TD 1
Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC^{2}E) – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2016.

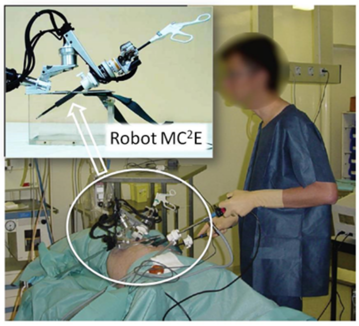
Mise en situation

C1-02

C2-04

Le robot MC^{2}E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.



L'axe en translation du MC^{2}E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC^{2}E.

Objectif

Modéliser et valider l'asservissement en effort. On cherche à savoir si l'asservissement réalisé permet d'obtenir un effort constant sur l'effecteur.

Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta_m(t)}{\mathrm{d}t^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J, inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\dfrac{\mathrm{d}\theta_m(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :

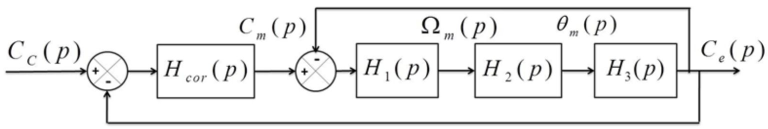


Figure 1.1 – Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC^{2}E ;
- $C_c(p)$, couple de consigne ;
- $C_m(p)$, couple moteur ;
- $H_{\text{cor}}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

Dans un premier temps, on prendra $H_{\text{cor}}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B. On s'intéresse ici à la définition analytique de B. Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

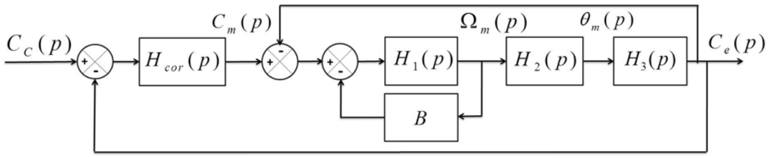


Figure 1.2 – Régulation avec retour tachymétrique

On règle B de telle façon que, pour $H_{\text{cor}}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{\text{BO}}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{1}{(1+\tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B, en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ.

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i. Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.

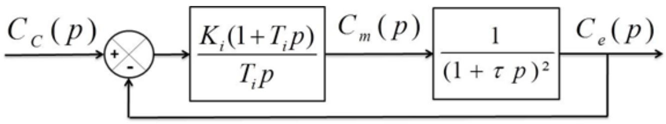


Figure 1.3 – Régulation avec correcteur PI.

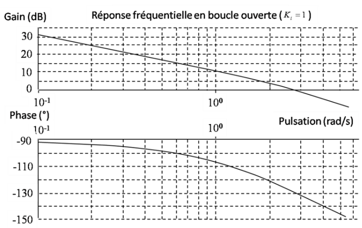
Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

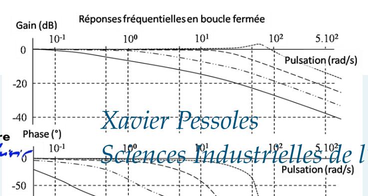
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\dfrac{K_{\text{BF}}}{1+\dfrac{2\xi_{BF}}{\omega_{0\text{BF}}}p+\dfrac{p^2}{\omega_{0\text{BF}}^2}}$.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i.

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour $K_i = 1$ et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de K_i sont données ci-dessous.

Question 7 En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour K_i permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.

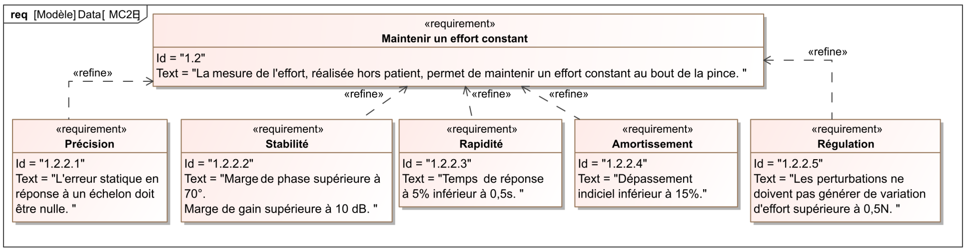




Retour sur le cahier des charges

Question 8 Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			



TD 2
Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

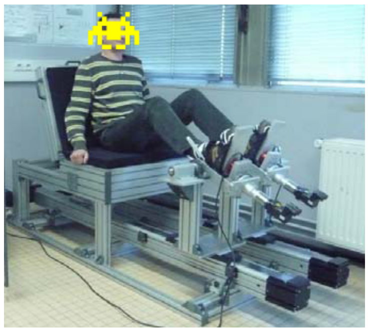
CCP PSI 2013.

Mise en situation

C1-02

C2-04

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

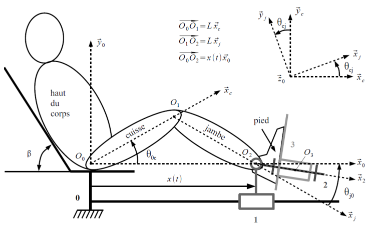


Objectif

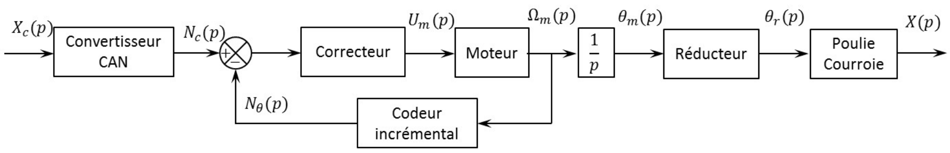
L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0{,}2\,\text{s}$
Pulsation au gain unité	$50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$



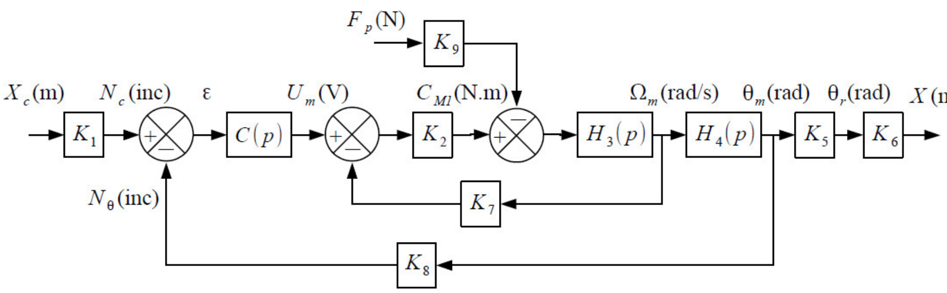
La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Soit le modèle donné dans la figure ci-contre.

Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)\,r\rho_1\dot{\omega}_m(t)=\frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r}-F_p(t).$$

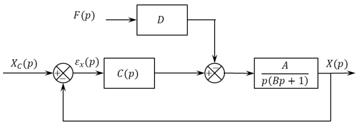
On note :

- M la masse du chariot et m la masse du support de pied ;
- $\rho_1=\dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur ;
- $r=46{,}1\times 10^{-3}$ m le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie ;
- $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.

Correction proportionnelle



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D, avec $A=6700$ m/V, $B=0{,}01$ s et $D=6$ V/N.

On utilise maintenant le schéma-bloc ci-contre. On suppose que $C(p)=K_c$.

Question 2 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.

Question 3 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C=1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p)=K_i\left(1+\dfrac{1}{T_ip}\right)$

Question 5 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.

Question 6 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 7 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\text{FTBO}(p)=\dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p=0$.

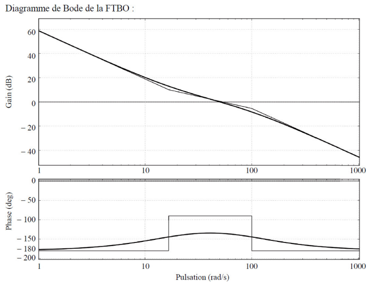
Question 8 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 9 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

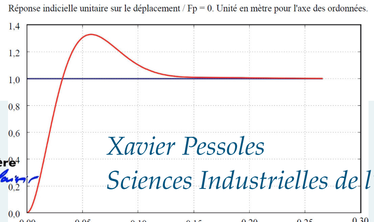
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p=0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 10 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / Fp = 0. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 3
Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Sujet

CCP – PSI 2015.

Présentation

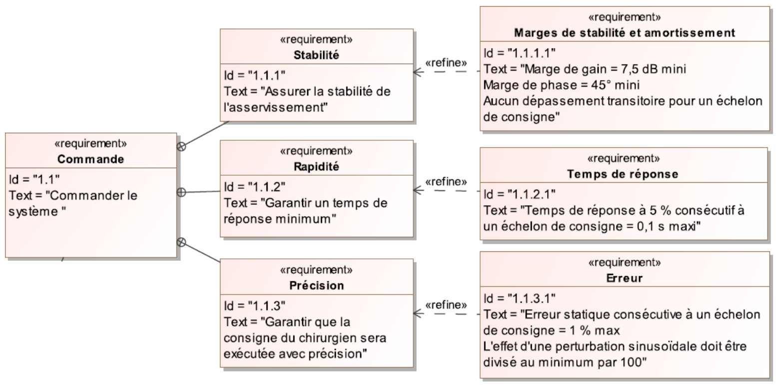
Réalisation de la commande de l'esclave

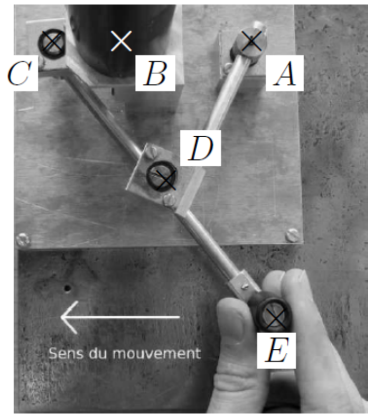
C1-02

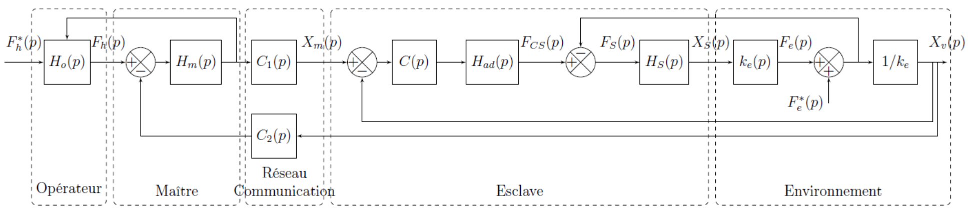
C2-04

Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).





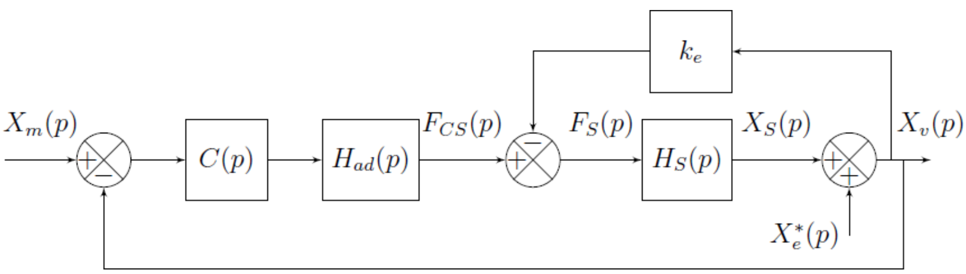


Modélisation et étude des performances du système sans correction

Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

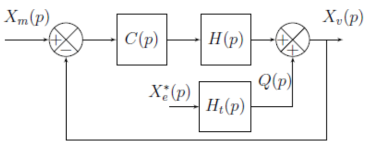
La modélisation permettant de relier la consigne $x_m(t)$ issue du dispositif maître au déplacement $x_v(t)$ de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{\text{ad}}(p) = k_a = 1\,\text{Nm}^{-1}$ permet d'adapter la consigne position en consigne force ;

- $H_S(p) = \dfrac{X_S(p)}{F_S(p)} = \dfrac{k_S}{p\,(m_S p + b_S)}$ avec $k_S = 1\,\mathrm{m\,N^{-1}}$, $m_S = 0{,}152\,\mathrm{kg}$ et $b_S = 1{,}426\,\mathrm{Nsm^{-1}}$;
- $k_e = 200\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Question 1 Simplifier le schéma-blocs précédant pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e, k_a et $H_S(p)$.

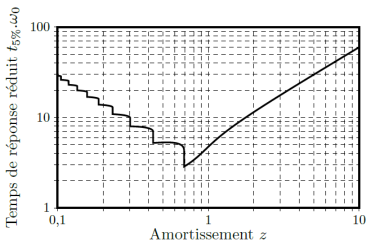


Pour la suite du problème, on prendra : $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

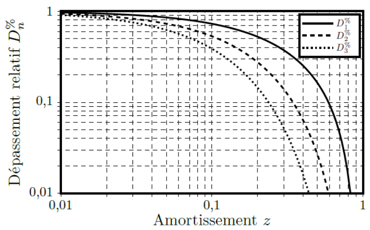
Vérification des exigences sans correction : $C(p) = 1$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_e^*(p) = 0$) : $F_{BF1}(p) = \dfrac{X_v(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z). Faire l'application numérique.

Question 3 En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$

Objectif

Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

Question 4 Les résultats d'une simulation pour un gain $K_i = 100$ sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

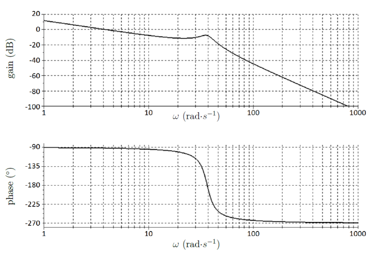
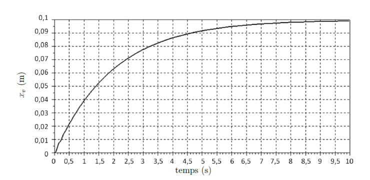


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K_i = 100$

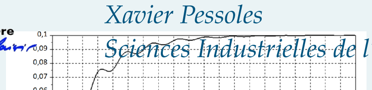


Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et $K_i = 100$

Question 5 Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

Question 6 Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain K_i. Déterminer la valeur K_{imax} du coefficient K_i qui permet de respecter les marges de stabilité.

Question 7 En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».



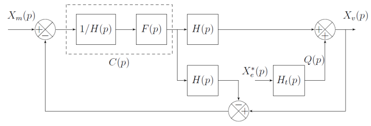
Question 8 Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction $F_{BF2}(j\omega) = \dfrac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$ pour $K_i = K_{imax}$. Quelle sera l'atténuation minimale $|F_{BF2}(j\omega)|_{min}$ de la perturbation x_e^* (en %) sur l'intervalle $[1{,}25\,\mathrm{rad\,s^{-1}} ; 12{,}5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}]$. Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

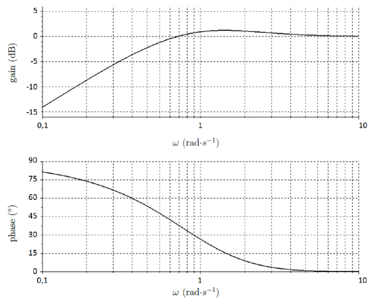


Avec $F(p)$ la fonction de transfert d'un filtre de la forme $F(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

La grandeur de sortie $X_v(p)$ peut s'exprimer par l'équation : $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$ avec $A(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et $B(p) = \dfrac{Tp\,(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Question 9 Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

Question 10 Le diagramme de Bode de $B(j\omega)$ pour $T = 1$ s est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle $[1{,}25\,\mathrm{rad\,s^{-1}} ; 12{,}5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}]$. Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



TD 4
Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

C1-02

C2-04

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	**Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45°$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1\, rd/s$

Modélisation du moteur à courant continu

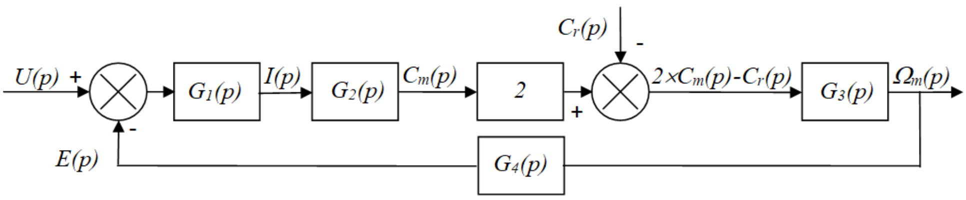
Hypothèses et données :

- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0{,}59\,\text{mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0{,}0386\,\Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6\,\text{N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800\,\text{kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5{,}67\,\text{Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_T = 5{,}77\,\text{Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} + f\omega_m(t)$;
- loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

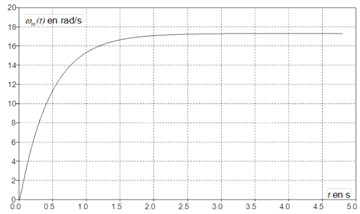


Figure 1.4 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

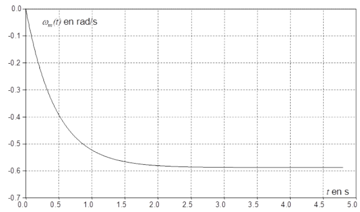
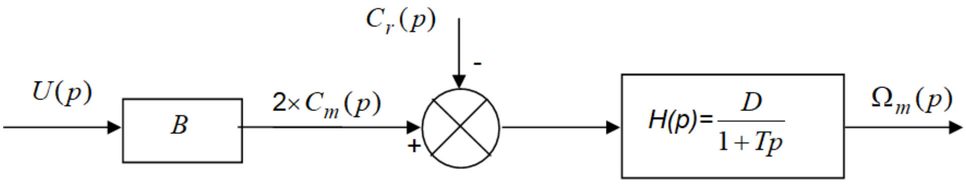


Figure 1.5 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.

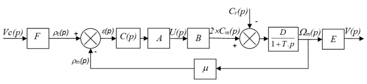
Question 3 Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



Question 4 Donnez la valeur numérique des trois constantes B, D et T.

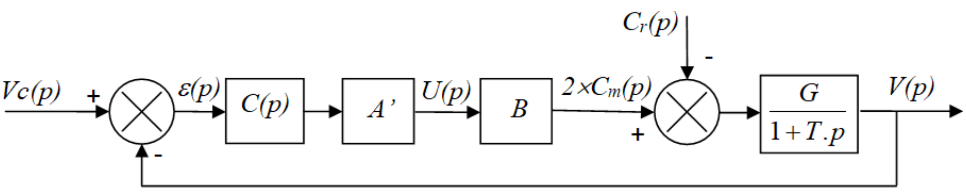
La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.



- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F.
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0{,}716$ V s/rad transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0{,}1$ m (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminez l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G. Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0{,}47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$C(p) = C_0 = 1$.

Question 6 Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculez en fonction de C_0, A', B, G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculez en fonction de C_0, A', B, G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{Nm}$ qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460\,\text{Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \dfrac{C_i}{p}$.

Question 12 Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO(p). Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracez le diagramme asymptotique de Bode de FTBO(p). Tracez également l'allure des courbes.

Question 14 Quelles valeurs numériques de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Ces valeurs numériques de C_i permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.

Question 16 On suppose Cr(p)=0. Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculez numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{N m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Question 18 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifiez.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculez l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p)\dfrac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\left(1+Tp\right)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de −135° ?

Question 22 Tracez en fonction de a, τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec a>1. Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum $\varphi_{\max}$ ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculez numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

Question 24 Donnez l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que $\varphi_{\max}$ soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculez numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifiez.