

Avance de Phase – Train d’atterrissage d’hélicoptère – Sujet

Banque PT – SIA 2014.

Mise en situation

Lors d’atterrissages d’hélicoptères à grande, les oscillations induites par l’impact au sol du train d’atterrissage principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l’appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l’ordre de 2 m s^{-1} mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d’apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashes correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d’impact pouvant atteindre 4 m s^{-1} .

C1-02

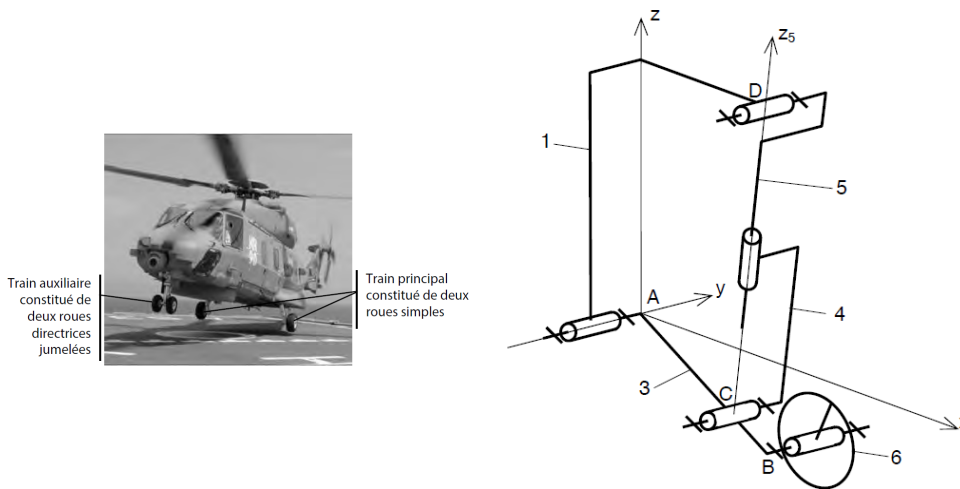
C2-04

Objectif

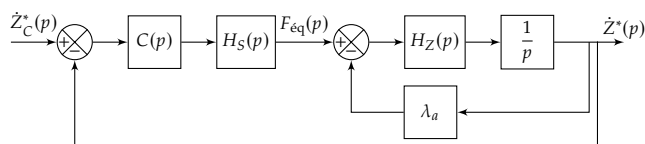
Pour une vitesse d’impact de 4 m s^{-1} l’accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .



On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d’impact lors de l’atterrissage de l’hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l’amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée Z^* . On se propose d’étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne $\dot{Z}_c^*(p)$. On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{Z}^*(p)$ la transformée de $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$ avec V_0 la vitesse d’impact et $\dot{z}(t)$ la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol ;

- $F_{\text{eq}}(p)$ l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- λ_a le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$ la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra : $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$ et $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$ la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

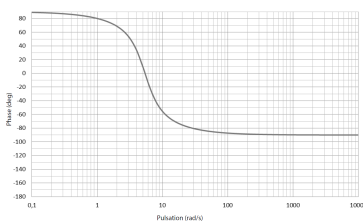
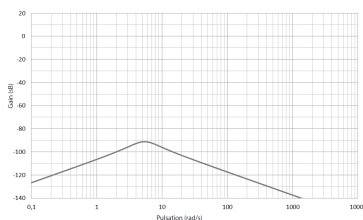
Objectif

Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{\text{eq}}(p)}$.

Question 2 Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{\text{BONC}}(p)$.

On donne le diagramme de Bode de $H_F(p)$.



Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_Z et ω_Z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{\text{BONC}}(p)$. On prendra pour cela $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$.

Choix et réglage de la correction

Objectif

Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et $\omega_{0 \text{ dB}} = 6 \text{ rad s}^{-1}$;
- marge de phase $M\varphi = 45^\circ$;
- marge de gain $MG > 6 \text{ dB}$.

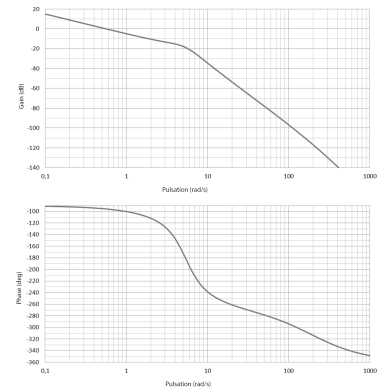
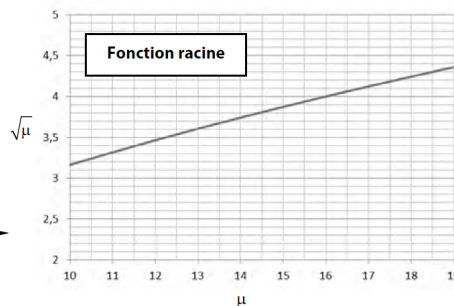
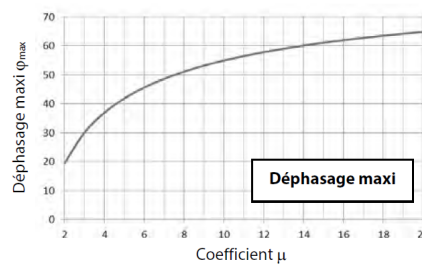
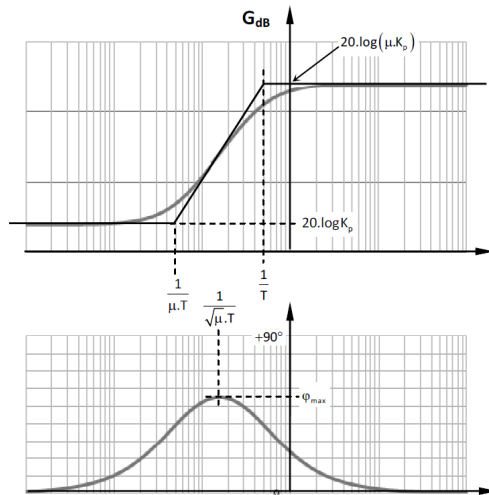
Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$. On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour $K_p = 1$.

Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ avec $\mu > 1$. Les caractéristiques du terme en $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.

Caractéristiques du terme $K_p \cdot \left(\frac{1 + \mu \cdot T \cdot p}{1 + T \cdot p} \right)$



Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme?

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase?

Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_p permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé?

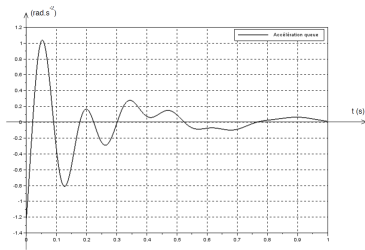
Validation des performances

Objectif

Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} .

Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



Avance de Phase – Train d’atterrissage d’hélicoptère – Corrigé

Banque PT – SIA 2014.

Mise en situation

Objectif

Pour une vitesse d’impact de 4 m s^{-1} l’accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .

C1-02

C2-04

Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

Objectif

Il s’agit dans un premier temps d’analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.



Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert

$$H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{\text{eq}}(p)}.$$

Correction

$$\begin{aligned} H_F(p) &= \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}} = \frac{K_Z p^2}{p \left(1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2} \right) + \lambda_a K_Z p^2} \\ &= \frac{K_Z p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}. \end{aligned}$$

Question 2 Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{\text{BONC}}(p)$.

Correction

$$H_{\text{BONC}}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}.$$

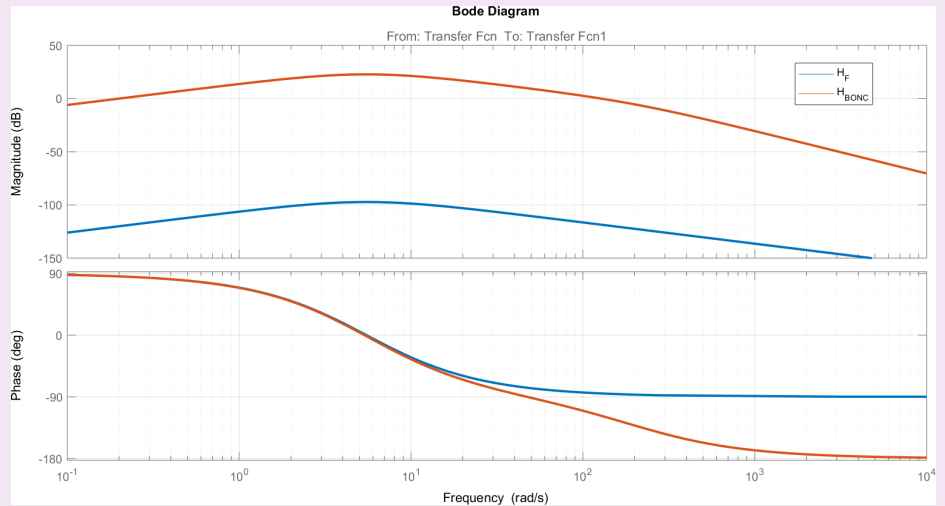
On donne le diagramme de Bode de $H_F(p)$.

Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_Z et ω_Z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{\text{BONC}}(p)$. On prendra pour cela $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$.

Correction

H_F est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement ξ_F et de pulsation propre ω_Z . Ne pouvant pas calculer ξ_F , l'allure du diagramme de Bode suggère que $\xi_F < 1$ car il y a une seule rupture de pente à $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$.

Pour $\omega < \omega_Z$ l'asymptote du second ordre à un gain de 0 dB. Seul le dérivateur est influent. En conséquence, pour $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$, on a donc $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20 \log K_Z = -106$. On a donc $K_Z = 5 \times 10^{-6}$.



Choix et réglage de la correction

Objectif

Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

Correction

Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.

Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

Correction

La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 85° .

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de 6 rad s^{-1} , il faut relever le gain de 20 dB soit $K_p = 10$. Dans ces conditions, la marge de phase est de -15° et la marge de gain est -2 dB. En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

Correction

L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase ?

Correction

Cas 1 : on conserve $K_P = 10$. Le correcteur doit ajouter 60° de phase pour $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$. Il faut donc $\mu = 14$.

Cas 2 : on reprend $K_P = 1$. Dans ce cas, on souhaite que lorsque $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$, φ soit égal à 45° . Il faut donc ajouter 65° de phase à cette pulsation. Dans ces conditions, $\mu = 20$.

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_P permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

Correction

Dans le cas 1 : $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$. Le gain K_P déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à $\omega_0 \text{ dB}$.

Il faut donc que $\frac{1}{2} (20 \log(\mu K'_P) + 20 \log K'_P) = 0 \Rightarrow \log(\mu K'^2_P) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_P = 1 \Rightarrow K'_P = \sqrt{1/\mu} = 0,267$.

Dans le cas 2 : $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$.

Actuellement, le gain est de -20 dB pour $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$. Il faut donc augmenter le gain de 20 dB pour la pulsation $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$. Ceci revient donc à résoudre $20 \log K_P + \frac{1}{2} (20 \log \mu K_P - 20 \log K_P) = 20 \Rightarrow \log K_P + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_P \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_P = 10/\sqrt{20} = 2,6$.

Remarque : dans le cas 1 le gain du correcteur est $K_P \times K'_P = 2,6$. Dans le cas 2 $K_P = 2,6$.

Validation des performances

Objectif

Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

Correction

Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération reste bien inférieure à 3 rad s^{-2} .

Application 1

Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs – Sujet

Centrale Supélec PSI 2013.

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.



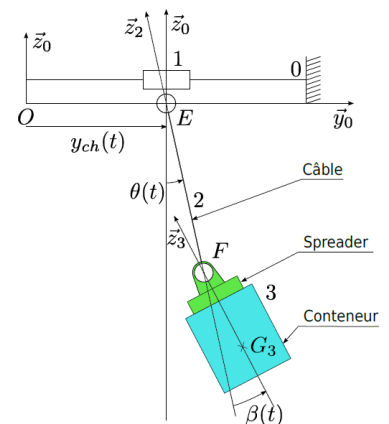
En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

Paramétrage

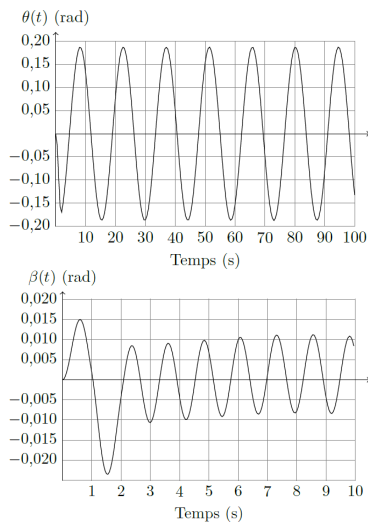
- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au portique fixe ; il est supposé galiléen avec \vec{z}_0 l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que $\vec{OE} = y_{ch}(t)\vec{y}_0$ est notée $y_{ch}(t)$; l'angle (\vec{z}_0, \vec{z}_2) d'inclinaison du câble $\theta(t)$ et l'angle (\vec{z}_2, \vec{z}_3) d'inclinaison du conteneur par rapport au câble $\beta(t)$.

Données

- $\mathcal{R}_1 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathcal{R}_2 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié au câble 2 ; $\ell_2 = 50$ m la longueur EF du câble ; la masse est négligée.
- $\mathcal{R}_3 = (F; \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur} ; $m_3 = 50$ tonnes la masse du solide 3 ; G_3 le centre de gravité du solide 3, tel que $\vec{G_3F} = h_3\vec{z}_3$ où $h_3 = 2,5$ m ; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit $I_3(G_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$ où $\begin{cases} A_3 = 52 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ B_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ C_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \end{cases}$.
- la motorisation M_D du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme $R(M_D \rightarrow 1) = F\vec{y}_0$;
- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée $\vec{R}(2 \rightarrow 3) = F_{23}\vec{z}_2$.



Question 1 Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?



Question 2 Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\overrightarrow{V}(G_3, 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 .

Question 3 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Question 4 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Question 5 En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.

Question 6 Proposer une simplification de la modélisation précédente.

Application 1

Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2013.

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.



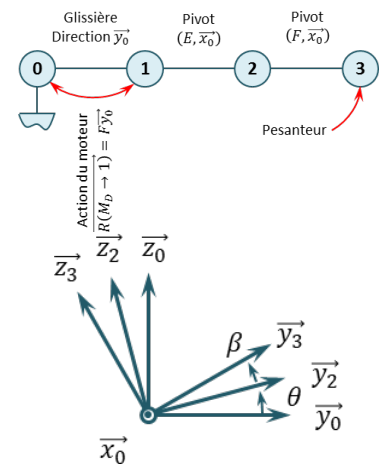
Question 1 Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

Correction

Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.



Question 2 Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\overrightarrow{V}(G_3, 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 .

Correction

$$\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} (y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} - \ell_2\overrightarrow{z_2} - h_3\overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

- $\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}\overrightarrow{y_2};$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{z_3} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{y_3};$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2};$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{z_3}.$

$$\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \dot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\dot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{y_3}.$$

$$\overrightarrow{\Gamma}(G_3, 3/0) = \ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2\overrightarrow{z_3}.$$

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overrightarrow{\delta}(G_3, 3/0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} =$

$$\left[\frac{dA_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$$

$$\text{On a donc, } \{ \mathcal{D}(3/0) \} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

Question 3 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Correction

D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant \vec{z}_2 , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur \vec{y}_2 . Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\text{On a donc: } -M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = \left(M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_2$$

$$\Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc **(1+2+3)** et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_0 .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur \vec{y}_0);
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \vec{y}_0 : F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow F = \left(M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow F = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta))$$

Question 4 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Correction

Le TRD appliqué à 3 en projection suivant \vec{z}_2 se traduit par :

$$F - M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = \left(M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{z}_2$$

$$\Leftrightarrow F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta).$$

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant \vec{x}_0 se traduit par :

$$\overrightarrow{FG_3} \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \left(\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\Leftrightarrow -h_3 \vec{z}_3 \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$

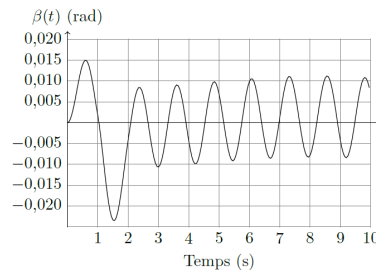
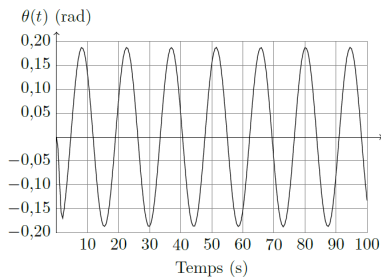
$$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}).$$

Question 5 En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Correction

- On a $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$. En linéarisant, on obtient $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}))$.
- On a : $F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta)$. En linéarisant, on obtient : $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta)$.
- On a : $M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ En linéarisant, on obtient $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.



Question 6 Proposer une simplification de la modélisation précédente.

Correction

L'amplitude des oscillations de β est 10 fois inférieure aux oscillations de θ . En conséquences, on pourrait poser $\beta = 0$ et :

- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$.

Application 2

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

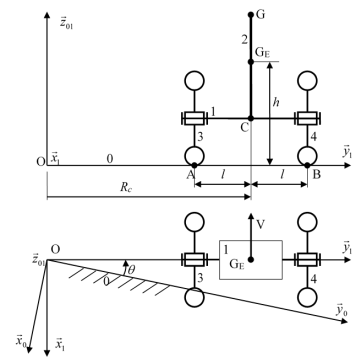
La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route (0) est munie du repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme (1) a pour centre de gravité C. Le conducteur (2) a pour centre de gravité G. Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{y}_1) . L'ensemble $E = 1 + 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E . Il est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans \mathcal{R}_0 est R_C . Le repère lié à 1 est \mathcal{R}_1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

On donne $\vec{OG}_E = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

est : $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.



Hypothèse

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\vec{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ et $\vec{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_{01} . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(0 \rightarrow 3) = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$ et $\vec{R}(0 \rightarrow 4) = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$.
- On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 sont constants.
- L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Accélération de la pesanteur, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2$: $m_E = 134 \text{ kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35 \text{ cm}$, $h = 86 \text{ cm}$.

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C .

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_1 . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m .	Interdit

Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B .

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en projection sur \vec{x}_1 .

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , en projection sur \vec{x}_1 , écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ et des données du problème.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Application 2

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction

On a $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0) = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$. On a alors $V_L = R_C \dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C .

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \quad (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq f N_A$ et $T_B \leq f N_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f (N_A + N_B)$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

Correction

E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d}(E/\mathcal{R}_0) = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$ (pas de projection sur \vec{z}_0). On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- ▶ pesanteur sur E ;
- ▶ action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur \vec{z}_{01} , on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_1 . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage



C1-05

C2-09

dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Correction

En appliquant le TRD en projection sur \vec{y}_1 , on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$.
En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

La vitesse limite est donc de 10 m s^{-1} soient 36 km h^{-1} ce qui satisfait le cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Correction

Au centre d'inertie de E , on a $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$.
On a donc, $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \vec{x}_1 - D \dot{\theta} \vec{y}_1 + C \dot{\theta} \vec{z}_0$. On a donc $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$.
En conséquence, $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en projection sur \vec{x}_1 .

Correction

$\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h \vec{z}_0 - l \vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$.
 $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , en projection sur \vec{x}_1 , écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ et des données du problème.

Correction

On a :

$$\blacktriangleright \overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_0 = (-l \vec{y}_1 + h \vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_0 = l m_E g \vec{x}_1;$$

$$\blacktriangleright \vec{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1.$$

En appliquant le TMD en B suivant \vec{x}_1 , on a : $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

$$\text{Au final, } N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}.$$

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

Correction

Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

$$N_A \approx \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0. \text{ Ce qui est positif (pas de basculement).}$$

$$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0$$

$$\Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}. \text{ CDCF Validé.}$$

Application 3

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ ★ ★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

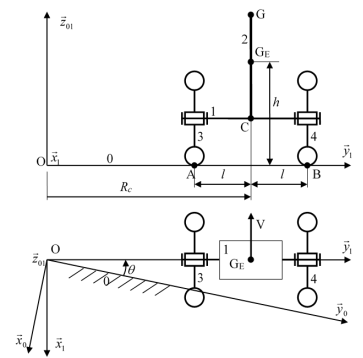
La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route (0) est munie du repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme (1) a pour centre de gravité C. Le conducteur (2) a pour centre de gravité G. Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{y}_1) . L'ensemble $E = 1 + 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E . Il est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans \mathcal{R}_0 est R_C . Le repère lié à 1 est \mathcal{R}_1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

On donne $\vec{OG}_E = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

est : $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.



Hypothèse

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\vec{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ et $\vec{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_{01} . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(0 \rightarrow 3) = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$ et $\vec{R}(0 \rightarrow 4) = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$.
- On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 sont constants.
- L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Accélération de la pesanteur, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2$: $m_E = 134 \text{ kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35 \text{ cm}$, $h = 86 \text{ cm}$.

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de dérapage. Vérifier alors que l'exigence 1.1 est vérifiée.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m .	Interdit

Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B .

Question 3 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de basculement du Segway.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 4 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Application 3

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ ★ ★ – Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

Présentation

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction

On a $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0) = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$. On a alors $V_L = R_C \dot{\theta}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \quad (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq f N_A$ et $T_B \leq f N_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$.

Correction

E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d}(E/\mathcal{R}_0) = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$ (pas de projection sur \vec{z}_0). On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur E ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur \vec{z}_{01} , on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Correction

En appliquant le TRD en projection sur \vec{y}_1 , on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$. En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Correction

La vitesse limite est donc de 10 m s^{-1} soient 36 km h^{-1} ce qui satisfait le cahier des charges.



C1-05

C2-09

Question 2 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de dérapage. Vérifier alors que l'exigence 1.1 est vérifiée.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Correction

Au centre d'inertie de E , on a $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$.

On a donc, $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta} \vec{x}_1 - D\dot{\theta} \vec{y}_1 + C\dot{\theta} \vec{z}_0$. On a donc $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1$.

En conséquence, $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$.

Correction

$\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h\vec{z}_0 - l\vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$. $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Correction

On a :

$$\blacktriangleright \overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_0 = (-l\vec{y}_1 + h\vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_0 = l m_E g \vec{x}_1;$$

$$\blacktriangleright \overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l\vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1.$$

En appliquant le TMD en B suivant \vec{x}_1 , on a : $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Au final, $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$.

Correction

Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

Question 3 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de basculement du Segway.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 4 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

$N_A \simeq \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$. Ce qui est positif (pas de basculement).

$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0$
 $\Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$. CDCF Validé.

TD 1

Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

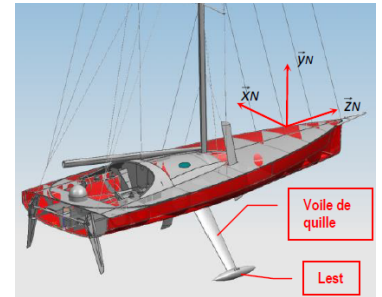
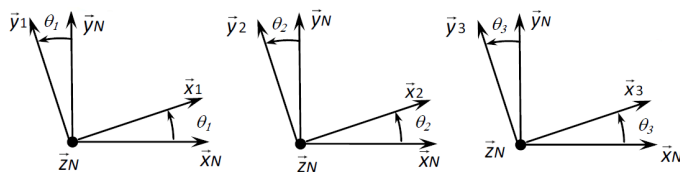


FIGURE 1 – Modèle volumique 3D

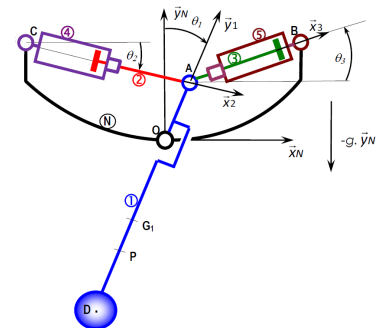


FIGURE 2 – Modèle 2D

FIGURE 3 – Paramétrage

Données géométriques, massiques et inertielles $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{y_1}$;

$$\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}; \overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\overrightarrow{x_3},$$

- Solide 1, masse M_1 , centre d'inertie G_1 , $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\overrightarrow{y_1}$, $I_{G_1}(1) =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 2, masse M_2 , centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\overrightarrow{x_2}$, $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 3, masse $M_3 = M_2$, centre d'inertie G_3 , $\overrightarrow{AG_3} = L_2\overrightarrow{x_3}$,

$$I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 4, masse M_4 , centre d'inertie C , $I_C(4) =$

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 5, masse M_5 , centre d'inertie B , $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_C$.
- Action de pression de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_B$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action hydrodynamique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_P$ avec $\overrightarrow{OP} = -h\overrightarrow{y_1}$.

Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

1. $\overrightarrow{V}(G_1, 1/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles ;
2. $\overrightarrow{V}(G_2, 2/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles ;
3. $\overrightarrow{V}(G_3, 3/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles ;
4. $\overrightarrow{V}(A, 2/4)$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure 8.

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\text{ s}$, $t = 1\text{ s}$, $t = 3\text{ s}$ et $t = 4\text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

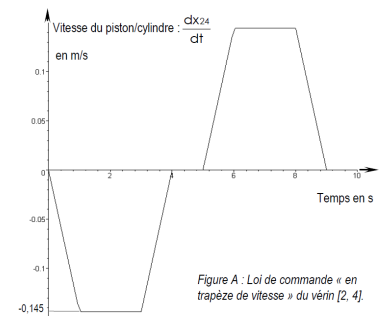
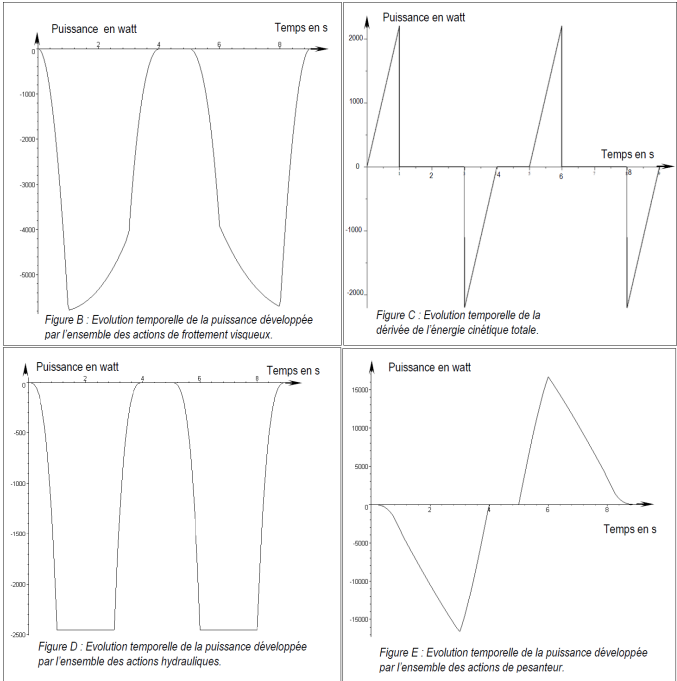


FIGURE 4 – Evolution temporelle des puissances



TD 1

C1-05

C2-08

Diagram illustrating the coordinate system (XN, YN, ZN) and the location of the keel (Lest) and keel sail (Voile de quille) on a sailboat.

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Diagram illustrating a game tree structure for a 5-player game:

- Player 1 (Blue circle 1)** starts at the root node and chooses between:
 - Pivot (O, \vec{z}_N)**: Leads to a terminal node (Red circle 2) with payoff (C, \vec{x}_2) .
 - Pivot (O, \vec{z}_N)**: Leads to a node where **Player 4 (Purple circle 4)** moves.
- Player 4 (Purple circle 4)** chooses between:
 - Pivot (C, \vec{z}_N)**: Leads to a terminal node (Purple circle 4) with payoff (C, \vec{x}_2) .
 - Pivot (C, \vec{z}_N)**: Leads to a node where **Player 5 (Green circle 5)** moves.
- Player 5 (Green circle 5)** chooses between:
 - Pivot (B, \vec{z}_N)**: Leads to a terminal node (Green circle 5) with payoff (B, \vec{x}_3) .
 - Pivot (B, \vec{z}_N)**: Leads to a terminal node (Grey rectangle) with payoff (N) .
- A red lightning bolt labeled **Pesanteur + Eau** points to the root node.

1. $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles ;
2. $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles ;
3. $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles ;
4. $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

$$\begin{aligned}
1. \quad \overrightarrow{V(G_1, 1/N)} &= \overrightarrow{V(O, 1/N)} + \overrightarrow{G_1 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1 \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_N = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1. \\
2. \quad \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R\vec{y}_1 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2.
\end{aligned}$$

On a aussi $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(x_{24}(t)\vec{x}_2 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = \dot{x}_{24}(t)\vec{x}_2 + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\vec{y}_2.$

$$\begin{aligned}
3. \quad \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R\vec{y}_1 + L_2\vec{x}_3)}{dt} \right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1\vec{x}_1 + L_2\dot{\theta}_3\vec{y}_3. \\
\text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(-x_{35}(t)\vec{x}_3 + L_2\vec{x}_3)}{dt} \right]_{R_N} = \\
&= -\dot{x}_{35}(t)\vec{x}_3 + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2)\vec{y}_3. \\
4. \quad \overrightarrow{V(A, 2/4)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{CA}}{dt} \right]_{R_4} = \left[\frac{d(x_{24}(t)\vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t)\vec{x}_2.
\end{aligned}$$

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

Correction

$$\begin{aligned}
1. \quad \mathcal{E}_c(1/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(1/N) \} \otimes \{ \mathcal{E}(1/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(1/N)}}{\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}} \right\}_{G_1} \otimes \\
&\left\{ \frac{M_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/N)}}{\sigma(G_1, 1/N)} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \vec{z}_N}{L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1}{\dot{\theta}_1 (-D_1 \vec{y}_N + C_1 \vec{z}_N)} \right\}_{G_1} \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_1^2 (-D_1 \vec{y}_N + C_1 \vec{z}_N) \vec{z}_N + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_1^2 C_1 + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \\
&\frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2). \\
2. \quad \mathcal{E}_c(2/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(2/N) \} \otimes \{ \mathcal{E}(2/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/N)}}{\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}} \right\}_{G_2} \otimes \\
&\left\{ \frac{M_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/N)}}{\sigma(G_2, 2/N)} \right\}_{G_2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_2 \vec{z}_N}{\dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 (\dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2)}{\dot{\theta}_2 B_2 \vec{z}_N} \right\}_{G_1} \\
&= \frac{1}{2} \left(B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2)^2 \right) = \\
&\frac{1}{2} \left(B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2) \right). \\
3. \quad \mathcal{E}_c(4/N) &= \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2.
\end{aligned}$$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements ;
- $\mathcal{P}\left(4 \overset{\text{Ph}}{\leftrightarrow} 2\right) = \{\mathcal{T}(4 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/4)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}}{\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 4 \rightarrow 2)}} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/4)}}{\overrightarrow{V(A, 2/4)}} \right\}_A$
 $= \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \end{matrix} \right\}_A = F_{h2}\dot{x}_{24};$
- $\mathcal{P}\left(4 \overset{\text{Phf}}{\leftrightarrow} 2\right) = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} -k\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \end{matrix} \right\}_A = -k\dot{x}_{24}^2(t);$
- $\mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Ph}}{\leftrightarrow} 5\right) = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \end{matrix} \right\}_A$
 $= F_{h3}\dot{x}_{35}(t);$
- $\mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Phf}}{\leftrightarrow} 5\right) = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} -k\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \\ - \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \end{matrix} \right\}_A = -k\dot{x}_{35}^2(t).$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements ;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{matrix} -M_1 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \overrightarrow{V(G_1, 1/R_N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \end{matrix} \right\}_{G_1}$
 $= -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \overrightarrow{y_N} = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_N)\} = \left\{ \begin{matrix} -M_2 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2} \end{matrix} \right\}_{G_1}$
 $= -M_2 g \overrightarrow{y_N} \left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2} \right) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 -$

$$\begin{aligned}
& M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2; \\
\blacktriangleright \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) &= -M_3 g \vec{y}_N \left(-\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3 \right) \\
&= -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3); \\
\blacktriangleright \mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) &= \{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P \otimes \\
&\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ h \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_P \\
&= F_t h \dot{\theta}_1;
\end{aligned}$$

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

Correction

$$\text{On a : } \mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$$

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 3 \text{ s}$ et $t = 4 \text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4 \text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Correction

D'après UPSTI. À 1 s , $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14\,500 \text{ W}$ à 3 s $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22\,500 \text{ W}$ Maximum à environ $22,5 \text{ kW}$. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur $[5 \text{ s}; 8 \text{ s}]$).

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW . Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Correction

D'après UPSTI. La différence est de $7,5 \text{ kW}$. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...

TD 2

Quille pendulaire ★ ★ ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Hypothèses

- ▶ Les liaisons sont toutes parfaites.
- ▶ Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- ▶ Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- ▶ Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

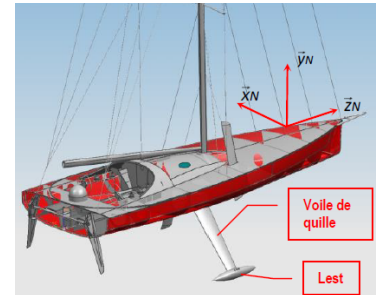
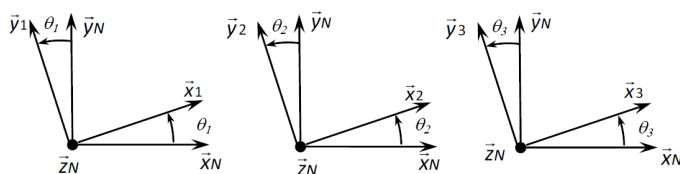


FIGURE 5 – Modèle volumique 3D

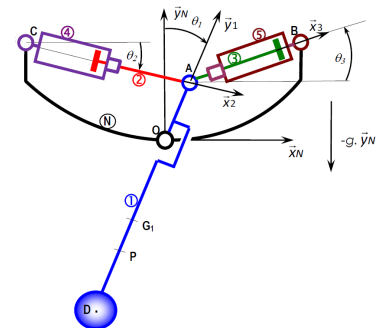


FIGURE 6 – Modèle 2D

FIGURE 7 – Paramétrage

Données géométriques, massiques et inertielles $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{y_1}$;

$$\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}; \overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\overrightarrow{x_3},$$

- Solide 1, masse M_1 , centre d'inertie G_1 , $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\overrightarrow{y_1}$, $I_{G_1}(1) =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 2, masse M_2 , centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\overrightarrow{x_2}$, $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 3, masse $M_3 = M_2$, centre d'inertie G_3 , $\overrightarrow{AG_3} = L_2\overrightarrow{x_3}$,

$$I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 4, masse M_4 , centre d'inertie C , $I_C(4) =$

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 5, masse M_5 , centre d'inertie B , $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_C$.
- Action de pression de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_B$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action hydrodynamique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_P$ avec $\overrightarrow{OP} = -h\overrightarrow{y_1}$.

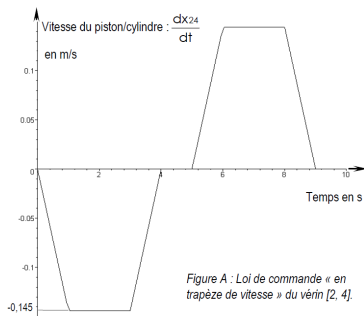
Question 1 Exprimer la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction des données du problème. La méthode sera précisément décrite. Chacun des termes seront calculés. Il n'est pas demandé d'écrire la relation finale.

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure 8.

Question 2 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 3$ s et $t = 4$ s. Sur cet intervalle $[0, 4]$ s, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 3 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.



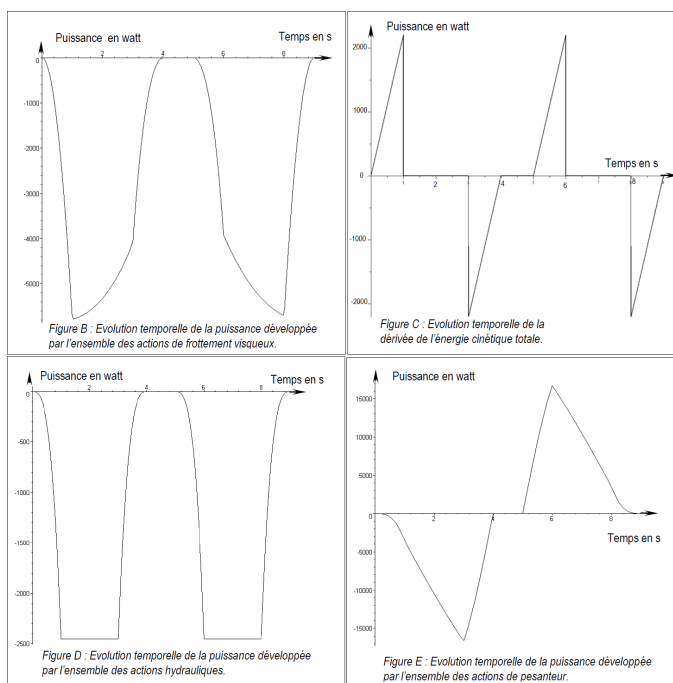


FIGURE 8 – Evolution temporelle des puissances

TD 2

Quille pendulaire ★ ★ ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Question 1 Exprimer la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction des données du problème. La méthode sera précisément décrite. Chacun des termes seront calculés. Il n'est pas demandé d'écrire la relation finale.

Question 2 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\text{ s}$, $t = 1\text{ s}$, $t = 3\text{ s}$ et $t = 4\text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

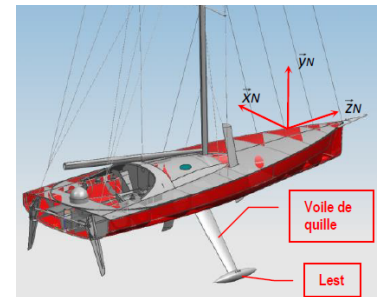
Correction

D'après UPSTI. À 1 s , $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14\,500\text{ W}$ à 3 s $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22\,500\text{ W}$ Maximum à environ $22,5\text{ kW}$. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur $[5\text{ s}; 8\text{ s}]$).

Question 3 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW . Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Correction

D'après UPSTI. La différence est de $7,5\text{ kW}$. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...



Passerelle

Passerelle★

On s'intéresse au dimensionnement des haubans (2) permettant de maintenir en équilibre une passerelle. On modélise la charge sur le pont comme une charge linéique c .

Détermination du torseur de cohésion

Question 1 Réaliser le paramétrage du problème.

Correction

Question 2 Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Correction

Question 3 Déterminer le torseur de cohésion dans les poutres (1) et (2).

Correction

Question 4 Tracer les diagrammes des sollicitations.

Correction

Déformation du hauban et déplacement de la structure

On considère ici que le pont (1) est indéformable, mais que le hauban (2) est déformable.

Question 5 Déterminer l'allongement du câble.

Correction

Question 6 En faisant l'hypothèse que la rotation de la passerelle en A est « petite », déterminer le déplacement du point B puis du point C .

Pas de corrigé pour cet exercice.



FIGURE 9 – Passerelle réelle

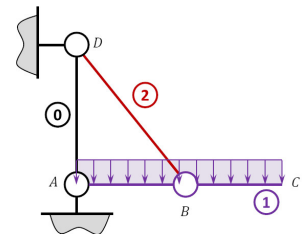
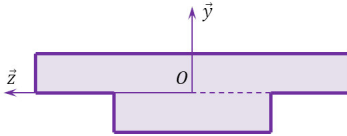


FIGURE 10 – Modèle choisi

Correction**Moment quadratique**

La section de la passerelle est donnée figure suivante.



Question 7 Déterminer le moment quadratique en O par rapport à \vec{y} puis par rapport à \vec{z} .