



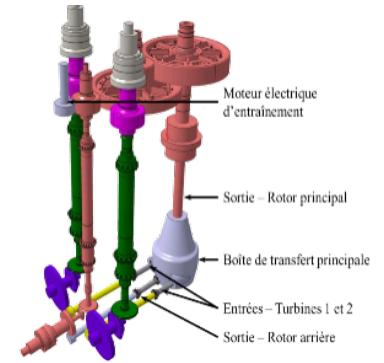
TD 0

Banc d'essai BTP- Sujet

Concours CCINP- TSI 2015

B2-07

C2-03



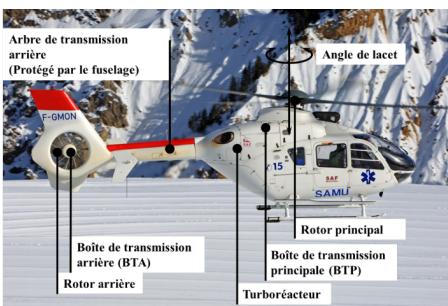
Mise en situation

Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1a). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 1b présente la structure du banc d'essai.

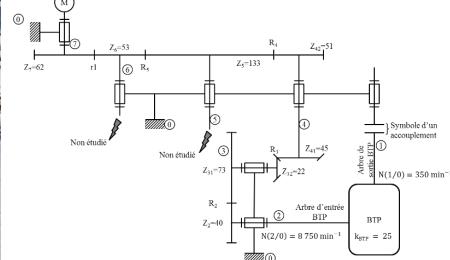
Objectif

Valider Req 1.1.1.

«requirement»	
Précision de la régulation	
Id = "1.1.1"	
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."	



(a) Hélicoptère.



(b) Structure du banc d'essai.

FIGURE 1 – Hélicoptère et banc d'essai

Le moteur à courant continu

On note :

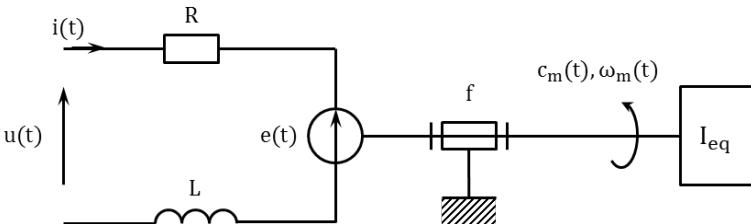
- $u(t)$: la tension appliquée aux bornes de l'induit;

- ▶ $i(t)$: le courant absorbé par l'induit;
- ▶ $e(t)$: la force contre-électromotrice;
- ▶ $\omega_m(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶ $c_m(t)$: le couple moteur;
- ▶ $c_r(t)$: le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- ▶ K_c : la constante de couple définie telle que $c_m(t) = K_c i(t)$ (équation 1);
- ▶ K_e : la constante de force contre-électromotrice définie telle que $e(t) = K_e \omega_m(t)$ (équation 2).

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 2.

- ▶ R : la résistance de l'induit;
- ▶ L : l'inductance de l'induit;
- ▶ f : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à $\omega_m(t)$;
- ▶ I_{eq} : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;

FIGURE 2 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.



Hypothèses :

- ▶ le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- ▶ les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- ▶ on note p la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle $f(t)$ sera notée $F(p)$ (la transformée de $\omega(t)$ sera notée $\Omega(p)$).

Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- ▶ on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- ▶ on fait l'hypothèse que $K_c = K_e = K$;
- ▶ pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 3.

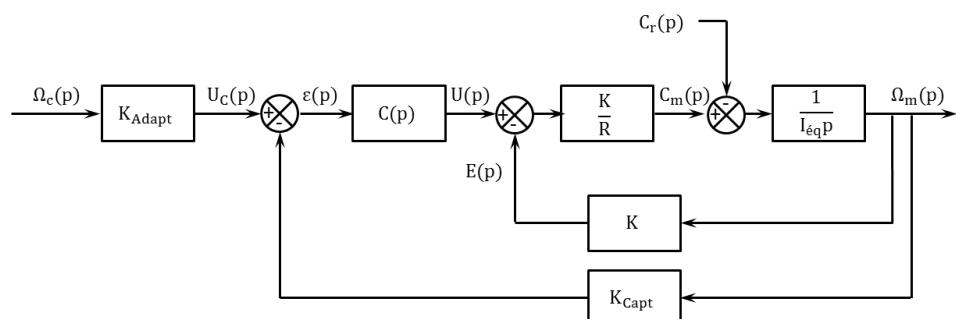


FIGURE 3 – Régulation en vitesse du banc d'essai.

Question 1 Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain K_{Adapt} ?

Hypothèse 1 : on considère que $C_r(p) = 0$ et $\Omega_c(p) \neq 0$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$ puis la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$. On considère

que $C(p) = K_P$, K_P étant constant. Mettre $H_1(p)$ sous la forme $K_1/(1 + \tau_1 p)$ où on explicitera les valeurs de K_1 et τ_1 .

Hypothèse 2 : on considère que $\Omega_C(p) = 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 3 Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$. On considère que $C(p) = K_P$, K_P étant constante. Mettre $H_2(p)$ sous la forme $-K_2/(1 + \tau_2 p)$ où on explicitera les valeurs de K_2 et τ_2 .

Hypothèse 3 : on considère maintenant que $\Omega_C(p) \neq 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 5 En utilisant le théorème de superposition, exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $\Omega_c(p)$ et $C_r(p)$.

À une fréquence de rotation de 350 min^{-1} en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de 1928 min^{-1} soit environ 202 rad/s . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à 990 Nm . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude 202 rad/s et à un couple résistant de 990 Nm .

Question 6 Après avoir exprimé la consigne $\Omega_c(p)$ puis le couple résistant $C_r(p)$, calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Question 7 Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain K_I de la forme $C(p) = K_I/p$?

Question 8 En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

Éléments de correction

1. $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$.
2. $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}} \text{ et } \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K^2 + K K_P K_{\text{Capt}}}.$
3. .
4. $K_2 = \frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}.$
5. $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p).$
6. $\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}.$
7. On montre que l'écart statique est annulé.
8. $\varepsilon = 0.$





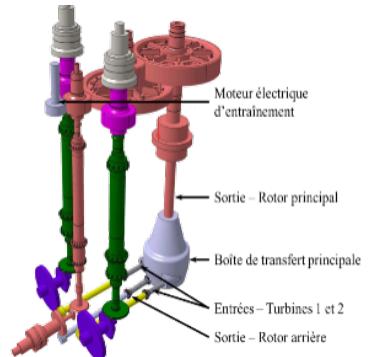
TD 0

Banc d'essai BTP- Corrigé

Concours CCINP- TSI 2015

B2-07

C2-03



Mise en situation

Objectif

Valider Req 1.1.1.

Le moteur à courant continu

Modélisation de l'asservissement en vitesse

Question 1 Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain K_{Adapt} ?

Correction

Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

Afin d'avoir un asservissement précis ($\varepsilon(p) = 0$ lorsque $\Omega_c(p) = \Omega(p)$), on prend $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$.

«requirement»
Précision de la régulation
Id = "1.1.1"
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

Hypothèse 1 : on considère que $C_r(p) = 0$ et $\Omega_c(p) \neq 0$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$ puis la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(C(p))$. On considère que $C(p) = K_p$, K_p étant constant. Mettre $H_1(p)$ sous la forme $K_1/(1 + \tau_1 p)$ où on explicitera les valeurs de K_1 et τ_1 .

Correction

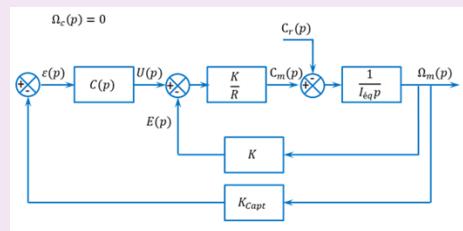
$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{K^2}{RI_{\text{eq}}p}} = \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} = \frac{1/K}{1 + \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2}p}$$

$$\begin{aligned}
H_1(p) &= \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p)}{1 + \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p) K_{\text{Capt}}} = \frac{K_{\text{Adapt}} K C(p)}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KC(p) K_{\text{Capt}}} \\
H_1(p) &= \frac{K_{\text{Adapt}} K K_P}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} = \frac{\frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}}{\frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} p + 1} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p} \\
\text{Soit par identification : } K_1 &= \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}} \text{ et } \tau_1 = \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}}.
\end{aligned}$$

Hypothèse 2 : on considère que $\Omega_c(p) = 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

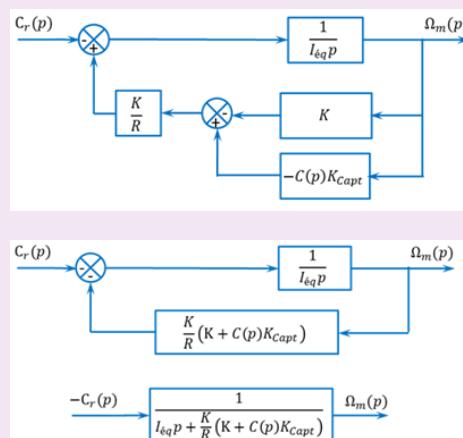
Question 3 Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

Correction



Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$. On considère que $C(p) = K_P$, K_P étant constante. Mettre $H_2(p)$ sous la forme $-K_2/(1 + \tau_2 p)$ où on explicitera les valeurs de K_2 et τ_2 .

Correction



$$\begin{aligned}
\text{On a donc : } H_2(p) &= \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{1}{\frac{K}{R} \left(K + K_P K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = -\frac{\frac{R}{K} \left(K + K_P K_{\text{Capt}} \right)}{1 + \frac{R I_{\text{eq}}}{K \left(K + K_P K_{\text{Capt}} \right)} p} \\
&= -\frac{K_2}{1 + \tau_2 p} \text{ Soit par identification : } K_2 = \frac{R}{K \left(K + K_P K_{\text{Capt}} \right)} \text{ et } \tau_2 = \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K \left(K + K_P K_{\text{Capt}} \right)}.
\end{aligned}$$

Hypothèse 3 : on considère maintenant que $\Omega_c(p) \neq 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 5 En utilisant le théorème de superposition, exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $\Omega_c(p)$ et $C_r(p)$.

Correction

Par superposition on a : $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$.

À une fréquence de rotation de 350 min^{-1} en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de 1928 min^{-1} soit environ 202 rad/s . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à 990 Nm . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude 202 rad/s et à un couple résistant de 990 Nm .

Question 6 Après avoir exprimé la consigne $\Omega_c(p)$ puis le couple résistant $C_r(p)$, calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction

On a, pour des échelons de consignes : $\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$ avec $\Omega_{c0} = 202 \text{ rad/s}$ et $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$ avec $C_{r0} = 990 \text{ Nm}$.

L'écart statique ε_S s'écrit en sortie du comparateur :

$$\begin{aligned}\varepsilon_S &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}\Omega_m(p)) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} \left(p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_1(p)\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_2(p)C_r(p)) \right) \\ &\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_{\text{Adapt}}\frac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}}K_1\frac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}}K_2\frac{C_{r0}}{p} \right) \\ &\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}}K_1)\Omega_{c0} + K_{\text{Capt}}K_2C_{r0}\end{aligned}$$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

Question 7 Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain K_I de la forme $C(p) = K_I/p$?

Correction

En choisissant $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$, l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain K_P important $K_1 \rightarrow 1$ et $K_2 \rightarrow 0$, mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

Question 8 En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

Correction

En reprenant le raisonnement de la question **, et en remplaçant $C(p)$ par K_I/p dans

$$\text{les expressions de } H_1(p) \text{ et } H_2(p) : \lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} p}{1 + \frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}}} =$$

$$\frac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}.$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{1}{\frac{K}{R} \left(K + \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = 0$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p) \right)$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} K_{\text{Adapt}} / K_{\text{Capt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} 0 C_r 0 = 0$$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.



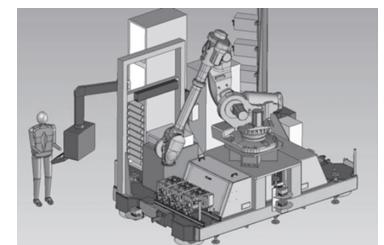
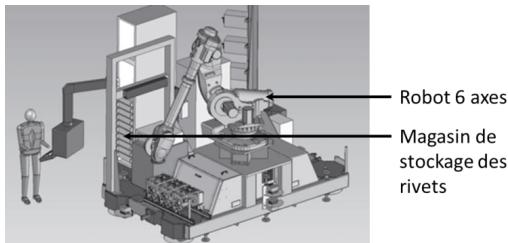
TD 1

Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet

Concours E3A – PSI 2015.

Mise en situation

Présentation



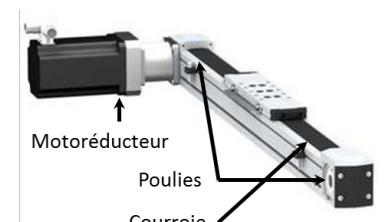
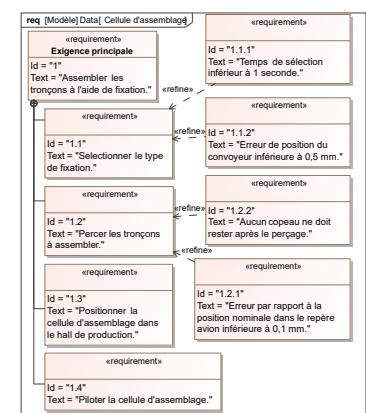
Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

L'objectif de cette partie est de valider les choix effectués par la société pour le sous ensemble de sélection des fixations de la cellule (exigence 1.1).

Axe chariot

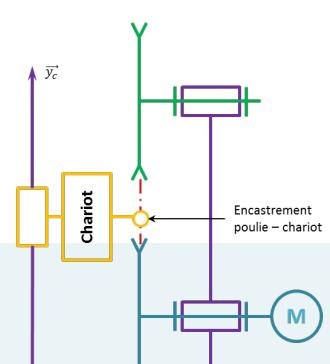
Le déplacement du chariot est assuré par un axe numérique asservi en vitesse et en position. Cet axe est composé d'un moteur à courant continu, d'un système de transmission de puissance de type poulies / courroie et d'un rail.

La modélisation du système de déplacement du chariot est donné ci-contre.



Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Afin de sélectionner le type de fixation, la buse d'aspiration doit être déplacée en face de la cassette avec une erreur inférieure à 0,5 mm (voir exigences fonctionnelles). Cependant le fabricant du système poulie-courroie du rail indique déjà une erreur de $\pm 0,25$ mm due notamment à l'élasticité de la courroie. Par conséquent, l'erreur en position de la commande doit être nulle. De plus, afin de ne pas perdre de temps lors



de la production, le temps maximal de déplacement lors de la sélection est imposé à une seconde.

L'étude se fera dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire un déplacement du chariot vers le haut entre les deux cassettes de rivets les plus éloignées. L'axe de déplacement est appelé \vec{y}_c

Notations domaine temporel – domaine de Laplace

Les notations entre le domaine temporel et celui de Laplace sont données dans la suite. Ainsi, si la fonction $f(t)$ possède une transformée de Laplace, elle sera notée : $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

<input type="checkbox"/> $u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t);$	<input type="checkbox"/> $u(t)$: tension moteur ;
<input type="checkbox"/> $e(t) = K_E \omega_m(t);$	<input type="checkbox"/> $i(t)$: courant moteur ;
<input type="checkbox"/> $C_M(t) = K_C i(t);$	<input type="checkbox"/> $e(t)$: force contre-électromotrice ;
<input type="checkbox"/> $J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f\omega_m(t) = C_M(t) - C_R(t).$	<input type="checkbox"/> $\omega_m(t)$: vitesse de rotation moteur ;
	<input type="checkbox"/> $C_M(t)$: couple moteur ;
	<input type="checkbox"/> $C_R(t)$: couple résistant modélisant l'action de pesanteur.

Critères à respecter pour l'exigence 1.2

Exigence	Critères	Niveaux
Déplacer le chariot	Précision : erreur statique par rapport à une consigne de vitesse constante Rapidité : temps de réponse à 5% en réponse à une consigne échelon Stabilité	NULLE $T_{r5\%} = 0,1\text{s}$ maxi
	Marge de gain :	6 dB mini
	Marge de phase :	45° mini

Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

Question 1 Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Compte tenu des vitesses de translation importantes, le système retenu est de type poulie-courroie.

Détermination de l'inertie équivalente

Les grandeurs caractéristiques (notations et valeurs) des éléments de l'axe du chariot sont données dans le tableau ci-dessous.

Moment d'inertie du rotor du moteur autour de son axe	J_m	$140 \times 10^{-6}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur	J_{rd}	$60 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie motrice autour de son axe	J_{PM}	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie réceptrice autour de son axe	J_{PR}	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Masse totale du chariot	M	5 kg
Vitesse de rotation de l'arbre moteur	ω_m	
Vitesse de rotation de l'arbre de sortie du réducteur	ω_r	
Rayon d'une poulie motrice ou réceptrice	R_p	45 mm
Rapport de réduction réducteur (ω_r / ω_m)	λ	1/5

Question 2 À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente J_{eq} de l'ensemble $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$ ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$.

Question 3 Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

Modèle de connaissance du moteur à courant continu

Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

Question 4 À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

Question 5 En considérant que $C_R(p) = 0$, déterminer la fonction de transfert $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ sous sa forme canonique.

Le coefficient de frottement visqueux est donné par $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$, l'inductance par $L = 9 \text{ mH}$, la résistance de l'induit par $R = 3 \text{ Ohm}$, la constante de couple par $K_c = 1,3 \text{ NmA}^{-1}$ et $K_E = 1,3 \text{ V}(\text{rad s}^{-1})^{-1}$.

Question 6 Montrer que la fonction de transfert $H_M(p)$ peut se mettre sous la forme $H_M(p) = \frac{K_C}{K_C K_e + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$.

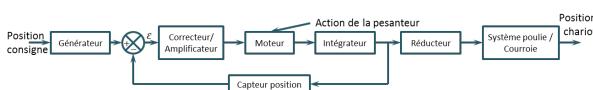
Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de J_{eq} considérée sera $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

Question 7 Montrer qu'avec l'expression, $H_M(p)$ peut s'écrire sous la forme $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$ avec $T_E < T_M$.

Étude de l'asservissement en position de l'axe

Modélisation de l'asservissement en position

La partie précédente a permis de déterminer un modèle du moteur. La suite de l'étude va permettre, par simulation, de déterminer les réglages nécessaires de l'axe vis-à-vis du cahier des charges. La figure suivante présente le principe de l'asservissement de l'axe du chariot.



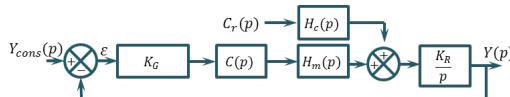
Les grandeurs caractéristiques des blocs de l'asservissement de l'axe chariot sont données dans le tableau ci-contre.

Question 8 Quelle doit être la valeur de K_G pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart ε doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne)?

Question 9 Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant C_R dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



Question 10 Donner l'expression de $Y(p)$.

Question 11 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$ puis $C(p) = \frac{K_i}{p}$.

Générateur	K_G	À déterminer
Capteur de position	K_{capt}	$5 \times 10^{-3} \text{ V rad}^{-1}$
Correcteur amplificateur	$C(p)$	Variable

Avec :

- $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ; \frac{(R + L p) K_M}{K_C}$
- $H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$
- $C_R(p) = C_r / p ;$
- $K_R = R_p \lambda .$

Question 12 On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$ puis $C(p) = \frac{K_i}{p}$.

Question 13 Conclure.

Afin de répondre totalement au cahier des charges, l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral dérivé est retenue. En effet, la commande de l'axe intègre directement ce type de correcteur. Dans la suite du problème, le correcteur $C(p)$ sera de la forme : $C(p) = K_I \left(1 + \frac{1}{(T_I p)} \right) (1 + T_D p)$. Le réglage des coefficients a été fait par simulation numérique. Afin de vérifier maintenant le critère de rapidité, on donne la réponse temporelle (figure ??) de l'axe à un échelon de position de 1 m.

Question 14 Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

Question 15 Tracer le diagramme de Bode.

On considère $C_R(p) = 0$. On prendra $K_M = 0,8 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$, $T_e = 0,0051 \text{ s}$, $T_m = 0,0074 \text{ s}$.

Question 16 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $C(p) = 1$. Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

Question 17 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $C(p) = \frac{1}{p}$. Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

On donne ci-dessous les diagrammes de Bode avec les correcteurs optimisés. Déterminer les marges de gain et marges de phase.

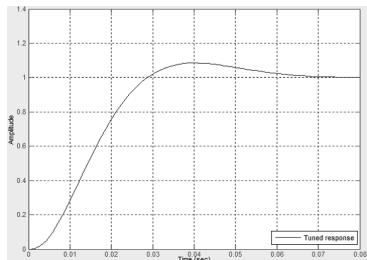
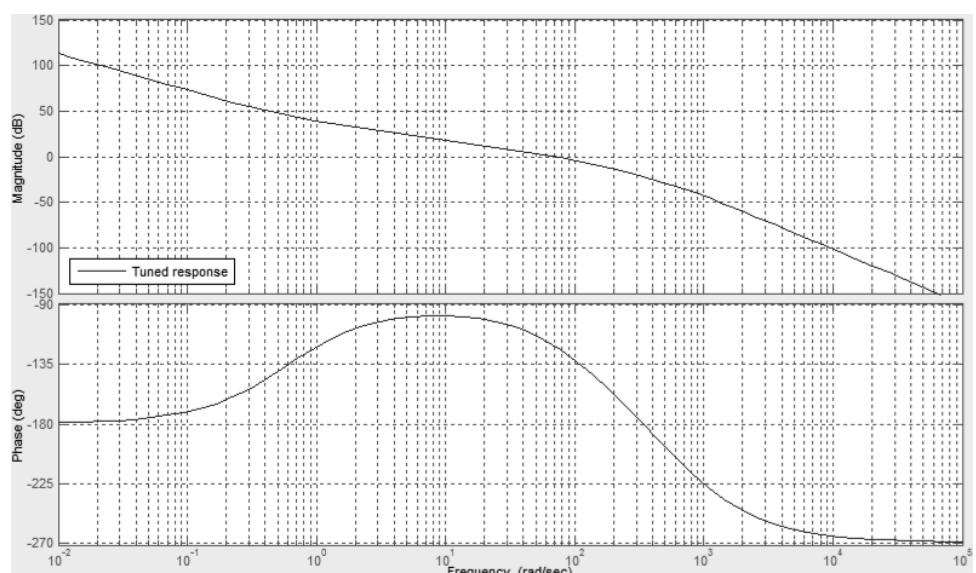
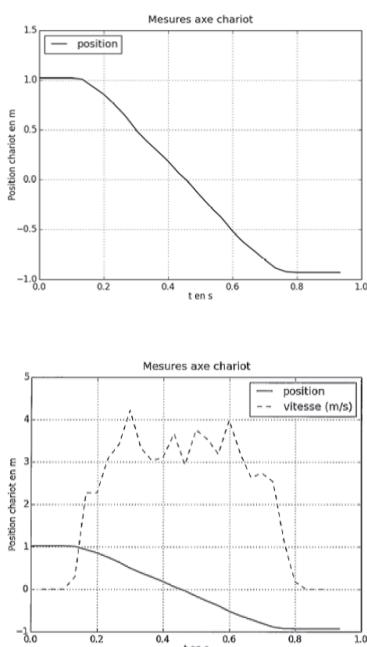


FIGURE 4 – Réponse temporelle système réglé.

Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Afin de vérifier les réglages précédents, un essai sur le système réel est réalisé. Une consigne de 2 m est donnée. L'absence de système d'acquisition dédié impose un système de mesure extérieur au système réel. C'est un dispositif d'analyse d'image qui est retenu pour ces mesures.

Question 18 À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).





TD 1

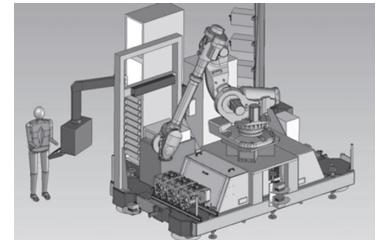
Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé

Concours E3A – PSI 2015.

Mise en situation

Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Critères à respecter pour l'exigence 1.2



Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

Question 1 Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Correction

Utilisation d'un système vis-écrou.

Détermination de l'inertie équivalente

Question 2 À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente J_{eq} de l'ensemble $\Sigma = \{\text{moteur} + \text{réducteur} + \text{poulies} + \text{chariot}\}$ ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par $E_c(\Sigma) = 1/2J_{eq}\omega_m^2$.

Correction

$$\mathcal{E}_c(\Sigma) = \mathcal{E}_c(\text{moteur}) + \mathcal{E}_c(\text{réducteur}) + \mathcal{E}_c(\text{poulies}) + \mathcal{E}_c(\text{chariot}).$$

- $\mathcal{E}_c(\text{moteur}) = 1/2J_m\omega_m^2$;
- $\mathcal{E}_c(\text{réducteur}) = 1/2J_{red}\omega_m^2$;
- $\mathcal{E}_c(\text{poulies}) = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\omega_{red}^2 = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2\omega_m^2$;
- $\mathcal{E}_c(\text{chariot}) = 1/2MV^2 = 1/2MR_p^2\lambda^2\omega_m^2$.

$$\text{On a donc } J_{eq} = MR_p^2\lambda^2 + (J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2 + J_{red} + J_m.$$

Question 3 Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

Correction

$$J_{eq} = 0,0068 \text{ kg m}^2$$

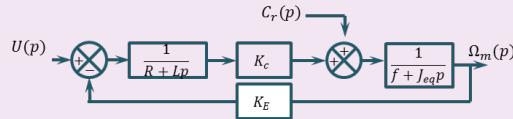
Modèle de connaissance du moteur à courant continu

Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

Question 4 À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

Correction



Question 5 En considérant que $C_R(p) = 0$, déterminer la fonction de transfert $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ sous sa forme canonique.

Correction

$$H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E + Rf}}{1 + \frac{RJ_{eq} + Lf}{K_c K_E + Rf} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E + Rf} p^2}$$

Le coefficient de frottement visqueux est donné par $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$, l'inductance par $L = 9 \text{ mH}$, la résistance de l'induit par $R = 3 \text{ Ohm}$, la constante de couple par $K_c = 1,3 \text{ NmA}^{-1}$ et $K_E = 1,3 \text{ V}(\text{rad s}^{-1})^{-1}$.

Question 6 Montrer que la fonction de transfert $H_M(p)$ peut se mettre sous la forme $H_M(p) = \frac{K_C}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$. Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de J_{eq} considérée sera $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

Correction

En faisant les applications numériques on montre que Rf est négligeable devant $K_c K_E$ et que Lf est négligeable devant RJ_{eq} . On a donc : $H_m(p) = \frac{\frac{K_C}{K_c K_E}}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E} p^2} = \frac{K_C}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$.

Question 7 Montrer qu'avec l'expression, $H_M(p)$ peut s'écrire sous la forme $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$ avec $T_E < T_M$.

Correction

$$\left\{ \begin{array}{l} T_e + T_m = \frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} \\ T_e T_m = \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E} \end{array} \right. \quad \text{On a (résolution d'une équation du second degré) : } \\ T_e = \frac{\frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} - \sqrt{\left(\frac{RJ_{eq}}{K_c K_E}\right)^2 - 4 \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E}}}{2}. T_e = 0,0051 \text{ s et } T_m = 0,0074 \text{ s.}$$

Étude de l'asservissement en position de l'axe

Modélisation de l'asservissement en position

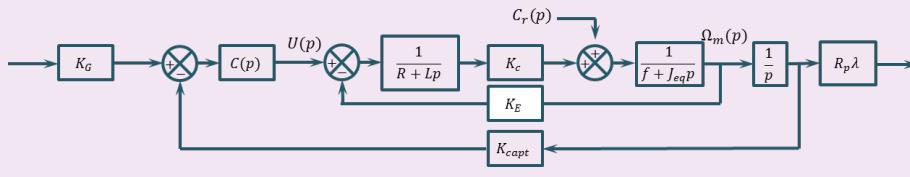
Question 8 Quelle doit être la valeur de K_G pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart ε doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

Correction

On doit avoir $K_G = K_{\text{capt}} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{R_p} = 0,556 \text{ V rad}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Question 9 Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

Correction



Étude du modèle simplifié

Question 10 Donner l'expression de $Y(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :

Si $C_r(p) = 0$:

$$\begin{aligned}
 Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\
 &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\
 &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}
 \end{aligned}$$

Correction

Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$\begin{aligned}
 Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\
 &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}
 \end{aligned}$$

$$= C_r(p) \frac{(R + Lp)K_M K_r}{K_C} \frac{1}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M}$$

On a donc : $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$.

Question 11 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$ puis $C(p) = \frac{K_i}{p}$.

Correction

Question 12 On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$ puis $C(p) = \frac{K_i}{p}$.

Correction

Question 13 Conclure.

Correction

Question 14 Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

Correction

Question 15 Tracer de diagramme de Bode.

Correction

Question 16 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $C(p) = 1$. Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

Correction

Question 17 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $C(p) = \frac{1}{p}$. Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

Correction

Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Question 18 À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).

Correction



TD 2

Robot pour la chirurgie endoscopique– Sujet

Banque PT – SIA – 2005.

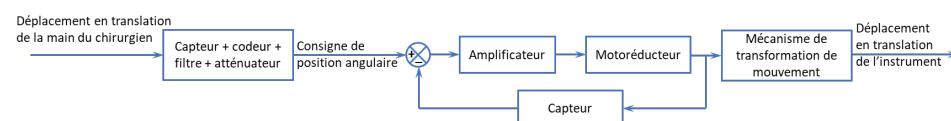
Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon \vec{z}_1 .

TABLE 1 – Liste partielle des exigences.

Req.	Exigence	Niveaux
1	Vitesse de translation nominale	$> 0,1 \text{ m s}^{-1}$
2	Temps t_1 pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
3	Précision – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
4	Précision – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ m s}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
5	Stabilité – Dépassement	Aucun
6	Stabilité – Marge de phase	45°
7	Rapidité – Bande passante à -3 dB pour la partie mécanique	4 Hz

La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon \vec{z}_1) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.



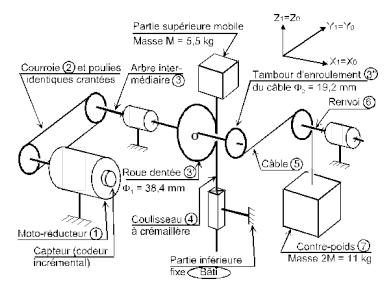
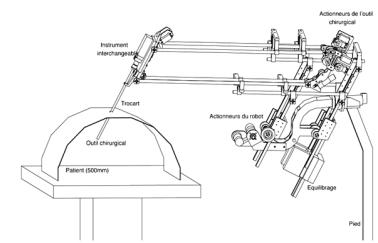
La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure ci-contre présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- ▶ l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3);
- ▶ une roue dentée (3') de diamètre primitif $\Phi_1 = 38,4 \text{ mm}$ solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;
- ▶ cette crémaillère est en liaison glissière d'axe \vec{z}_1 par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse $M = 5,5 \text{ kg}$, les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse $2M = 11 \text{ kg}$ tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3") de diamètre $\Phi_2 = 19,2 \text{ mm}$ solidaire de l'arbre intermédiaire (3).

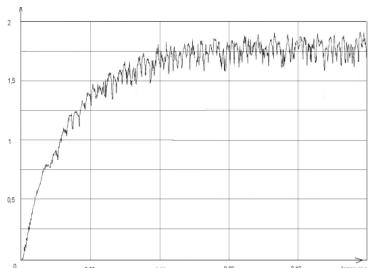
Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :



- puissance nominale en sortie du réducteur : $P_{\text{nom}} = 8,6 \text{ W}$;
- couple nominal en sortie du réducteur : $C_{\text{nom}} = 1,4 \text{ Nm}$;
- couple de maintien en sortie du réducteur : $C_{\text{maint}} = 1,5 \text{ Nm}$;
- couple maxi en sortie du réducteur : $C_{\text{max}} = 2,7 \text{ Nm}$;
- vitesse nominale en sortie du réducteur : $N_{\text{nom}} = 60 \text{ tr min}^{-1}$;
- vitesse maxi en sortie du réducteur : $N_{\text{max}} = 100 \text{ tr min}^{-1}$;
- moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur : $J_1 = 3,70 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$;
- capteur de position : codeur 360 incrémentés par tour monté sur le rotor du moteur;
- rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

Avec :

- $u(t)$ tension appliquée aux bornes de l'induit
- $i(t)$ intensité du courant traversant l'induit
- $e(t)$ force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;
- $\omega_{\text{rédu}}(t)$ vitesse de rotation à la sortie du réducteur;
- $C_{\text{rédu}}(t)$ couple moteur ramené à la sortie du réducteur;
- $R = 10 \Omega$: résistance de l'induit;
- $L = 2,2 \text{ mH}$ inductance de l'induit;
- $k_c = 2,1 \text{ N m A}^{-1}$ constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
- $k_e = 2,1 \text{ Vs rad}^{-1}$ constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
- $C_r = 0,2 \text{ N m}$ couple résistant induit par les frottements secs, ramené à la sortie du réducteur
- $f_v = 0,04 \text{ Nm s rad}^{-1}$ coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur
- $J_{\text{équ}} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.

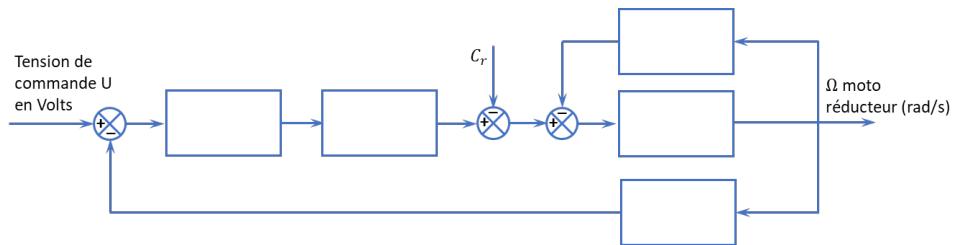


Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

Le constructeur donne les caractéristiques électro-mécaniques exprimées à la sortie du réducteur. On rappelle les équations temporelles : $u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$, $e(t) = k_e \omega_{\text{rédu}}(t)$, $C_{\text{rédu}}(t) = k_c i(t)$, $C_{\text{rédu}}(t) - C_r - f_v \omega_{\text{rédu}}(t) = J_{\text{équ}} \frac{d\omega_{\text{rédu}}(t)}{dt}$.

Les transformées de Laplace des fonctions $u(t)$, $i(t)$, $e(t)$, $\omega_{\text{rédu}}(t)$, $C_{\text{rédu}}(t)$ sont respectivement $U(p)$, $I(p)$, $E(p)$, $\Omega_{\text{rédu}}(p)$ et $C_{\text{rédu}}(p)$. On considère toutes les conditions initiales nulles.

Question 1 Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



Question 2 Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)}$ lorsque $C_r(p) = 0$.

Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de $M(p)$ suivante : $M_1(p) = \frac{0,436}{1 + 14,5 \cdot 10^{-3}p + 3,1 \cdot 10^{-6}p^2}$.

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension $u(t) = 24 \text{ V}$. Avec une génératrice tachymétrique dont le gain est de $0,166 \text{ Vs rad}^{-1}$, on a tracé la courbe de tension image de $\omega_{\text{rédu}}(t)$.

Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

Question 3 Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance L .

Question 4 Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de $M_1(p)$ lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de L) étant rejeté.

Remarque

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

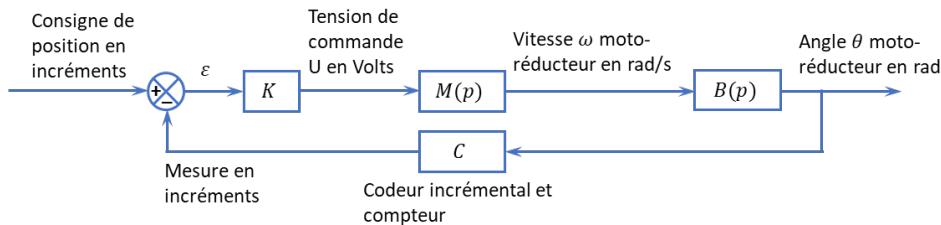
Dans la suite du problème, on néglige l'inductance L du moteur.

Question 5 Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$. Donner les valeurs numériques de G_s et de T à partir de l'expression de $M_1(p)$ et des réponses apportées précédemment.

Question 6 Déterminer les valeurs de G_s et T , à partir de la courbe de tension image de $\omega_{\text{rédu}}(t)$ (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

Respect du critère de marge de phase

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incrément est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



Le convertisseur-amplificateur K de gain k variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental C placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incréments par tour. Il est associé à un compteur – décompteur qui élabore la mesure de position en incrément. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.

Question 7 Donner la fonction de transfert du bloc $B(p)$ et la valeur du coefficient du bloc C en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de k , la fonction de transfert en boucle ouverte $H_O(p)$.

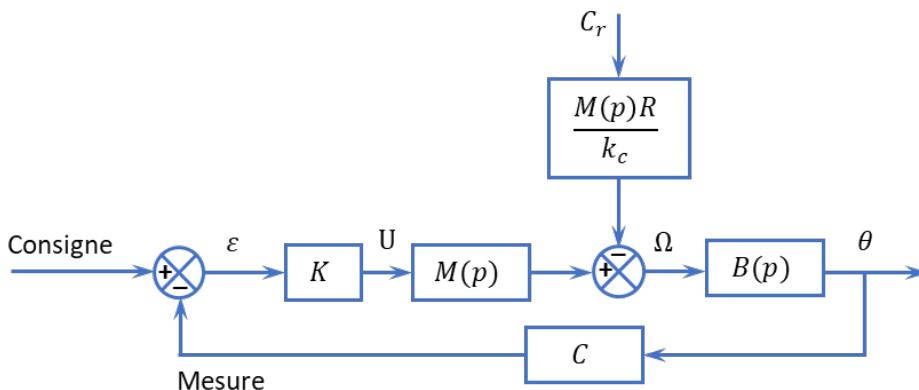
Question 8 Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour $k = 1$. Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de k ? Justifier.

Remarque

Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à $-180 + 45 = -135^\circ$.

Question 9 Calculer l'écart statique $\varepsilon_{\text{cons}}$ en incrément lorsque la consigne est un échelon de position : $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$.

Étant donné que la perturbation C_r intervient entre deux blocs de $M(p)$, on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.

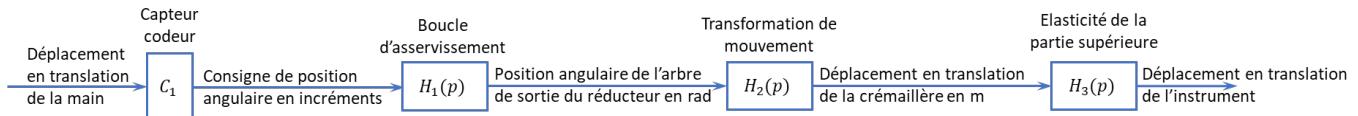


Question 10 Calculer, pour la valeur k_{45} de k établie précédemment, l'écart statique $\varepsilon_{\text{pert}}$ en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant $C_r u(t)$ induit par les frottements secs.

Question 11 La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc K qui annulerait cet écart.

Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

Modélisation par schéma-blocs



Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est : $H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$. On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrène avec la crémaillère a un diamètre $\Phi_1 = 38,4$ mm.

Question 12 Exprimer le coefficient du bloc H_2 et préciser l'unité.

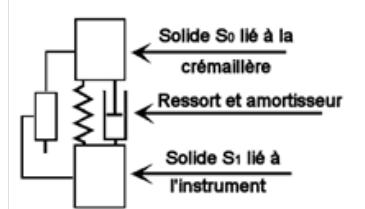
En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

Question 13 Quelle relation doit vérifier le produit P des gains des blocs C_1, H_1, H_2 ? Justifier. Exprimer le coefficient c_1 en incrément par mètre du bloc C_1 .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

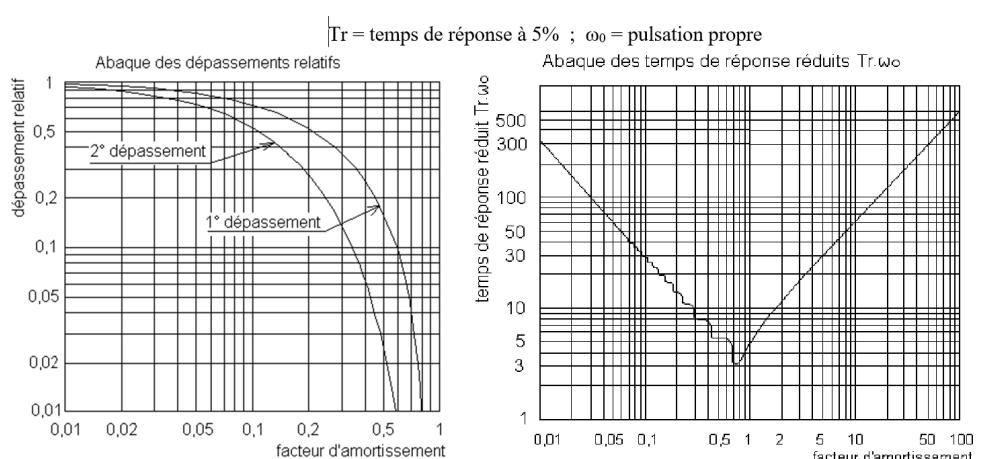
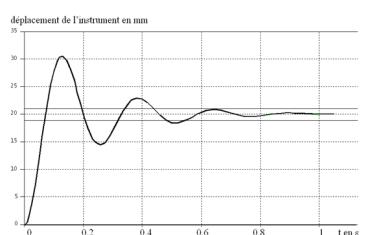
Question 14 Exprimer le nouveau coefficient c_2 du bloc C_1 ainsi que le nouveau produit P_1 .

Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère



La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides : S_0 représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés ; et S_1 représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur k_0 et un amortisseur de coefficient f_0 , montés en parallèle comme le montre le schéma.

Pour identifier la fonction de transfert $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$ de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement $d_{\text{crem}}(t) = 20 \times 10^{-3}$ m à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement $d_{\text{instrum}}(t)$ de l'instrument.



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassements relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.

Question 15 Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert $H_3(p)$; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

Question 16 Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de $H_3(p)$, de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit m_1 la masse du solide S_1 . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté \vec{z} . L'origine O du mouvement de S_1 correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit a_0 l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota : a_0 est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par : $m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0$.

Question 17 Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique : $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$, exprimer le coefficient d'amortissement ξ_3 et la pulsation propre ω_{03} du mouvement en fonction de k_0, f_0, m_1 .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface : $m_1 = 1,6$ kg.

Question 18 Pour la valeur de ω_{03} calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur k_0 (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à -3 dB de 4 Hz. (On notera que $\omega_{-3\text{dB}} > \omega_{03}$).

Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur c_1 du bloc C_1 . La fonction de transfert du système est : $H(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}$. Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de 100 mm s^{-1} . On a tracé sur la figure 5 les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.

Question 19 Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

On donne figure 6, la courbe d'amplitude (gain) de $H(p)$ pour $p = j\omega$ dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de $0,25$ s et l'amplitude 1

Question 20 Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal traité par le capteur-codeur C_1 de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps : $T_1 = 0,04$ s ; $T_2 = 0,1$ s ; $T_3 = 0,5$ s.

Question 21 Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténusés de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

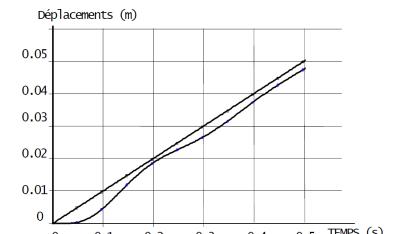


FIGURE 5 – Courbes de déplacement de la main

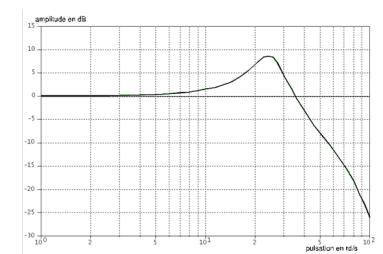


FIGURE 6 – Courbe de gain



TD 2

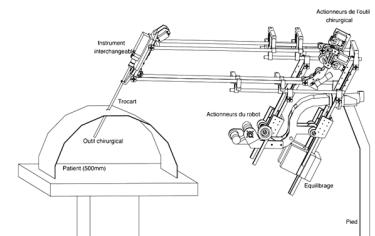
Robot pour la chirurgie endoscopique– Corrigé

Banque PT – SIA – 2005.

Présentation

Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

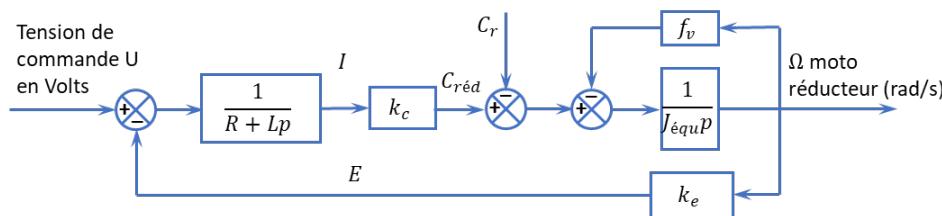
Question 1 Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



Correction

On a :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p);$
- $E(p) = k_e \Omega_{rééd}(p);$
- $C_{rééd}(p) = k_c I(p);$
- $C_{rééd}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{rééd}(p) = J_{équ} p \Omega_{rééd}(p).$



Question 2 Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur
 $M(p) = \frac{\Omega_{rééd}(p)}{U(p)}$ lorsque $C_r(p) = 0$.

Correction

En raisonnant à partir des équations, on a : $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{rééd}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{(J_{équ}p + f_v) \Omega_{rééd}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{rééd}(p)$
 $\Rightarrow U(p) = \left(\frac{(J_{équ}p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{rééd}(p)$

Au final, $M(p) = \frac{k_c}{(J_{équ}p + f_v)(R + Lp) + k_e k_c}$.

En mettant l'expression sous forme canonique, on a : $M(p) =$

$$\frac{k_c}{J_{\text{équ}} L p^2 + (R J_{\text{équ}} + L f_v) p + k_e k_c + R f_v} = M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + R f_v}}{\frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{k_e k_c + R f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1}$$

En réalisant l'application numérique, on a : $M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6} p^2 + 14,6 \times 10^{-3} p + 1}$.

Question 3 Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance L .

Correction

En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant L , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et $M(p)$ se modélise par une fonction d'ordre 1.

Question 4 Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de $M_1(p)$ lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de L) étant rejeté.

Correction

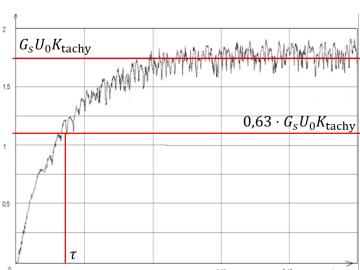
En utilisant la formulation de $M_1(p)$ donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a : $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$. Au final, $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \approx -4607$ et $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \approx -70$. Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme $3,1 \times 10^{-6} (p + 4607) (p + 70)$. Le pôle p_2 est donc dominant par rapport à p_1 .

Question 5 Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$. Donner les valeurs numériques de G_s et de T à partir de l'expression de $M_1(p)$ et des réponses apportées précédemment.

Correction

En utilisant l'expression établie initialement en négligeant l'inductance, on a $M_2(p) = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} \frac{1}{R J_{\text{équ}}} p + 1$. En réalisant l'application numérique, $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015p}$ ($G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ et $T = 0,015 \text{ s}$).

Question 6 Déterminer les valeurs de G_s et T , à partir de la courbe de tension image de $\omega_{\text{réd}}(t)$ (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).



Correction

La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que $24 \cdot G_s \cdot K_{\text{tachy}} = 1,75 \text{ V}$ soit $G_s = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$. En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a $\tau = 0,02 \text{ s}$. On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse « L négligeable ».

Respect du critère de marge de phase

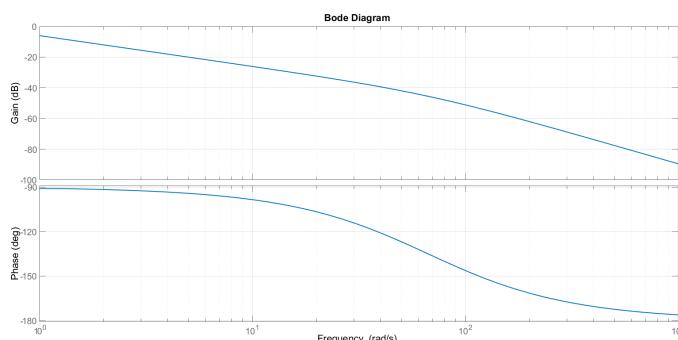
Question 7 Donner la fonction de transfert du bloc $B(p)$ et la valeur du coefficient du bloc C en incr./rad.
Exprimer numériquement, en fonction de k , la fonction de transfert en boucle ouverte $H_O(p)$.

Correction

B assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc $B(p) = \frac{1}{50p}$. Par ailleurs $C = \frac{360}{2\pi}$ incr/rad.

$$\text{On a donc } H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$$

Question 8 Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour $k = 1$. Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de k ? Justifier.



Correction

Au vu du tracé, la phase est supérieure à -135° lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

Question 9 Calculer l'écart statique $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$ en incrémentés lorsque la consigne est un échelon de position : $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$.

Correction

Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart

$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon(p) &= \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}. \text{ Cons}(p) = \frac{1}{p}. \text{ On a alors } \varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \varepsilon(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0. \end{aligned}$$

Question 10 Calculer, pour la valeur k_{45} de k établie précédemment, l'écart statique $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$ en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant $C_r u(t)$ induit par les frottements secs.

Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \varepsilon(p) &= \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left(\varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) &= \text{Cons}(p) + B(p)CC_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \\
 &\text{Cons}(p) \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 &+ C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c (1 + B(p)CKM(p))} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 &+ C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c (1 + B(p)CKM(p))} \\
 &\quad \frac{G_S}{1 + Tp} R \frac{1}{50p} C \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{1}{k_c \left(1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1 + Tp} \right)} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1 + Tp) 50p + CKG_S)} \\
 &= C_r \frac{G_S RC}{k_c CKG_S} = C_r \frac{R}{k_c K}.
 \end{aligned}$$

On a donc $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = C_r \frac{R}{k_c K}$ soient $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95$ incr.

Question 11 La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc K qui annulerait cet écart.

Correction

Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur $k = 1$.

Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

Modélisation par schéma-blocs

Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Question 12 Exprimer le coefficient du bloc H_2 et préciser l'unité.

Correction

En notant x le déplacement en translation, on a $x = \frac{38,4}{2}\Theta$. On a donc $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

Question 13 Quelle relation doit vérifier le produit P des gains des blocs C_1, H_1, H_2 ? Justifier. Exprimer le coefficient c_1 en incrément par mètre du bloc C_1 .

Correction

Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que $P = 1$.

On a $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$.

On a donc $c_1 = 148\,810 \text{ incr m}^{-1}$.

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

Question 14 Exprimer le nouveau coefficient c_2 du bloc C_1 ainsi que le nouveau produit P_1 .

Correction

On souhaite maintenant que $P_1 = \frac{1}{10}$ et $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$.

Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

Question 15 Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert $H_3(p)$; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

Correction

Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de $K = 1$.

Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve $\xi = 0,2$.

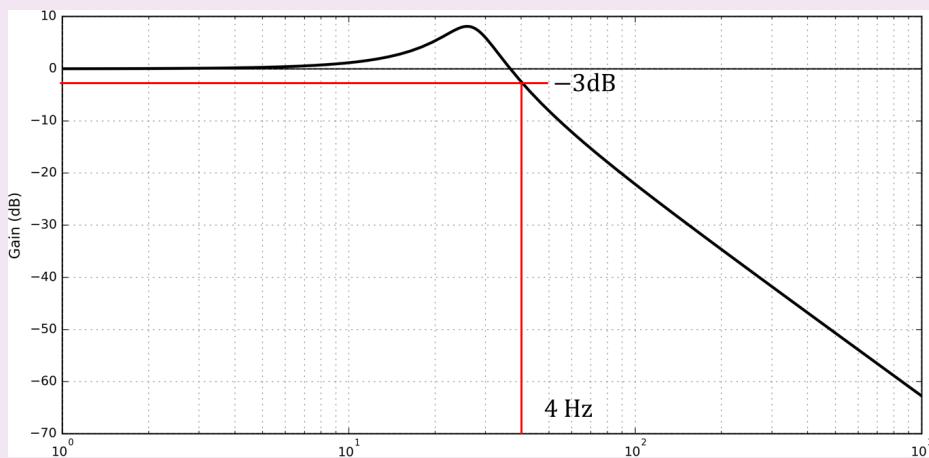
Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a $\omega_0 Tr = 15$. On a donc $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

Question 16 Le critère de la bande passante de 4 Hz à -3 dB est-il satisfait?

Correction

On trace le diagramme de Bode. La bande passante à -3 dB est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.



Question 17 Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique : $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$, exprimer le coefficient d'amortissement ξ_3 et la pulsation propre ω_{03} du mouvement en fonction

de k_0 , f_0 , m_1 .

Correction

$$\text{On a } m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0.$$

$$\text{On a donc } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface : $m_1 = 1,6 \text{ kg}$.

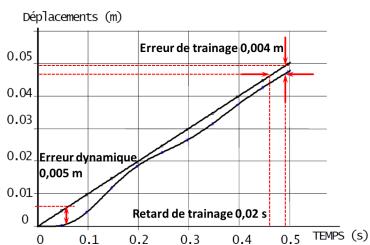
Question 18 Pour la valeur de ω_{03} calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur k_0 (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à -3 dB de 4 Hz. (On notera que $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$).

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } \omega_{-3 \text{ dB}} &> \omega_{03} \text{ or } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2; \text{ donc nécessairement, } \omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} \\ &\Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1 \Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}. \end{aligned}$$

Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

Question 19 Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?



Correction

- ▶ Écart dynamique maximal : 5 mm.
- ▶ Écart de traînage (ou de vitesse) ε_v en régime établi : 4 mm.
- ▶ Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

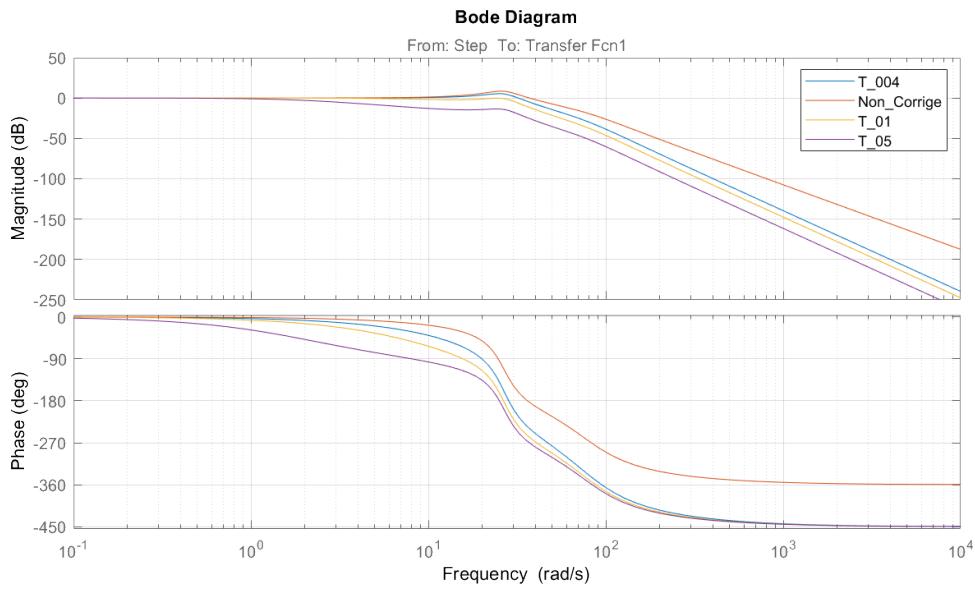
Question 20 Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

Correction

Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$. À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport S/E est donc de $10^{8/20} = 2,5$ ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténuerées/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

Amélioration des performances dynamiques

Question 21 Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténuerés de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?



Correction

Le filtre $T_2 = 0,1\text{ s}$ permet d'atténuer le gain à une pulsation de 25 rad s^{-1} sans trop atténuer le gain à des pulsations inférieures à $6,3\text{ rad s}^{-1}$.



Colle 0

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique—Sujet

Mines Ponts 2016.

B2-04

Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC²E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure ?? décrit les exigences auxquelles est soumis l'asservissement du MC²E.

Validation des performances de l'asservissement d'effort

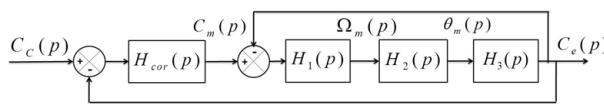
Modèle de connaissance de l'asservissement

Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Dans un premier temps, on prendra $H_{cor}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

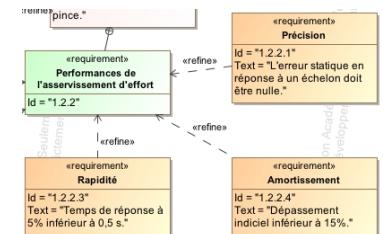
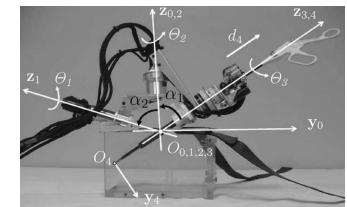


FIGURE 7 – Performances de l'asservissement.

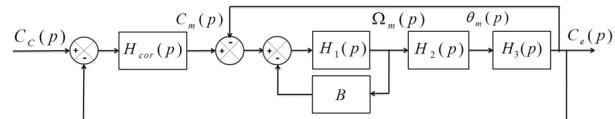
On note :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E;
- $C_c(p)$, couple de consigne;
- $C_m(p)$, couple moteur;
- $H_{cor}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

FIGURE 9 – Régulation avec retour tachymétrique.



Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure ??.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.

$$1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}$$

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Question 7 À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

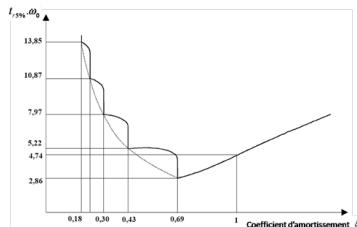
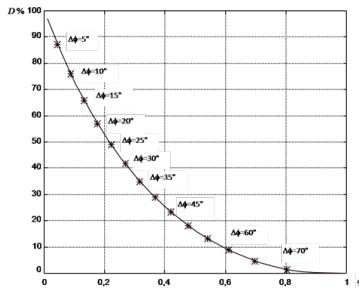
On donne $K_i = 1$.

Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{e0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0,01$ s et $\tau = 0,5$ s.

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \frac{K_i (1 + T_i p)}{T_i p (1 + \tau p)^2}$.





Colle 0

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique– Corrigé

Mines Ponts 2016.

B2-04

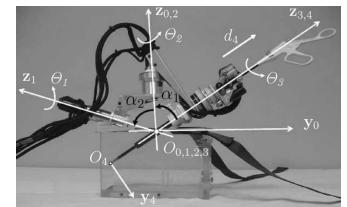
Présentation générale

Validation des performances de l'asservissement d'effort

Modèle de connaissance de l'asservissement

Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.



Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Correction

$$H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p} \text{ et } H_3(p) = K_{C\theta}.$$

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Correction

$$\text{Calculons } F(p) = \frac{C_e(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp} \frac{1}{p}}{1 + K_{C\theta} \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}.$$

$$\text{Par suite } H_{BF}(p) = \frac{F(p)H_{cor}(p)}{1 + F(p)H_{cor}(p)} \text{ soit } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta} + K_{C\theta}}$$

$$= \frac{1/2}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2 + 1}.$$

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Correction

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude $C_0/2$. Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

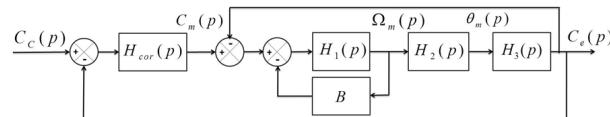


FIGURE 11 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Correction

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } F_1(p) &= \frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{B}{Jp}} = \frac{1}{Jp + B}. \text{ Par suite } FTBO(p) = \frac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + F_1(p)H_2(p)H_3(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}}{1 + \frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p(Jp + B) + K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}. \\ \text{Par ailleurs, } H_{BO}(p) &= \frac{1}{(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + 2\tau p + \tau^2 p^2}. \\ \text{On a donc } \frac{B}{K_{C\theta}} &= 2\tau \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \tau. \text{ D'autre part, } \tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \\ \text{Au final, } B &= 2\sqrt{JK_{C\theta}} \text{ et } \tau = \frac{B}{2K_{C\theta}} = \frac{2\sqrt{JK_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \end{aligned}$$

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure ??.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction

- Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

$$\text{On a } \varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_ip(1 + \tau p^2)}} = C_0 \frac{1}{p + \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_i(1 + \tau p)^2}}.$$

Par suite, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = 0$.

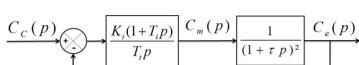


FIGURE 12 – Régulation avec correcteur PI.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Correction

Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.

En choisissant $T_i = \tau$ (compensation du pôle double du système), on a alors $\text{FTBO}(p) = \frac{K_i(1 + \tau p)}{\tau p(1 + \tau p)^2} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)^2}$.

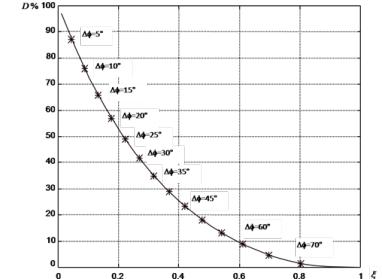
$$\text{On a alors } \text{FTBF}(p) = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p) + K_i}.$$

Question 7 À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne $K_i = 1$.

Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

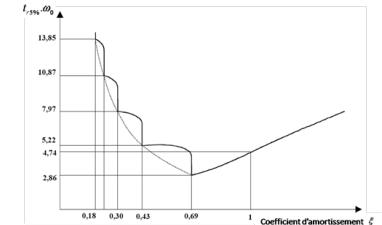
Correction



Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0,01\text{s}$ et $\tau = 0,5\text{s}$.

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p)^2}$.



Question 2.

D'après l'équation de mouvement, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$. On a donc $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$. 2

On a $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$; donc $H_2(p) = \frac{1}{p}$. 2

Enfin, $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$ et donc $H_3(p) = K_{C\theta}$. 1

Question 3.

On a dans un premier temps $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.

Dans un second temps, $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}-H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$.

Avec $H_{cor}(p) = 1$: $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$. 5

Question 4.

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a : $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$. Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude C_0 est une sinusoïde (d'amplitude C_0 et de moyenne $\frac{C_0}{2}$). 3

Un mouvement sinusoïdal est sûrement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical. 2

Question 5.

On a $H_{BO}(p) = \frac{\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+Bp+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{Jp^2}{K_{C\theta}}+\frac{B}{K_{C\theta}}+1}$.

Par ailleurs, $(1 + \tau p)^2 = 1 + \tau^2 p^2 + 2\tau p$. 3

En identifiant, $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$ et $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$. On a donc $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$.

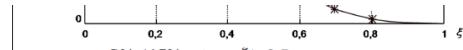
Question 6.

On a : $\varepsilon(p) = \frac{C_e(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}}$. En conséquences, $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}} =$

$\lim_{p \rightarrow 0} C_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)^2}} = 0 \text{ Nm. } \text{ 3 } \quad \text{L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée. } \text{ 2}$

Question 7.

On a $\frac{\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}} = \frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2 + K_i(1+T_ip)}$. Avec $T_i = \tau$, on a $\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p) + K_i}$. La FTBF est bien d'ordre 2. (5)



Pour avoir $D\% \leq 15\%$ il faut $\xi \geq 0,5$

Cependant, on trouve sur ce diagramme qu'il faut avoir $\xi \geq 0,8$ pour avoir une marge de phase de 70° .

Si on souhaite obtenir le temps de réponse à 5% le plus rapide, comme $\xi \geq 0,8 > 0,7$, il faut prendre ξ le plus faible possible. Cela impose $\xi = 0,8$ et comme $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$ on a

$$\text{alors } K_i = \frac{1}{4\xi^2} = 0,4.$$

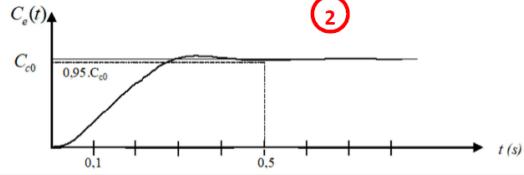


Pour $\xi = 0,8$, la lecture de l'abaque donne donc $t_{R5\%} \cdot \omega_0 \geq 3,5$ et avec $t_{R5\%} \leq 0,5s$ on a $\omega_0 \geq 7 \text{ rad/s}$

Question 9.

Critère	Valeur
Dépassement	2% (1)
Tr5%	<0,5 s (1)
Erreur statique en réponse à un échelon	0 (1)

Allure de la réponse indicelle :


(2)

Colle 1

Cisaille à découpe au vol – Sujet

D'après P. Dubois, C. Gamelon..

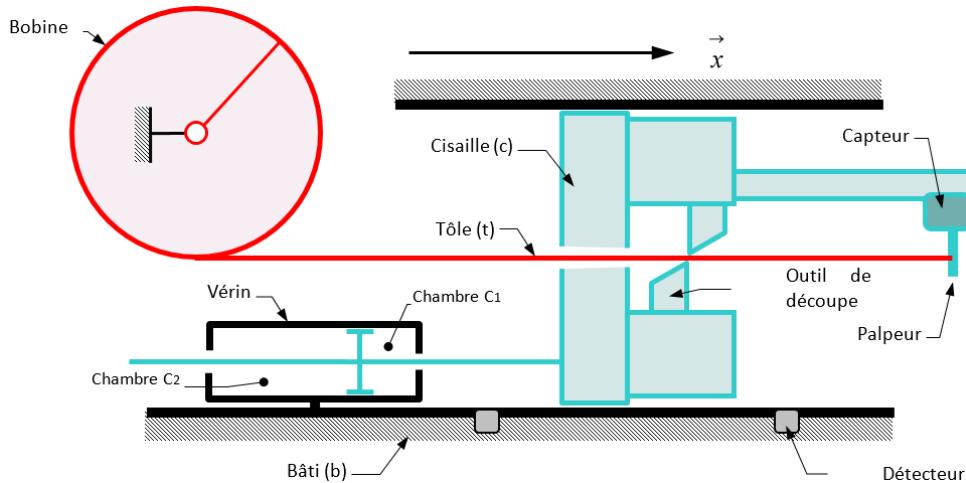
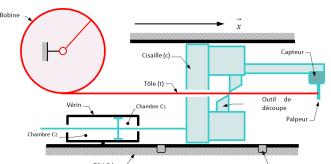
B2-04

B2-06

Mise en situation

Objectif

- Identifier les paramètres du vérin.
- Quantifier l'erreure de trainage et déterminer son impact sur le système.
- Proposer des solutions pour la compenser.



La machine, représentée par le schéma ci-dessus, permet de débiter en continu une bobine de tôle en tronçons de même longueur *. La rotation continue à fréquence variable de la bobine impose à la tôle (t) une vitesse linéaire $v(t)$ par rapport au bâti (b) constant. Les outils de découpe sont portés par la cisaille (c) qui est mise en mouvement par un vérin hydraulique.

En avançant, la tôle déplace le palpeur du capteur porté par la cisaille. Celui-ci délivre alors une tension $u(t)$ proportionnelle à l'écart de position entre la tôle et la cisaille. Un amplificateur transforme ce signal en courant d'intensité $i(t)$ pour commander un distributeur hydraulique qui fournit au vérin un débit d'huile $q(t)$. Au bout d'un certain temps, se déplaçant à la même vitesse, la cisaille et la tôle arrivent face à un détecteur qui déclenche la coupe. La tôle tombe, la cisaille recule jusqu'à son point de départ et attend que la tôle revienne en contact avec le palpeur pour recommencer un cycle. La position de la cisaille est ainsi « asservie » à la position de la tôle.

On notera par des majuscules les transformées de Laplace des fonctions du temps notées en minuscules.

$$\text{Rappels : } \mathcal{L}[a] = \frac{a}{p}, \mathcal{L}[at] = \frac{a}{p^2} \text{ et}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}.$$

Schéma-bloc du système

On considère comme instant initial le moment où la tôle touche le palpeur. À cet instant e et x sont nuls. L'équation reliant les déplacements est donnée par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - x(t).$$

On note

$X(p)$ est la transformée de Laplace du déplacement $x(t)$ et $Q(p)$ celle du débit $q(t)$.

On note :

- ▶ m la masse totale mise en mouvement par le vérin;
- ▶ f le coefficient de frottement visqueux associé au déplacement de l'ensemble mobile. Les frottements créent un effort qui s'oppose au déplacement et qui est proportionnel à la vitesse : $F_f(t) = -f \frac{dx(t)}{dt} \vec{x}$;
- ▶ $\Delta p(t)$ la différence de pression entre les deux chambres C_1 et C_2 du vérin;
- ▶ S la surface du piston en contact avec l'huile.

Le capteur, l'amplificateur et le distributeur délivrent des signaux de sortie proportionnels à leurs signaux d'entrée. On notera K_c , K_a et K_d leurs gains respectifs. Soit $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ la fonction de transfert associée à l'ensemble vérin plus charge déplacée.

Question 1 Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

Équation de comportement dynamique

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble mobile en projection sur \vec{x} , on a :

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\Delta p(t) - f \frac{dx(t)}{dt}.$$

Fonction de transfert du vérin

Pour le type de vérin utilisé, le débit d'alimentation a pour expression : $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\Delta p(t)}{dt}$. V est le volume moyen d'une chambre et B le module d'élasticité de l'huile, (ces deux paramètres sont des constantes).

Question 2 Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert : $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$, que l'on mettra sous la forme : $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$.

Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

$$\text{On pose } H_v(p) = \frac{K_v}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

Une simulation numérique a permis de tracer le diagramme de Bode donné page suivante. On se propose de retrouver les valeurs de K_v , ω_0 et ξ à partir du diagramme.

Question 3 Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel $\text{GdB}(\omega)$ en fonction des notations K_v , ω_0 et ξ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de $H_v(j\omega)$). Quelle est sa valeur pour $\omega = \omega_0$?

Question 4 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

Question 5 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers ∞ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

Question 6 Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de $H_v(p)$ donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres K_v , ω_0 et ξ (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

Question 7 Donner l'expression littérale de la phase $\varphi(\omega)$ en fonction des notations ω_0 et ξ . Déterminer ses limites lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre ω_0 puis pour 100 et 200 rad s^{-1} . Tracer la courbe de phase.

*. <https://goo.gl/azqSkT>

Détermination des gains K_c , K_a et K_d

Pour que le système soit stable en boucle fermée on décide de régler le correcteur pour avoir une marge de gain de 6 dB.

Question 8 Quelle valeur K doit-on donner au produit des gains $K_c K_a K_d$ (préciser les unités). On note K_0 le produit KK_v (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de K_0 ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue?

Méthode -

Cette question est un peu prématuée par rapport à notre avancée. Cependant, vous pouvez tentez d'appliquer la méthode suivante :

1. Déterminer le gain (en dB) pour lequel la phase vaut -180° .
2. Chercher K tel que $20 \log |FTBO| = -6$.
3. Calculer K_0 .

Erreur de traînage

$$\text{On note : } H(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}.$$

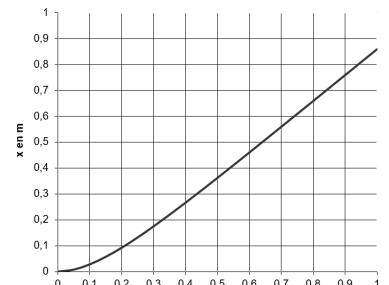
Question 9 Donner l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H(p)$. La tôle se déplace à vitesse constante v , quelle est la transformée $E(p)$ de $e(t)$? Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de v et des paramètres canoniques.

Question 10 On appelle erreur de traînage ε_t la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de ε_t . Faire l'application numérique avec $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ et $K_0 = 7$ (unité SI).

Identification temporelle

On donne ci-contre, le tracé de la courbe $x(t)$ obtenu à l'aide d'un logiciel de simulation. Cette réponse est voisine de celle d'un premier ordre soumis à la même entrée. Soit $F(p) = \frac{K_f}{1 + Tp}$ la fonction de transfert du système du premier ordre associé.

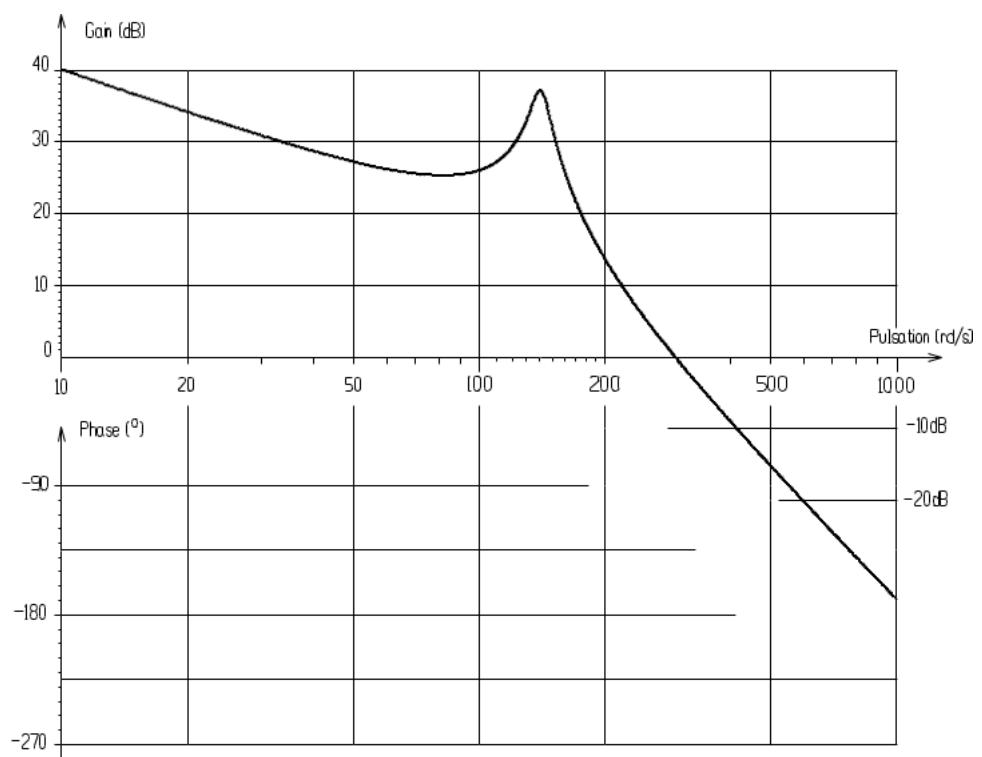
Question 11 Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante : $v = 1 \text{ m s}^{-1}$).



Question 12 Déterminer les valeurs numériques de K_f et T à l'aide de relevés sur la courbe.

Question 13 Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

Question 14 Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur?



Colle 1

Cisaille à découpe au vol – Corrigé

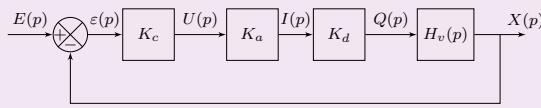
D'après P. Dubois, C. Gamelon..

Mise en situation

Schéma-bloc du système

Question 1 Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

Correction



Équation de comportement dynamique

Fonction de transfert du vérin

Question 2 Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert : $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$, que l'on mettra sous la forme : $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$.

Correction

D'une part, $mp^2X(p) = S\Delta P(p) - fpX(p) \Leftrightarrow \frac{p(mp+f)}{S}X(p) = \Delta P(p)$.

D'autre part : $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Delta P(p) \Leftrightarrow 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} = \Delta P(p)$.

On a donc : $\frac{p(mp+f)}{S}X(p) = 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} \Leftrightarrow \frac{p(mp+f)}{S}X(p) + \frac{2BSpX(p)}{Vp} = \frac{2BQ(p)}{Vp}$

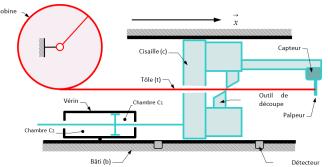
$$\Leftrightarrow \left(\frac{p(mp+f)}{S} + \frac{2BSp}{Vp} \right) \frac{Vp}{2B} = \frac{Q(p)}{X(p)} \Leftrightarrow \left(\frac{p(mp+f)Vp}{S2B} + Sp \right) = \frac{Q(p)}{X(p)}.$$

On a donc, $H_v(p) = \frac{1}{p \left(\frac{(mp+f)Vp}{S2B} + Sp \right)} = \frac{1}{p \left(\frac{Vm}{2BS}p^2 + \frac{fV}{2BS}p + S \right)} =$

$$\frac{1/S}{p \left(\frac{Vm}{2BS^2}p^2 + \frac{fV}{2BS^2}p + 1 \right)}.$$

B2-04

B2-06



Au final, $k = \frac{1}{S}$, $a = \frac{Vm}{2BS^2}$ et $b = \frac{fV}{2BS^2}$.

Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

Question 3 Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel $GdB(\omega)$ en fonction des notations K_v , ω_0 et ξ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de $H_v(j\omega)$). Quelle est sa valeur pour $\omega = \omega_0$?

Correction

$$H_v(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$$

$$\text{En conséquence, } G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right| = 20 \log K_v - 20 \log |j\omega| - 20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|$$

$$= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

$$\text{Au final, } G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi.$$

Question 4 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque ω tend vers 0, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$. La pente est donc de -20 dB/decade. Elle coupe l'horizontale à 0 dB en $\omega = K_v$.

Question 5 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers $+\infty$. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque ω tend vers l'infini, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$, G_{dB} tend vers $= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 + 20 \log \omega_0^2 = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega$.

La pente est donc de -60 dB/decade.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand

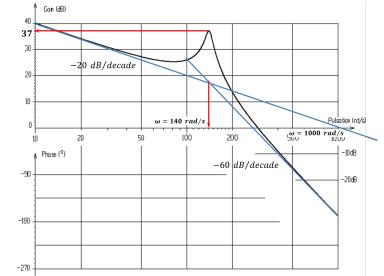
$20 \log K_v - 20 \log \omega = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega \Leftrightarrow \log \omega = \log \omega_0$. Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en $\omega = \omega_0$.

Question 6 Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de $H_v(p)$ donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres K_v , ω_0 et ξ (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

Correction

Par lecture du graphe, on obtient $\omega_0 = 140 \text{ rad/s}$ et $K_v = 1000 \text{ s m}^{-2}$.

$$G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 20 \log 1000 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 60 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow \frac{37 - 60 + 20 \log 140}{-20} = \log 2\xi \Leftrightarrow \xi \approx 0,05.$$



Question 7 Donner l'expression littérale de la phase $\varphi(\omega)$ en fonction des notations ω_0 et ξ . Déterminer ses limites lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre ω_0 puis pour 100 et 200 rad s⁻¹. Tracer la courbe de phase.

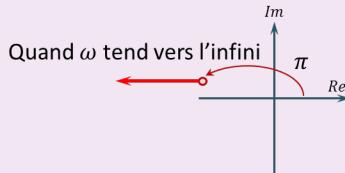
Correction

$$\varphi(\omega) = \arg K_v - \arg(j\omega) - \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$$

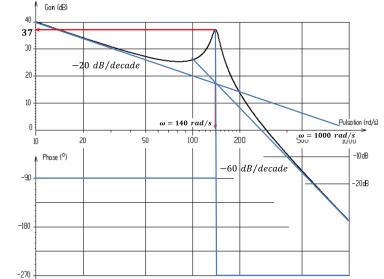
Lorsque ω tend vers 0, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

Lorsque ω tend vers l'infini, $-\arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$ tend vers π donc $-\arg(\dots)$ tend vers $-\pi$.

Explication graphique de prof de SII...



Au final, lorsque ω tend vers l'infini, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{3\pi}{2}$.



Détermination des gains K_c , K_a et K_d

Question 8 Quelle valeur K doit-on donner au produit des gains $K_c K_a K_d$ (préciser les unités). On note K_0 le produit KK_v (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de K_0 ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue?

Correction

Étant donné l'exigence demandée, le gain de la FTBO doit être de -6 dB lorsque la phase vaut -180° . On a déjà vu que pour cette phase, le gain décibel de H_v vaut 37 dB . Le gain dB vaut $20 \log K + 20 \log |H_v|$. On cherche donc K tel que $20 \log K + 20 \log |H_v| = -6$. Au final, $K = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Par suite, $K_0 = 7 \text{ s}^{-1}$.

Erreur de traînage

Question 9 Donner l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H(p)$. La tôle se déplace à vitesse constante v , quelle est la transformée $E(p)$ de $e(t)$? Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de v et des paramètres canoniques.

Correction

On peut redémontrer le résultat suivant : $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$.

Exprimons $\varepsilon(p)$: $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - H(p)\varepsilon(p)$; donc $\varepsilon(p)(1 + H(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$.

Le consigne étant une vitesse, on a donc $E(p) = \frac{v}{p^2}$. On a donc : $\varepsilon(p) = \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}}$.

Question 10 On appelle erreur de traînage ε_t la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de ε_t . Faire l'application numérique avec $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ et $K_0 = 7$ (unité SI).

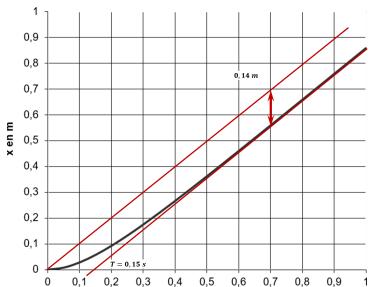
Correction

L'entrée en vitesse précédente correspondant à une entrée en rampe, on a donc $\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{v}{p + \frac{K_v K_c K_a K_d}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \frac{v}{K_v K_c K_a K_d} = \frac{1}{7} \simeq 0,14 \text{ m}$. Pour compenser cette erreur, il suffit de régler la butée de la tôle à découper.

Identification temporelle

Question 11 Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante : $v = 1 \text{ m s}^{-1}$).

Question 12 Déterminer les valeurs numériques de K_f et T à l'aide de relevés sur la courbe.

**Correction**

Première solution : cf cours pour un système du premier ordre soumis à une rampe.

Seconde solution : se raccrocher à ce que l'on sait (peut-être) pour un premier ordre soumis à un échelon... en effet, la rampe peut être assimilée à un premier ordre intégré. Ainsi, pour un système du premier ordre soumis à un échelon d'amplitude v , la valeur finale est vK_f . Ainsi, en intégrant, la pente en régime permanent sera de vK_f .

La pente étant de 1 on a $K_f = 1$.

Reste à savoir que l'asymptote coupe l'axe des abscisses en T . Après lecture, $T = 0,15 \text{ s}$.

Question 13 Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

Correction

Même erreur que précédemment.

Question 14 Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?

Correction

Il est possible de décaler la butée de 14 cm et ainsi supprimer l'écart de trainage.

Colle 2

Gyropode à usage professionnel HUBLEX- Sujet

Concours CCINP – MP 2020.

Présentation

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... lorsque ces lieux sont de grandes tailles.

B2-04

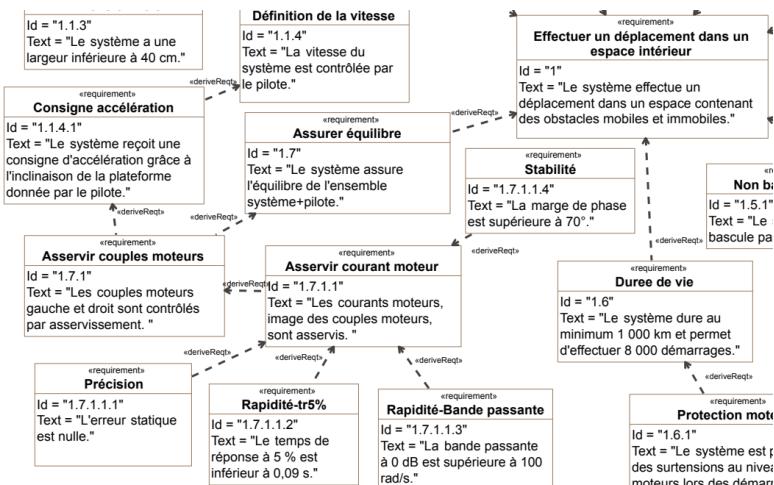
C2-03



Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en intensité du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence « 1.7.1.1 » et ses sous-exigences.



Modélisation du moteur

Le moteur brushless associé à son électronique de commande peut se modéliser par les équations d'une machine à courant continu.

On notera J_{eq} l'inertie équivalente des masses mobiles mises en jeu ramenée sur l'arbre moteur. On modélisera les différents frottements par un frottement visqueux générant un couple résistant, rapporté à l'arbre moteur, proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre moteur et de coefficient f ($f > 0$). On rappelle les équations caractéristiques associées :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad u(t) &= e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}; \\ \blacktriangleright \quad e(t) &= K_e \omega_m(t); \end{aligned}$$

- $C_m(t) = K_e i(t)$;
- $J_{\text{eq}} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - f\omega_m(t)$.

Question 1 Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

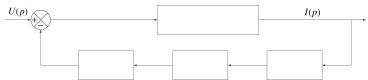


FIGURE 14 – Schéma-blocs

Question 2 Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans ?? . On précisera la grandeur associée à chaque lien.

Question 3 Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$. Mettre cette fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$.

Asservissement du moteur en intensité

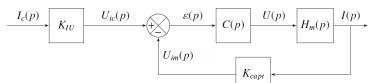


FIGURE 15 – Schéma-blocs

L'architecture retenue pour contrôler le couple moteur est un asservissement en intensité, image du couple moteur (voir équation précédente). Le schéma-blocs est représenté ?? . Un convertisseur IU fournit au calculateur une tension $u_{ic}(t)$ image de l'intensité de consigne $i_c(t)$, proportionnelle à cette dernière de coefficient K_{iu} . De même, l'intensité réelle $i(t)$, mesurée par un capteur d'intensité de coefficient K_{capt} , a pour image $u_{im}(t)$. L'écart, noté $\varepsilon(t) = u_{ic}(t) - u_{im}(t)$, est traité par le correcteur de fonction de transfert $C(p)$, qui impose la tension $u(t)$ aux bornes du moteur.

On donne la fonction de transfert du moteur : $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$.

Question 4 Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à K_{iu} , caractéristique du convertisseur IU.

On prend, dans un premier temps, un correcteur purement proportionnel : $C(p) = K_p$.

On en déduit la fonction de transfert $H_I(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$:

$$H_I(p) = \frac{K'}{1 + K'} \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} + K' \tau_m p + \frac{1}{\omega_{0m}^2 (1 + K')} p^2}, \text{ avec } K' = K_{iu} K_p K_m.$$

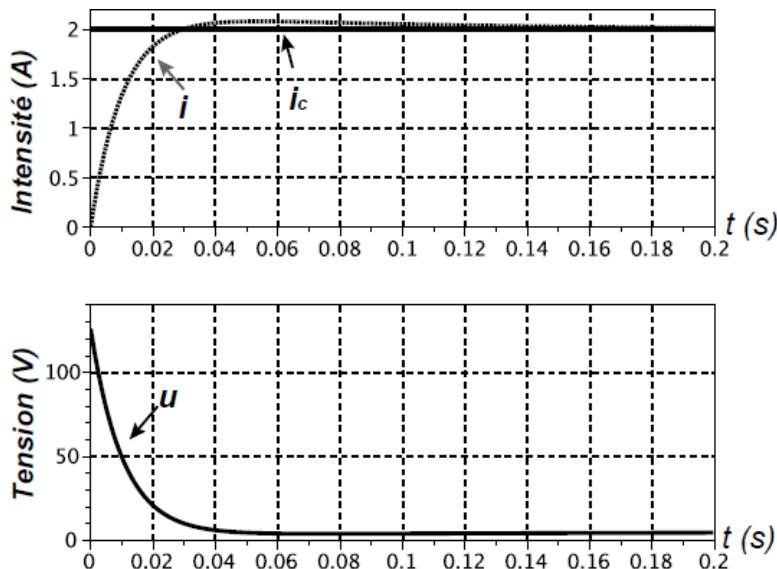
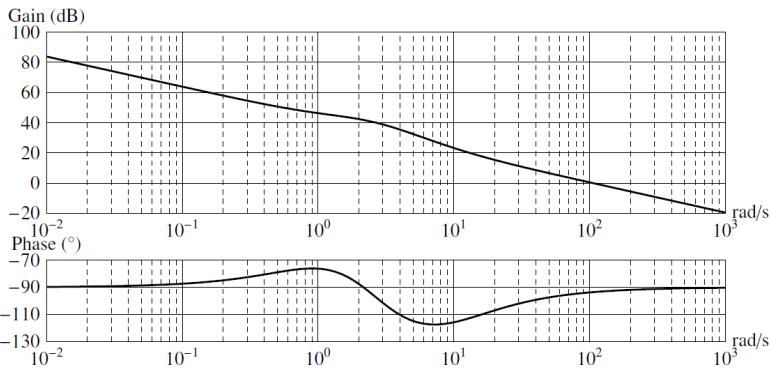
Question 5 Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée μ_s , pour une entrée indicielle (i.e. $I_c(p)$ est un échelon unitaire), en fonction de K_{iu} , K_p et K_m .

Question 6 Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1 » avec ce type de correcteur.

Dans un deuxième temps, il est décidé d'utiliser un correcteur de type proportionnel intégral. Sa fonction de transfert est notée : $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$.

Question 7 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour $K_p = 10$ et $K_i = 1000$. On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

Une fois le correcteur réglé, on obtient les diagrammes de Bode en boucle ouverte (??) et les réponses temporelles (??), pour un échelon d'intensité $i_c(t)$ de 2 A.



Question 8 Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du système).

Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. ?? présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité $i_c(t)$ de 2 A.

Question 9 Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

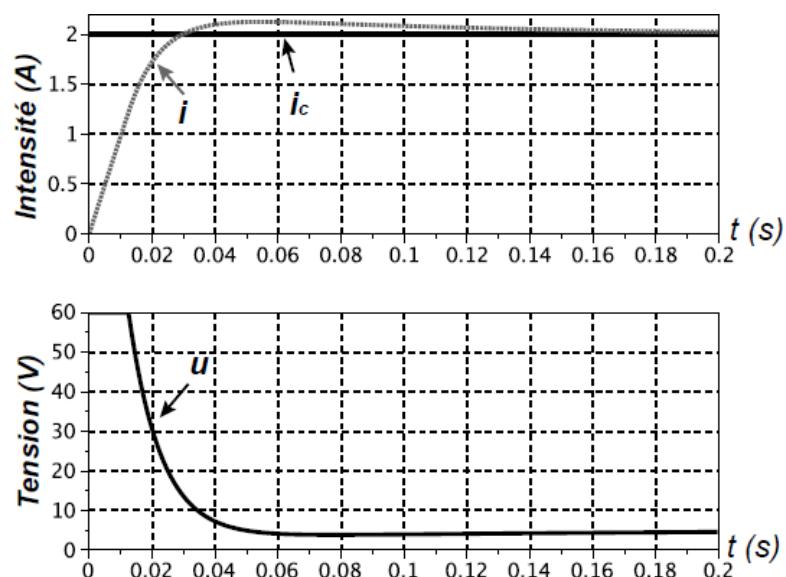


FIGURE 18 – Réponses temporelles du système finalement implanté



Colle 2

Gyropode à usage professionnel HUBLEX- Corrigé

Concours CCINP – MP 2020.

B2-04

C2-03

Présentation

Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

Modélisation du moteur

Question 1 Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

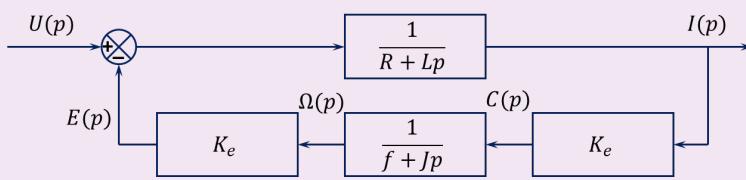


Correction

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p);$
- $E(p) = K_e \Omega_m(p);$
- $C_m(p) = K_e I(p);$
- $J_{eq}p\Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p).$

Question 2 Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans ?? . On précisera la grandeur associée à chaque lien.

Correction



Question 3 Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$. Mettre cette fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$.

Correction

$$\text{En utilisant la formule de Black, on a } H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{R+Lp}}{1 + K_e^2 \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{f+Jp}} =$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(R + Lp) + K_e^2 \frac{1}{f + Jp}} &= \frac{f + Jp}{(R + Lp)(f + Jp) + K_e^2} \\
 &= \frac{f + Jp}{Rf + (Lf + RJ)p + LJp^2 + K_e^2} = \frac{f}{Rf + K_e^2} \frac{1 + \frac{J}{f}p}{(Lf + RJ) \frac{p}{Rf + K_e^2} + \frac{LJp^2}{Rf + K_e^2} + 1}. \\
 \text{On a donc } K_m &= \frac{f}{Rf + K_e^2}, \quad \tau_m = \frac{J}{f}, \quad \frac{1}{\omega_{0m}^2} = \frac{LJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow \omega_{0m} = \sqrt{\frac{Rf + K_e^2}{LJ}} \text{ et } \frac{2z_m}{\omega_{0m}} = \\
 \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} &\Rightarrow z_m = \frac{\omega_{0m}}{2} \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{Lf + RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K_e^2}}.
 \end{aligned}$$

Asservissement du moteur en intensité

Question 4 Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à K_{IU} , caractéristique du convertisseur IU.

Correction

Pour avoir $\varepsilon = 0$ lorsque $I_c(p) = I(p)$, il faut nécessairement $K_{capt} = K_{IU}$.

Question 5 Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée μ_s , pour une entrée indicielle (i.e. $I_c(p)$ est un échelon unitaire), en fonction de K_{IU} , K_p et K_m .

Correction

$K_{capt} = K_{IU}$, il est donc possible de positionner K_{capt} en amont de la chaîne directe, de supprimer K_{IU} et de se ramener à un schéma-blocs à retour unitaire.

On a alors $FTBO(p) = K_{capt}C(p)H_m(p)$ et $\varepsilon(p) = \frac{I_c(p)}{1 + FTBO(p)}$.

On a alors $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{1}{p} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{1}{1 + K_m K_p K_{capt}}$.

Question 6 Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

Correction

Avec ce correcteur, l'exigence de précision nulle ne pourra pas être satisfaite.

Question 7 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour $K_p = 10$ et $K_i = 1000$. On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

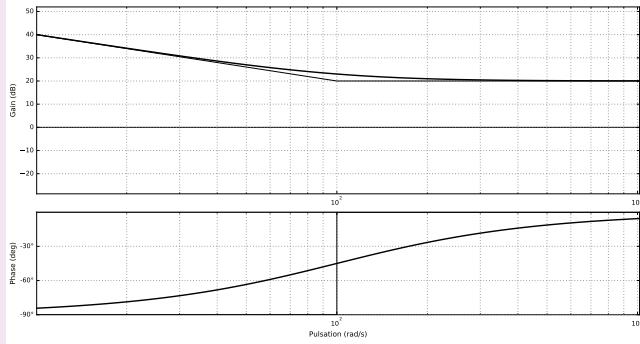
Correction

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p p + K_i}{p} = K_i \frac{\frac{K_p}{K_i} p + 1}{p} = \frac{1000}{p} \left(\frac{1}{100} p + 1 \right).$$

On peut donc dresser le tableau de variation asymptotique.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega_1 = 100\text{rad/s}$	$\omega \rightarrow \infty$
$H_1(p) = \frac{K_i}{p} = \frac{1000}{p}$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	
$H_2(p) = 1 + \frac{p}{100}$	0 dB/décade 0°	20 dB/décade 90°	
$C(p)$	-20 dB/décade -90°	0 dB/décade 0°	

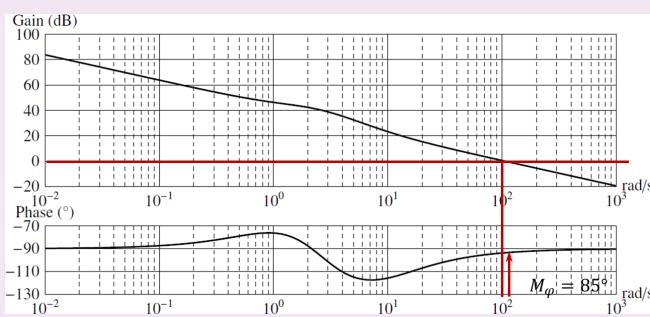
L'asymptote du gain décibel de « $H_1(p)$ » coupe l'axe des abscisses en 1000.



Question 8 Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du système).

Correction

La marge de phase est respectée. Cependant la tension atteinte demandée par la commande (120 V) est peut être trop élevée pour le moteur.



Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. ?? présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité $i_c(t)$ de 2 A.

Question 9 Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

Correction

Le constructeur a ajouté une saturation de ± 60 V.