On a : } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F_p \\ &= \frac{D}{K_C} F_p \end{aligned}$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

Question 5 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction

$$\text{On a } \text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}.$$



La marge de phase n'est pas respectée.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i .

Correction

$$\varepsilon_x(p) = -\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}F(p)$$

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pT_ip(Bp+1)}{pT_ip(Bp+1)+AK_i(T_ip+1)} X_0 + \frac{ADT_ip}{T_ip(Bp+1)+AK_i(T_ip+1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Correction

$$\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = \frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}.$$

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Correction

On souhaite que pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$, $\varphi(\omega) = -135^\circ$.

$$\begin{aligned} \arg(\text{FTBO}(j\omega)) &= \arg\left(\frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}\right) = -180 - \arg((Bp + 1)) + \arg(1 + T_i p) \\ &= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i \omega. \text{ En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s.} \end{aligned}$$

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

Correction

On souhaite que $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$ pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

$$|\text{FTBO}(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp + 1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2 \omega^2 + 1}} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{T_i \omega} = \frac{AK_i}{T_i \omega^2} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{B^2 \omega^2 + 1}}.$$

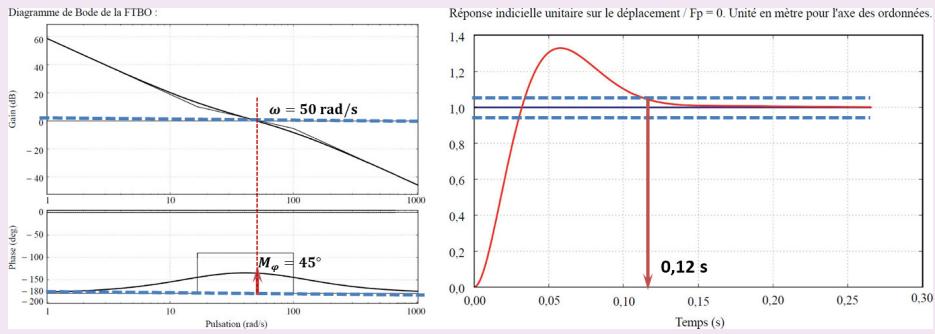
$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i \omega^2 \sqrt{B^2 \omega^2 + 1}}{A \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Correction

- Ecart de position : nul \Rightarrow Exigence OK.
- Marge de gain : infine \Rightarrow Exigence OK.
- Marge de phase : $\approx 45^\circ$ \Rightarrow Exigence OK.



TD 3

Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie – Sujet

Emilien Durif.

Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant \vec{y} par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant \vec{x} par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe \vec{z}) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.

C1-02

C2-04

Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$, $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$, $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

Le couple résistant C_r est constant et vaut $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$.

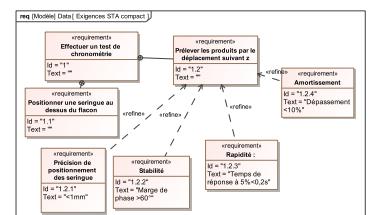
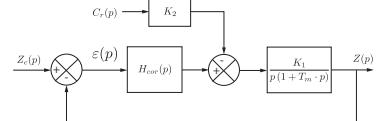
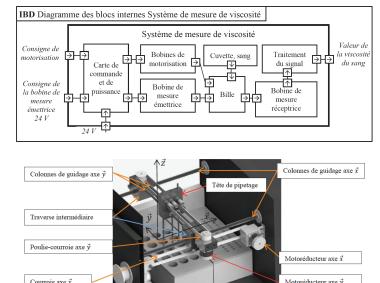
On suppose le correcteur proportionnel : $H_{cor}(p) = K_p$.

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partielle.

Question 1 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$.

Question 2 Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

Question 3 Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.



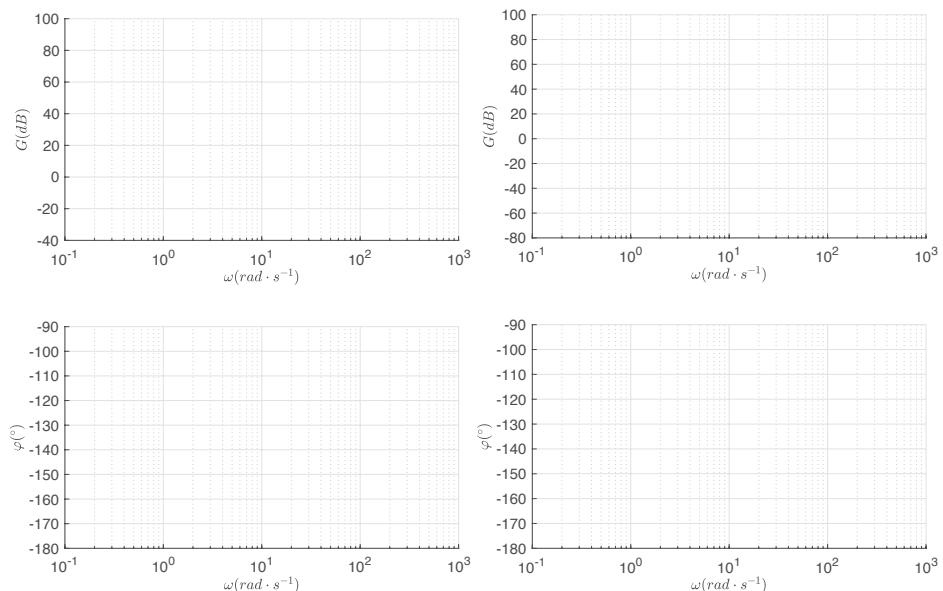
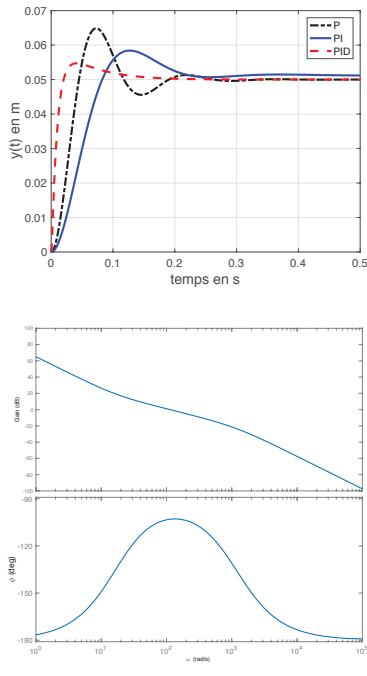
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1$ s.

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1$ s.

Question 5 On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges.

Question 6 La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

Question 7 Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



TD 3

Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie – Corrigé

Emilien Durif.

Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant \vec{y} par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant \vec{x} par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe \vec{z}) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.

C1-02

C2-04

Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$, $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$, $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

Le couple résistant C_r est constant et vaut $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$.

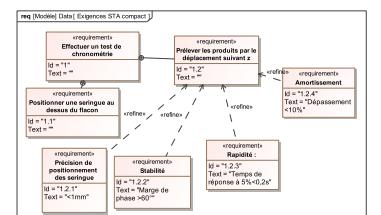
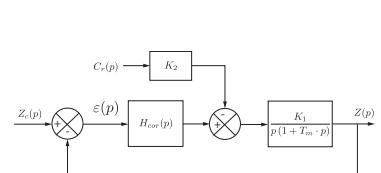
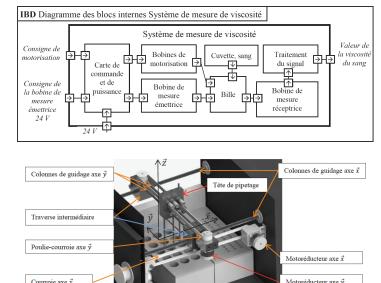
On suppose le correcteur proportionnel : $H_{cor}(p) = K_p$.

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partielle.

Question 1 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$.

Question 2 Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

Question 3 Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.



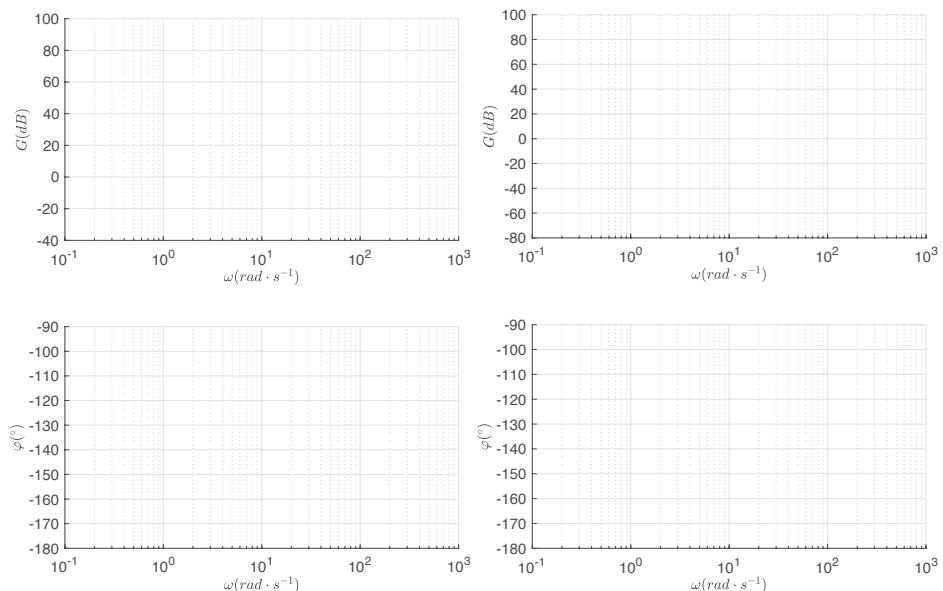
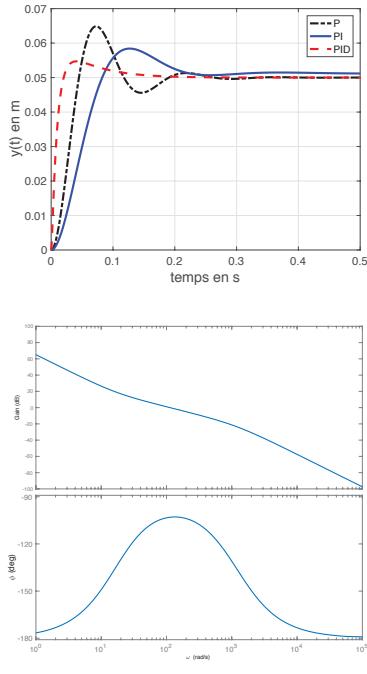
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1$ s.

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1$ s.

Question 5 On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges.

Question 6 La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

Question 7 Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



Question 8 $H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}$ et $Z(p) = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p \varepsilon(p) - K_2 C_r(p)] = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p(-Z(p)) - K_2 C_r(p)] \Leftrightarrow Z(p)(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}) = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)} C_r(p) \Leftrightarrow H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Z_c=0} = \frac{-\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)}}{(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)})} = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1} = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}}.$

Question 9 L'erreur statique par rapport à une entrée échelon, la perturbation étant nulle, est égale à 0, car il y a une intégration dans la chaîne directe

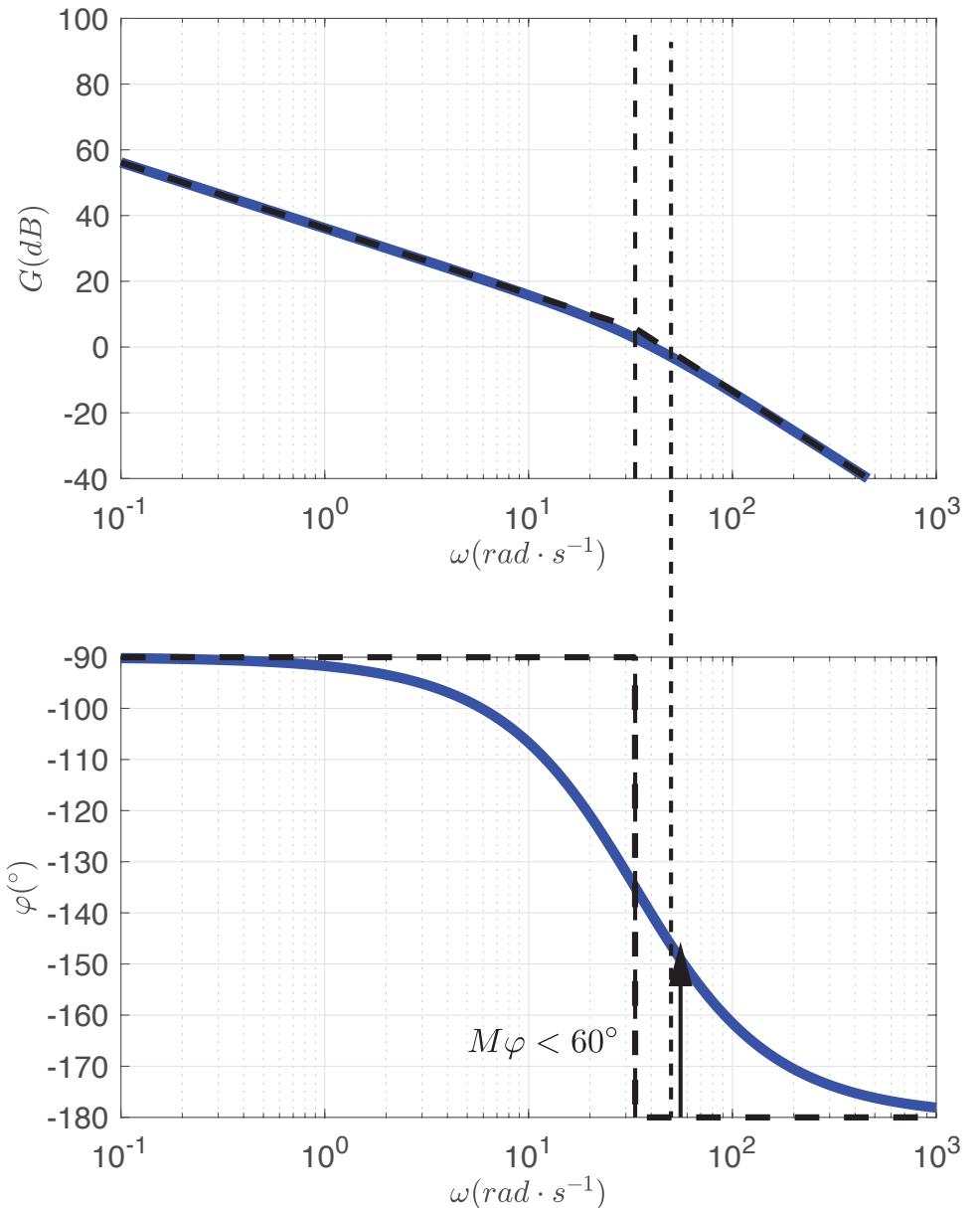
Dans le cas d'une perturbation constante égale à C_{ro} , d'après la question précédente on peut écrire : $Z(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} C_r(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \frac{C_{ro}}{p}$.

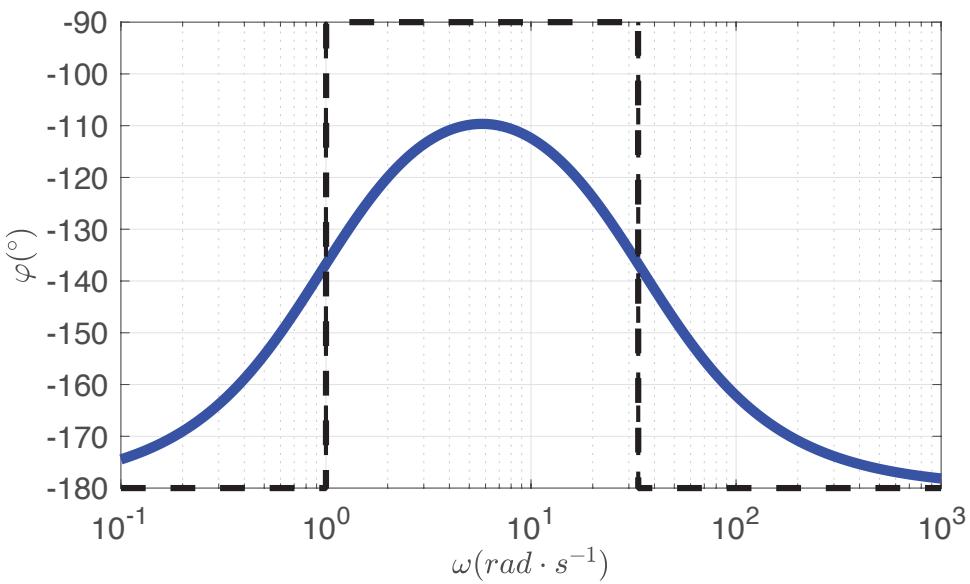
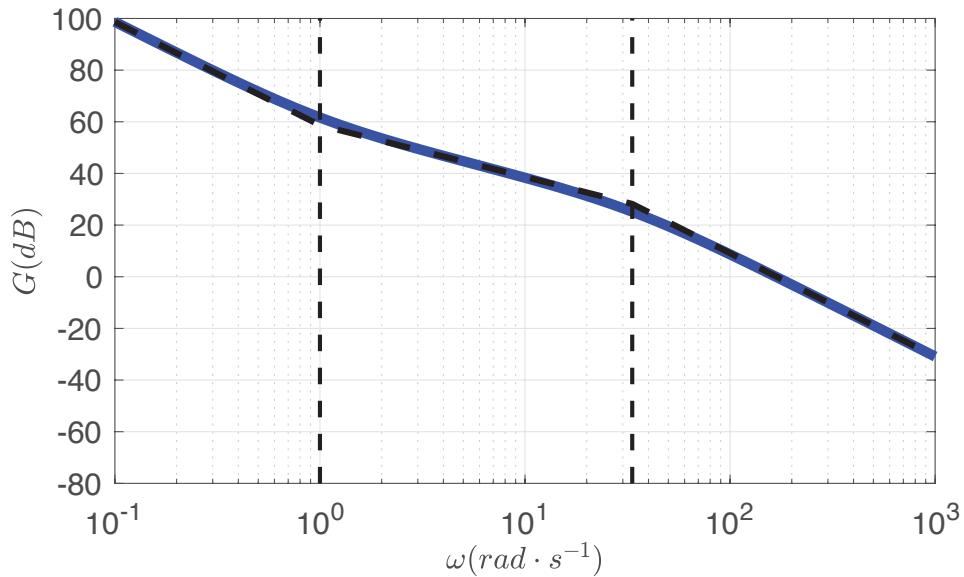
En utilisant la propriété du gain statique, on en déduit $z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$, l'erreur vaut donc $\varepsilon = -z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$.

Pour répondre à l'exigence de précision, on doit avoir $\varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 1 \text{ mm}$.

On en déduit $\varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 10^{-3} \text{ m}$
 $\Leftrightarrow K_p > \frac{K_2 C_{ro}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > 0,075$.

Question 10 Avec $K_p = 0,075$, on obtient une marge de phase de $35^\circ < 60^\circ$, le critère de stabilité n'est donc pas vérifié.

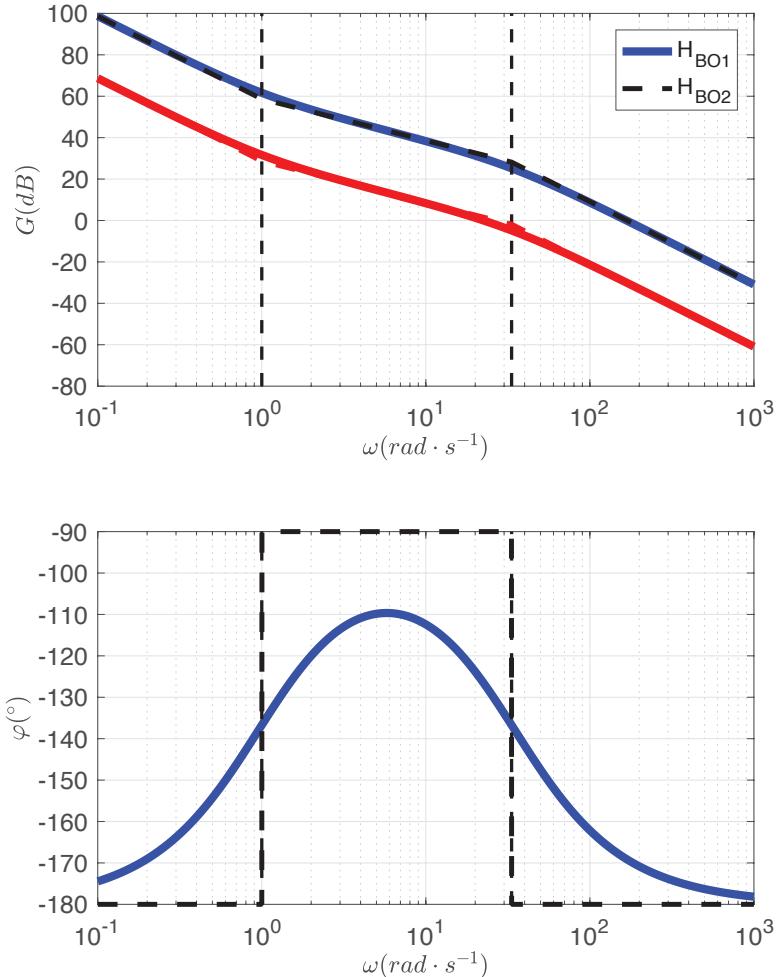




Question 11 On note qu'en la pulsation donnant une phase à -120° , le gain en décibel est à peu près égal à $-30dB$. On règle donc K_p tel que :

$$K_p = 10^{-30/20} = 0,032.$$

On obtient alors le deuxième tracé.

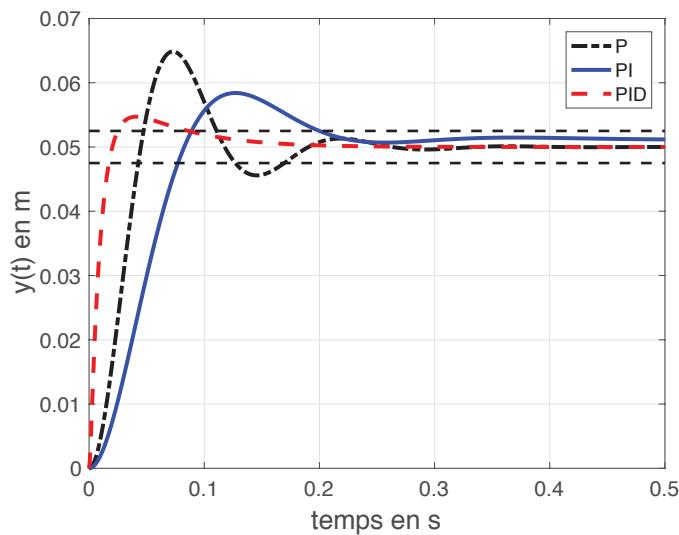


Question 12 ► La valeur en régime permanent vaut $50mm$ pour les trois réponses, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté pour les trois réglages.

► Temps de réponse à 5% et dépassement :

Type de correcteur	P	PI	PID
$tr_{5\%}$	0,17s	0,2s	0,08
Dépassement	29,72%	16,8%	9,4%

► Seul le PID vérifie le critère sur le premier dépassement car $D_{1\%} = 9,4\% < 10\%$. Le critère d'amortissement est donc respecté.



Question 13 On trouve une marge de phase supérieure à 60° et une bande passante à $0dB$ égale à $100rad/s$ supérieure aux réglages précédents ce qui donne une réponse plus rapide et plus stable.

TD 4

Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Sujet

CCP – PSI 2015.

Présentation

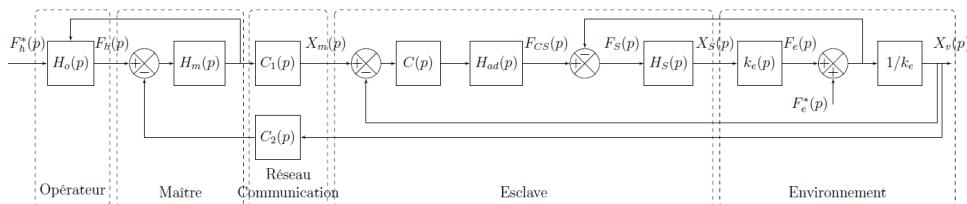
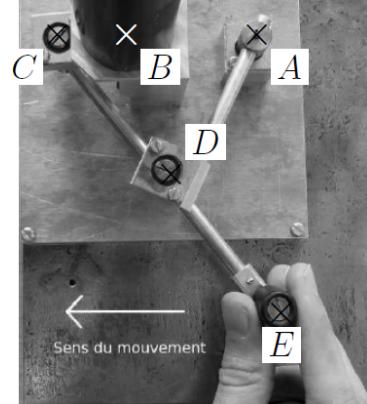
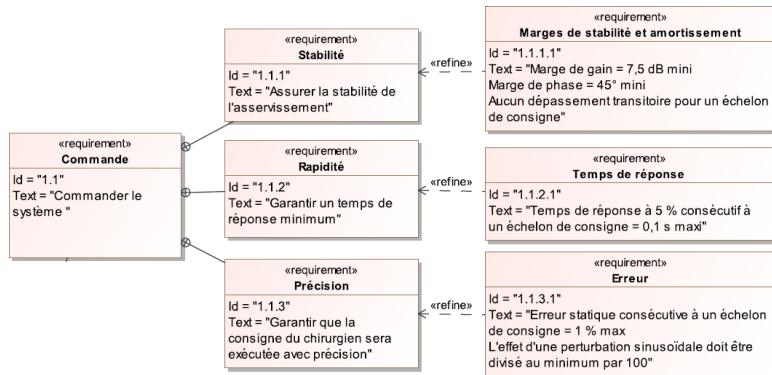
Réalisation de la commande de l'esclave

C1-02

C2-04

Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).

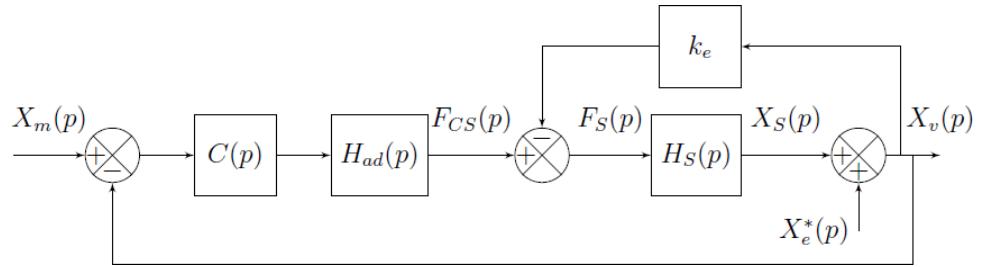


Modélisation et étude des performances du système sans correction

Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

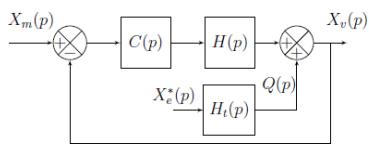
La modélisation permettant de relier la consigne $x_m(t)$ issue du dispositif maître au déplacement $x_v(t)$ de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$ permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_S}{p(m_S p + b_S)}$ avec $k_S = 1 \text{ m N}^{-1}$, $m_S = 0,152 \text{ kg}$ et $b_S = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$.

Question 1 Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e , k_a et $H_S(p)$.

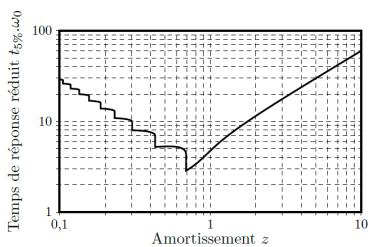
Pour la suite du problème, on prendra : $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.



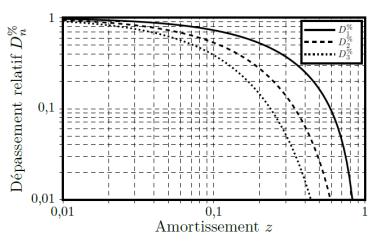
Vérification des exigences sans correction : $C(p) = 1$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_e^*(p) = 0$) : $F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z). Faire l'application numérique.

Question 3 En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \frac{K_i}{p}$

Objectif

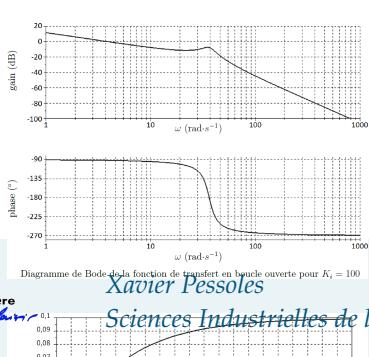
Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

Question 4 Les résultats d'une simulation pour un gain $K_i = 100$ sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

Question 5 Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

Question 6 Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain K_i . Déterminer la valeur K_{imax} du coefficient K_i qui permet de respecter les marges de stabilité.

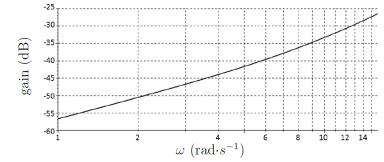
Question 7 En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».



Xavier Pessoles

Sciences Industrielles de l'Ingénieur – PSI★

Question 8 Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$ pour $K_i = K_{i\max}$. Quelle sera l'atténuation minimale $|F_{BF2}(j\omega)|_{\min}$ de la perturbation x_e^* (en %) sur l'intervalle $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$. Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».



Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

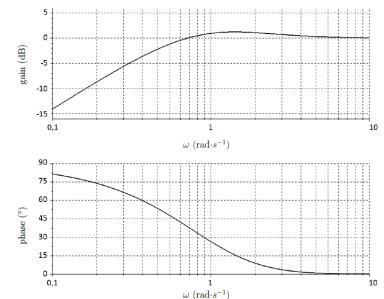
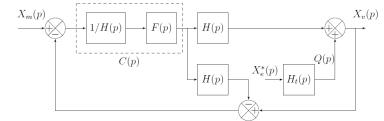
Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

Avec $F(p)$ la fonction de transfert d'un filtre de la forme $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$ et la fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

La grandeur de sortie $X_v(p)$ peut s'exprimer par l'équation : $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$ avec $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$ et $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Question 9 Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

Question 10 Le diagramme de Bode de $B(j\omega)$ pour $T = 1 \text{ s}$ est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$. Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



Éléments de correction

$$1. H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)} \text{ et} \\ H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}.$$

$$2. K = \frac{1}{1 + k_e}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}}, \\ \xi = \frac{b_s}{2\sqrt{m_s(1 + k_e)}}.$$

3. .

4. .

5. .

6. $K_{i\max} = 133$.

7. $G_{dB,\max} = -30 \text{ dB}$.

8. $T \leq 0,02 \text{ s}$.

TD 4

Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Corrigé

CCP – PSI 2015.

Présentation

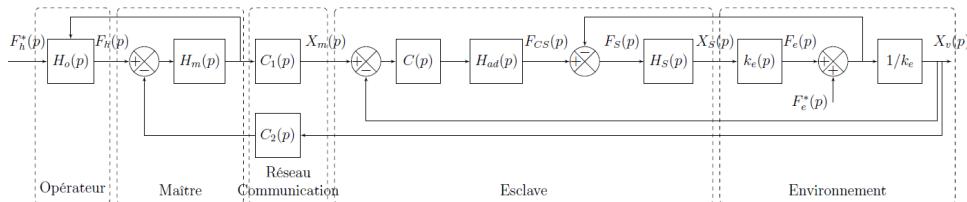
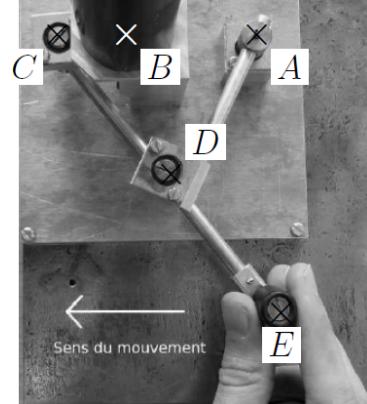
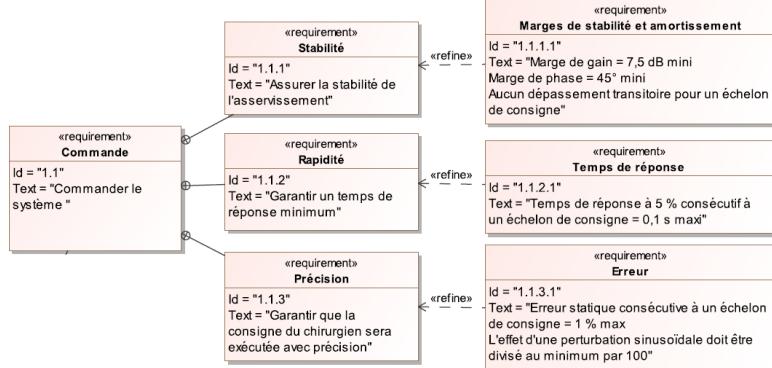
Réalisation de la commande de l'esclave

C1-02

C2-04

Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).

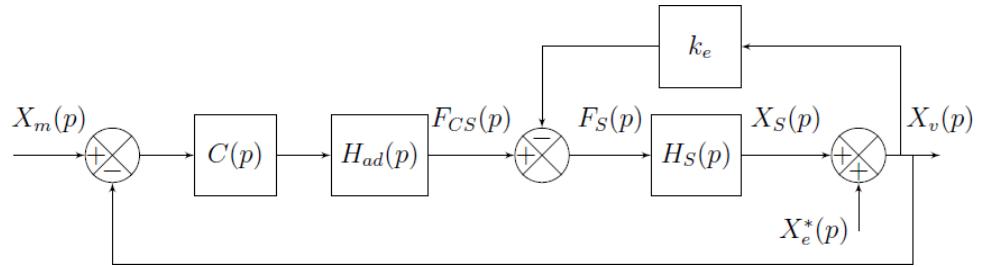


Modélisation et étude des performances du système sans correction

Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

La modélisation permettant de relier la consigne $x_m(t)$ issue du dispositif maître au déplacement $x_v(t)$ de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$ permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_S}{p(m_S p + b_S)}$ avec $k_S = 1 \text{ m N}^{-1}$, $m_S = 0,152 \text{ kg}$ et $b_S = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$.

Question 1 Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e , k_a et $H_S(p)$.

Correction

(Il faudrait faire un schéma :)) On commence par décaler le sommetteur de droite vers la gauche. Il faut donc ajouter un bloc $\frac{1}{H_S(p)}$ dans la perturbation.

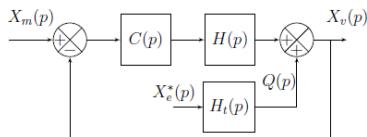
On a alors le bloc $C(p)$, le bloc $H_{ad}(p)$, le sommetteur et une FTBF : $F(p) = \frac{H_S(p)}{1 + k_e H_S(p)}$.

On redécale le sommetteur vers la gauche.

On a donc $H(p) = H_{ad}(p)F(p) = \frac{H_{ad}(p)H_S(p)}{1 + k_e H_S(p)}$ et le bloc $\frac{1}{H_S(p)H_{ad}(p)}$ dans la perturbation.

On redécale la perturbation vers la droite et $H_t(p) = \frac{H(p)}{H_S(p)H_{ad}(p)} = \frac{1}{1 + k_e H_S(p)}$.

Conclusion : $H(p) = \frac{H_{ad}(p)H_S(p)}{1 + k_e H_S(p)}$ et $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_S(p)}$.



Pour la suite du problème, on prendra : $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

Vérification des exigences sans correction : $C(p) = 1$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_e^*(p) = 0$) : $F_{BFI}(p) = \frac{X_e(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z). Faire l'application numérique.

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } F_{BFI}(p) &= \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}}{1 + \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}} = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e + 1} = \\ &\frac{\frac{1}{1 + k_e}}{\frac{m_S}{k_e + 1} p^2 + \frac{b_S}{k_e + 1} p + 1}. \end{aligned}$$

On a donc $K = \frac{1}{1+k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_e+1}{m_S}}$ et $2\xi/\omega_0 = \frac{b_S}{k_e+1}$ soit $\xi = \frac{1}{2} \frac{b_S}{k_e+1} \sqrt{\frac{k_e+1}{m_S}} = \frac{b_S}{2\sqrt{m_S(k_e+1)}}$.

Application numériques : $K = \frac{1}{1+200} = 0,005$, $\xi = \frac{1,426}{2 \times \sqrt{0,152 \times (200+1)}} = 0,13$ et $\omega_0 = 36,4 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 3 En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

Correction

- ▶ Stabilité :
 - Amortissement : pas de dépassement : **Non respecté** : $\xi < 1$.
 - Marge de gain : 7,5 dB mini.
 - Marge de phase : 45°
- ▶ Rapidité : temps de réponse à 5% : inférieur à 0,1 s : $\xi = 0,1 \Rightarrow t_{5\%} = 30$ soit $t_{5\%} = 30/36,4 = 0,8$ s **Non respecté**.
- ▶ Précision : erreur statique inférieur à 1% : **Système de classe 0**, $\varepsilon_S = \frac{1}{1+K} = 0,995 \gg 0,1$, **non respecté**.

Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \frac{K_i}{p}$

Objectif

Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

Question 4 Les résultats d'une simulation pour un gain $K_i = 100$ sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

Correction

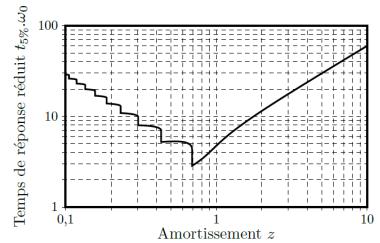
Question 5 Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

Correction

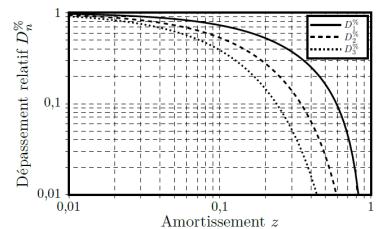
Question 6 Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain K_i . Déterminer la valeur $K_{i\max}$ du coefficient K_i qui permet de respecter les marges de stabilité.

Correction

Question 7 En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

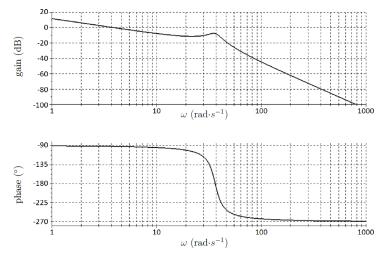
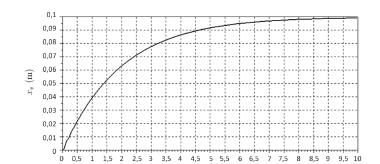


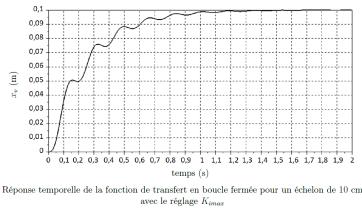
Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K_i = 100$



Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et $K_i = 100$

valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».

Correction



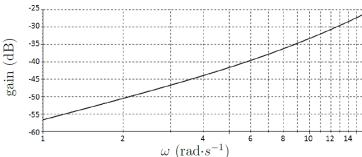
Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm avec le réglage K_{max}

Question 8 Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction $F_{\text{BF2}}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$ pour $K_i = K_{\text{imax}}$. Quelle sera l'atténuation minimale $|F_{\text{BF2}}(j\omega)|_{\min}$ de la perturbation x_e^* (en %) sur l'intervalle $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$. Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

Correction

En $1,25 \text{ rad s}^{-1}$ l'atténuation est de -55 dB . On a $20 \log K = -55$ soit $K = 0,002$ (inférieur à 1%). En $12,5 \text{ rad s}^{-1}$ l'atténuation est de -30 dB . On a $20 \log K = -30$ soit $K = 0,03$ (supérieur à 1%).

Le critère d'atténuation n'est pas vérifié sur l'ensemble de l'intervalle.

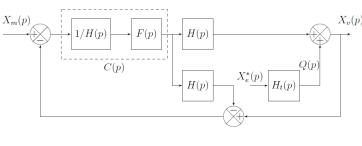


Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.



Avec $F(p)$ la fonction de transfert d'un filtre de la forme $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$ et la fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

La grandeur de sortie $X_v(p)$ peut s'exprimer par l'équation : $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$ avec $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$ et $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Question 9 Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

Correction

En utilisant la formulation proposée, on a $X_v(p) = A(p)X_m(p) = \frac{X_m(p)}{(1+Tp)^2}$.

Pour améliorer le temps de réponse du système, il faut diminuer T .

Justification On a $G(p) = \frac{1}{1+T^2p^2+2Tp}$. On a donc $\frac{1}{\omega_0^2} = T^2$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = 2T$. On a donc $\omega_0 = \frac{1}{T}$ et $\xi = 1$.

Pour $\xi = 1$, $t_{5\%}\omega_0 = 5$. Ainsi pour réduire le temps de réponse à 5% il faut augmenter ω_0 et donc diminuer T .

Pour un temps de réponse à 5% de 0,1 s, il faut $\omega_0 = \frac{5}{0,1} = 50 \text{ rad s}^{-1}$ et $T = 0,02 \text{ s}$ (valeur maximale).

Question 10 Le diagramme de Bode de $B(j\omega)$ pour $T = 1 \text{ s}$ est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$. Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.

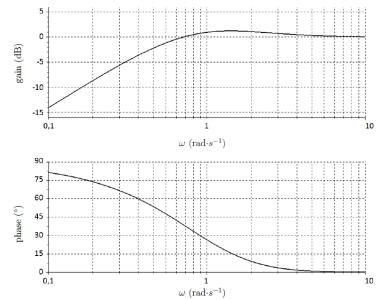
Correction

$$\text{On a } B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}.$$

Pour minimiser l'effet de la perturbation, il faut que décaler la cassure vers la droite. D'après le cahier des charges, l'effet de la perturbation doit être divisé par 100. L'atténuation en dB doit donc être de $20 \log \frac{1}{100} = -40 \text{ dB}$.

Il faut donc chercher T pour lequel le gain est de -40 dB . En passant $B(p)$ sous forme canonique et en se plaçant en basse fréquence, on a $B(p) \approx 2Tp$. On a donc $B_{dB}(\omega) = 20 \log(2T\omega)$.

On veut $B_{dB}(12,5) = 20 \log(2T \times 12,5) < -40$ soit $\log(2T \times 12,5) < -2 \Rightarrow 2T \times 12,5 < e^{-2} \Rightarrow T < e^{-2}/25$ et $T < 0,005 \text{ s}$.



Éléments de correction

1. $H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$ et
 $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$.
2. $K = \frac{1}{1 + k_e}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}}$
 $\xi = \frac{b_s}{2\sqrt{m_s(1 + k_e)}}$.
3. .
4. .
5. .
6. $K_{i\max} = 133$.
7. $G_{dB\max} = -30 \text{ dB}$.
8. $T \leq 0,02 \text{ s}$.
9. $T \leq 0,4 \text{ ms}$.

TD 5

Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

C1-02

C2-04

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45^\circ$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$



Modélisation du moteur à courant continu³

Hypothèses et données :

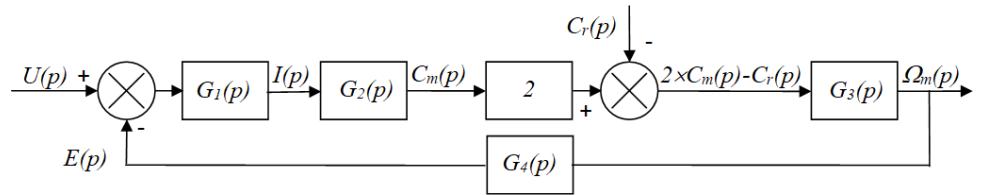
- ▶ on suppose les conditions initiales nulles ;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- ▶ $L = 0,59 \text{ mH}$ inductance d'un moteur ;
- ▶ $R = 0,0386 \Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- ▶ $f = 6 \text{ N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶ $J = 800 \text{ kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶ $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- ▶ $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$;
- ▶ loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.

3: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- ▶ $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- ▶ $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- ▶ $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- ▶ $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- ▶ $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- ▶ $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

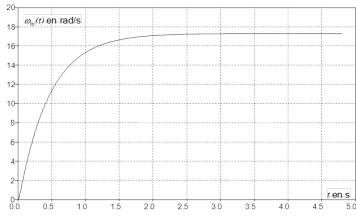


FIGURE 12.1 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

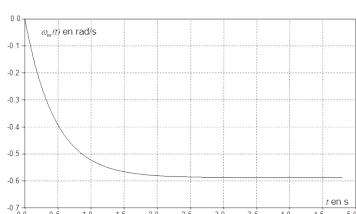
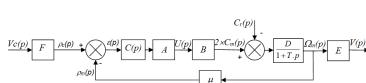


FIGURE 12.2 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.



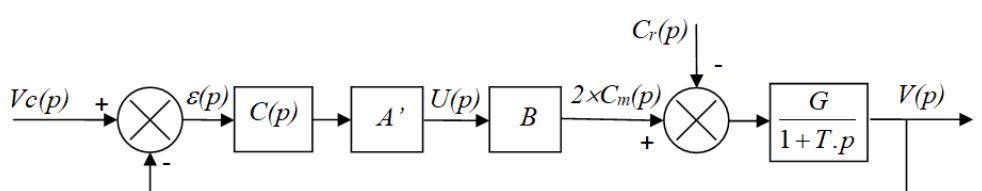
Question 4 Donner la valeur numérique des trois constantes B , D et T .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- ▶ La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0,1 \text{ m}$ (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0,47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

Question 6 Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12$ m/s. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270$ Nm qui modéliseraient la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460$ Nm qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \frac{C_i}{p}$.

Question 12 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée $FTBO(p)$. Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracer le diagramme asymptotique de Bode de $FTBO(p)$. Tracer également l'allure des courbes.

Question 14 Donner la valeur maximale de C_i permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Trouver la valeur minmale de C_i permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier.

Question 16 On suppose $C_r(p)=0$. Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12$ m/s.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculer numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270$ Nm qui modéliseraient la descente des « Arcs ».

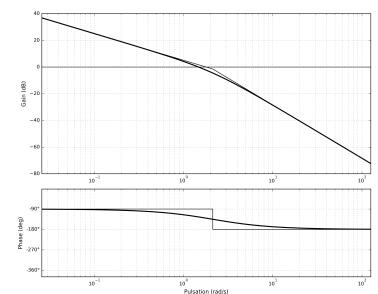


FIGURE 12.3 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13.

Question 18 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculer l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de -135° ?

Question 22 Tracer en fonction de a , τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a>1$. Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum φ_{\max} ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$. Calculer numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

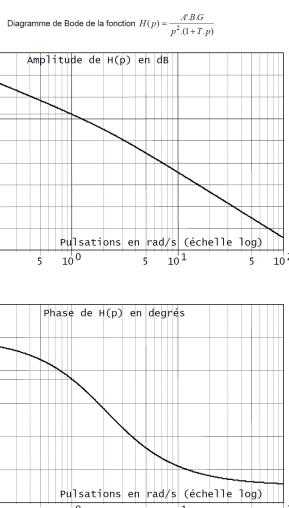
Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

Question 24 Donner l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que φ_{\max} soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculer numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.



Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ?

Justifier.

Éléments de correction

1. $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$, $G_1(p) = k_E$.
2. $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.
3. $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$ et $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$.
4. $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$, $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}\text{Nm}$ et $T = 0,47 \text{ s}$.
5. $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$.
8. $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$ – à vérifier.
9. $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$.
10. $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$, $\varepsilon''_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$.
11. C_0 infini
12. $\text{FTBO}(p) = \frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14. $\omega_{0 \text{ dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$ et $C_i \leq 1,67$.
15. $C_i \geq 0,61$.
16. FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
17. Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
18. CDCF OK.
19. $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
- 22.
23. $a = 32,16$
24. $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25. $\tau = 0,176 \text{ s}$
26. $K = 0,109$
- 27.
- 28.

TD 5

Vanoise Express – Corrigé

E3A – PSI – 2014.

C1-02

C2-04

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45^\circ$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$



Modélisation du moteur à courant continu⁴

Hypothèses et données :

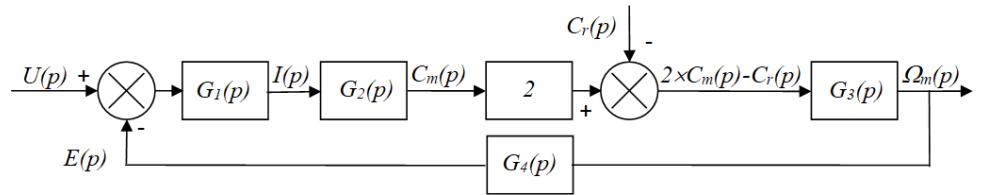
- ▶ on suppose les conditions initiales nulles ;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- ▶ $L = 0,59 \text{ mH}$ inductance d'un moteur ;
- ▶ $R = 0,0386 \Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- ▶ $f = 6 \text{ N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶ $J = 800 \text{ kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶ $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- ▶ $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$;
- ▶ loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.

4: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- ▶ $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- ▶ $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- ▶ $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- ▶ $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- ▶ $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- ▶ $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

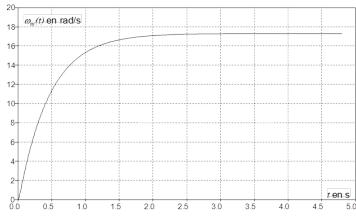


FIGURE 12.4 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

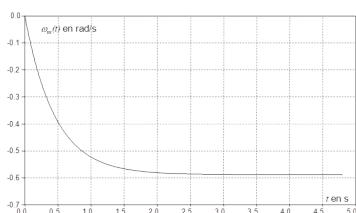
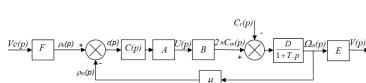
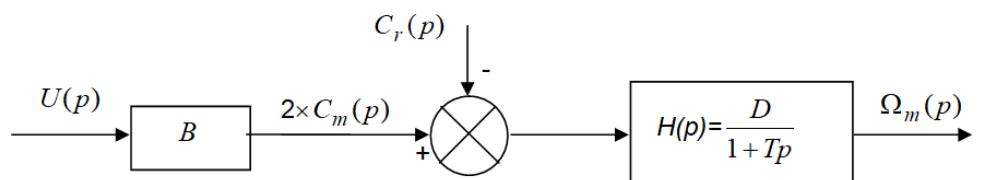


FIGURE 12.5 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.



Question 3 Choisir et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



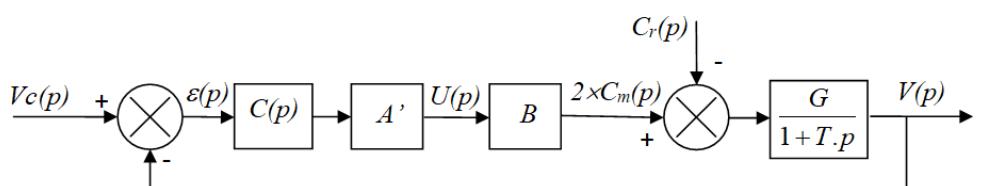
Question 4 Donner la valeur numérique des trois constantes B , D et T .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- ▶ La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0,1 \text{ m}$ (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0,47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

Question 6 Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12$ m/s. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270$ Nm qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460$ Nm qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

Utilisation d'un correcteur intégral

$$\text{On choisit maintenant le correcteur } C(p) = \frac{C_i}{p}.$$

Question 12 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée $\text{FTBO}(p)$. Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracer le diagramme asymptotique de Bode de $\text{FTBO}(p)$. Tracer également l'allure des courbes.

Question 14 Donner la valeur maximale de C_i permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Trouver la valeur minmale de C_i permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier. Il faut que la pulsation de coupure à 0 dB soit supérieure à 1 rad/s. Sur la BO non corrigée, on mesure que le gain vaut 4,23 dB pour cette pulsation. On a donc $C_{i\min} = 0,61$.

Question 16 On suppose $C_r(p)=0$. Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12$ m/s.

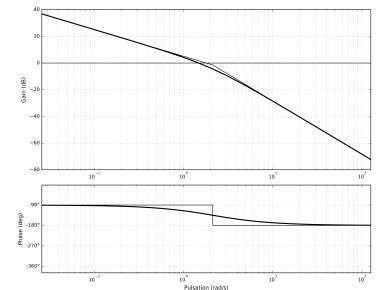


FIGURE 12.6 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculer numériquement l'écart statique en régulation ε_s'' engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$ qui modélisera la descente des « Arcs ».

Question 18 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculer l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de -135° ?

Question 22 Tracer en fonction de a , τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$. Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

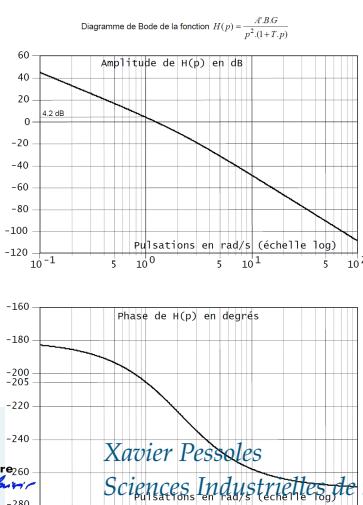
Question 23 La phase maximum φ_{\max} ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$. Calculer numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

Question 24 Donner l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que φ_{\max} soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculer numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.



Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifier.

Éléments de correction

1. $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$, $G_4(p) = k_E$.
2. $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.
3. $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$ et $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$.
4. $B = \frac{\mu}{E} = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$, $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} \text{ Nm}$ et $T = 0,47 \text{ s}$.
5. $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$.
8. $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$ – à vérifier.
9. $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$.
10. $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$, $\varepsilon''_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$.
11. C_0 infini
12. FTBO(p) = $\frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14. $\omega_{0 \text{ dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$ et $C_i \leq 1,67$.
15. $C_i \geq 0,61$.
16. FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
17. Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
18. CDCF OK.
19. $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
- 22.
23. $a = 32,16$
24. $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25. $\tau = 0,176 \text{ s}$
26. $K = 0,109$
- 27.
- 28.

TD 6

Vision en réalité augmentée pour hélicoptère ★ – Sujet

Concours Centrale Supelec 2014.

Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

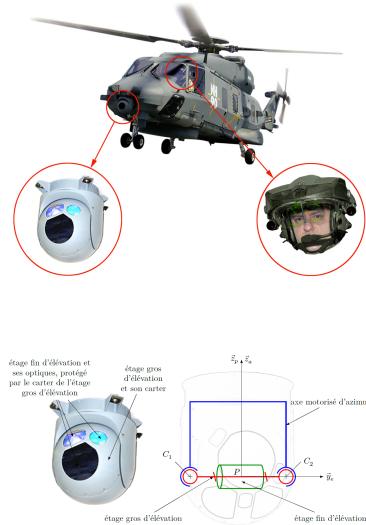
Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe (P, \vec{y}_e) , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe (P, \vec{y}_e) , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$ est établie par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_0 . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_0 obtenues par la centrale inertuelle du porteur.

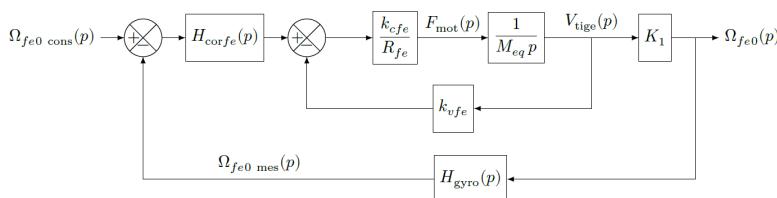
C1-02

C2-04



Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

$$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}, k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}, \\ \text{on note } K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}, R_{fe} = 7,5 \Omega.$$



Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que $H_{corfe}(p) = 1$.

Question 1 Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0 \text{ cons}}(p)}$, en fonction de K_1 , τ_{gyro} , M_{eq} , K_{fe} et R_{fe} .

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que $H_{fe1}(p)$ peut se mettre sous la forme simplifiée suivante : $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$.

Question 2 En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en en rapidité et en précision.

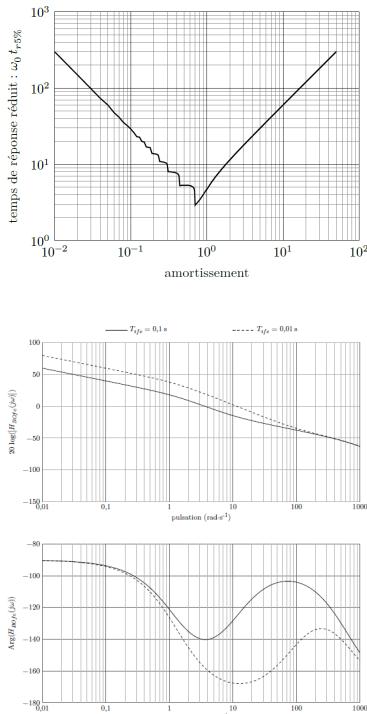
On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme $H_{\text{cor fe}}(p) = K_{\text{pfe}} \left(1 + \frac{1}{T_{\text{ife}} p} \right)$. La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors

$$H_{\text{BOfe}}(p) = K_{\text{pfe}} \left(1 + \frac{1}{T_{\text{ife}} p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}$$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de $H_{\text{BOfe}}(j\omega)$ pour $K_{\text{pfe}} = 1$ et $T_{\text{ife}} = 0,1 \text{ s}$ puis $T_{\text{ife}} = 0,01 \text{ s}$.

Question 3 Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de $H_{\text{BOfe}}(j\omega)$ (Bode) pour $T_{\text{ife}} = 0,1 \text{ s}$, en indiquant la pulsation $\frac{1}{T_{\text{ife}}}$.

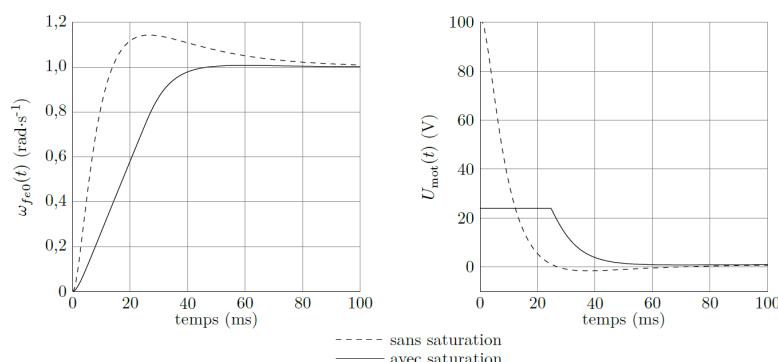
La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation ω_{\max} telle que $\omega_{\max} \in \left[\frac{1}{T_{\text{ife}}}; 600 \right] \text{ rad s}^{-1}$.



Question 4 En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de ω_{\max} , calculer la valeur de T_{ife} comprise dans la décade [0,01 s; 0,1 s] qui permet de régler ce maximum à -120° .

Question 5 Pour le réglage de T_{ife} calculé à la question précédente avec $K_{\text{pfe}} = 1$ et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de K_{pfe} qui permet de respecter le critère de marge de phase.

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour K_{pfe} et T_{ife} . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de K_{pfe} et T_{ife} déterminés précédemment. La réponse simulée $\omega_{fe0}(p)$ de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon $\omega_{fe0 \text{ cons}}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$ est donnée sur la figure suivante.



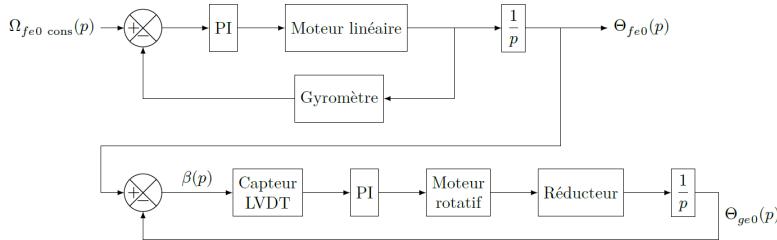
Question 6 D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit $\vec{u} \approx \vec{z}_e$, c'est-à-dire que l'angle $\beta(t)$ doit rester dans l'intervalle $[-5^\circ, +5^\circ]$. Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$. Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.



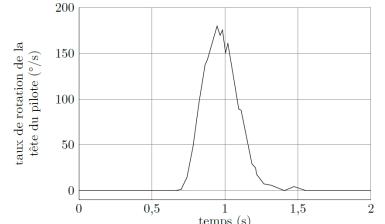
La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut alors être utilisé comme signal de consigne envoyé à l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne $\omega_{fe0\ cons}(t)$ composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

Question 7 À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne $\omega_{fe0\ cons}(t)$ exprimé en rad s^{-1} , sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de $\theta_{fe0\ cons}(t)$, exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

Question 8 À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

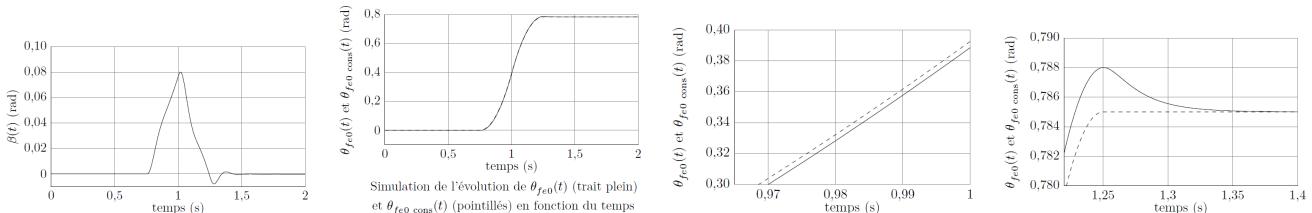
Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$ pour le signal de consigne $\omega_{fe0\ cons}(t)$ établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.



Question 9 À partir des figures suivantes :

- ▶ vérifier si l'hypothèse $\vec{u} \simeq \vec{z}_e$ reste valide ;
- ▶ pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures, conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

TABLE 12.1 – Zooms de $\theta_{fe0}(t)$ (trait plein) et $\theta_{fe0\ cons}(t)$ (pointillés) en fonction de temps



TD 6

Vision en réalité augmentée pour hélicoptère ★ – Corrigé

Concours Centrale Supelec 2014.

Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

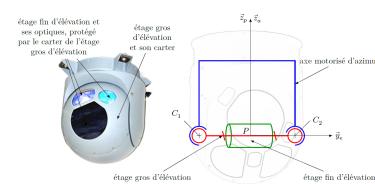
Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe (P, \vec{y}_e) , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe (P, \vec{y}_e) , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$ est établie par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_0 . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_0 obtenues par la centrale inertuelle du porteur.

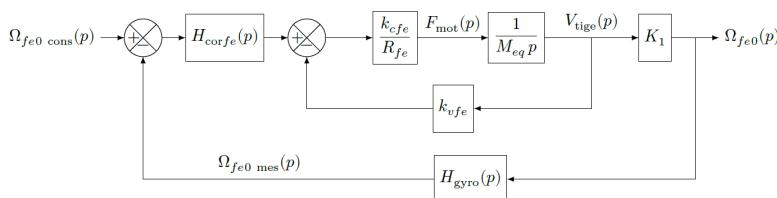
C1-02

C2-04



Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

$$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}, k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}, \\ \text{on note } K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}, R_{fe} = 7,5 \Omega.$$



Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que $H_{corfe}(p) = 1$.

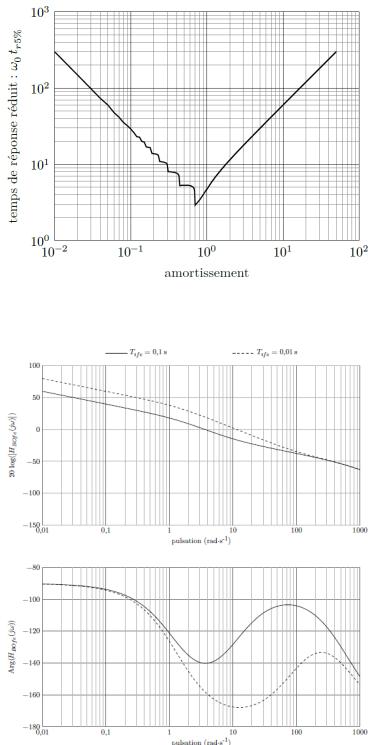
Question 1 Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0 \text{ cons}}(p)}$, en fonction de K_1 , τ_{gyro} , M_{eq} , K_{fe} et R_{fe} .

Correction

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que $H_{fe1}(p)$ peut se mettre sous la forme simplifiée suivante : $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$.

Question 2 En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en rapidité et en précision.

Correction



On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme $H_{cor fe}(p) = K_{pfe} \left(1 + \frac{1}{T_{ife} p} \right)$. La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors

$$H_{BOfe}(p) = K_{pfe} \left(1 + \frac{1}{T_{ife} p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}.$$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de $H_{BOfe}(j\omega)$ pour $K_{pfe} = 1$ et $T_{ife} = 0,1$ s puis $T_{ife} = 0,01$ s.

Question 3 Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de $H_{BOfe}(j\omega)$ (Bode) pour $T_{ife} = 0,1$ s, en indiquant la pulsation $\frac{1}{T_{ife}}$.

Correction

La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation ω_{\max} telle que $\omega_{\max} \in \left[\frac{1}{T_{ife}}; 600 \right] \text{ rad s}^{-1}$.

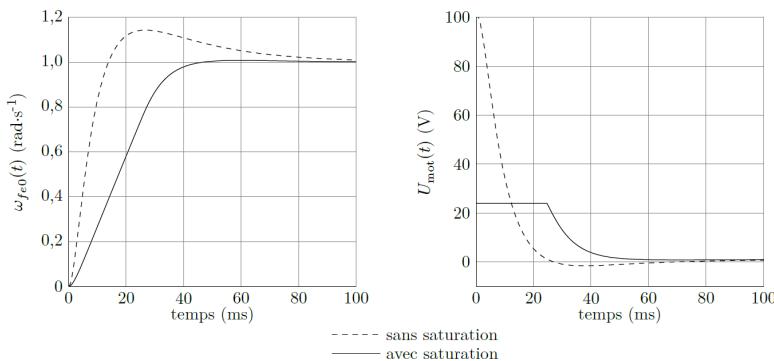
Question 4 En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de ω_{\max} , calculer la valeur de T_{ife} comprise dans la décade [0,01 s; 0,1 s] qui permet de régler ce maximum à -120° .

Correction

Question 5 Pour le réglage de T_{ife} calculé à la question précédente avec $K_{pfe} = 1$ et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de K_{pfe} qui permet de respecter le critère de marge de phase.

Correction

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour K_{pfe} et T_{ife} . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de K_{pfe} et T_{ife} déterminés précédemment. La réponse simulée $\omega_{fe0}(p)$ de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon $\omega_{fe0\ cons}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$ est donnée sur la figure suivante.



Question 6 D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

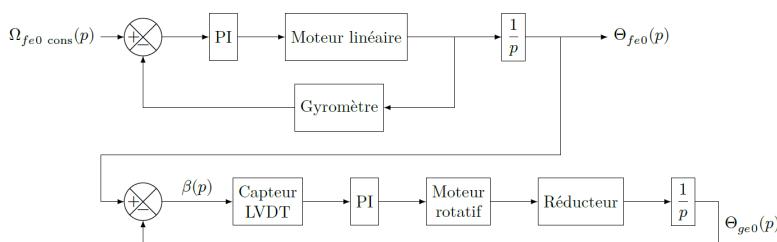
Correction

Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit $\vec{u} \approx \vec{z}_e$, c'est-à-dire que l'angle $\beta(t)$ doit rester dans l'intervalle $[-5^\circ, +5^\circ]$. Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$. Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.



La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut alors être utilisé comme signal de consigne envoyé à l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne $\omega_{fe0\ cons}(t)$ composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

Question 7 À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne $\omega_{fe0\ cons}(t)$ exprimé en rad s⁻¹, sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de $\theta_{fe0\ cons}(t)$, exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

Correction

Question 8 À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Correction

Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo}(t)$ pour le signal de consigne $\omega_{fe0\ cons}(t)$ établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.

Question 9 À partir des figures suivantes :

- ▶ vérifier si l'hypothèse $\vec{u} \simeq \vec{z}_e$ reste valide ;
- ▶ pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures, conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

Correction

