

## 13 Filtrage numérique et correction numérique des SLCI

### Objectif – B2-09 : Modéliser un correcteur numérique

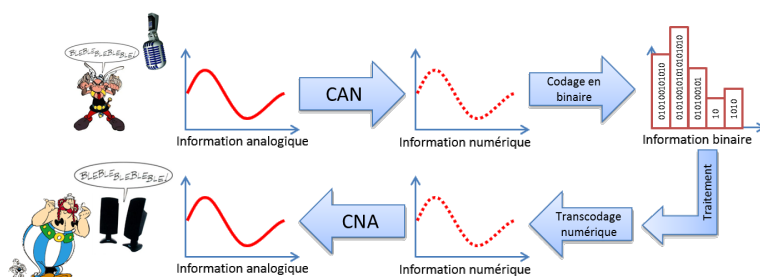
- ▶ Caractérisation des signaux à temps discret (échantillonnage et quantification);
- ▶ modélisation par équations aux différences (équations de récurrence) d'un correcteur numérique (proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase).

13.1	Rappels sur les caractéristiques des signaux numériques . . . . .	1
13.2	Filtrage numérique . . .	3
13.3	Correcteurs numériques	4

### 13.1 Rappels sur les caractéristiques des signaux numériques

Lors du traitement des signaux par un ordinateur, un microcontrôleur, un automate ou autre dispositif, les signaux analogiques (continues) sont convertis en signaux numériques (discrets) pour être traités. On parle de conversion analogique – numérique (CAN). L'opération inverse est alors réalisée lorsqu'il est nécessaire de restituer de l'information à l'utilisateur.

B2-09



#### 13.1.1 Echantillonnage et quantification

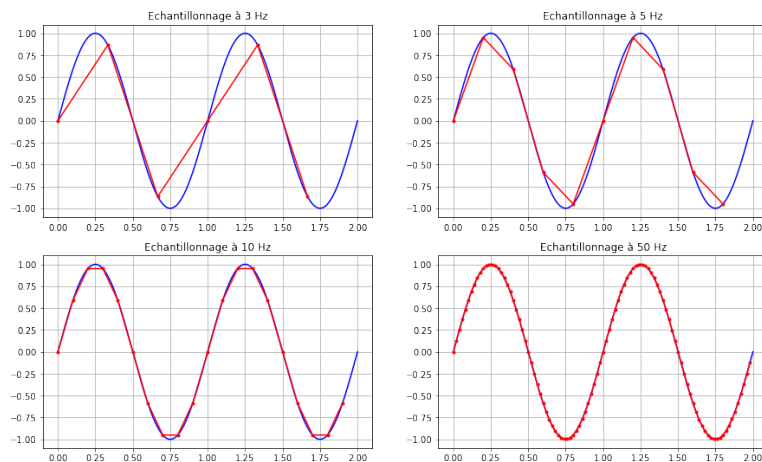
##### Définition –

Echantillonnage Échantillonner un signal consiste à prélever les valeurs de ce signal à intervalles définis. Si ces intervalles sont réguliers, on note  $T_e$  la période d'échantillonnage (en seconde), c'est-à-dire la durée entre deux prélèvements.

On note  $f_e = \frac{1}{T_e}$  la fréquence d'échantillonnage (en Hertz), c'est-à-dire le nombre

d'échantillons par seconde.

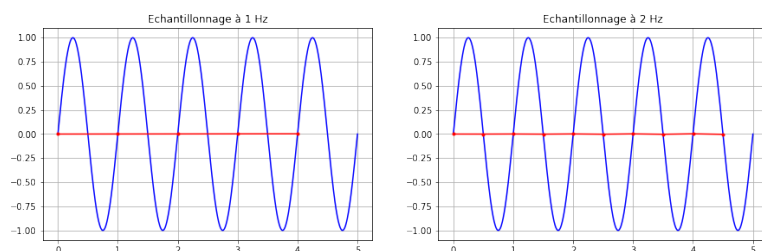
Si on note  $e(t)$  le signal continu, on notera  $e_k = e(kT_e)$  la valeur de l'échantillon  $e(t)$  à l'instant  $kT_e$ .



### Theorem 13.1.1 Théorème de Shannon

Soit un signal périodique décomposable en signaux périodiques dont la fréquence maximale présente est largement supérieure à celle minimale présente. La représentation discrète d'un signal par des échantillons régulièrement espacés exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal.

Dans le cas suivant, le signal est sinusoïdal de fréquence 1 Hz. Avec un échantillonnage de 1 Hz ou 2 Hz, on prélève le signal lorsqu'il est nul. Il est donc opportun de prendre une fréquence d'échantillonnage plus grande afin de ne pas perdre d'information.

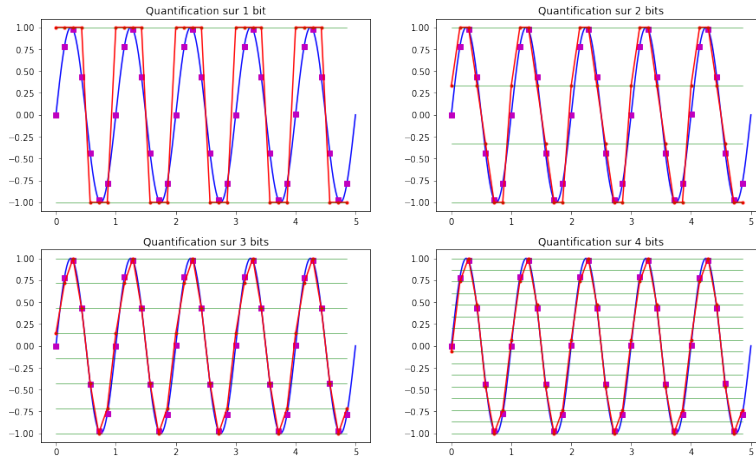


### Définition – Quantification

Quantifier un signal consiste à approcher un signal continu par les valeurs d'un ensemble discret.

En général, le système étant échantillonné sur un système binaire sur  $N$  bits, on peut donc approcher le signal par  $2^N$  valeurs discrètes.

La figure ci-dessous illustre un signal échantillonné à 7 Hz. Il a ensuite été numérisé selon 4 niveaux de quantification. Plus le nombre de bits de codage est élevé, plus l'erreur entre signal numérisé et signal initial est faible.



### Définition – Erreur de quantification

Soit un signal continu borné entre les valeurs  $e_{\min}$  et  $e_{\max}$  échantillonné sur  $N$  bits. Le pas de quantification donne aussi l'erreur maximale de quantification. On a  $q = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{2^N}$ .

## 13.1.2 Conversion analogique – numérique

La conversion analogique consiste, lors de l'acquisition d'un signal, à l'échantillonner et le numériser.

### Définition – Signal numérique

Un signal numérique est un système échantillonné et quantifié.

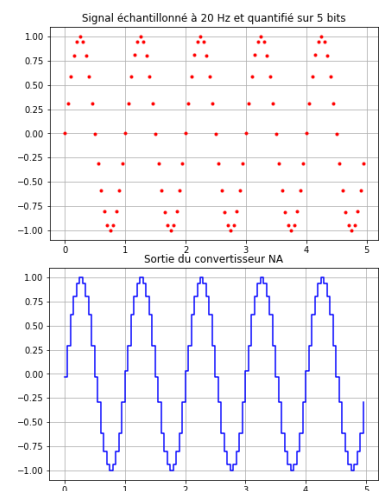
## 13.1.3 Conversion numérique – analogique

Le plus souvent, la conversion numérique – analogique a pour but de synthétiser un signal de commande. Il va donc falloir passer d'un système quantifié échantillonné à un signal analogique. Le plus souvent, on utilise un bloqueur qui va maintenir la valeur  $u_k$  de l'instant  $k$  à l'instant  $k + 1$  (c'est à dire pendant la durée de la période d'échantillonnage  $T_e$ ).

Mathématiquement, on utilise un bloqueur d'ordre 0 dont la fonction de transfert  $B_0(p)$  est  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$ .

## 13.2 Filtrage numérique

Lors de l'acquisition de signaux, le signal numérique issu du convertisseur numérique est (quasiment toujours) bruité. De ce fait, il est nécessaire de le filtrer pour supprimer ce bruit, sans pour autant déformer le signal utile.



**Définition – Filtrage numérique**

Soit  $e_k$  un signal discret. Soit  $s_k$  un signal discret filtré.  $k \in \mathbb{N}$  est le numéro de l'échantillon. On appelle filtrage numérique l'opération mathématique permettant de filtrer un signal, c'est-à-dire d'éliminer certaines composantes harmoniques.

**13.2.1 Filtrage numérique passe-bas****Définition – Filtre passe-bas du premier ordre**

On donne l'équation différentielle d'un filtre du premier ordre :  $s(t) + \tau \frac{d}{dt} [s(t)] = e(t)$ .  $T_e$  est la période d'échantillonnage du système. La pulsation de coupure à -3 dB du filtre est donné par  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ .

On montre que  $s_k = \frac{T_e}{T_e + \tau} e_k + \frac{\tau}{T_e + \tau} s_{k-1}$  avec  $T_e$  période d'échantillonnage du système.

**Démonstration**

On a  $s(t) + \tau \frac{d}{dt} [s(t)] = e(t)$ . En approximant  $\frac{d}{dt} [s(t)]$  par  $\frac{s(t) - s(t - T_e)}{T_e}$ , puis en discrétisant l'équation différentielle, on a donc :  $s_k + \tau \frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k \left(1 + \frac{\tau}{T_e}\right) - s_{k-1} \frac{\tau}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k \frac{T_e + \tau}{T_e} = e_k + s_{k-1} \frac{\tau}{T_e} \Leftrightarrow s_k = e_k \frac{T_e}{T_e + \tau} + s_{k-1} \frac{\tau}{T_e + \tau} \Leftrightarrow s_k = e_k \frac{T_e}{T_e + \tau} + s_{k-1} \frac{\tau}{T_e + \tau}$ .

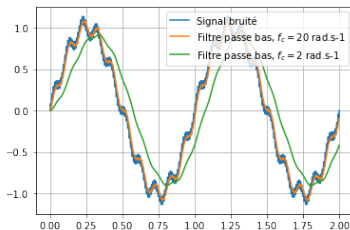


FIGURE 13.1 – Filtrage avec un filtre passe bas

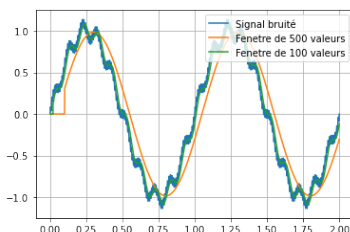


FIGURE 13.2 – Filtrage avec moyenne glissante

Caractéristiques du signal bruité :

$$\blacktriangleright s(t) = \sin(t) + 0,1 \sin(2\pi \times 10t) + 0,05 \sin(2\pi \times 100t).$$

**13.2.2 Filtrage numérique à moyenne glissante**

Pour réaliser un filtrage à moyenne glissante, le signal filtré  $f_k$  à l'instant  $k$  est égale à le moyenne des  $N$  précédentes valeurs du signal  $s_k$ . On a donc,  $\forall k \geq N - 1$ ,  $f_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s_{k-i}$ .

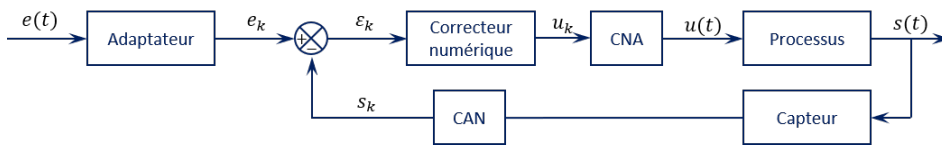
Pendant les  $N - 1$  premiers instants le signal filtré est donc à l'état nul. Ce filtre induit donc un retard temporel.

Caractéristiques du signal bruité :

$$\blacktriangleright s(t) = \sin(t) + 0,1 \sin(2\pi \times 10t) + 0,05 \sin(2\pi \times 100t).$$

**13.3 Correcteurs numériques**

Les systèmes asservis utilisés sont en réalité le plus souvent numérique. Ainsi, le calcul de l'écart et la correction sont réalisés sous formes numériques par le microcontrôleur, la carte d'axe ou l'automate.



Ainsi le correcteur numérique va devoir synthétiser la commande numérique  $u_k$  en fonction de l'écart  $\varepsilon_k$ .

### 13.3.1 Correcteur P

#### Définition – Correcteur proportionnel

Dans le domaine temporel, on a  $u(t) = K_p \varepsilon(t)$ . Cela est traduit par le relation de récurrence suivante :  $u_k = K_p \varepsilon_k$ .

### 13.3.2 Correcteur PI

#### Définition – Correcteur proportionnel intégral

Dans le domaine temporel, on a  $u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ . Cela est traduit par le relation de récurrence suivante :  $u_k = u_{k-1} + K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right)$ .

#### Démonstration

Pour déterminer la relation de récurrence, il faut calculer  $\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ . Pour cela, si on utilise la méthode des rectangles à droite, on a  $\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^k \varepsilon_j T_e$ ; donc

$$u_k = K_p \left( \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \right).$$

Par ailleurs, à l'instant  $k-1$ ,  $u_{k-1} = K_p \left( \varepsilon_{k-1} + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j \right)$

Cherchons une relation entre  $u_{k-1}$  et  $u_k$  :  $u_k = K_p \left( \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j) + \frac{T_e}{T_i} \varepsilon_k \right)$

$$= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j) + \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k-1} \right)$$

$$= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + K_p \left( \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j) + \varepsilon_{k-1} \right) = K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + u_{k-1}. \text{ CQFD.}$$

### 13.3.3 Correcteur PID

#### Définition – Correcteur proportionnel intégral et dérivé

Dans le domaine temporel, on a  $u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$ .  
Cela est traduit par la relation de récurrence suivante :  $u_k = u_{k-1} + K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) - \varepsilon_{k-1} \left( 1 + \frac{T_d}{T_e} \right) \right)$ .

#### Démonstration

On a déjà vu que pour un correcteur PI,  $u_k = K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + u_{k-1}$ .

Par ailleurs,  $T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \simeq T_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e}$ . On a donc  $u_k = K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + u_{k-1} + K_p T_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e}$   
 $= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} + T_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e} \right) + u_{k-1}$   
 $= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) - \varepsilon_{k-1} \left( 1 + \frac{T_d}{T_e} \right) \right) + u_{k-1}$