

TD 1

Exosquelette Atalante – Sujet

Centrale Supélec PSI 2023.

Contexte

Pensé pour minimiser le temps de formation pour le patient et le thérapeute, l'exosquelette Atalante (figure 1.1), développé par la société Wandercraft a pour volonté d'optimiser les séances de rééducation, et à terme d'aboutir à une solution permettant l'autonomie quasi totale du patient. En effet, ce système permet la verticalisation et des déplacements pouvant s'affranchir de toute dépendance à une tierce personne. De par sa liberté d'utilisation pour le patient, les bénéfices sont importants : possibilité de retours sensoriels, flexibilité de l'entraînement à la marche et à la course ou encore personnalisation des programmes proposés.

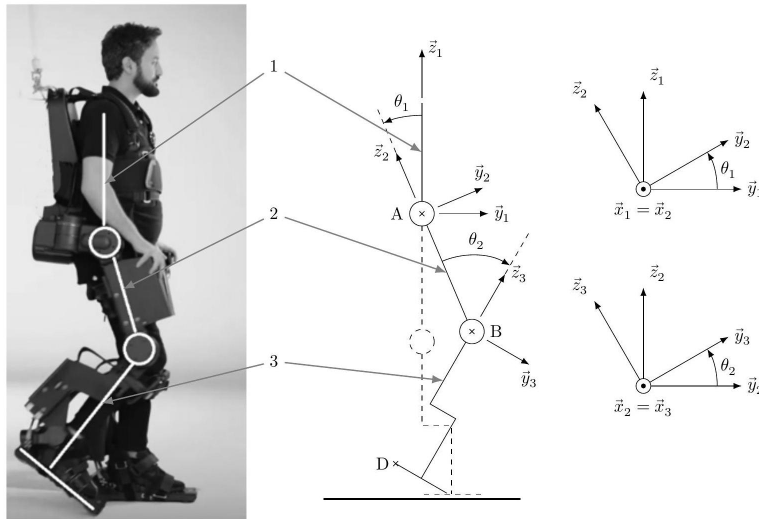


FIGURE 1.1 – Exosquelette Atalante et modélisation 3D associée

FIGURE 1.2 – Modélisation utilisée pour la marche en ligne droite

Les hypothèses et notations seront les suivantes (figure 1.2) :

- ▶ l'étude est menée dans le plan sagittal (A, \vec{y}_1, \vec{z}_1), où \vec{z}_1 est vertical ascendant ;
- ▶ les différentes caractéristiques de dimension, masse et inertie des différents solides sont précisées figure 1.3, 1.4, 1.5 ;
- ▶ le buste 1 étant animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, il est considéré comme galiléen ;
- ▶ l'étude se limite à la partie de la marche pour laquelle une des deux jambes est totalement décollée du sol (de 70% à 100% de la foulée) ;
- ▶ le buste 1 est en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec la cuisse 2 ; on note $\theta_1 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$;
- ▶ l'ensemble {pied+tibia 3, considéré comme solidaire, est en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_1) avec la cuisse 2 ; on note $\theta_2 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$;
- ▶ les liaisons décrites précédemment sont supposées parfaites.

Objectif

Définir un modèle dynamique de l'exosquelette et montrer la nécessité de mettre en place un asservissement.

Afin d'élaborer une commande pour l'exosquelette, il est nécessaire au préalable de définir un modèle dynamique représentatif de son comportement. Seule la commande

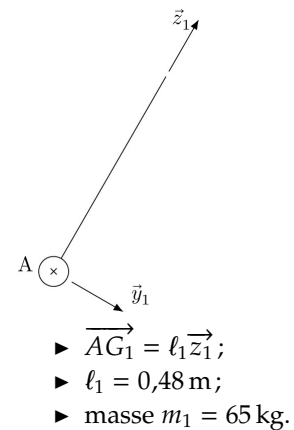
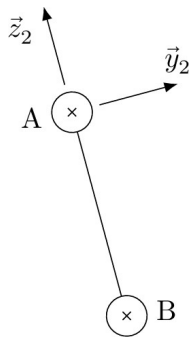
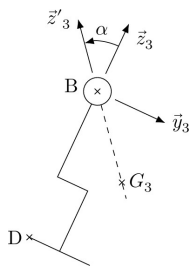


FIGURE 1.3 – Buste 1



- ▶ $\overrightarrow{BG_2} = \ell_2 \vec{z}_2$ avec $\ell_2 = 0,25 \text{ m}$;
- ▶ $\overrightarrow{BA} = L_2 \vec{z}_2$ avec $L_2 = 0,4 \text{ m}$
- ▶ masse $m_2 = 15 \text{ kg}$;
- ▶ $I_A(2) = \begin{pmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$;
- ▶ $I_{x2} = 0,10 \text{ kg m}^2$.

FIGURE 1.4 – Cuisse 2



- ▶ $\overrightarrow{DB} = L_3 \vec{z}_3$ avec $L_3 = 0,55 \text{ m}$;
- ▶ $\overrightarrow{DG_3} = \ell_0 \vec{y}_3 + \ell_3 \vec{z}_3$ avec $\ell_0 = 0,2 \text{ m}$, $\ell_3 = 0,3 \text{ m}$
- ▶ $\overrightarrow{BG_3} = -L_0 \vec{z}_3'$
- ▶ masse $m_3 = 18 \text{ kg}$;
- ▶ $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & I_{yz3} \\ 0 & I_{yz3} & I_{z3} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$;
- ▶ $I_{x3} = 0,08 \text{ kg m}^2$.

FIGURE 1.5 – Tibia + Pied 3

des articulations sagittales de hanche et de genou d'une jambe lorsqu'elle est décollée du sol sera considérée ici (cas de la marche en ligne droite) avec les hypothèses et notations supplémentaires suivante :

- ▶ la liaison pivot entre 1 et 2 est équipée d'un actionneur dont le couple de sortie (appliqué par 1 sur 2) est noté C_1 ;
- ▶ la liaison pivot entre 2 et 3 est équipée d'un actionneur dont le couple de sortie (appliqué par 2 sur 3) est noté C_2 ;
- ▶ on note respectivement C_{genou} et C_{hanche} , les couples appliqués par le patient au niveau des articulations de genou et de hanche.

Comportement dynamique de l'exosquelette

On pose pour la suite : $\overrightarrow{BG_3} = -L_0 \vec{z}'$. On note α l'angle entre \vec{z}_3 et \vec{z}_3' : $\alpha = (\vec{y}_3, \vec{y}_3') = (\vec{z}_3, \vec{z}_3')$. On montre que $L_0 = \sqrt{l_0^2 + (L_3 - l_3)^2}$ et $\alpha = \arcsin\left(\frac{l_0}{L_0}\right)$ avec $L_0 = 0,32 \text{ m}$ et $\alpha \approx 0,67 \text{ rad} \approx 39^\circ$.

Question 1 Déterminer l'expression de l'accélération du point G_3 (cf. annexe B et question 6) appartenant à l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, en fonction de $L_0, L_2, \theta_1, \theta_2$ et leurs dérivées temporelles.

Question 2 Déterminer l'expression de la projection suivant \vec{x}_1 du moment dynamique en A de l'ensemble { pied+tibia } 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1$, sous la forme : $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1 = A_1 \ddot{\theta}_1 + A_2 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 + A_4 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$. Préciser les expressions littérales de A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

Question 3 Proposer une démarche permettant de déterminer l'expression de C_1 , l'action mécanique exercée sur la cuisse 2 par l'actionneur correspondant. Préciser le(les) ensemble(s) isolé(s), le(s) bilan(s) des actions mécaniques extérieures, le(s) théorème(s) utilisé(s) et la(les) équation(s) utile(s).

Question 4 Déterminer l'expression de C_1 en fonction de θ_1, θ_2 , leurs dérivées, de C_{hanche} et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

D'une manière similaire aux questions précédentes, l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble {pied+tibia} 3 permet d'obtenir l'expression de C_2 , le couple fourni par l'actionneur de genou sagittal : $C_2 = [I_{x3} + m_3 L_0^2] (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_3 L_2 L_0 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \alpha) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \alpha)] + m_3 g L_0 \sin(\theta_2 + \theta_1 + \alpha) - C_{\text{genou}}$.

Question 5 Dédurre des deux équations précédentes que le modèle dynamique considéré peut s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} +$

$M_2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C + M_3 \begin{pmatrix} C_{\text{hanche}} \\ C_{\text{genou}} \end{pmatrix}$ où C est une matrice colonne et M_1, M_2 et M_3 sont des matrices 2×2 . Donner l'expression littérale des coefficients de C, M_1, M_2 et M_3 par des relations non linéaires des paramètres de mouvement (θ_1, θ_2), leurs dérivés premières et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties du problème.

TD 2

Gyrolock – Sujet

Centrale Supélec PSI 2022.

Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

Objectif

Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaîne d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

C1-05

C2-09

Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

Pour déterminer les actions mécaniques créées par le système GyroLock sur le stabilisateur (1), un modèle simplifié du mécanisme, donné figure 1.6, est utilisé. Ce modèle simplifié, dans lequel la liaison entre le stabilisateur (1) et la table d'opération (0) est modélisée par un encastrement, permet :

- ▶ d'étudier l'effet gyroscopique $c_x(t)$ créé par le système GyroLock permettant de compenser l'effet de l'effort cardiaque, sans prendre en compte le mouvement du stabilisateur (1);
- ▶ de déterminer les conditions d'utilisation du système GyroLock afin de minimiser les autres actions mécaniques créées et considérées comme indésirables.

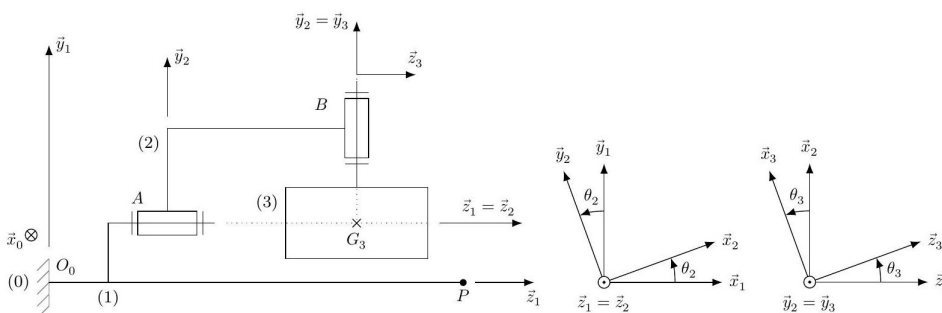


FIGURE 1.6 – Schéma cinématique simplifié du mécanisme (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$) et figures de changement de base

Le système GyroLock, dont la modélisation est donnée figure 1.6, est composé de trois solides :

- ▶ le support, relié au stabilisateur (1) de repère associé $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en liaison encastrement au point O_0 avec la table d'opération (0);
- ▶ l'étrier (2) de repère associé $\mathcal{R}_2 (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1 = \vec{z}_2)$ tel que $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
- ▶ la toupie (3) de repère associé $\mathcal{R}_3 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_2 = \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.

Pour la modélisation des actions mécaniques extérieures, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- ▶ les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques;

Toutes les liaisons sont supposées parfaites et les caractéristiques inertielles des solides sont les suivantes :

- ▶ étrier (2) : masse et inertie négligeables;
- ▶ toupie (3) : masse m_3 , centre d'inertie G_3 tel que $\vec{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$. L'axe $(G_3, \vec{y}_3 = \vec{y}_2)$ étant un axe de symétrie de révolution de la toupie (3), sa matrice d'inertie au point G_3 s'exprime dans la base \mathcal{B}_2 sous la forme $\mathcal{I}(G_3, 3) =$

$$\begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

- l'action mécanique transmise par la liaison encastrement entre les solides (0) et (1) est modélisée au point G_3 par $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01}\vec{x}_1 + Y_{01}\vec{y}_1 + Z_{01}\vec{z}_1 \\ L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1 \end{array} \right\}_{G_3}$.

Le référentiel $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la table d'opération (0) est galiléen.

Question 1 Exprimer, dans la base \mathcal{B}_2 , le moment cinétique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel \mathcal{R}_0 , noté $\vec{\sigma} (G_3, 3/0)$.

Question 2 En déduire, dans la base \mathcal{B}_2 , le moment dynamique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel \mathcal{R}_0 , noté $\vec{\delta} (G_3, 3/0)$.

Question 3 Après avoir clairement précisé le système isolé et le théorème utilisé, exprimer L_{01} , M_{01} et N_{01} en fonction de θ_2 , θ_3 (et leurs dérivées temporelles), A_3 et B_3 .

Lorsque la toupie (3) tourne avec une vitesse constante ω_3 par rapport à l'étrier (2), l'expression des moments L_{01} , M_{01} et N_{01} est la suivante :
$$\begin{cases} L_{01}(t) = -c_x(t) \cos \theta_2(t) \\ M_{01}(t) = -c_x(t) \sin \theta_2(t) \\ N_{01}(t) = A_3 \ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

où $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2(t) = K_3 \dot{\theta}_2(t)$ correspond à l'effet gyroscopique.

L'action du cœur sur le stabilisateur est modélisée par un glisseur de résultante $\vec{R}_{c \rightarrow 1} = f_c \vec{y}_1$ au point P tel que $\vec{O_0 P} = L \vec{z}_1$.

Les moments L_{01} , M_{01} et N_{01} doivent rester faibles afin de limiter les déformations de l'attache reconfigurable liant le stabilisateur (1) à la table d'opération (0).

Question 4 En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer $\dot{\theta}_2$ en fonction de K_3 , θ_2 , f_c et $L - L_{G_3}$ permettant de garantir $L_{01} = 0$ et de compenser l'effet de l'effort cardiaque f_c .

Question 5 Donner une condition sur l'angle θ_2 et sur l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ afin que les moments M_{01} et N_{01} soient faibles.

L'étrier (2) doit être piloté en vitesse de rotation pour que l'effet gyroscopique $c_x(t) = K_3 \dot{\theta}_2(t)$ compense l'effet de l'effort cardiaque. La campagne expérimentale présentée en partie I a permis de déterminer que la fréquence fondamentale de l'effort cardiaque $f_c(t)$ est de 1,5 Hz.

La réponse de l'étrier (2) sera considérée comme suffisamment réactive si le temps de réponse à 5% de la vitesse $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$ pour une consigne $\dot{\theta}_{c2}(t) = \omega_{c2}(t)$ en échelon est d'un ordre inférieur à la demi-période du signal perturbateur $f_c(t)$.

La réponse expérimentale à un échelon de vitesse $\omega_{c2}(t)$ d'amplitude $2000 \text{ deg} \cdot \text{s}^{-1}$ est représentée figure 1.7.

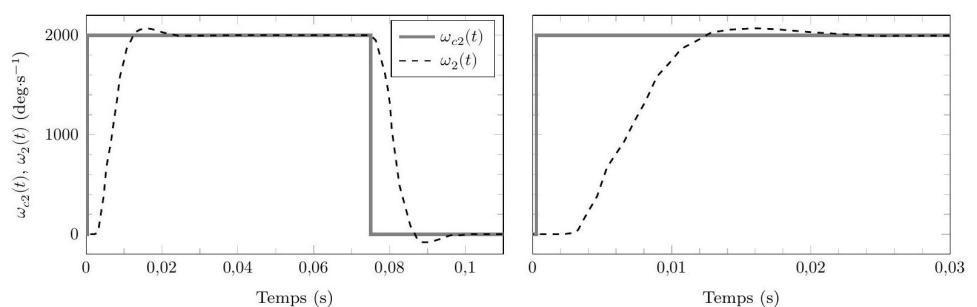


FIGURE 1.7 – Réponse expérimentale de l'étrier et consigne associée (à droite, zoom sur le régime transitoire)

Les transformées de Laplace de $\omega_2(t)$, $\omega_{c2}(t)$, $\theta_2(t)$ et $c_x(t)$ sont notées $\Omega_2(p)$, $\Omega_{c2}(p)$, $\theta_2(p)$ et $C_x(p)$.

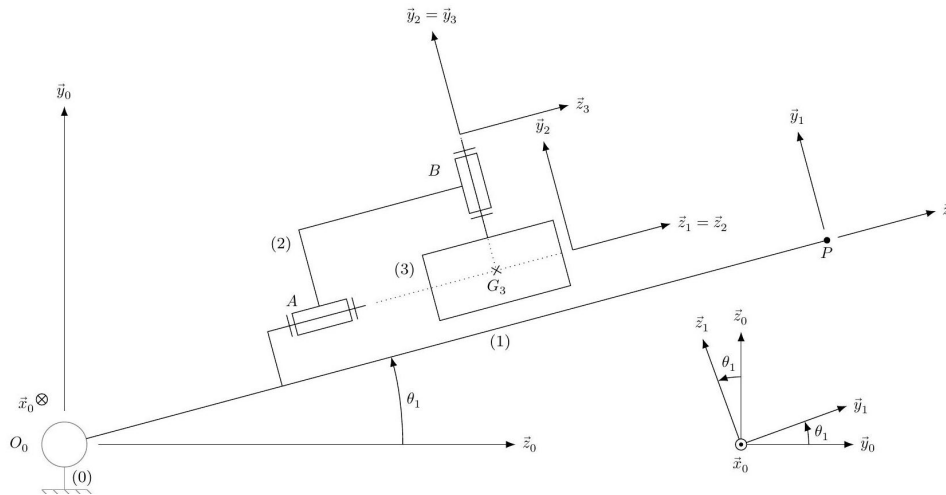
Question 6 Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2) $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{r2}(p)}$ peut alors être approchée par un gain statique K_2 de valeur à préciser. Il faut s'assurer que la position θ_2 de l'étrier (2) ne s'éloigne pas trop de sa position de référence $\theta_2^* = 0$. Le non-respect de cette condition, appelé dérive de l'étrier, génère un moment parasite M_{01} responsable d'un déplacement du point P selon \vec{x}_1 .

TD 3

Gyrolock – Sujet

Centrale Supélec PSI 2022.

Comportement dynamique du stabilisateur



C1-05

C2-09

FIGURE 1.8 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 1.8), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe (O_0, \vec{x}_0) entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f , d'où $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$;
- les autres liaisons sont supposées parfaites;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} f_c \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_P$;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\vec{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\vec{O_0G_1} = L_{G_1} \vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables;
- la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\vec{O_0G_3} = L_{G_3} \vec{z}_1 + H_{G_3} \vec{y}_1$;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques. Q 14. Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 1 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur \vec{x}_0 du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel \mathcal{R}_0 .

Question 2 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base \mathcal{B}_1 , puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base \mathcal{B}_1 .

1: ($\ddot{\theta}_2 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante).

Question 3 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre¹, il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de A_3 , $c_x(t)$, m_3 , L_{G_3} , H_{G_3} et $\ddot{\theta}_1(t)$.

Question 4 Exprimer J_x en fonction de A_1 , A_3 , m_1 , m_3 , L_{G_1} , L_{G_3} et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t) = L \theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t)$, $c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p)$, $C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 5 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 1.9 en fonction de L , J_x , f et k .

On rappelle que $L = 0,3$ m et les valeurs retenues pour J_x , f et k sont :

- $J_x = 1,14 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- $-f = 64 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$;
- $-k = 95 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$.

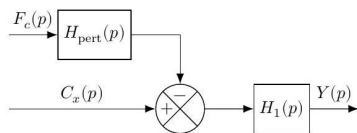


FIGURE 1.9 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

Question 6 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1 , amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1 . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).