

## 10 Correction des SLCI

### 10.1 Pourquoi corriger un système ?

Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

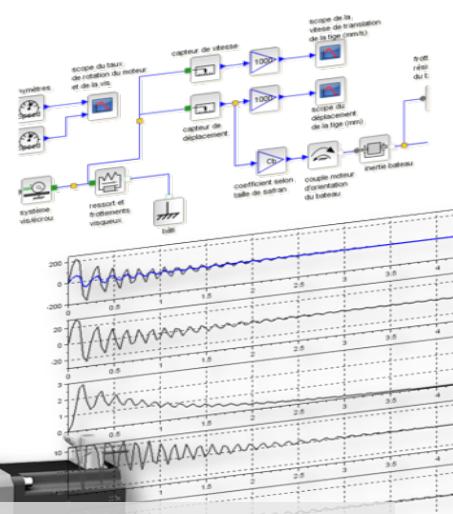
- ▶ plus précis;
- ▶ plus amorti;
- ▶ plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.

#### Résultat –

- ▶ D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- ▶ D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- ▶ D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.



10.1 Pourquoi corriger un système? . . . . .	1
10.2 Le correcteur proportionnel . . . . .	2
10.3 Les correcteurs à action intégrale . . . . .	3
10.4 Le correcteur à avance de phase . . . . .	4
10.5 Bilan sur l'influence des correcteurs . . . . .	5

C1-02

C2-04

**Frédéric Mazet**, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

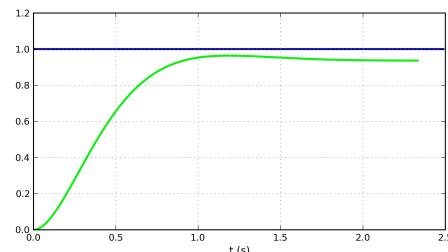
**Florestan Mathurin**, Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

## 10.2 Le correcteur proportionnel

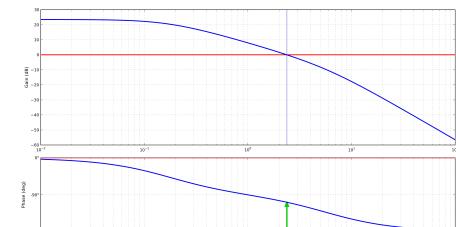
### Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

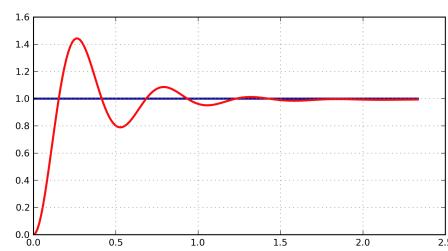
Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



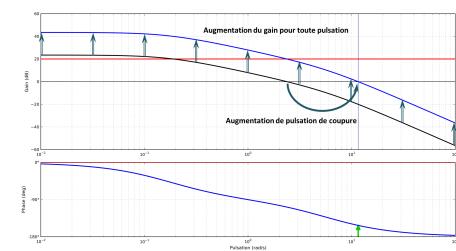
$T_{5\%} : 0,781 \text{ s} - \text{Écart statique : } 0,07$



Marge de phase  $71,94^\circ$



$T_{5\%} : 0,88 \text{ s} - \text{Écart statique : tend } \rightarrow 0$



Marge de phase  $6,43^\circ$

### Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- ▶ d'améliorer la précision;
- ▶ d'augmenter la vivacité;
- ▶ d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- ▶ de diminuer l'amortissement;
- ▶ de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode –

#### Réglage de la marge de phase :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0 \text{ dB}}$  tel que  $\varphi(\omega_{0 \text{ dB}})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

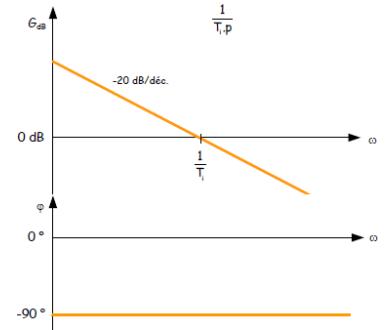
## 10.3 Les correcteurs à action intégrale

### 10.3.1 Le correcteur intégral pur

#### Définition – Correcteur I

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .



#### Résultat –

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

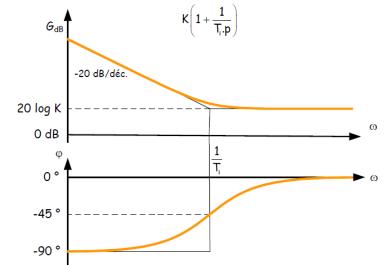
Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

### 10.3.2 Le correcteur proportionnel intégral

#### Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ .



En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

#### Résultat – Correcteur PI

- ▶ augmente l'amortissement;
- ▶ augmente la rapidité;
- ▶ augmente la précision.

#### Méthode –

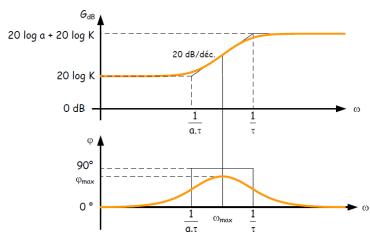
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- ▶ On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- ▶ La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la

pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} << \omega_{0\text{dB}}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_{0\text{dB}}}$ .

### Remarque

Une autre possibilité pour régler  $T_i$  est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$  avec  $\tau_1 >> \tau_2$ .  $\tau_1$  ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre  $T_i = \tau_1$  afin de supprimer l'effet du pôle associé à  $\tau_1$ .

## 10.4 Le correcteur à avance de phase



### Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1 + \alpha \tau p}{K \frac{1 + \tau p}{1 + \tau p}}$  avec  $\alpha > 1$ .

### Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{\alpha \tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

### Remarque

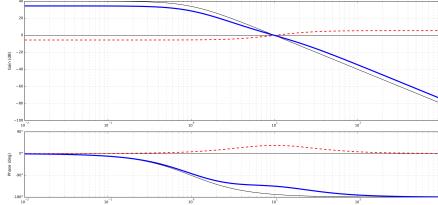
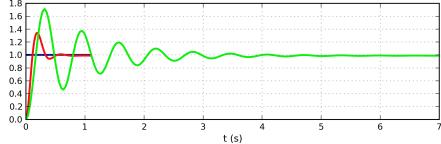
On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

### Démonstration

Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha \tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{\alpha \tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau \sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ ,  $a = 3,54$ ,  $T = 0,053$  s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

#### Méthode –

- En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que le gain est nul.
- On calcule  $\varphi(\omega_{0dB})$ .
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule  $a$ .
- On calcule  $\tau$ .
- On calcule  $K$ .

## 10.5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction		
	Si $K_p$ augmente		
Proportionnel $K_p$	Marges	↔	
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	↔	Si mal réglé
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	↔	(Cf : classe)
	Précision	↔	
	Rapidité	↔	



# Application 1

## Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

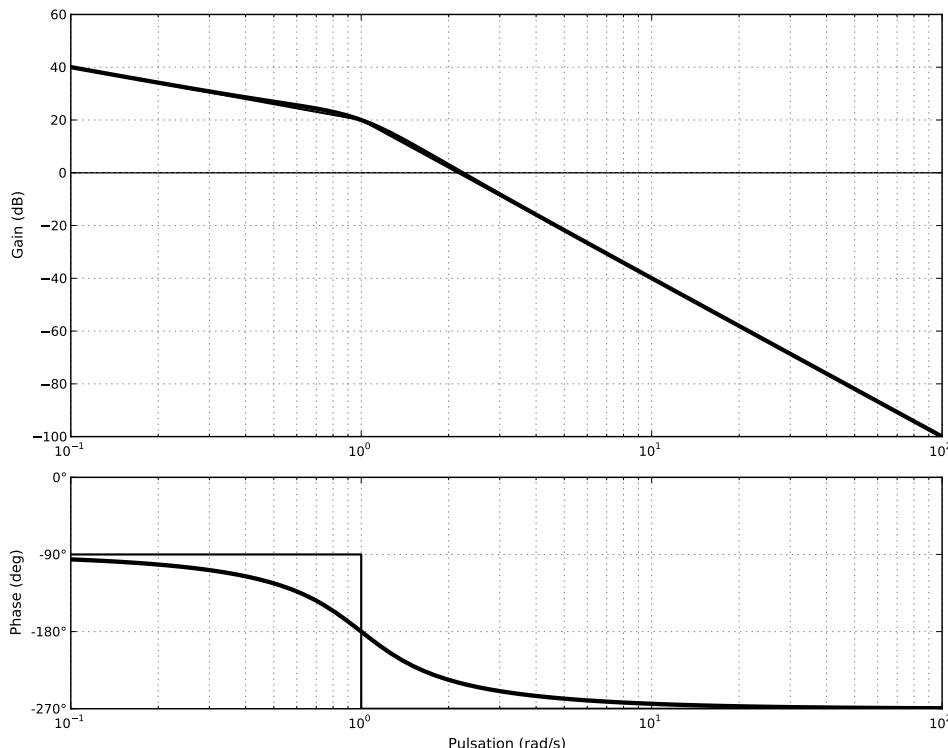
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.

D'après ressources P. Dupas.

C1-02

C2-04



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Éléments de correction**

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20 \text{ dB}$ .
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35 \text{ dB}$ .
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

D'après ressources P. Dupas.

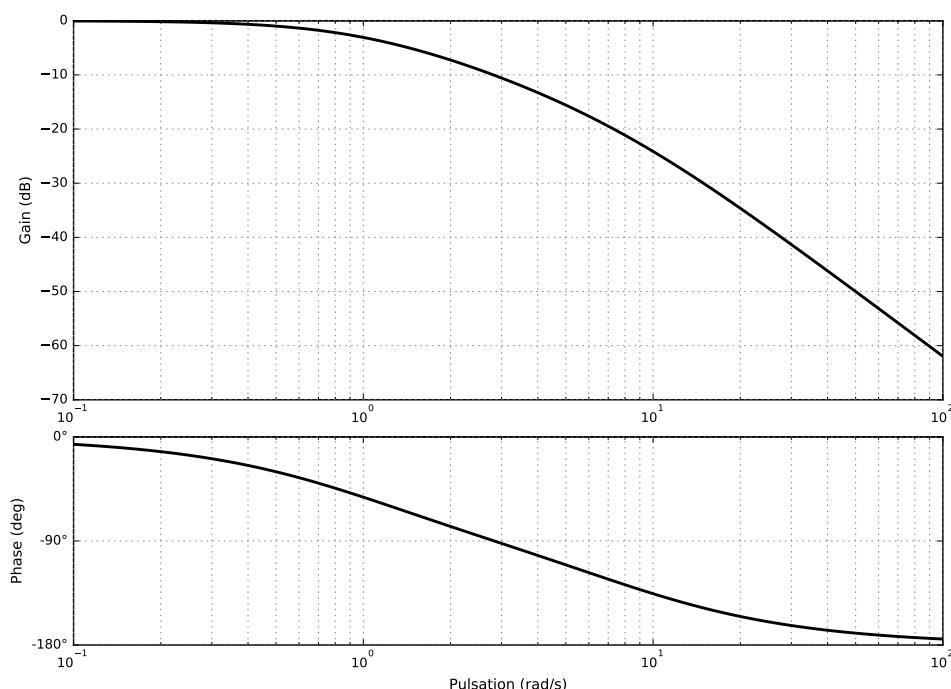
**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

**Correcteur proportionnel intégral**

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 5** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Question 6** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

**Éléments de correction**

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.

# Application 2

## Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

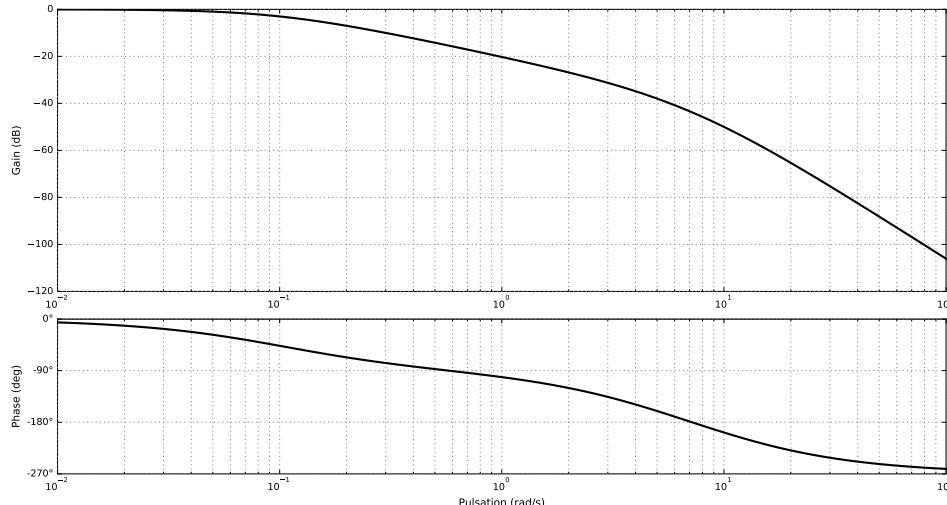
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

### Correcteur à avance de phase

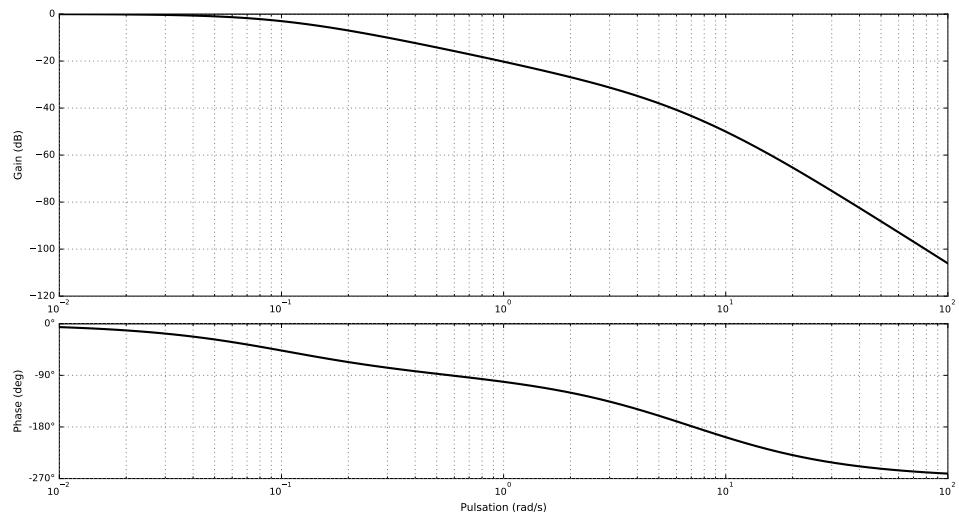
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de

#### Éléments de correction

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .

$$\text{phase de la forme } C(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}.$$

**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .



**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

#### Éléments de correction

$$\begin{aligned} 1. \\ 2. \quad C(p) &= \\ 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}. \\ 3. \end{aligned}$$

# Application 3

## Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

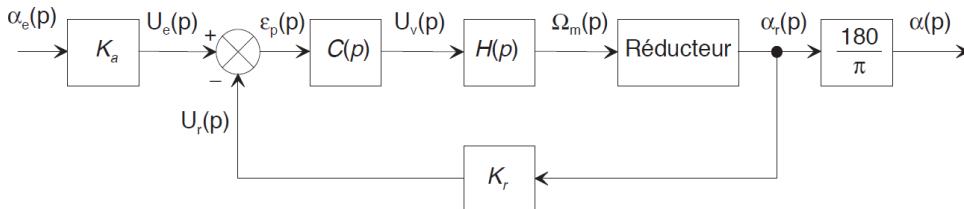
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $t'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

**Question 8** La valeur de  $K_{\text{BO}}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

#### Éléments de correction

1.  $R(p) = \frac{1}{Np}$ .
2.  $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$ .
3.  $T(p) = \frac{K_{\text{BO}}}{p(1 + \tau'_m p)}$  avec  

$$K_{\text{BO}} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$
.
4.  $K_{\text{BO}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$ .
5.  $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$ .
6.  $\varepsilon_S = 0$ .
7.  $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$ .
8.  $\varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{\text{BO}}}$ .

## TD 1

# Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

C1-02

C2-04

### Objectif

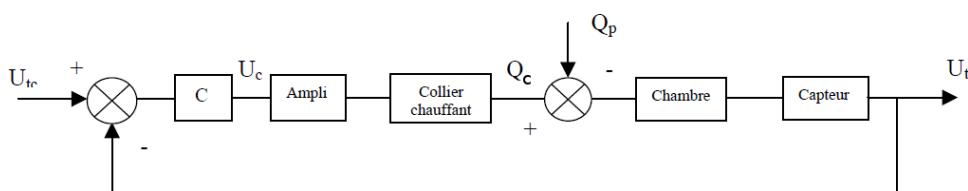
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

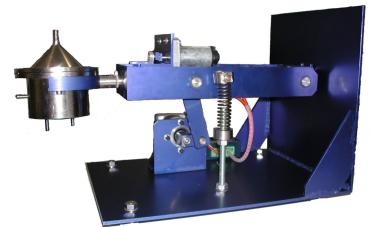
Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$



## Analyse des performances

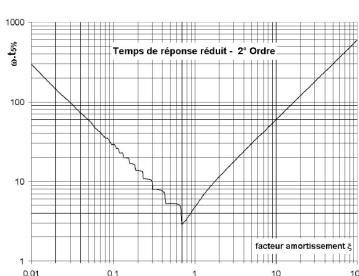
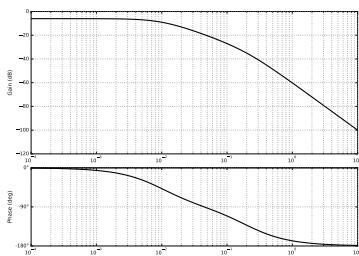
On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.



## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.

### Éléments de correction

1. 218 s.
2.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ( $M_G \rightarrow \infty$ ,  $M_\varphi$  non définie).
5.  $K = 9$ .
6. 50 s,
7.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
8.  $U_a = 450$  V.
9.  $K = 10$  et  $T_i = 100$  s.
10.  $\varepsilon_p = 0$ .

## TD 2

# Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

C1-02

C2-04

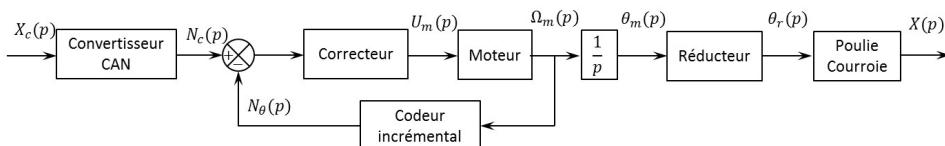
### Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

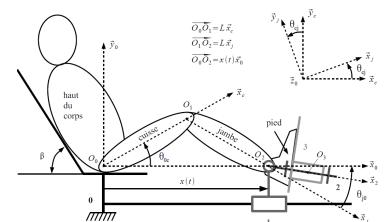
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	$50 \text{ rad s}^{-1}$

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



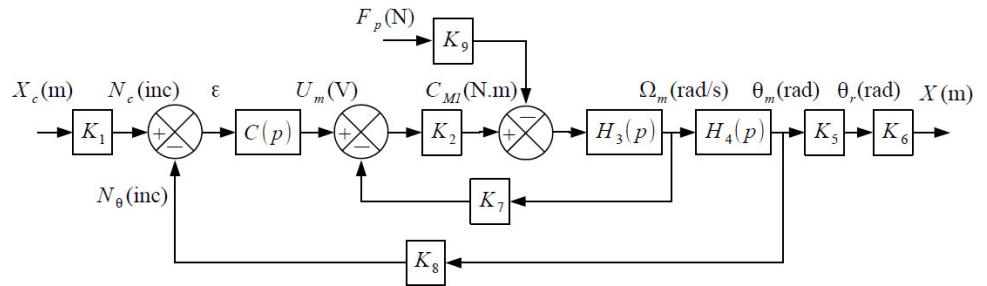
### Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t);$
- $e(t) = k_e \omega_m(t);$
- $C_{M1}(t) = k_t i(t).$



Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

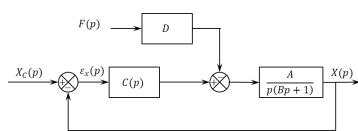
On note :

- ▶  $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied;
- ▶  $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur;
- ▶  $r = 46,1$  mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie,
- ▶  $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes  $A$ ,  $B$  et  $D$ , avec  $A = 6700 \text{ m/V}$ ,  $B = 0,01 \text{ s}$  et  $D = 6 \text{ V/N}$ .

## Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_i$ .

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

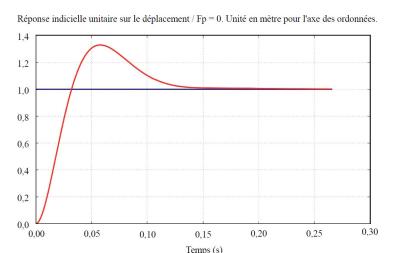
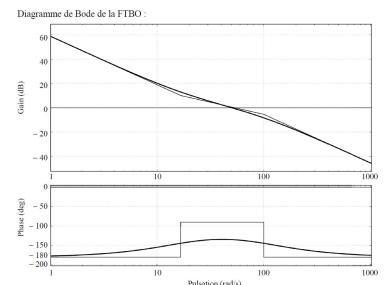
**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système  $\text{FTBO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.





# TD 3

## Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie – Sujet

Emilien Durif.

### Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.

### Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ .

On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{cor}(p) = K_p$ .

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partielle.

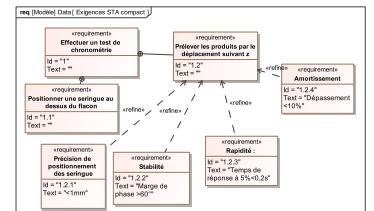
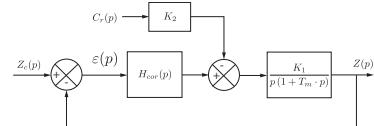
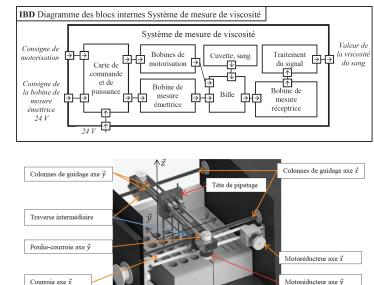
**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

C1-02

C2-04



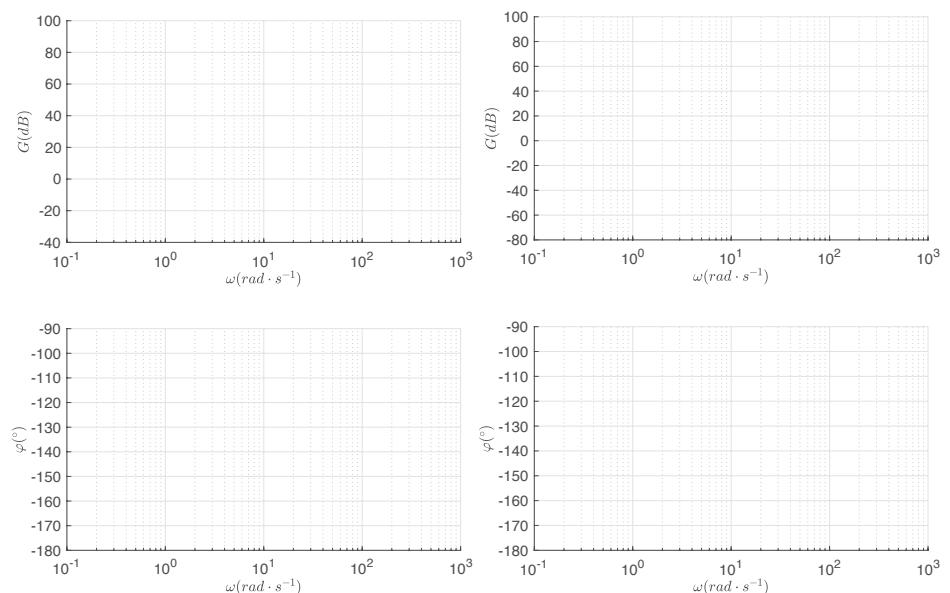
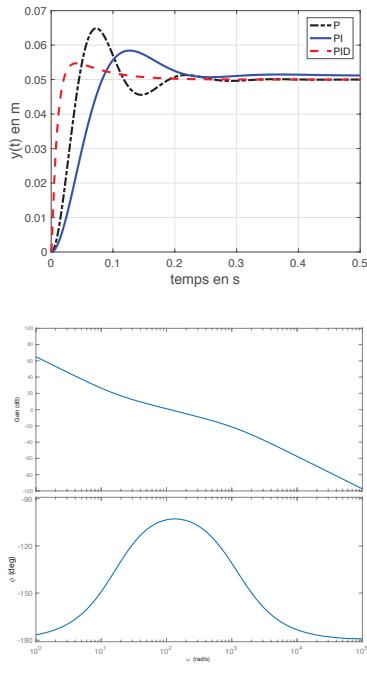
Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



# TD 4

## Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Sujet

CCP – PSI 2015.

### Présentation

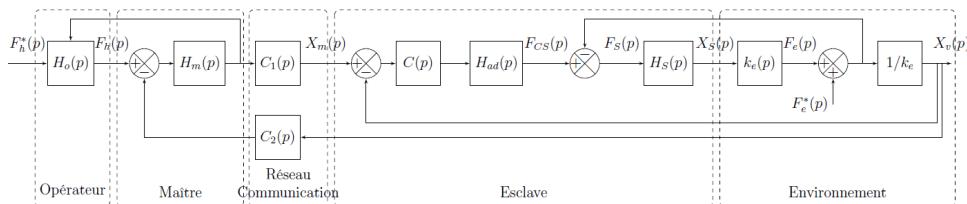
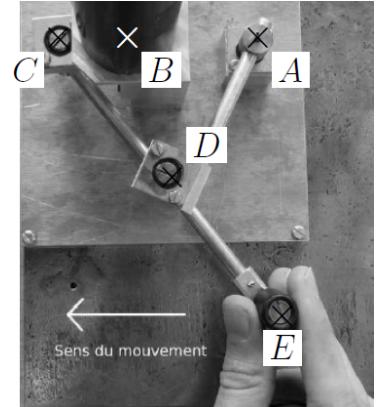
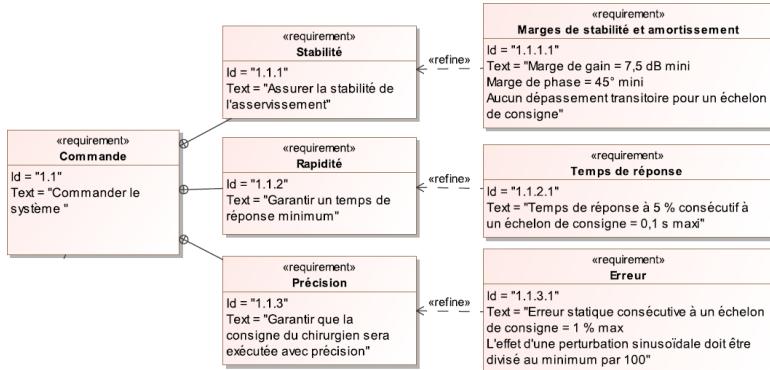
#### Réalisation de la commande de l'esclave

C1-02

C2-04

#### Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).

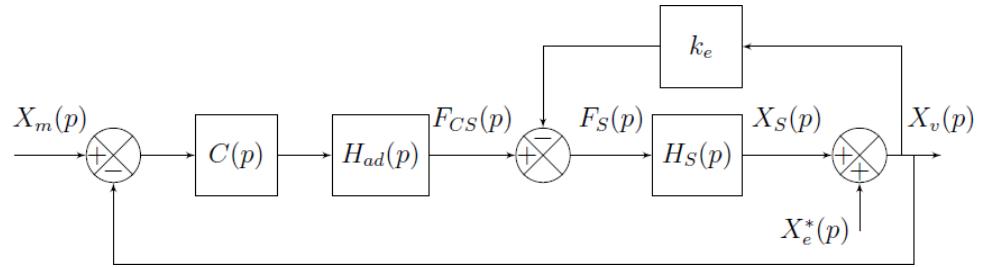


#### Modélisation et étude des performances du système sans correction

#### Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

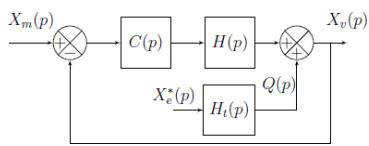
La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_S}{p(m_S p + b_S)}$  avec  $k_S = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_S = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_S = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_S(p)$ .

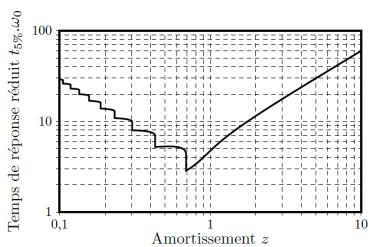
Pour la suite du problème, on prendra :  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .



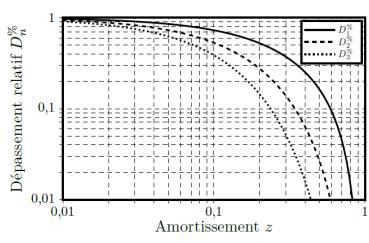
**Vérification des exigences sans correction :  $C(p) = 1$**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  $F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amortissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

**Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale :  $C(p) = \frac{K_i}{p}$**

### Objectif

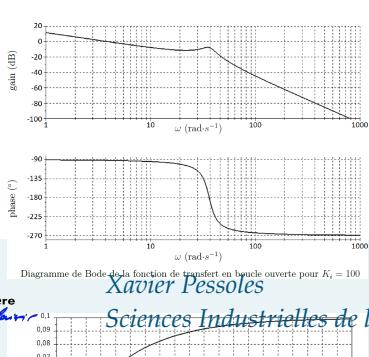
Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{imax}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

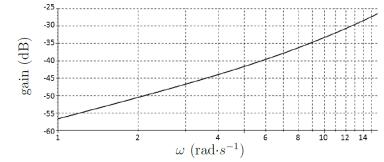
**Question 7** En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».



Xavier Pessoles

Sciences Industrielles de l'Ingénieur – MP

**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$  pour  $K_i = K_{i\max}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{BF2}(j\omega)|_{\min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».



## Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

### Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

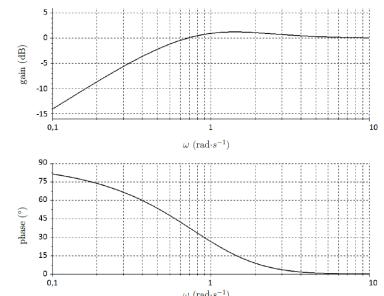
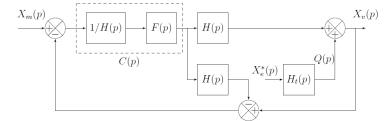
Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$  pour  $T = 1 \text{ s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



### Éléments de correction

$$1. H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)} \text{ et } H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}.$$

$$2. K = \frac{1}{1 + k_e}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}},$$

$$\xi = \frac{b_s}{2\sqrt{m_s(1+k_e)}}.$$

3. .

4. .

5. .

6.  $K_{i\max} = 133$ .

7.  $G_{dB,\max} = -30 \text{ dB}$ .

8.  $T \leq 0,02 \text{ s}$ .



# TD 5

## Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

### Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

C1-02

C2-04

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	<b>Ecart statique</b> en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	<b>Ecart de traînage</b> (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	<b>Marge de phase</b>	$M\varphi \geq 45^\circ$
	<b>Pulsation de coupure en boucle ouverte</b> (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$



Notation :

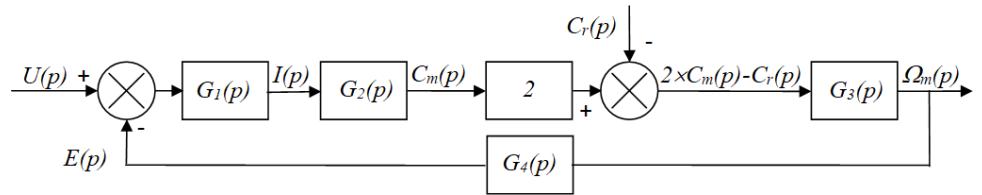
- ▶ on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$ ;
- ▶  $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs;
- ▶  $i(t)$  intensité traversant un moteur;
- ▶  $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur;
- ▶  $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur;
- ▶  $c_m(t)$  couple d'un seul moteur;
- ▶  $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

### Modélisation du moteur à courant continu

Hypothèses et données :

- ▶ on suppose les conditions initiales nulles;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique;
- ▶  $L = 0,59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur;
- ▶  $R = 0,0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur;
- ▶  $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶  $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶  $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur);
- ▶  $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$ ;
- ▶ loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

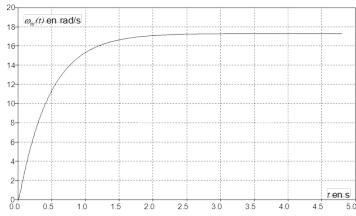
**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.



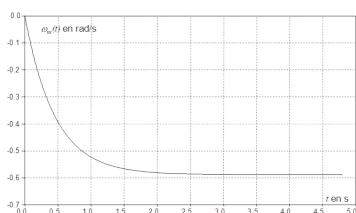
**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

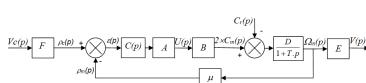
1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).



**FIGURE 10.1** – Réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V.

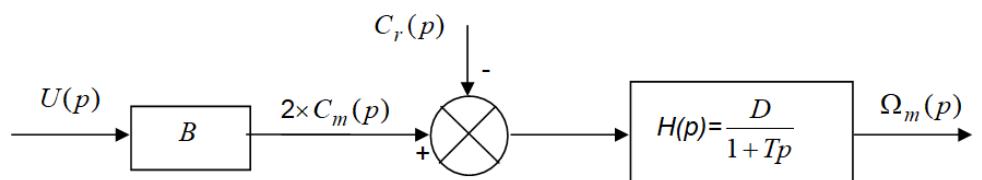


**FIGURE 10.2** – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m.



**Question 3** Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



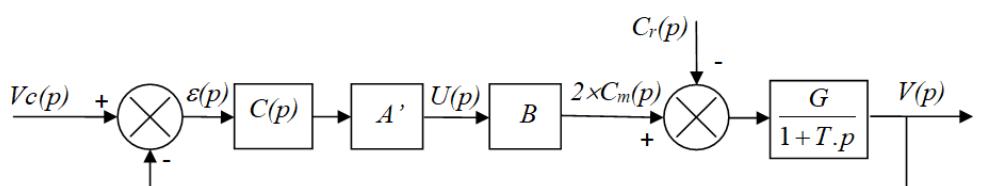
**Question 4** Donnez la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- ▶ La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain  $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E = 0,1 \text{ m}$  (réducteur et rayon de la poulie).

**Question 5** Déterminez l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4 \text{ sN}$ ;  $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

## Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 6** Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 7** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ . Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 8** Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 9** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$  qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 10** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 11** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

## Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur  $C(p) = \frac{C_i}{p}$ .

**Question 12** Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

**Question 13** Tracez le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracez également l'allure des courbes.

**Question 14** Quelles valeurs numériques de  $C_i$  permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 15** Ces valeurs numériques de  $C_i$  permettent-elles de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.

**Question 16** On suppose  $C_r(p)=0$ . Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ .

**Question 17** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculez numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modéliserait la descente des « Arcs ».

**Question 18** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifiez.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 19** Calculez l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 20** Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 21** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de  $-135^\circ$  ?

**Question 22** Tracez en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a>1$ . Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

**Question 23** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculez numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 24** Donnez l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 25** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

**Question 26** Calculez numériquement la valeur à donner à  $K$  pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

**Question 27** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.

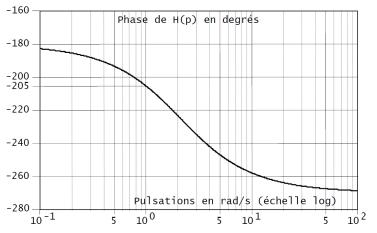
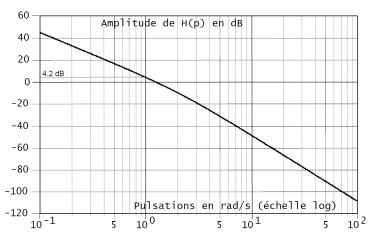
**Question 28** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ?

Justifiez.

### Éléments de correction

1.  $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$ ,  $G_2(p) = k_T$ ,  $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$ ,  $G_1(p) = k_E$ .
2.  $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$  et  $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ .
3.  $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$  et  $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$ .
4.  $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$ ,  $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}\text{Nm}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .
5.  $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0  $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$ .
8.  $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$  – à vérifier.
9.  $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$ .
10.  $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varepsilon''_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$ .
11.  $C_0$  infini
12.  $\text{FTBO}(p) = \frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14.  $\omega_{0\text{dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$  et  $C_i \leq 1,67$ .
- 15.
16. FTBO de classe 1  $\varepsilon'_S = 0$ .
17. Intégrateur en amont de la perturbation  $\varepsilon''_S = 0$ .
18. CDCF OK.
19.  $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
- 22.
23.  $a = 32,16$
24.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25.  $\tau = 0,176 \text{ s}$
26.  $K = 0,109$
- 27.
- 28.

Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{\mathcal{J} B G}{p^2(1 + T_p p)}$





# TD 6

## Vision en réalité augmentée pour hélicoptère ★ – Sujet

Concours Centrale Supelec 2014.

### Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

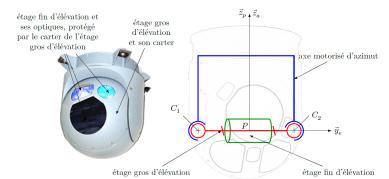
Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse  $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$  est établie par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$ . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  obtenues par la centrale inertuelle du porteur.

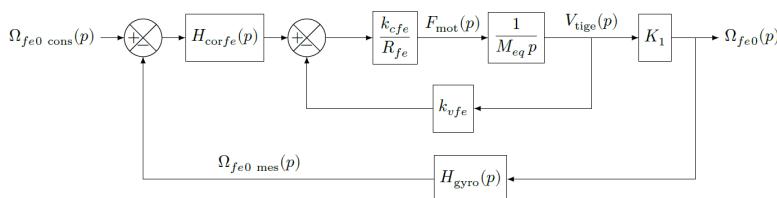
C1-02

C2-04



Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

$$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}, k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}, \\ \text{on note } K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}, R_{fe} = 7,5 \Omega.$$



Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que  $H_{corfe}(p) = 1$ .

**Question 1** Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0 \text{ cons}}(p)}$ , en fonction de  $K_1$ ,  $\tau_{\text{gyro}}$ ,  $M_{\text{eq}}$ ,  $K_{\text{fe}}$  et  $R_{\text{fe}}$ .

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que  $H_{fe1}(p)$  peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :  $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$ .

**Question 2** En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en en rapidité et en précision.

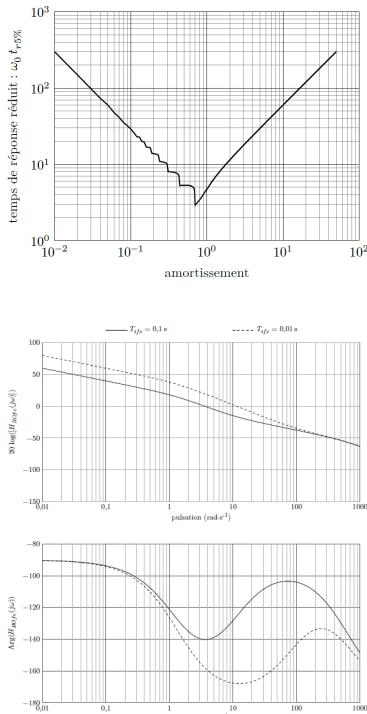
On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme  $H_{\text{cor fe}}(p) = K_{\text{pfe}} \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{ife}} p} \right)$ . La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors

$$H_{\text{BOfe}}(p) = K_{\text{pfe}} \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{ife}} p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}.$$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de  $H_{\text{BOfe}}(j\omega)$  pour  $K_{\text{pfe}} = 1$  et  $T_{\text{ife}} = 0,1$  s puis  $T_{\text{ife}} = 0,01$  s.

**Question 3** Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de  $H_{\text{BOfe}}(j\omega)$  (Bode) pour  $T_{\text{ife}} = 0,1$  s, en indiquant la pulsation  $\frac{1}{T_{\text{ife}}}$ .

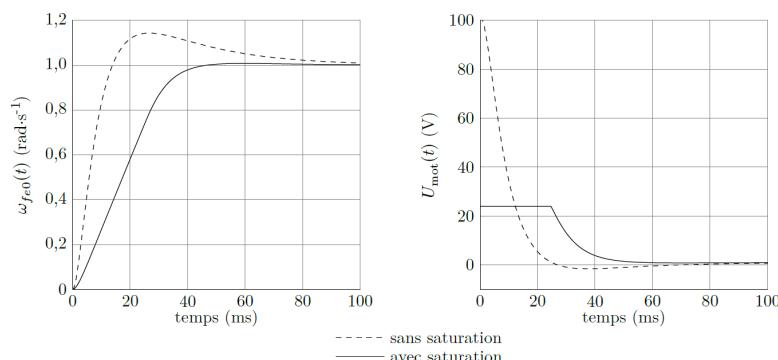
La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation  $\omega_{\text{max}}$  telle que  $\omega_{\text{max}} \in \left[ \frac{1}{T_{\text{ife}}}; 600 \right] \text{ rad s}^{-1}$ .



**Question 4** En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de  $\omega_{\text{max}}$ , calculer la valeur de  $T_{\text{ife}}$  comprise dans la décade [0,01 s; 0,1 s] qui permet de régler ce maximum à  $-120^\circ$ .

**Question 5** Pour le réglage de  $T_{\text{ife}}$  calculé à la question précédente avec  $K_{\text{pfe}} = 1$  et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de  $K_{\text{pfe}}$  qui permet de respecter le critère de marge de phase.

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour  $K_{\text{pfe}}$  et  $T_{\text{ife}}$ . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de  $K_{\text{pfe}}$  et  $T_{\text{ife}}$  déterminés précédemment. La réponse simulée  $\omega_{fe0}(p)$  de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon  $\omega_{fe0 \text{ cons}}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$  est donnée sur la figure suivante.



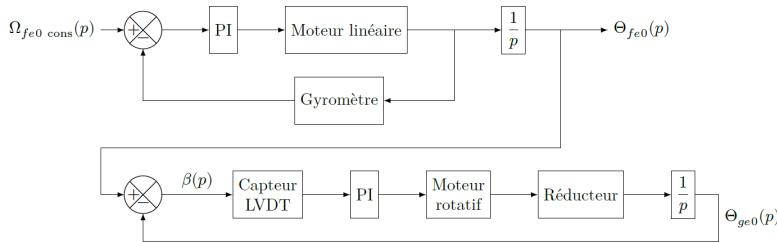
**Question 6** D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

## Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

### Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$ , c'est-à-dire que l'angle  $\beta(t)$  doit rester dans l'intervalle  $[-5^\circ, +5^\circ]$ . Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$ . Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.



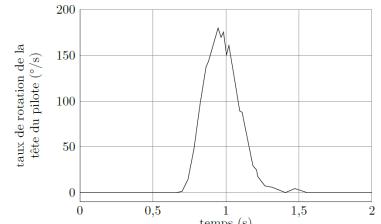
La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut alors être utilisé comme signal de consigne envoyé à l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

**Question 7** À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  exprimé en  $\text{rad s}^{-1}$ , sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de  $\theta_{fe0\ cons}(t)$ , exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

**Question 8** À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{geo0}(t)$  pour le signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.



**Question 9** À partir des figures suivantes :

- ▶ vérifier si l'hypothèse  $\vec{u} \simeq \vec{z}_e$  reste valide ;
- ▶ pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures, conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

**TABLE 10.1** – Zooms de  $\theta_{fe0}(t)$  (trait plein) et  $\theta_{fe0\ cons}(t)$  (pointillés) en fonction de temps

