

1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

1.1.1 Définitions

Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

B1-01	1
B1-02	2
B1-03	3
B1-04	4
B1-05	5
B1-06	6
B1-07	7
B1-08	8
B1-09	9
B1-10	10
B1-11	11
B1-12	12
B1-13	13
B1-14	14
B1-15	15
B1-16	16
B1-17	17
B1-18	18
B1-19	19
B1-20	20
B1-21	21
B1-22	22
B1-23	23
B1-24	24
B1-25	25
B1-26	26
B1-27	27
B1-28	28
B1-29	29
B1-30	30
B1-31	31
B1-32	32
B1-33	33
B1-34	34
B1-35	35
B1-36	36
B1-37	37
B1-38	38
B1-39	39
B1-40	40
B1-41	41
B1-42	42
B1-43	43
B1-44	44
B1-45	45
B1-46	46
B1-47	47
B1-48	48
B1-49	49
B1-50	50
B1-51	51
B1-52	52
B1-53	53
B1-54	54
B1-55	55
B1-56	56
B1-57	57
B1-58	58
B1-59	59
B1-60	60
B1-61	61
B1-62	62
B1-63	63
B1-64	64
B1-65	65
B1-66	66
B1-67	67
B1-68	68
B1-69	69
B1-70	70
B1-71	71
B1-72	72
B1-73	73
B1-74	74
B1-75	75
B1-76	76
B1-77	77
B1-78	78
B1-79	79
B1-80	80
B1-81	81
B1-82	82
B1-83	83
B1-84	84
B1-85	85
B1-86	86
B1-87	87
B1-88	88
B1-89	89
B1-90	90
B1-91	91
B1-92	92
B1-93	93
B1-94	94
B1-95	95
B1-96	96
B1-97	97
B1-98	98
B1-99	99
B1-100	100
B1-101	101
B1-102	102
B1-103	103
B1-104	104
B1-105	105
B1-106	106
B1-107	107
B1-108	108
B1-109	109
B1-110	110
B1-111	111
B1-112	112
B1-113	113
B1-114	114
B1-115	115
B1-116	116
B1-117	117
B1-118	118
B1-119	119
B1-120	120
B1-121	121
B1-122	122
B1-123	123
B1-124	124
B1-125	125
B1-126	126
B1-127	127
B1-128	128
B1-129	129
B1-130	130
B1-131	131
B1-132	132
B1-133	133
B1-134	134
B1-135	135
B1-136	136
B1-137	137
B1-138	138
B1-139	139
B1-140	140
B1-141	141
B1-142	142
B1-143	143
B1-144	144
B1-145	145
B1-146	146
B1-147	147
B1-148	148
B1-149	149
B1-150	150
B1-151	151
B1-152	152
B1-153	153
B1-154	154
B1-155	155
B1-156	156
B1-157	157
B1-158	158
B1-159	159
B1-160	160
B1-161	161
B1-162	162
B1-163	163
B1-164	164
B1-165	165
B1-166	166
B1-167	167
B1-168	168
B1-169	169
B1-170	170
B1-171	171
B1-172	172
B1-173	173
B1-174	174
B1-175	175
B1-176	176
B1-177	177
B1-178	178
B1-179	179
B1-180	180
B1-181	181
B1-182	182
B1-183	183
B1-184	184
B1-185	185
B1-186	186
B1-187	187
B1-188	188
B1-189	189
B1-190	190
B1-191	191
B1-192	192
B1-193	193
B1-194	194
B1-195	195
B1-196	196
B1-197	197
B1-198	198
B1-199	199
B1-200	200
B1-201	201
B1-202	202
B1-203	203
B1-204	204
B1-205	205
B1-206	206
B1-207	207
B1-208	208
B1-209	209
B1-210	210
B1-211	211
B1-212	212
B1-213	213
B1-214	214
B1-215	215
B1-216	216
B1-217	217
B1-218	218
B1-219	219
B1-220	220
B1-221	221
B1-222	222
B1-223	223
B1-224	224
B1-225	225
B1-226	226
B1-227	227
B1-228	228
B1-229	229
B1-230	230
B1-231	231
B1-232	232
B1-233	233
B1-234	234
B1-235	235
B1-236	236
B1-237	237
B1-238	238
B1-239	239
B1-240	240
B1-241	241
B1-242	242
B1-243	243
B1-244	244
B1-245	245
B1-246	246
B1-247	247
B1-248	248
B1-249	249
B1-250	250
B1-251	251
B1-252	252
B1-253	253
B1-254	254
B1-255	255
B1-256	256
B1-257	257
B1-258	258
B1-259	259
B1-260	260
B1-261	261
B1-262	262
B1-263	263
B1-264	264
B1-265	265
B1-266	266
B1-267	267
B1-268	268
B1-269	269
B1-270	270
B1-271	271
B1-272	272
B1-273	273
B1-274	274
B1-275	275
B1-276	276
B1-277	277
B1-278	278
B1-279	279
B1-280	280
B1-281	281
B1-282	282
B1-283	283
B1-284	284
B1-285	285
B1-286	286
B1-287	287
B1-288	288
B1-289	289
B1-290	290
B1-291	291
B1-292	292
B1-293	293
B1-294	294
B1-295	295
B1-296	296
B1-297	297
B1-298	298
B1-299	299
B1-300	300
B1-301	301
B1-302	302
B1-303	303
B1-304	304
B1-305	305
B1-306	306
B1-307	307
B1-308	308
B1-309	309
B1-310	310
B1-311	311
B1-312	312
B1-313	313
B1-314	314
B1-315	315
B1-316	316
B1-317	317
B1-318	318
B1-319	319
B1-320	320
B1-321	321
B1-322	322
B1-323	323
B1-324	324
B1-325	325
B1-326	326
B1-327	327
B1-328	328
B1-329	329
B1-330	330
B1-331	331
B1-332	332
B1-333	333
B1-334	334
B1-335	335
B1-336	336
B1-337	337
B1-338	338
B1-339	339
B1-340	340
B1-341	341
B1-342	342
B1-343	343
B1-344	344
B1-345	345
B1-346	346
B1-347	347
B1-348	348
B1-349	349
B1-350	350
B1-351	351
B1-352	352
B1-353	353
B1-354	354
B1-355	355
B1-356	356
B1-357	357
B1-358	358
B1-359	359
B1-360	360
B1-361	361
B1-362	362
B1-363	363
B1-364	364
B1-365	365
B1-366	366
B1-367	367
B1-368	368
B1-369	369
B1-370	370
B1-371	371
B1-372	372
B1-373	373
B1-374	374
B1-375	375
B1-376	376
B1-377	377
B1-378	378
B1-379	379
B1-380	380
B1-381	381
B1-382	382
B1-383	383
B1-384	384
B1-385	385
B1-386	386
B1-387	387
B1-388	388
B1-389	389
B1-390	390
B1-391	391
B1-392	392
B1-393	393
B1-394	394
B1-395	395
B1-396	396
B1-397	397
B1-398	398
B1-399	399
B1-400	400
B1-401	401
B1-402	402
B1-403	403
B1-404	404
B1-405	405
B1-406	406
B1-407	407
B1-408	408
B1-409	409
B1-410	410
B1-411	411
B1-412	412
B1-413	413
B1-414	414
B1-415	415
B1-416	416
B1-417	417
B1-418	418
B1-419	419
B1-420	420
B1-421	421
B1-422	422
B1-423	423
B1-424	424
B1-425	425
B1-426	426
B1-427	427
B1-428	428
B1-429	429
B1-430	430
B1-431	431
B1-432	432
B1-433	433
B1-434	434
B1-435	435
B1-436	436
B1-437	437
B1-438	438
B1-439	439
B1-440	440
B1-441	441
B1-442	442
B1-443	443
B1-444	444
B1-445	445
B1-446	446
B1-447	447
B1-448	448
B1-449	449
B1-450	450
B1-451	451
B1-452	452
B1-453	453
B1-454	454
B1-455	455
B1-456	456
B1-457	457
B1-458	458
B1-459	459
B1-460	460
B1-461	461
B1-462	462
B1-463	463
B1-464	464
B1-465	465
B1-466	466
B1-467	467
B1-468	468
B1-469	469
B1-470	470
B1-471	471
B1-472	472
B1-473	473
B1-474	474
B1-475	475
B1-476	476
B1-477	477
B1-478	478
B1-479	479
B1-480	480
B1-481	481
B1-482	482
B1-483	483
B1-484	484
B1-485	485
B1-486	486
B1-487	487
B1-488	488
B1-489	489
B1-490	490
B1-491	491
B1-492	492
B1-4	

de la qualité de la tâche accomplie.

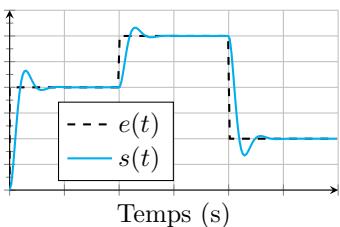


FIGURE 1.1 – Système suiveur.

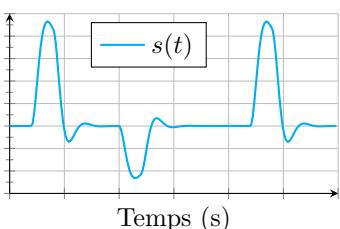


FIGURE 1.2 – Système régulateur.

Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

1.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

Définition – Précision en position – Écart statique ε_s

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique ε_s comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

Définition – Précision en vitesse ε_v

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

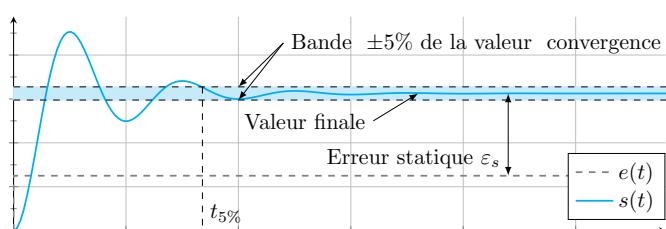


FIGURE 1.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

Temps (s)

Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

1.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

1.2.1 Définitions

Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$, $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$, $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$, $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p)$...

Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^nF(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

1.2.2 Théorèmes

Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

Théorème – Retard

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

Théorème – Amortissement

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

1.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

1.3.1 Définitions

Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

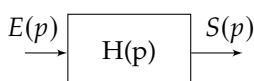
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition – Classe – ordre – pôles – zéros

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p . En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

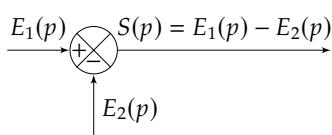
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- ▶ Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Le degré de $D(p)$ est appelé **ordre n du système** ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).
- ▶ L'équation $D(p) = 0$ est appelée équation caractéristique.
- ▶ S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. α est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

**Définition – Modélisation d'un bloc**

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition – Modélisation d'un comparateur**

Soit l'équation $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

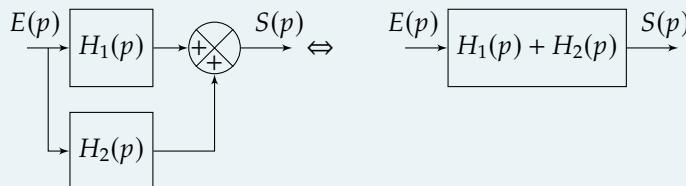
1.3.2 Algèbre de blocs

Résultat – Blocs en série

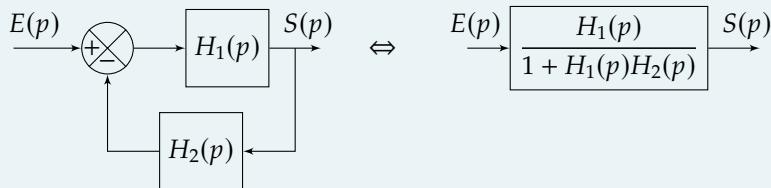


Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

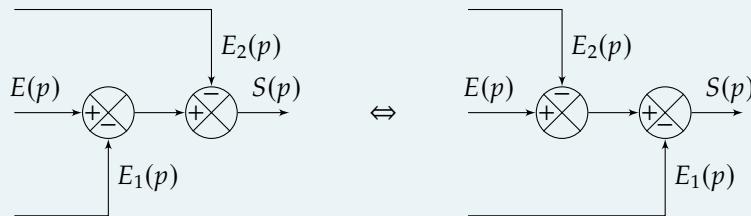
Résultat – Blocs en parallèle



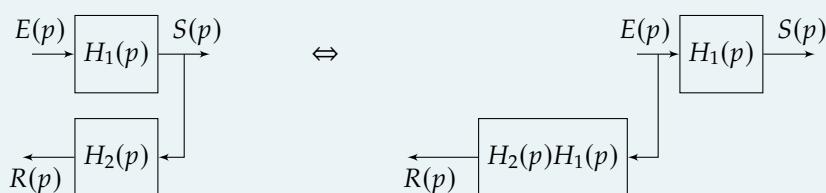
Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



Résultat – Comparateurs en série



Résultat – Point de prélèvement

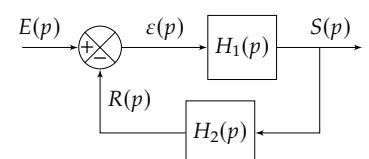


1.3.3 Fonctions usuelles

Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

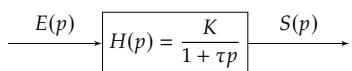
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S . On note $H_1 = \frac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \frac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1E_1 + H_2E_2$.

1.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

1.4.1 Systèmes d'ordre 1

**Définition – Système d'ordre 1**

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

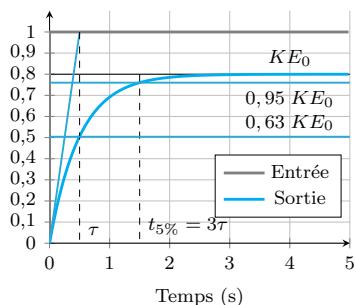
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶ τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$);
- ▶ K le gain statique du système ($K > 0$).

**Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre**

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0 . Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote KE_0 ;
- ▶ la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale $s_\infty = KE_0$;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;

- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63 s_\infty$.

Résultat – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

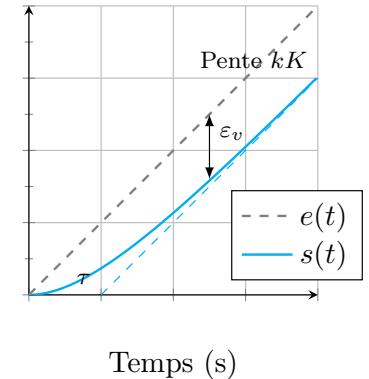
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

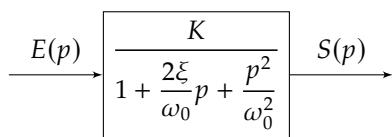
Analytiquement, on montre que $s(t) = Kk \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote Kk ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$.



1.4.2 Systèmes d'ordre 2



Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

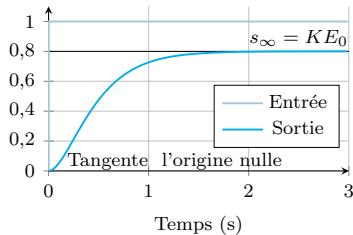
Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

On note :

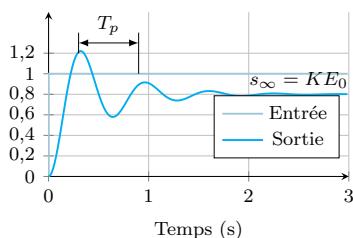
- ▶ K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E);
- ▶ ξ (lire χ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- ▶ ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.



Résultat – $\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti (apériodique)

- ▶ La fonction de transfert a deux pôles réels.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.



Résultat – $\xi < 1$: système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- ▶ La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.
- ▶ La pseudo-période est de la forme $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$.
- ▶ La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$.

Résultat –

- ▶ Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude KE_0 ($2KE_0$ crête à crête).
- ▶ Pour $\xi \approx 0,69$ on obtient le système du second ordre le plus rapide avec **dépassemement**. Le temps de réponse à 5% est donné par $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$.
- ▶ Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

1.5 Réponse fréquentielle des SLCI

1.5.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

Définition – Gain & Phase

Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :

- ▶ $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert;
- ▶ $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$.

- ▶ $T = \frac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s;
- ▶ $f = \frac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.
- ▶ A : l'amplitude de la sinusoïde;
- ▶ ω : la pulsation en rad/s;
- ▶ φ : la phase à l'origine en rad.

Résultat –

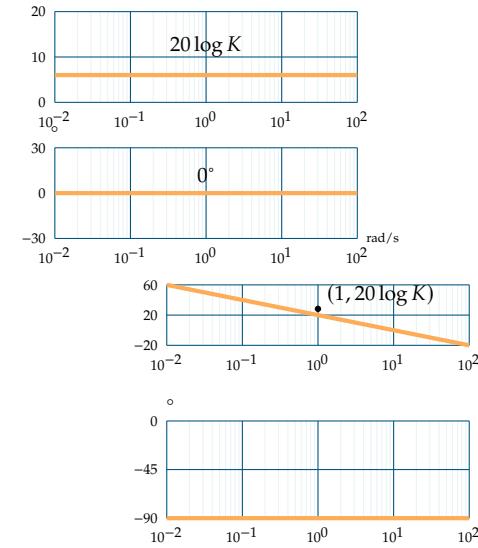
On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :

- ▶ $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$;
- ▶ $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$.

1.5.2 Gain

Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

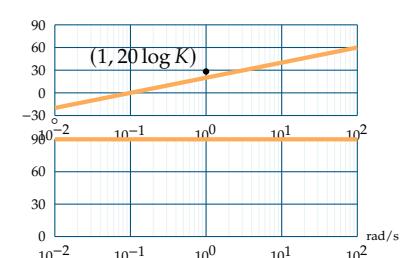
- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- ▶ Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$.
- ▶ Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée 0° .



1.5.3 Intégrateur

Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{p}$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente -20dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée -90° .

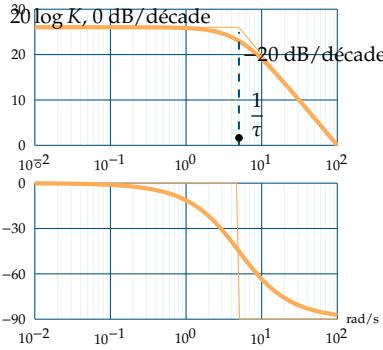


1.5.4 Dérivateur

Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $+90^\circ$.

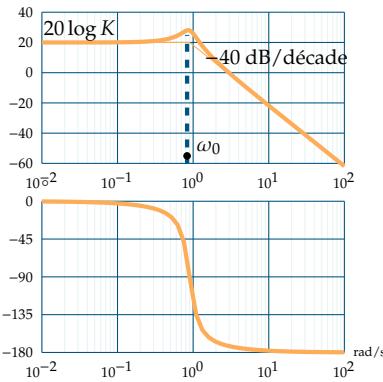
1.5.5 Systèmes d'ordre 1



Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite de pente -20dB/decade .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée -90° .

1.5.6 Systèmes d'ordre 2



Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

$$\text{▶ Fonction de transfert : } H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

Cas où $\xi < 1$.

- ▶ Diagramme de gain asymptotique :
 - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
 - pour $\omega > \omega_0$: droite de pente -40dB/decade .
- ▶ Diagramme de phase asymptotique :
 - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;
 - pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée -180° .

Dans le cas où $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premiers ordres.

Résultat – Phénomène de résonance

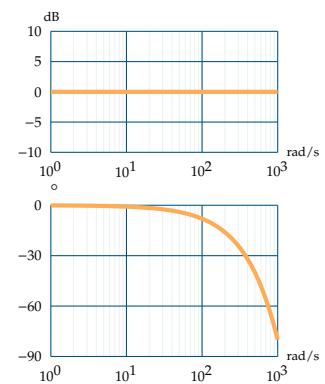
Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20 \log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

1.5.7 Retard

Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- ▶ Fonction de transfert : $H(p) = e^{-Tp}$.
- ▶ Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- ▶ Diagramme de phase asymptotique : $\arg(H(p)) = -\tau\omega$.



1.5.8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

Application 1

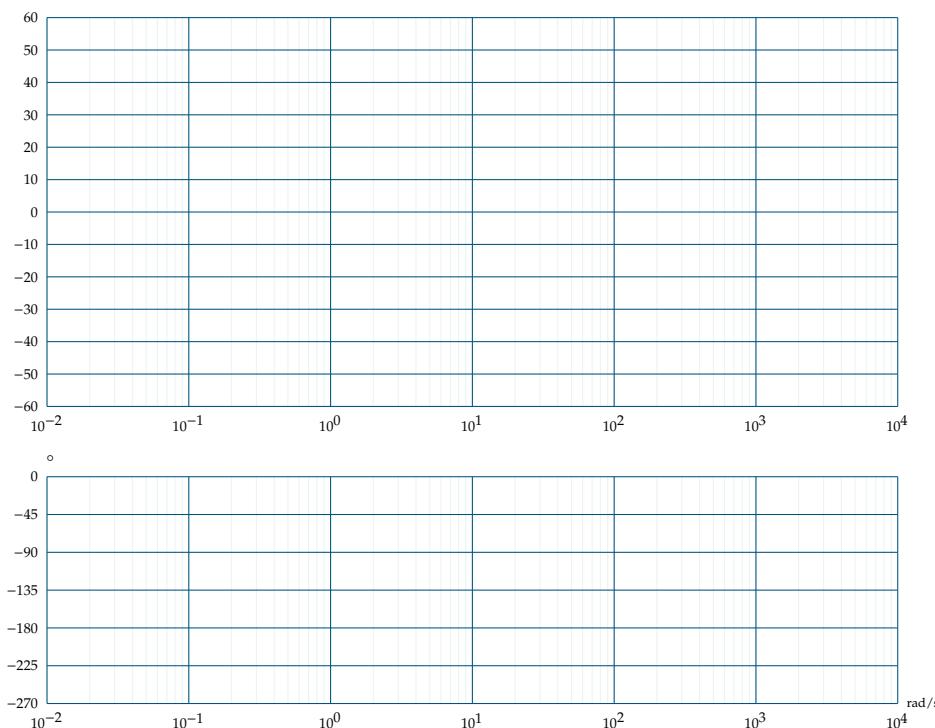
Réponses fréquentielles– Sujet

D'après Sébastien Grange.

Diagramme de Bode

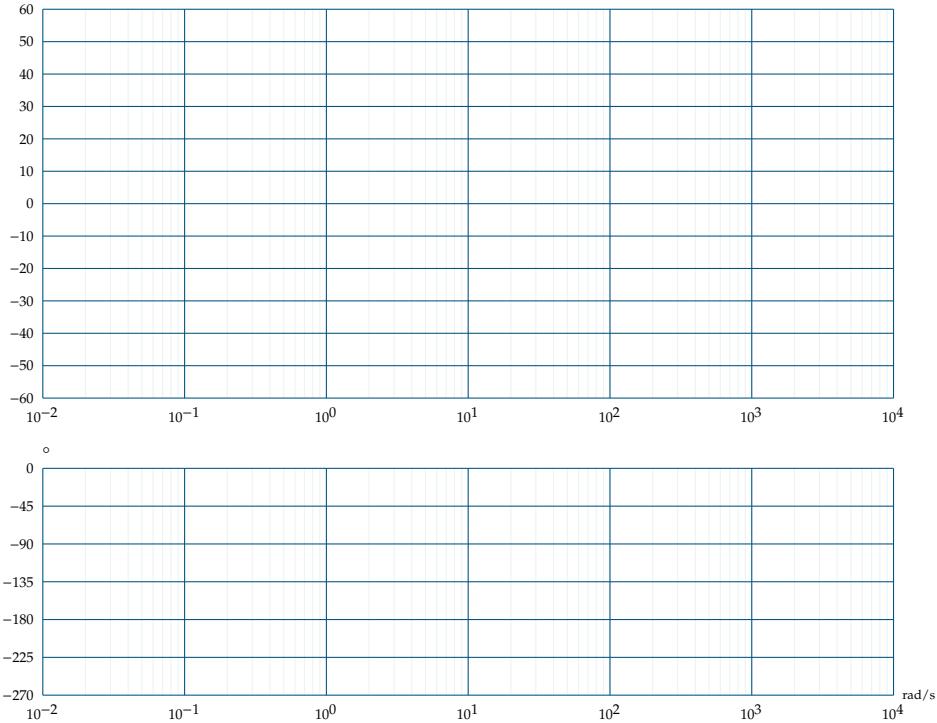
Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

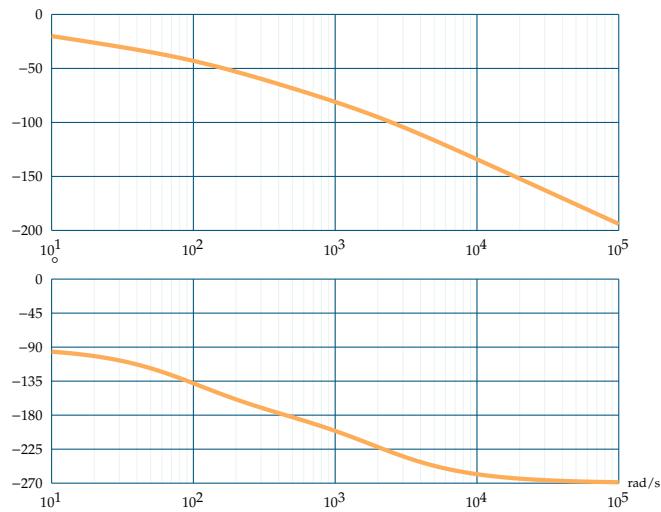


Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

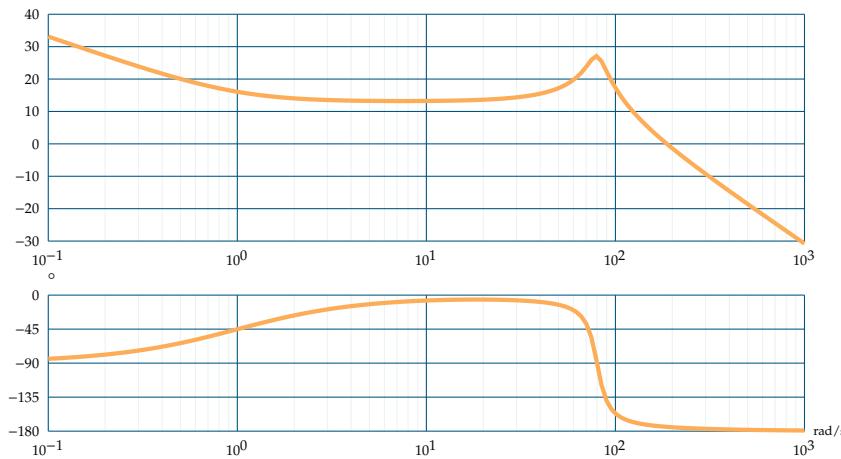


Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.



Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.



Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

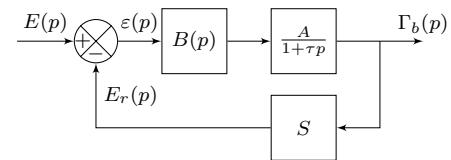
Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega_b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



- ▶ $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$;
- ▶ $\tau = 0,2 \text{ s}$ et $S = 10 \text{ g}^{-1} \cdot 10^{-3} / (\text{V}/(\text{m/s}^2))$ où g est l'accélération de pesanteur;
- ▶ $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement;
- ▶ $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.



Application 1

Réponses fréquentielles– Corrigé

D'après Sébastien Grange.

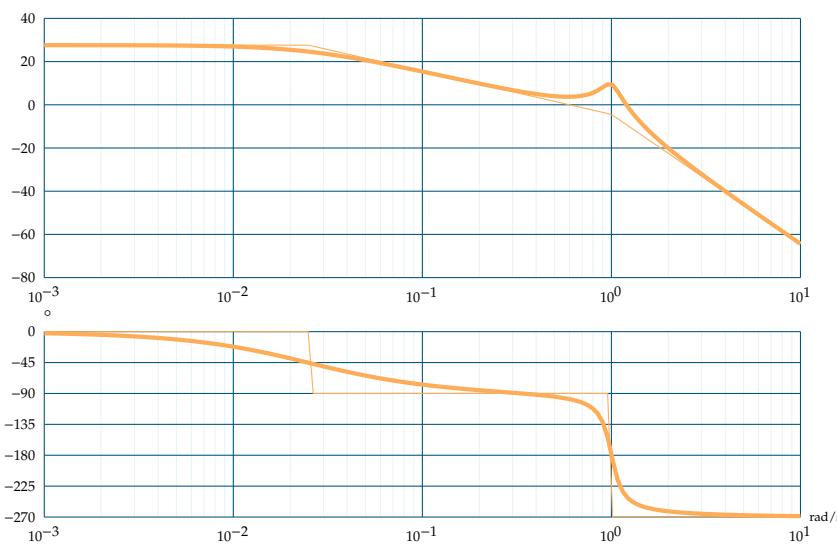
Diagramme de Bode

Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1 + 40p) \left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1}p + \frac{p^2}{1^2} \right)}$$



Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

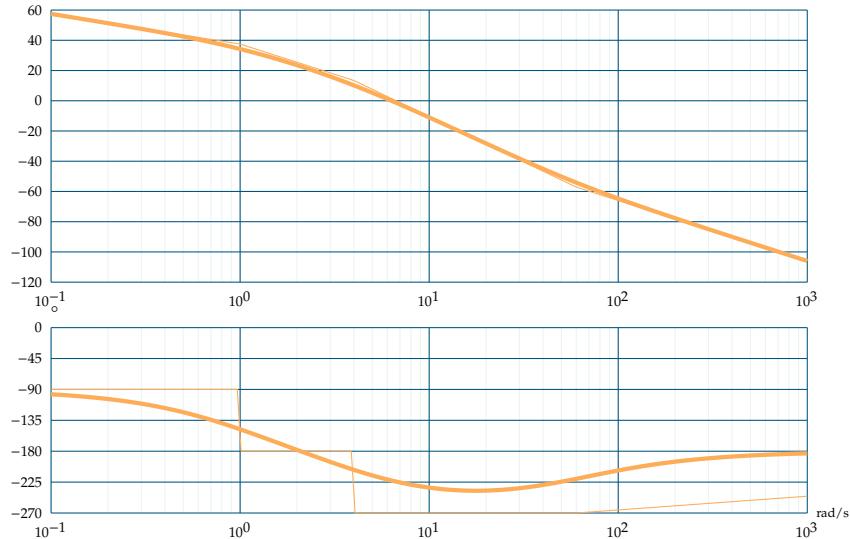
$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + (2 \cdot 1,25)/2p + p^2/2^2)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + p)(1 + 0,25p)}$$

	1 rad/s	$\frac{1}{0,25} = 4$ rad/s	$\frac{1}{0,0167} = 60$ rad/s
$1 + 0,0167p$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°
$\frac{1}{1 + p}$	0 dB/décade	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$\frac{1}{1 + 0,25p}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90°
$1/p$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$H(p)$	-20 dB/décade -90°	-40 dB/décade -180°	-60 dB/décade -270°

Poistionnement du diagramme asymptotique de gain : en $\omega = << 1 \text{ rad s}^{-1}$, $H(p) \approx \frac{75}{p}$. Ainsi pour $\omega \approx 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, $H_{dB}(0,1) = 20 \log(75/0,1) = 57 \text{ dB}$.



Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1^{er} ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $\frac{1}{\tau}$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a : $1/T_1 \approx 100$ et $1/T_2 \approx 2000$ donc $T_1 = 0,01 \text{ s}$ et $T_2 = 0,0005 \text{ s}$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1^{er} ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$: $20 \log(K/0,1) \approx -20$ et $K \approx 1$.

On a donc : $H(p) = \frac{1}{p(1 + 0.01p)(1 + 0.0005p)}$.

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc : $H(p) \simeq \frac{1}{p(1 + 0.01p)}$.

Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Correction

On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente : $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$.

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que : $G_{dB}(\omega = 300\text{rad/s}) \simeq -60 \text{ dB}$ et donc $S_0 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$. D'après la courbe de phase, on peut lire : $\varphi(\omega = 300\text{rad/s}) = -175 \text{ degrés}$. On a donc : $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$. L'angle est à mettre en radians.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que $1/\sqrt{2}$.

$$H(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + 2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $1/\tau$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a : $1/T \simeq 1$ et $T = 1 \text{ s}$.

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut ω_0 . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a : $\omega_0 \simeq 80 \text{ rad/s}$.

Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a : $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$ et $\xi \simeq 0,11$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$: $20 \log(K/0,1) \simeq 33$ et $K \simeq 4,5$

Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

 $E(p)$

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

- $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$;
- $\tau = 0,2\text{s}$ et $S = 10\text{g}^{-1} \cdot 10^{-3}/V/(m/s^2)$ où g est l'accélération de pesanteur;
- $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement;
- $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne?

Correction

En calculant la FTBF on a $FTBF(p) = \frac{\frac{A}{1+\tau p}}{1 + \frac{AS}{1+\tau p}} = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)}$.

Par suite $\Gamma_b(p) = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} \frac{E_0}{p}$.

On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Gamma_b(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{AE_0}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} = \frac{AE_0}{1 + AS}$.

Pour $E_0 = 0,2\text{ V}$, $\Gamma_f = \frac{100g \times 0,2}{1 + 100g \times 10 \times 10^{-3}\text{g}^{-1}} = 10\text{g}$.

On veut $\frac{AE_0}{1 + AS} = 20\text{g}$ soit $E_0 = 20g \frac{1 + AS}{A} E_0 = 20g \frac{1 + 100 \times 10 \times 10^{-3}}{100g} = 0,4$. Il faudrait donc $E_0 = 0,4\text{ V}$.

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega_b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Correction

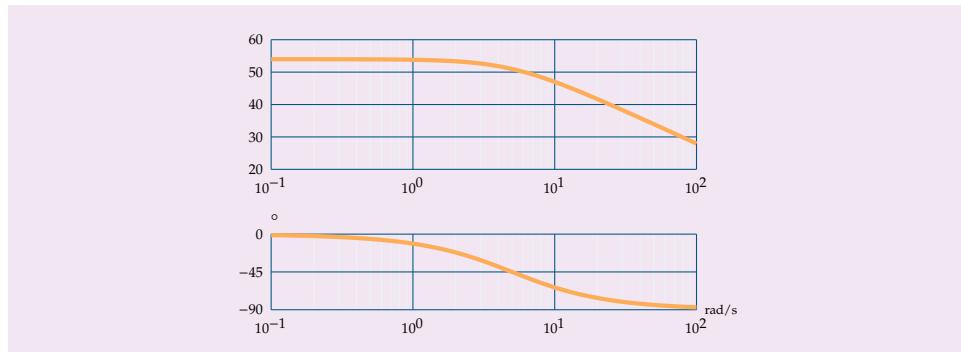
$FTBF(p) = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} = \frac{\frac{A}{1 + \tau p}}{1 + AS}$ en faisant l'application numérique, $FTBF(p) = \frac{50g}{1 + 0,2p}$.

$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(50g) - 20 \log \sqrt{1 + 0,2^2 \omega^2}$ et $G_{\text{dB}}(10) = 20 \log(50g) - 20 \log \sqrt{5} = 20 \log(10g\sqrt{5}) \simeq 47 \simeq 20 \log 223$.

$\varphi(\omega) = -\arctan 0,2\omega$ et $\varphi(10) = -\arctan 2 \simeq -63^\circ$.

Au final $\omega_b(t) = 0,2 \times 223 \sin(\omega t - 63)$.

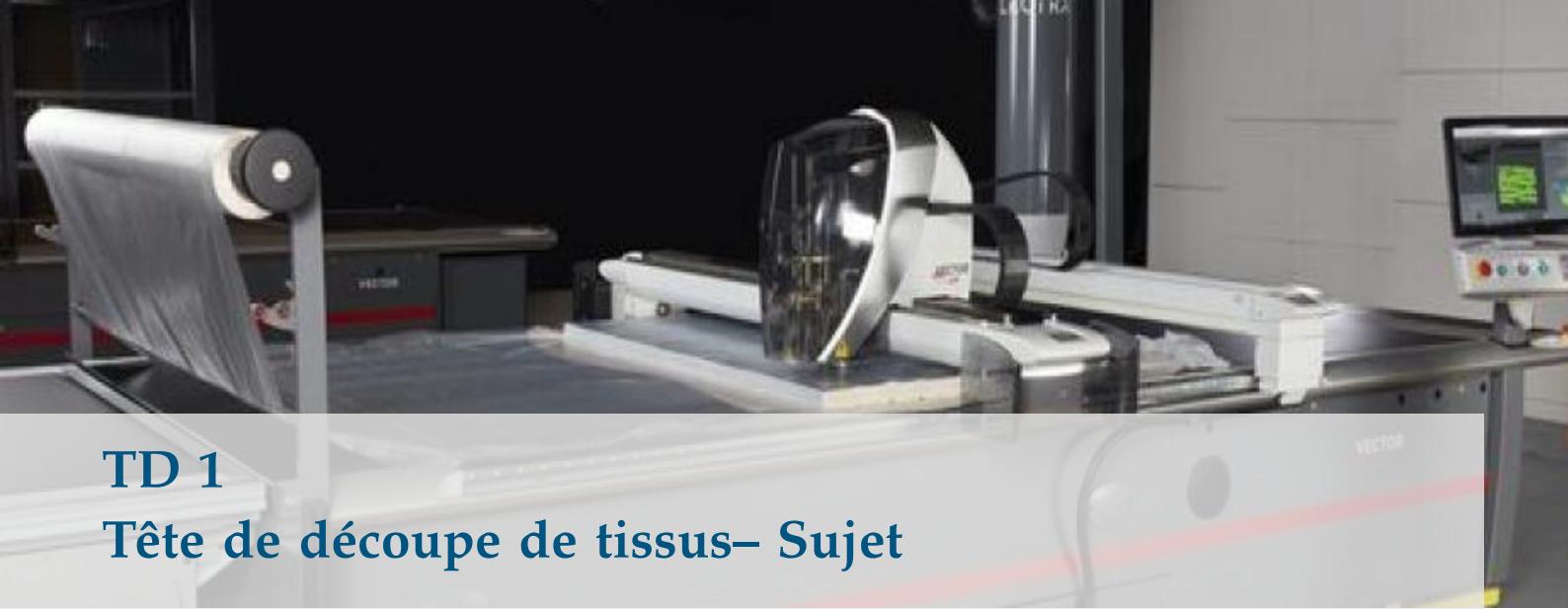
Pour information, on donne le diagramme de Bode de la FTBF.



Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



TD 1

Tête de découpe de tissus– Sujet

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 1.5) :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration ;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction \vec{y}_0 par rapport à la table ;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction \vec{x}_0 par rapport au bras transversal ;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

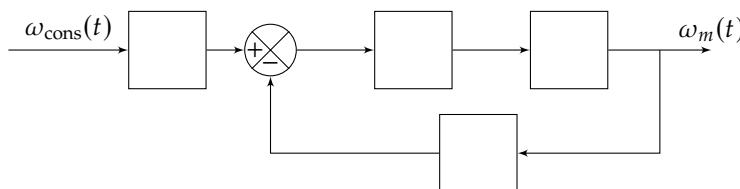
Modélisation du comportement du moteur de coupe

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.8).

Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée $\omega_m(t)$, est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension $u_{\text{mes}}(t)$, image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne $u_{\text{cons}}(t)$, image de la vitesse de rotation de consigne $\omega_{\text{cons}}(t)$; un adaptateur fournit $u_{\text{cons}}(t)$ à partir de $\omega_{\text{cons}}(t)$. La tension écart $\varepsilon(t) = u_{\text{cons}}(t) - u_{\text{mes}}(t)$ est alors transformée en tension d'alimentation du moteur $u_m(t)$ par l'ensemble correcteur-variateur.

Question 1 Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

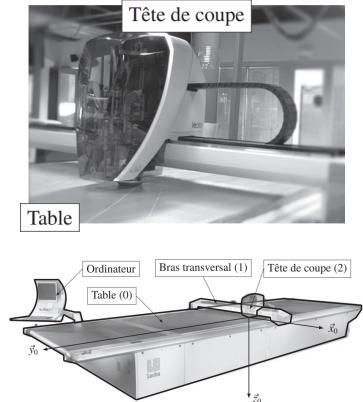


FIGURE 1.5 – Structure d'une table de découpe de tissus

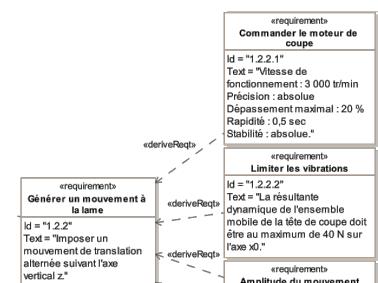


FIGURE 1.6 – Exigence 1.2.2.1

Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont :

- ▶ R , résistance de l'induit;
- ▶ L , inductance de l'induit;
- ▶ k_e , constante de vitesse;
- ▶ k_c , constante de couple;
- ▶ $u_m(t)$ est la tension d'alimentation du moteur;
- ▶ $i(t)$ est l'intensité traversant l'induit;
- ▶ $e(t)$ est la force contre-électromotrice;
- ▶ $\omega_m(t)$ est la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶ $c_m(t)$ est le couple moteur;
- ▶ $c_r(t)$ est le couple résistant;
- ▶ J est le moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ramené à l'arbre moteur, supposé constant dans cette partie.

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu : $u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t)$, $c_m(t) = k_c i(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$. La fonction de transfert du moteur est notée $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R , L , k_e , k_c et J .

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

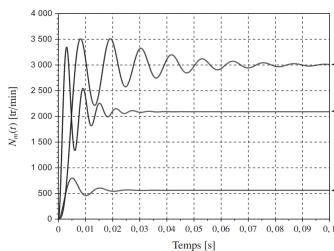


FIGURE 1.7 – Évolutions simulées de la vitesse $\omega_m(t)$.

recteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur

$$\text{ction de transfert } H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}.$$

isultats de simulation de la réponse du moteur $N_m(t)$, en boucle fermée, pour entrée échelon d'amplitude $N_0 = 3000 \text{ tr min}^{-1}$ pour différentes valeurs de K_p et sont donnés sur la figure 1.9.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.9, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

Question 6 Pour chaque courbe de la figure 1.9, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

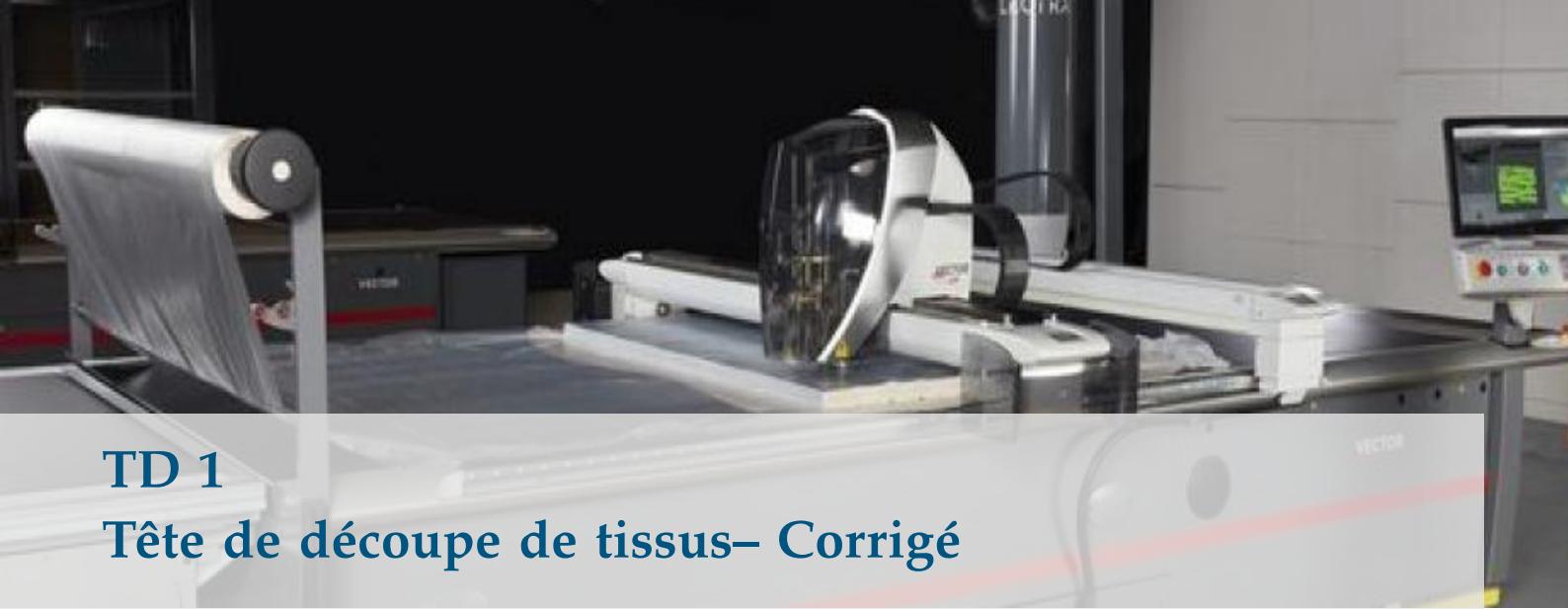
Éléments de correction

1. .
2. $K_a = K_c$.
3. .
4. $K = \frac{1}{k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$ et $\xi = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$.
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de K_p .
6. $K_i \neq 0$ pour la courbe 3 uniquement.
7. .

tion 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de

ence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.





TD 1

Tête de découpe de tissus- Corrigé

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

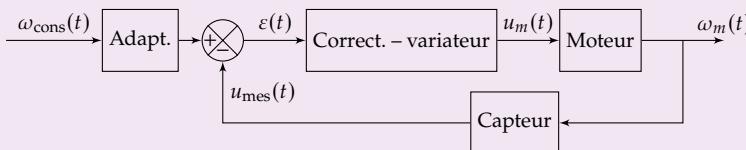
Modélisation du comportement du moteur de coupe

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.8).

Question 1 Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

Correction



Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

Correction

On a $\varepsilon(t) = K_a \omega_{\text{cons}}(t) - K_c \omega_m(t)$.

Pour que $\varepsilon(t)$ soit nul lorsque $\omega_{\text{cons}}(t) = \omega_m(t)$, il faut que $K_a = K_c$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) + Cr(p)$, $C_m(p) = k_c I(p)$, $E(p) = k_e \Omega_m(p)$.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique

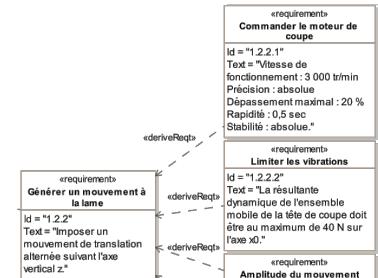
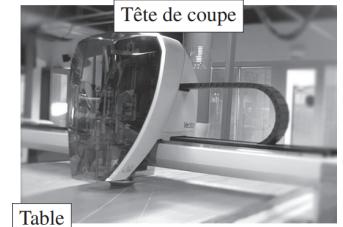


FIGURE 1.8 – Exigence 1.2.2.1

de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R, L, k_e, k_c et J .

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) = \frac{C_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p) = Jp\frac{\Omega_m(p)}{k_c}(R + Lp) + k_e\Omega_m(p)$.

On a donc $U_m(p) = \Omega_m(p)\left(\frac{Jp}{k_c}(R + Lp) + k_e\right)$ et $H_m(p) = \frac{1}{\frac{JL}{k_c}p^2 + \frac{JR}{k_c}p + k_e}$
 $\frac{1}{\frac{JL}{k_c k_e}p^2 + \frac{JR}{k_c k_e}p + 1}$.

Par identification, on a donc $K = \frac{1}{k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{JR}{k_c k_e}$ soit $\xi = \frac{JR}{2k_c k_e} \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}} = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$.

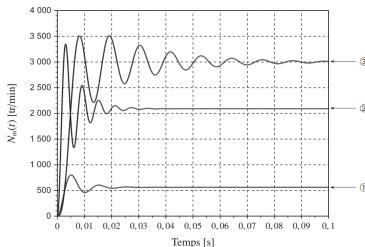


FIGURE 1.9 – Évolutions simulées de $\omega_m(t)$.

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.9, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

Correction

Méthode 1 – Coefficient d'amortissement

On note $H_{BF}(p) = \frac{\omega_m(t)}{\omega_{cons}(t)}$.

$$\text{On a alors, } H_{BF}(p) = K_c \frac{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + K_p \frac{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} K_c} = \frac{K_c K_p K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_p K_c}.$$

On a donc $\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{2\xi}{\omega_0(1 + K_p K_c)}$ et $\omega_{BF}^2 = \omega_0^2(1 + K_p K_c)$.

$$\text{Soit } \xi_{BF} = \frac{\xi \omega_{BF}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi \omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}{\omega_0(1 + K_p K_c)} = \frac{\xi}{\omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}.$$

En conclusion, plus K_p augmente, plus le coefficient d'amortissement diminue et donc plus les pseudo oscillations deviennent grandes. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p .

Méthode 2 – Calcul de l'écart statique

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$.

$$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_a}{1 + K_p K_c K}.$$

Lorsque K_p augmente, ε_S diminue. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p .

Question 6 Pour chaque courbe de la figure 1.9, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

Correction

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{p}\right) K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$. Ainsi, si K_i non nul, $\varepsilon_S = 0$ (courbe 3 uniquement).

Question 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

Correction

	Stabilité	1 ^{er} Dépassemement	Erreur statique	$T_{5\%}$
Exigences	Absolue	< 20 %	Nulle	0,5 s
Courbe 1	Stable OK	$D_1 = 45\%$ Pas OK	2450 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,015\text{ s}$ OK
Courbe 2	Stable OK	$D_1 = 59\%$ Pas OK	900 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,018\text{ s}$ OK
Courbe 3	Stable OK	$D_1 = 15\%$ OK	0 tr/min OK	$T_{5\%} = 0,048\text{ s}$ OK



TD 2

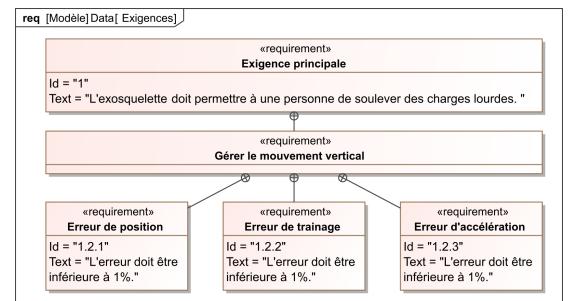
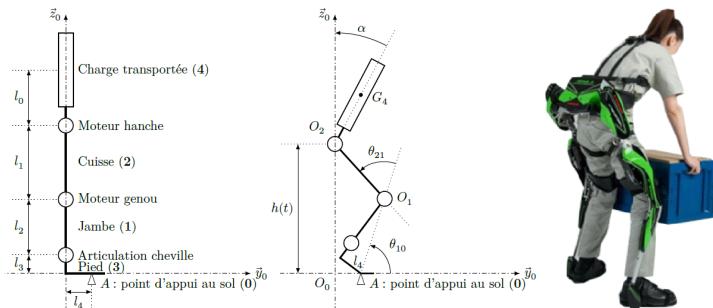
Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.

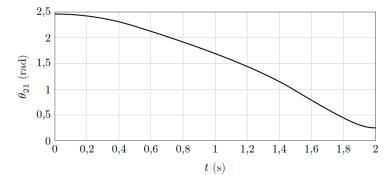


Gestion du mouvement vertical

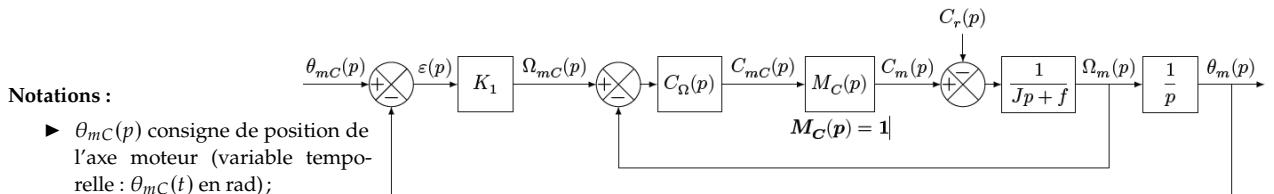
Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

par rapport aux autres boucles :

$M_C(p) = 1$;

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

► J moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;

► f coefficient de frottement équivalent pour le système en mouvement.

Méthode –

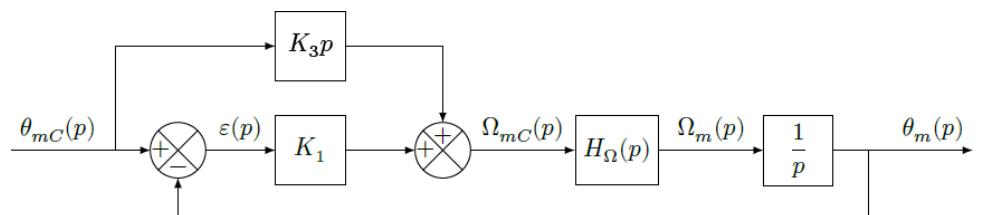
On peut définir l'erreur de position ε_p par $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$ avec

$$\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p} \text{ (entrée échelon).}$$

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$ et $T = 33$ ms.



Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

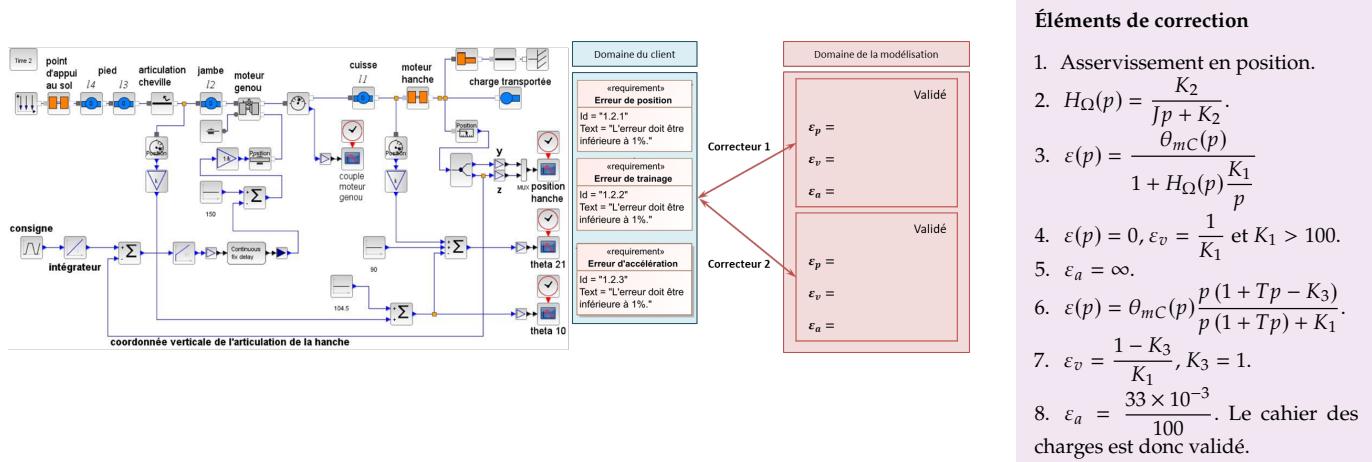
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





TD 2

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

Mise en situation

Gestion du mouvement vertical

Objectif

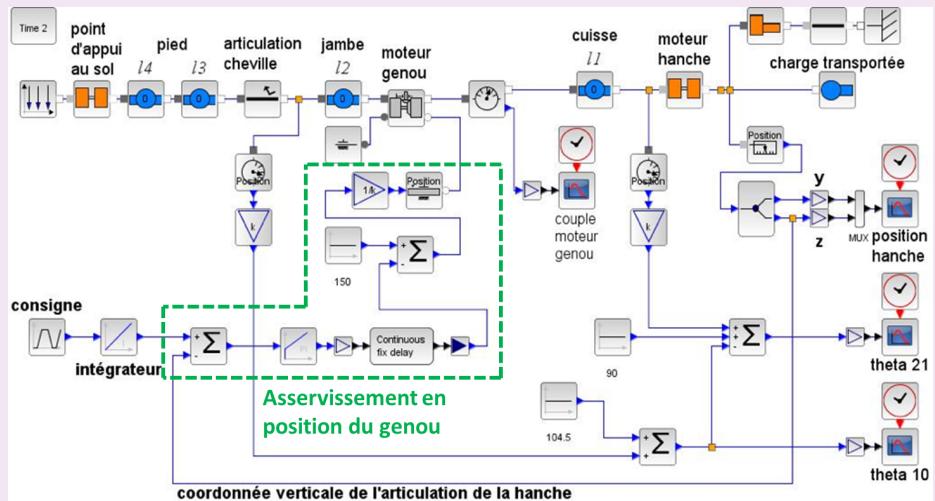
Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.



Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Correction

En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}$. En conséquences : $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp+K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$.

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Correction

D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}}$.

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Correction

On a :

$$\blacktriangleright \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} = 0$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1);

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et} \\ &\text{de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\frac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{p}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).}$$

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Correction

En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}$.

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)}$$

$$= \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)}\right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}.$$

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Correction

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3 = 1$.

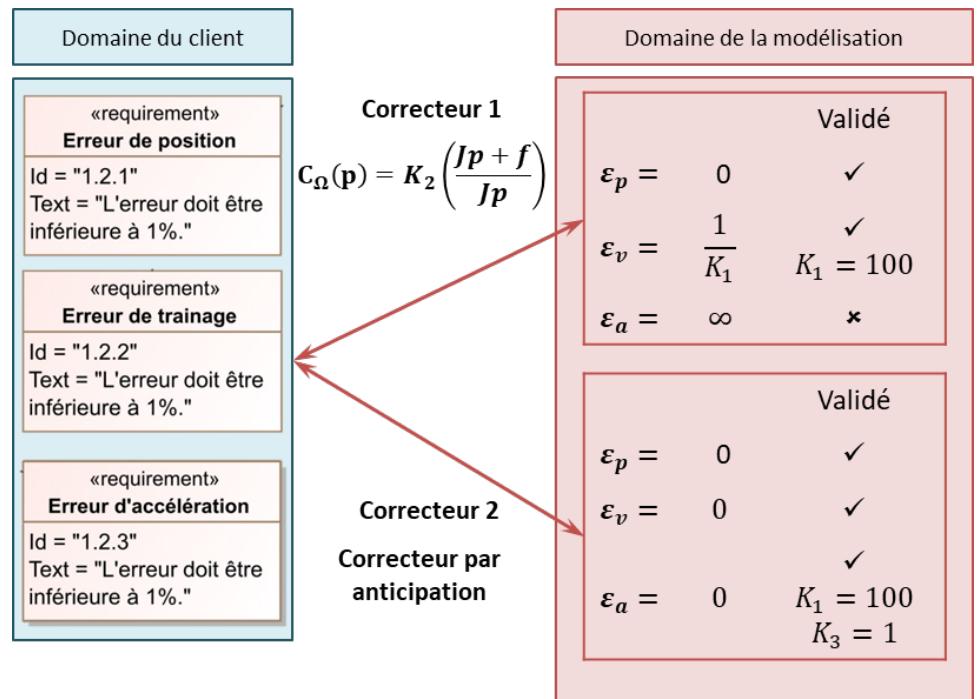
Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\text{On a : } \varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p}. \text{ En prenant } K_3 = 1 \text{ et } K_1 = 100, \text{ on obtient : } \varepsilon_a = \frac{T}{p(1 + Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}. \text{ L'erreur est donc de } 33 \times 10^{-5}. \text{ Le cahier des charges est donc validé.}$$

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





TD 3

Bateau support de ROV– Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.

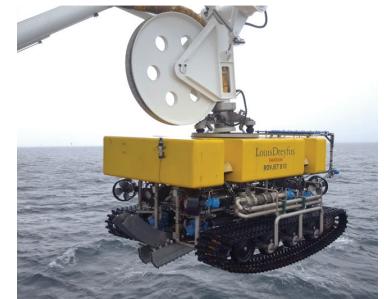
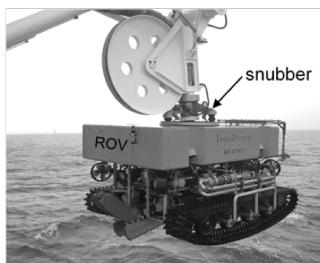


FIGURE 1.10 – ROV suspendu à la grue portique

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

TABLE 1.1 – Extrait du cahier des charges

Exigence	Critère	Niveau
Id 1.1 : Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre 0,5 rad s ⁻¹ à 1,7 rad s ⁻¹	Amplitude verticale du ROVmaximale	< 1 m pour 5 m d'amplitude de houle
Id 1.2 : Mise en tension du câble	Temps de réponse, $t_{r5\%}$	< 3 s

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$ suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble S est $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$, avec $Y_S(p)$ la transformée

de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et $Y_{\text{vague}}(p)$ la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de $B(p)$ dans la figure 1.11.

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

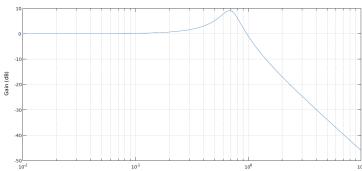


FIGURE 1.11 – ROV suspendu à la grue portique

Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (Figure 1.12).

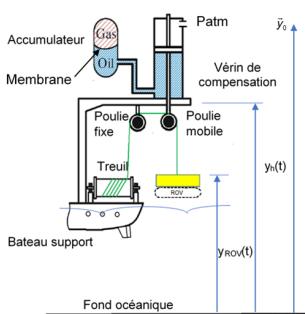


FIGURE 1.12 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression $\Delta p_E(t)$ et $\Delta p_G(t)$ autour du point d'équilibre peuvent être définies par $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$ et $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$. Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left(\frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{\text{ROV}}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{r P_{G0} C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée à Σ se traduit par $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{\text{ROV}}(t) + c(\dot{y}_{\text{ROV}}(t) - \dot{y}_h(t))$ (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$ (4). Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

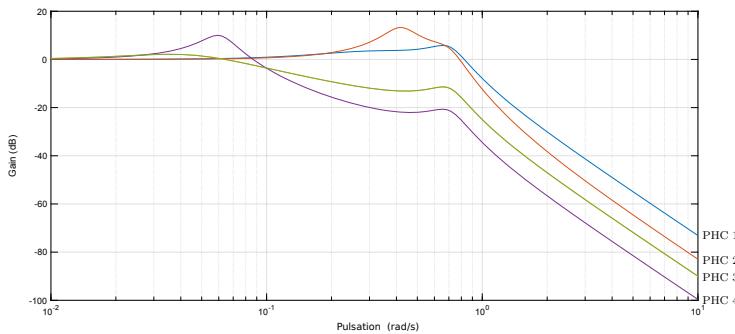
$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Exprimer ω_0 , ζ et τ en fonction des constantes définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation $\tau\omega_0 = 2\zeta$.

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle ω_c et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.



La Figure 1.13 donne les diagrammes du gain de la fonction $G(p)$ de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz V_{G0} correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

FIGURE 1.13 – Courbes de gain $G(p)$ pour différents réglages du PHC

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
V_{G0} (m^3)	96	1	52	2

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à -14 dB .

Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Éléments de correction

1. $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{\text{vague}}(j\omega)} \right|$ et $G_{\text{dB}}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s}$.
2. ...
3. $K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}}$ et $\tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}$.
4. $\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}, \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}, \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}$.
5. .
6. .
7. PHC4.





TD 3

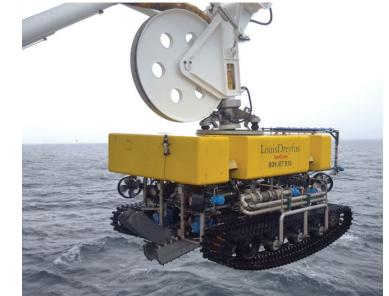
Bateau support de ROV- Corrigé

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

Introduction

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.



Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Correction

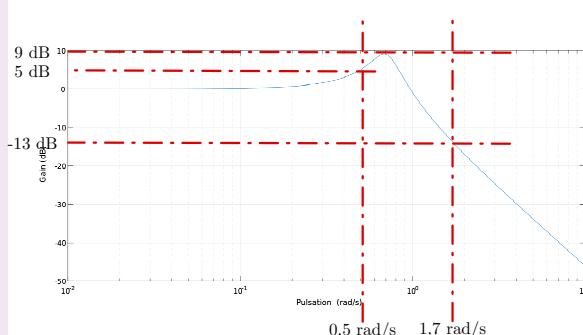
La définition du gain en décibel de la fonction de transfert $B(j\omega)$ est $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$. L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$G_{dB}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1,7] \text{ rad/s.}$$

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Correction

On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$ (4). Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Correction

On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (1.2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left(p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR} \left(\frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) = C_{qR} \left(1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Par identification :

$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}}$ et $\tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}$.

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions

initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes}$$

définies précédemment.

Correction

La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta)p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1)p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} ; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

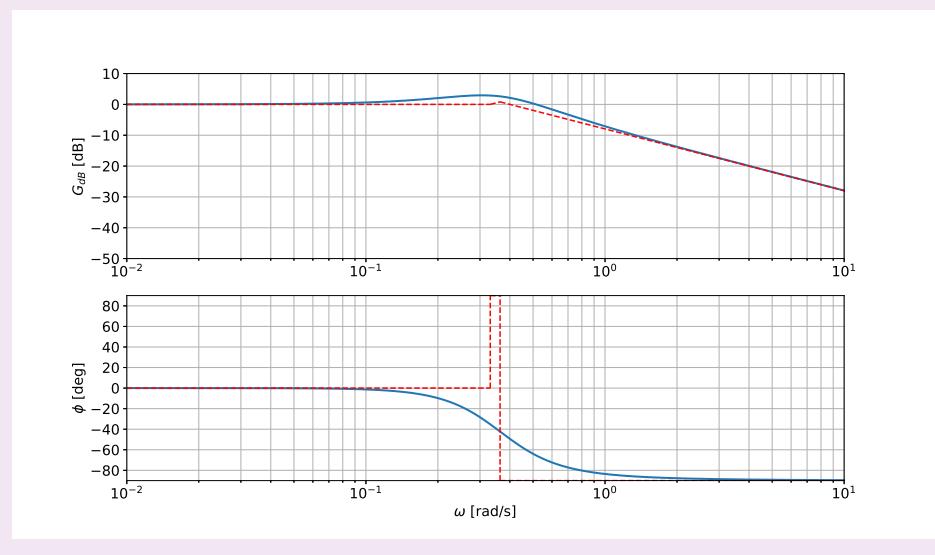
Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques.

Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Correction

Diagrammes de Bode de $H(p)$. On identifie 2 pulsations caractéristiques : $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$ rad/s et $\omega_n = 0,364$ rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ car $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$. La résonance sera toutefois faible.

ω	$\text{BF } \omega \ll \omega_1$	$\text{MF } \omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	$\text{HF } \omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\frac{\tau\omega_n^2}{j\omega}$
G_{dB}	0	$20 \log \tau + 20 \log \omega$	$20 \log(\tau\omega_n^2) - 20 \log \omega$
ϕ	0	90°	-90°

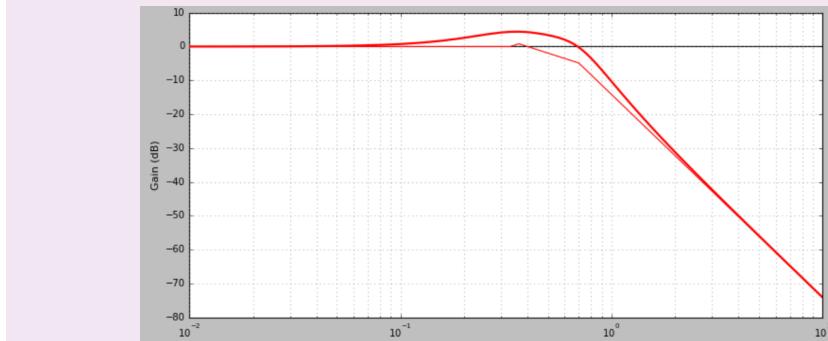


La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Correction

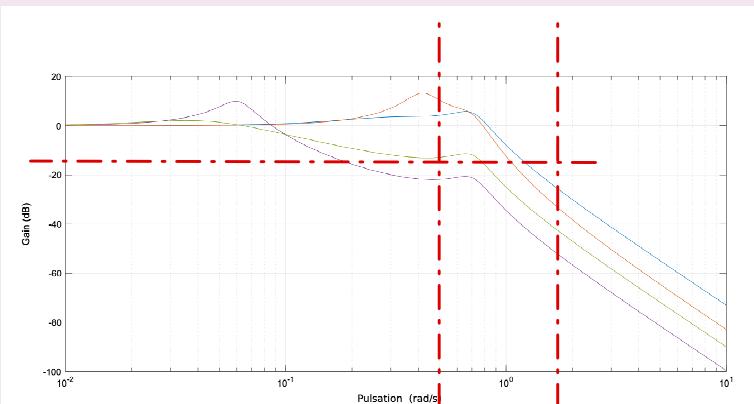
On a la relation $G(p) = B(p)H(p)$.



Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Correction

Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.





TD 4

Système de freinage d'un TGV DUPLEX- Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2006



Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé enrayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

Objectif

L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure 1.14 où v_c est la consigne de glissement.

On note :

- ▶ $H_1(p)$ la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve);
- ▶ $H_2(p)$ la fonction de transfert de la roue au freinage;
- ▶ $C(p)$ le correcteur de la boucle de régulation;
- ▶ $M(p)$ la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure;
- ▶ v_m : glissement estimé.

On adoptera pour la suite : $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$ et $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Pour une vitesse de train $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$, le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail V_T ne font pas l'objet de cette étude.

On a $M = 8200 \text{ kg}$, $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$, $I/r^2 = 400 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :

$$H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}.$$

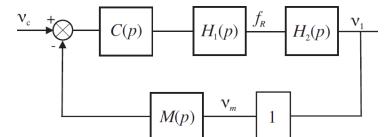


FIGURE 1.14 – Structure de la chaîne de régulation de glissement

Marges de stabilité, performances en boucle ouverte

Pulsation de coupure à 0 dB

$$\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$$

Marge de phase

$$\Delta\varphi \geq 60^\circ \text{ au point de fonctionnement nominal } B$$

Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(v)$ **Réponse à un échelon de consigne de glissement**

Écart en régime permanent

Nul

Temps du 1^{er} maximum

$$t_m \leq 3,5 \text{ s}$$

Dépassee

$$D \simeq 18 \%$$

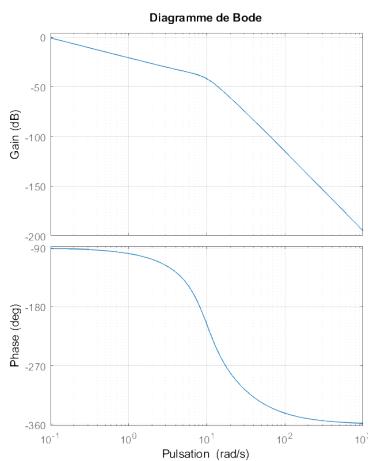
Réponse à une variation en échelon de l'adhérence

Écart en régime permanent

Nul

Temps de réponse

$$t_r \leq 9 \text{ s}$$

FIGURE 1.15 – Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ 

Question 1 En prenant $C(p) = 1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

Question 2 Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.

Méthode – Marge de phase

Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$. On peut alors définir la marge de phase par $M\varphi = \arg[FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$.

Question 3 Calculer la valeur minimale, $T_{i\min}$, que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.

Question 4 En adoptant $T_i = T_{i\min}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

Méthode –

Il faut chercher K_r tel que $20 \log |FTBO(j\omega_c)| = 0$.

Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de

glissement : temps du 1^{er} maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$, on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante : $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$.

On supposera sans aucune justification que $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$.

Question 5 En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

Question 6 Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

Question 7 En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$.

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$.

Question 8 Calculer le temps du 1^{er} maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $v_c(t) = v_{c0} u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.

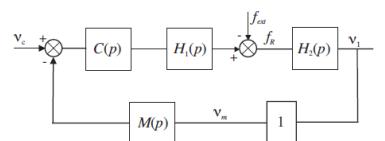
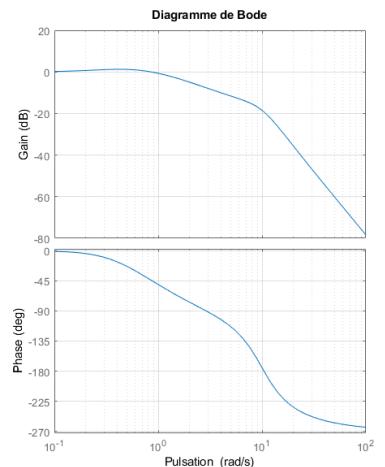
Question 9 Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

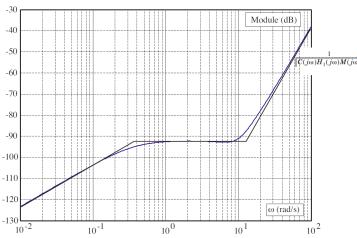
Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

Question 10 Déterminer la fonction de transfert $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose v_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $\|F_2(j\omega)\|$, de cette fonction peut être approché par la relation : $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$.





Question 11 La figure suivante comporte le tracé de la fonction $\frac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$. Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction $||H_2(j\omega)||$.

Question 12 En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction $||F_2(j\omega)||$. En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert $F_2(p)$ entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

Question 13 Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme : $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + Tp}$.

Question 14 En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0 = 2000 \text{ N}$.

Question 15 Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en précisant la valeur initiale $v_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale $v_1(0)$ (valeurs à considérer en valeur absolue).

Retour sur le cahier des charges

Question 16 Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

Éléments de correction

1. ...
2. $\arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$.
3. $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$.
4. ***
5. ***
6. ***
7. ***
8. ***
9. ***
10. ***



TD 4

Système de freinage d'un TGV DUPLEX- Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2006 –
Ressources UPSTI



Mise en situation

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

Question 1 En prenant $C(p) = 1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

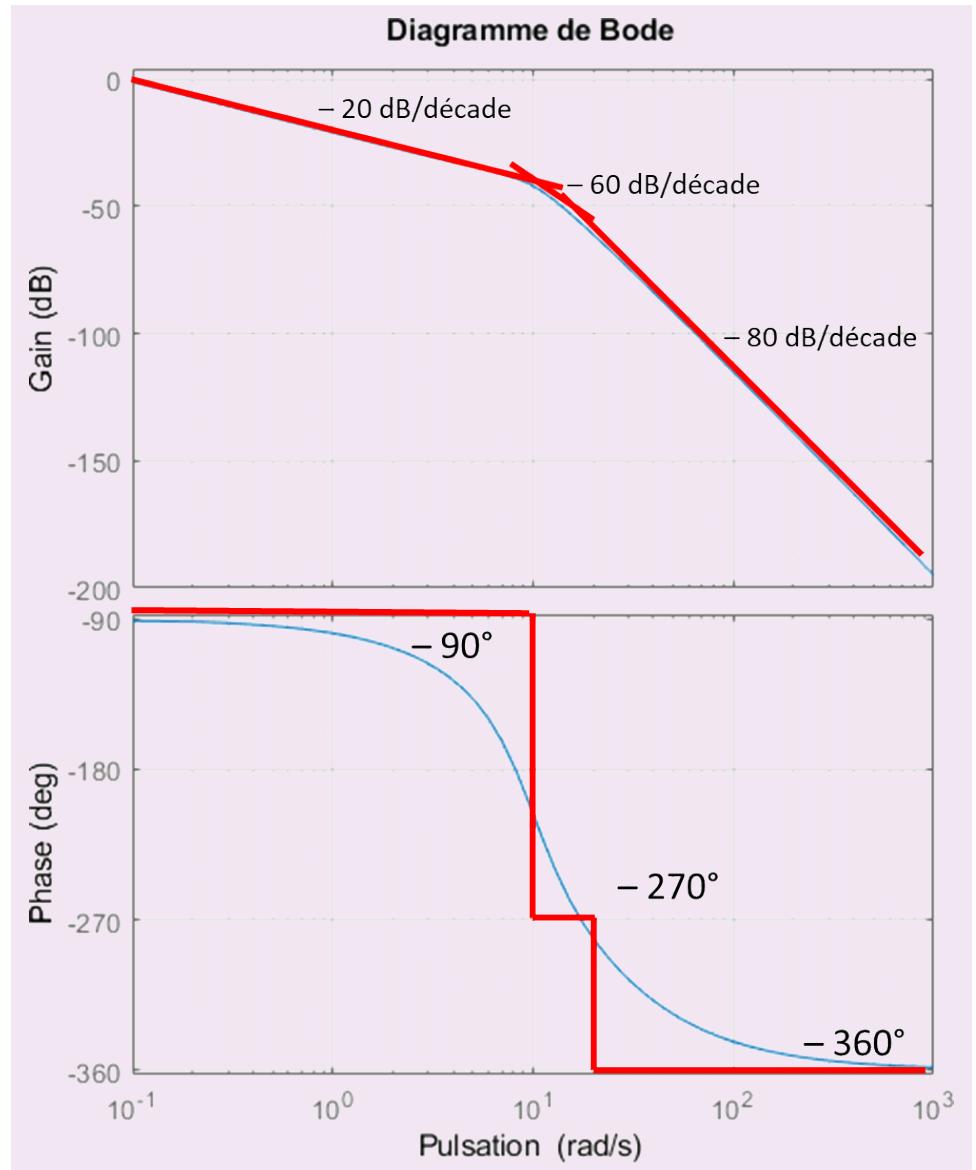
Correction

On a pour $H_1(p)$, $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$ et $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$ soit $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$. Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$ et $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$. Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, on a $\text{FTBO}(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$.

On a donc $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$.

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	-40 dB/decade	-40 dB/decade	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	-20 dB/decade	-20 dB/decade	-20 dB/decade	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	-20 dB/decade	
$\ \text{FTBO}(j\omega)\ _{dB}$	-20 dB/decade	-60 dB/decade	-80 dB/decade	
$\text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega))$	-90°	-270°	-360°	



Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

Question 2 Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.

Méthode – Marge de phase

Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$. On peut alors définir la marge de phase par $M\varphi = \arg [FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$.

Correction

La pulsation de coupure souhaitée est $\omega_c \approx 1 \text{ rad s}^{-1}$. On cherche donc K_r et T_i tels que $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\underbrace{\frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{K_r}_{\rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \arg \left[\left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \right] - 98,5$$

Remarque

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque $\omega = \omega_c$. L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$

$$\text{Soit } \arg \left[\frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5 + 180 \geq 60 \text{ et } \arg \left[\frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ.$$

Question 3 Calculer la valeur minimale, $T_{i\min}$, que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.

Correction

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que pour } \omega = \omega_c = 1, \arg \left[\frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ &\Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) - 90 \geq -21,5^\circ \\ \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) \geq 68,5^\circ \text{ et donc } \Rightarrow T_i &\geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s.} \end{aligned}$$

Attention : à ce stade, la marge de phase serait de 60° SI la pulsation de coupure était de 1 rad s^{-1} ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

Question 4 En adoptant $T_i = T_{i\min}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

Méthode –

Il faut chercher K_r tel que $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$.

Correction

En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ -20 dB lorsque $\omega = 1$. La fonction de transfert du correcteur est $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) = K_r \frac{T_ip + 1}{T_ip}$. Le gain dB du correcteur doit donc être de 20 dB lorsque $\omega = 1 : 20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i\omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1$ $\Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$. On a donc $K_r = 9,3$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Analytiquement (à vérifier...)} 20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1. \\
 & ||\text{FTBO}(j\omega)|| = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
 & = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \frac{1 + T_ip}{T_ip} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
 & = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \frac{1}{1 + 0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot \\
 & 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\
 & = \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2)^2 + 0,1^2}}
 \end{aligned}$$

Question 5 Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

Méthode –

Soit ω_φ la pulsation telle que $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$. La marge de gain s'exprime alors par $MG = -20 \log ||H(j\omega_\varphi)||$.

Correction

Approche analytique On résout $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

Approche graphique

Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Question 6 En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

Correction

Question 7 Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

Correction

- $K_f = 1$: lorsque ω tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0 = 0,5$: valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$;
- $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$;
- $\xi < 0,7$ (résonance).

Question 8 En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$.

Correction

La pulsation propre ω_0 est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{(1+3,3p)}{(1+1,66p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$.

Question 9 Calculer le temps du 1^{er} maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $v_c(t) = v_{c0}u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.

Correction

Calcul du temps du 1^{er} maximum

Le temps du 1^{er} maximum est donné par $f(t_m) = 0$, soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à $t_m = 3,3$ s.

Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsorielle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour $t = t_m$:

$$v(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (ay(t) + by'(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec $y(t) = te^{-t/\tau_2}$ dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2} dt = \left[-\tau_2 te^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$v(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[-\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour $t = t_m$ on obtient $v(t_m) = 1.13$, soit un dépassement de 13%.

Question 10 Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la

consigne de glissement relatif.

Correction

- Le temps du 1^{er} maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

Question 11 Déterminer la fonction de transfert $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose v_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $\|F_2(j\omega)\|$, de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$$

Correction

On a directement $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}.$

On peut alors déterminer le module et on a $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|.$

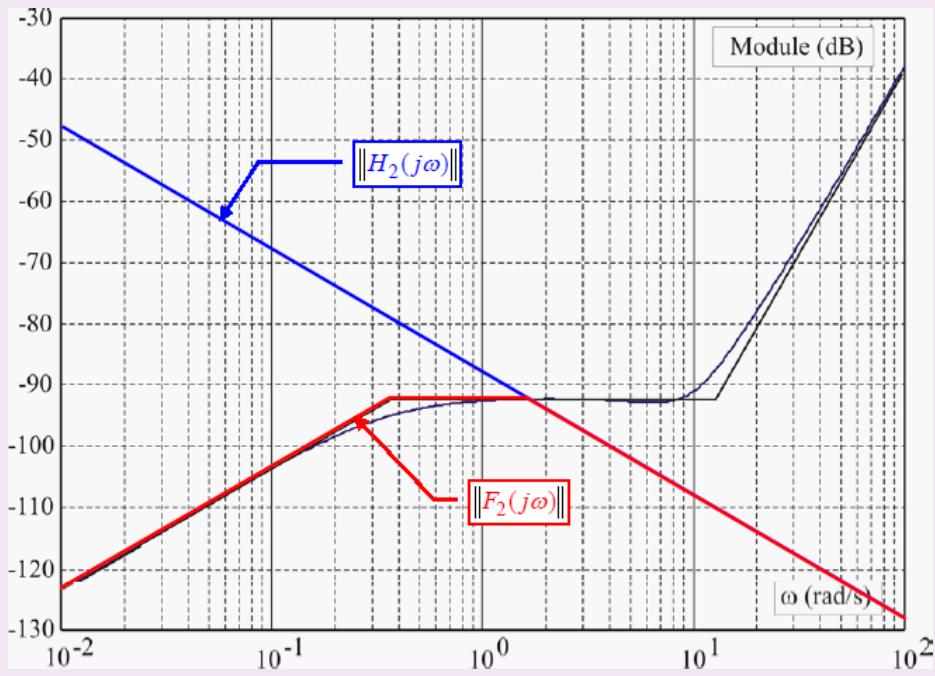
Dans ces conditions :

- si $\left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| >> 1$ alors $\|F_2(j\omega)\| \approx \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|;$
- si $\left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| << 1$ alors $\|F_2(j\omega)\| \approx \|H_2(j\omega)\|.$

On peut en conclure que $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$

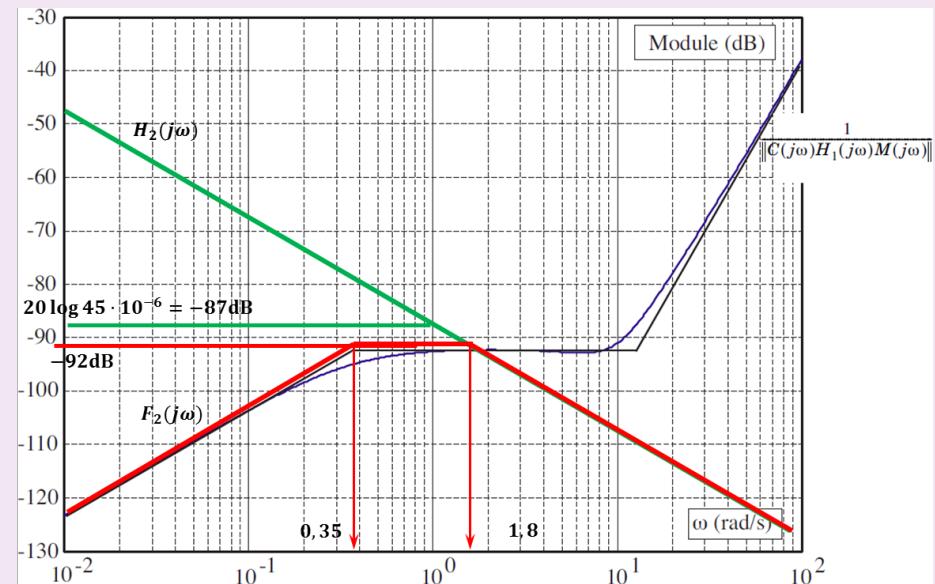
Question 12 La figure suivante comporte le tracé de la fonction $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}.$ Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction $\|H_2(j\omega)\|.$

Correction



Question 13 En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction $\|F_2(j\omega)\|$. En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert $F_2(p)$ entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

Correction



En analysant les brisures de F_2 , on peut proposer la fonction de transfert suivante : $F_2 = \frac{K_p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ avec $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \approx 2,9$ s, $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \approx 0,6$ s. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, on a donc $20 \log K\omega = 20 \log 0,01K = -123$ soit $K = 100 \times 10^{-123/20} \approx 7 \cdot 10^{-5}$.

$$\text{Au final, } F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1 + 2,9p)(1 + 0,6p)}.$$

Question 14 Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme : $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$.

Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle p_2 étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de p_1 , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

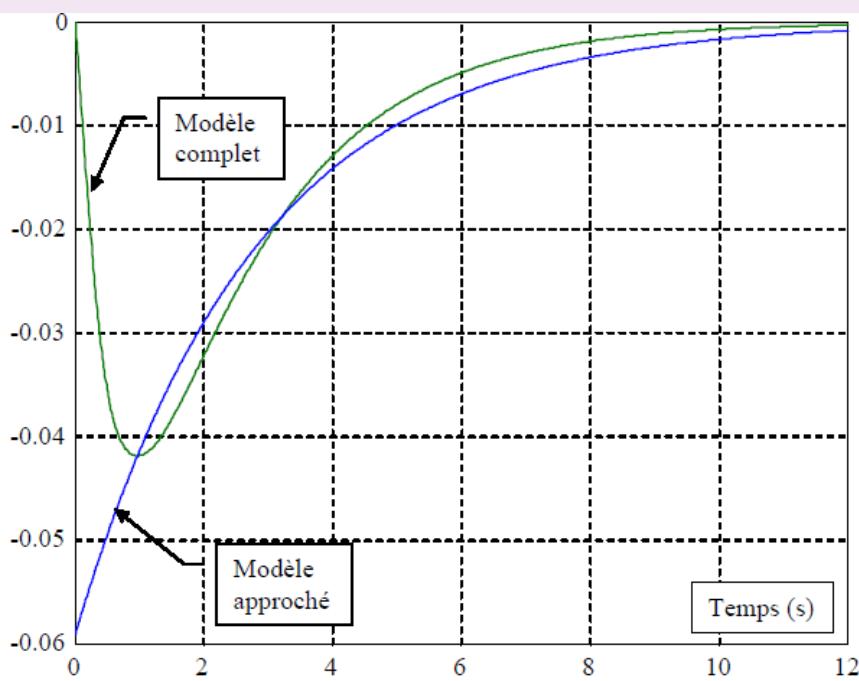
$$F_2(p) = -\frac{p}{12100(1 + 2,8p)}$$

Question 15 En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0 = 2000 \text{ N}$.

Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1^{er} ordre en partant d'une condition non nulle ($v_1 = 0,05$) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de $t_r = 3T = 8,4 \text{ s}$.

Question 16 Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en précisant la valeur initiale $v_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale $v_1(0)$ (valeurs à considérer en valeur absolue).

Correction

Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

Retour sur le cahier des charges

Question 17 Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

Correction

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.

TD 5

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil– Sujet

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

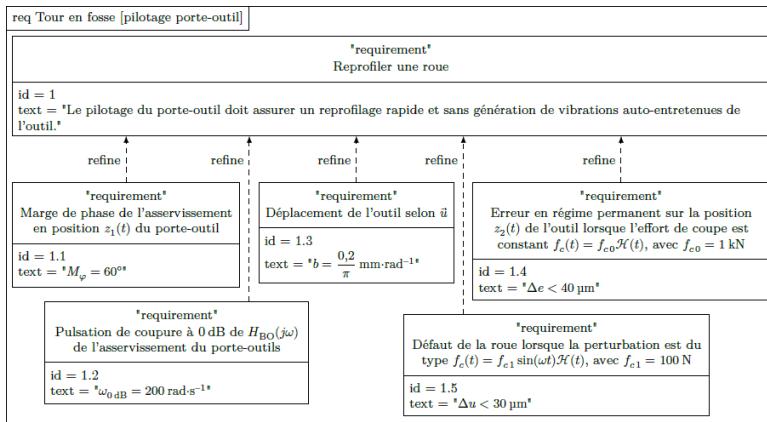
Modélisation du mouvement pour la commande

Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position $z_1(t)$ comprenant un correcteur proportionnel.

Le système composé de l'outil et du porte-outil est modélisé sur la Figure 1.17. Le porte-outil, de masse $m_1 = 5522 \text{ kg}$, est considéré indéformable et en liaison glissière de direction \vec{z}_0 avec le bâti. Une chaîne de motorisation électrique permet de déplacer le porte-outil et une structure de commande associée permet d'asservir la position $z_1(t)$ par rapport à une position de référence. La chaîne de motorisation exerce une force motrice $\vec{f}_m(t) = f_m(t)\vec{z}_0$ sur le porte-outil.

La cahier des charges est donné sur la figure suivante.



Les positions du porte-outil et du point C par rapport à leur position de référence sont respectivement paramétrées par $z_1(t)\vec{z}_0$ et $z_2(t)\vec{z}_0$, avec $z_1(t)\vec{z}_0$ et $z_2(t)\vec{z}_0$ des grandeurs algébriques (Figure 1.17). Les conditions initiales sont toujours supposées nulles.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée au porte-outil puis à l'outil permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$m_1\ddot{z}_1(t) + \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) = \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) + f_m(t)$$

$$m_2\ddot{z}_2(t) + \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) = \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) + f_c(t)$$

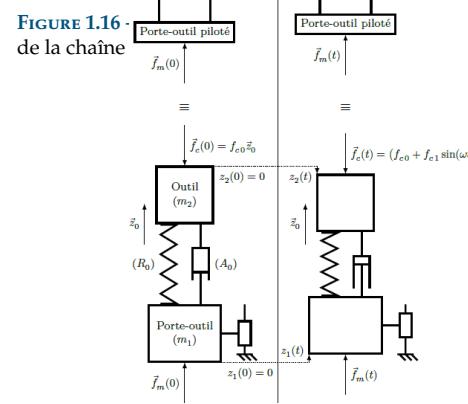


FIGURE 1.17 – Modèle de déformation de l'outil avec le porte-outil piloté

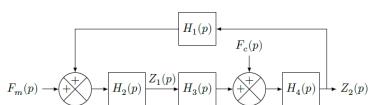


FIGURE 1.18 – Modèle de l'outil et du porte-outil

Le modèle correspondant est représenté par le schéma bloc de la [Figure 1.18](#).

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Le modèle de la [Figure 1.18](#) est réduit au modèle équivalent de la figure [Figure 1.19](#).

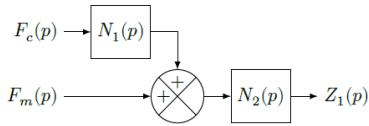


FIGURE 1.19 – Modèle équivalent

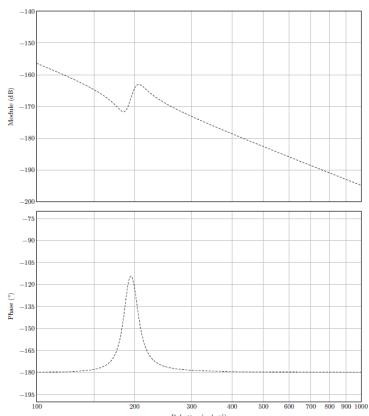
Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$. Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_2(p)$ est représenté ci-contre.

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2app}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2app}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.



Le modèle approché ($N_{2app}(p)$) est retenu pour la suite de l'étude. Le schéma bloc modélisant la régulation de la position $z_1(t)$ est donné en figure [Figure 1.20](#), en considérant un correcteur proportionnel de gain K_p .

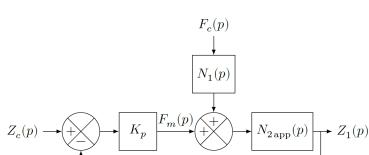


FIGURE 1.20 – Modèle de synthèse de la régulation en position $z_1(t)$ du porte-outil

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la [Figure 1.16](#).

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

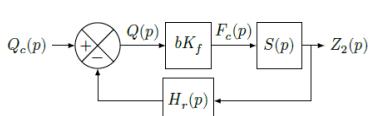


FIGURE 1.21 – Modèle équivalent de la chaîne d'asservissement complète

La [Figure 1.22](#) représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système modélisé [Figure 1.21](#), avec $b = \frac{5 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ mm rad}^{-1}$

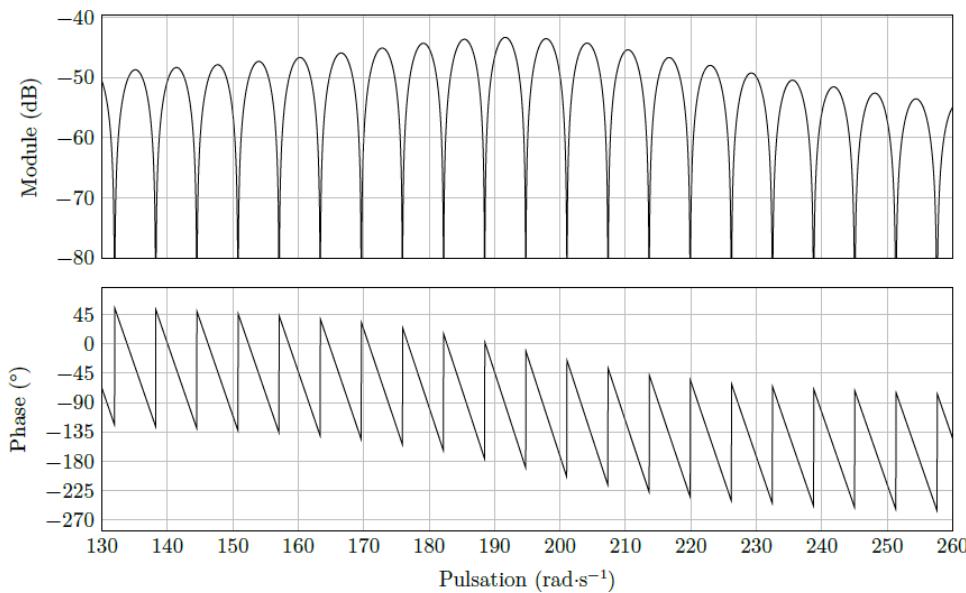


FIGURE 1.22 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte du schéma-blocs

Les « zéros de transmission » d'une fonction de transfert $H(p)$ correspondent aux pulsations ω pour lesquelles $H(j\omega)$ est nul.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la [Figure 1.22](#) en analysant les « zéros de transmission ».

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

TD 5

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil– Corrigé

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

Modélisation du mouvement pour la commande

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Correction

D'après le schéma-blocs $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$. D'après la première équation différentielle, on a : $m_1p^2Z_1(p) + \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) = \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1p^2 + \lambda p + K}$. On

a donc par identification $H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$ et $H_1(p) = \lambda p + K$.

D'après le schéma-blocs $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$. D'après la seconde équation différentielle, $m_2p^2Z_2(p) + \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) = \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_C(p)}{m_2p^2 + \lambda p + K}$. On

a donc par identification $H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$ et $H_3(p) = \lambda p + K$.

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$$

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Correction

En utilisant le premier modèle, on avait : $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$.

Ainsi, $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))))$

$= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p)$

$\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p))$.

En utilisant le schéma-blocs, $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$. Par identification, on obtient $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$ et $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$.

Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .



Correction

$$\begin{aligned}
N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\
&= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))} \\
&= \frac{m_2 \left(p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left(p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}. \\
\text{Par identification, on a : } A &= \frac{1}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, 2\xi_1\omega_1 = \frac{\lambda}{m_2} \text{ et } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} =, \\
\omega_2^2 &= K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, 2\xi_2\omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \\
\text{On a donc } \xi_1 &= \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.
\end{aligned}$$

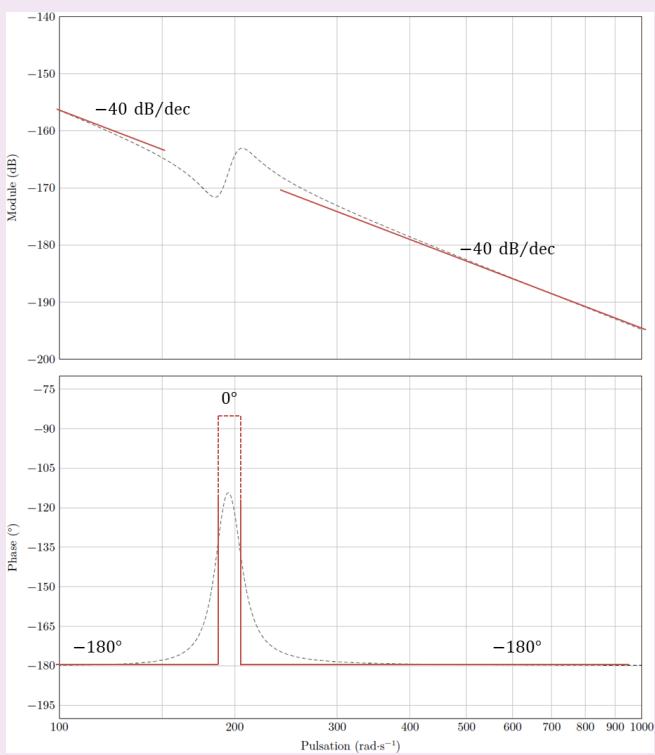
Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_2(p)$ est représenté ci-contre.

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Correction

D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement $\omega_1 < \omega_2$. On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert $N_2(p)$.

	ω_1		
	ω_1	ω_1	ω_1
$\frac{A}{p^2}$	-40 dB/dec	-40 dB/dec	-40 dB/dec
$p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2$	0 dB/dec	40 dB/dec	40 dB/dec
$\frac{1}{p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2}$	0 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$20 \log N_2(p) $	-40 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$\text{Arg}(N_2(p))$	-180°	0°	-180°



Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2\text{app}}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Correction

Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s⁻¹, on peut modéliser $N_2(p)$ par un double intégrateur. Le gain dB est donc $20 \log A - 20 \log \omega^2$.

Pour $\omega = 500$ rad s⁻¹ on a $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$ et $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$.

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la Figure 1.16.

Correction

Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1** : $M\varphi = 60^\circ$: impossible à respecter la phase sera toujours de -180° .
- **req 1.2** : $\omega_{0\text{dB}} = 200$ rad s⁻¹ : critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4** : erreur en régime permanent : $\Delta c < 40 \mu\text{m}$ pour un échelon d'amplitude $f_{c0} = 1 \text{ kN}$: critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5** : défaut de la roue $\Delta u < 30 \mu\text{m}$ lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'un point de vue numérique, $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$ et $\tau = 1 \text{ s}$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Correction

D'après le schéma-blocs, $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$. D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$. En conséquence, $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$.

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la Figure 1.22 en analysant les « zéros de transmission ».

Correction

$$\text{FTBO}(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p).$$

On a $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$.

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

$$\blacktriangleright \text{ pour } \omega = \frac{k2\pi}{\tau} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \text{ et } G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty;$$

$$\blacktriangleright \text{ pour } \omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \text{ et } G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2.$$

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$.

Pour la phase, $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j\sin(-\tau\omega))$. Or $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$. On a donc $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$.

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal $\frac{2\pi}{\tau}$ périodique.

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

Correction

Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire b' tel que $20 \log b' = 45$ soit $b' = 10^{45/20} = 177$. Au bilan, on aurait donc $b_{lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$.

Il faudrait déterminer si une augmentation de b réduit l'amortissement de l'asservissement.