Modélisation géométrique – Lois entrées-sorties 6

6.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

Méthode – Modélisation d'un système mécanique réel

Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- identifier les classes d'équivalence cinématique, c'est-à-dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement ;
- identifier les surfaces de contact entre les classes d'équivalence ;
- associer une liaison cinématique aux surfaces de contact ;
- tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'équivalence et respectant leur positionnement relatif ;
- relier les liaisons de manière filaire ;
- indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'équivalence.

Méthode – Paramétrage d'un mécanisme cinématique

Pour paramétrer un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'équivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'équivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'équivalence).

- si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation) ;
- si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.

Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

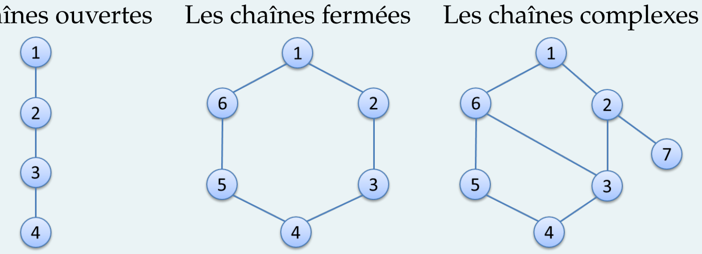
Définition – Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

- les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment) ;
- les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :

Les chaînes ouvertes Les chaînes fermées Les chaînes complexes



6.2 Résolution des lois entrée–sortie

Méthode – Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétrer le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

Méthode – Manipulation du système d'équations

1. Pour supprimer une longueur λ : on met les deux équations sous la forme $\lambda =$ et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle φ : on met une équation sous la forme $\cos\varphi =$ et la seconde sous la forme $\sin\varphi =$ et on utilise la relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

Méthode – Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.

Modélisation cinématique 7

Définition – Solide Indéformable

On considère deux points A et B d'un solide indéformable noté S. On note t le temps. $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB(t)}^2 =$ constante.

Définition – Trajectoire d'un point appartenant à un solide

Soit un point P se déplaçant dans un repère $\mathcal{R}_0\left(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. La trajectoire du point P est définie par la courbe $\mathcal{C}(t)$ paramétrée par le temps t. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\overrightarrow{i_0} + y(t)\overrightarrow{j_0} + z(t)\overrightarrow{k_0}$$

Définition – Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1$, $\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0. Soit un point P appartenant au solide S_1. La vitesse du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi : $\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0P(t)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

Résultat –

Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule de centre O alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot de d'axe $\left(O, \overrightarrow{u}\right)$ alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule à doigt de centre O alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$.

Résultat – Dérivation vectorielle

Soient S_0 et S_1 deux solides en mouvements relatifs et $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ les repères orthonormés directs associés. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{v}.$$

Résultat – Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient A et B deux points appartenant à un solide S_1 en mouvement par rapport à S_0. Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(\mathbf{B} \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(\mathbf{A} \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{R}}$$

Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ et un solide S_2 par rapport au solide S_1. Pour chacun des points A appartenant au solide S_2, on a :

$$\overrightarrow{V\left(A, S_2/\mathcal{R}_0\right)} = \overrightarrow{V\left(A, S_2/S_1\right)} + \overrightarrow{V\left(A, S_1/\mathcal{R}_0\right)}$$

Remarque

- $\overrightarrow{V\left(A, S_2/\mathcal{R}_0\right)}$ est appelé vecteur vitesse absolu ;
- $\overrightarrow{V\left(A, S_2/S_1\right)}$ est appelé vecteur vitesse relatif ;
- $\overrightarrow{V\left(A, S_1/\mathcal{R}_0\right)}$ est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ et un solide S_2 par rapport au solide S_1. On a :

$$\overrightarrow{\Omega\left(S_2/\mathcal{R}_0\right)} = \overrightarrow{\Omega\left(S_2/S_1\right)} + \overrightarrow{\Omega\left(S_1/\mathcal{R}_0\right)}$$

Définition – Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0$ $\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1$, $\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0.
Soit un point P appartenant au solide S_1. L'accélération du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t)\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

8 Transmetteurs de puissance

8.1 Transmission par engrenages

Définition –

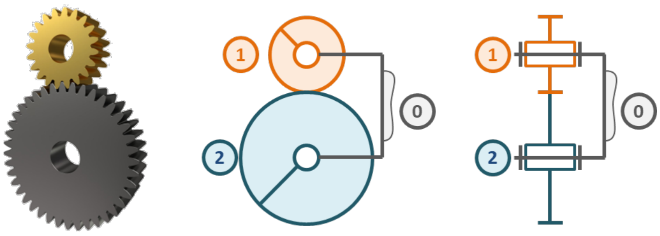
Engrenage Un engrenage est constitué de deux roues dentées en contact. Une roue dentée est caractérisée (entre autre) par son nombre de dents Z, son diamètre primitif D en mm et son module en mm. On a $D = mZ$. Pour que deux dents engrènent elles doivent avoir le même module.

8.1.1 Engrenage – Contact extérieur

Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 1$.

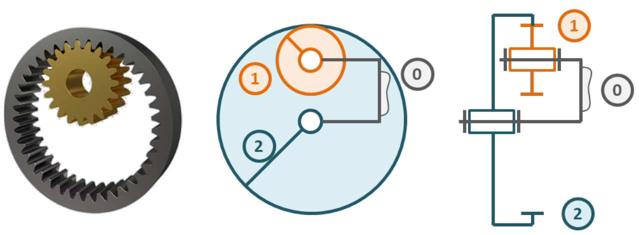


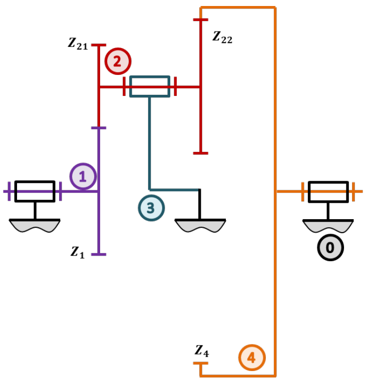
8.1.2 Engrenage – Contact intérieur

Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = +\frac{Z_1}{Z_2}$$

n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 0$.



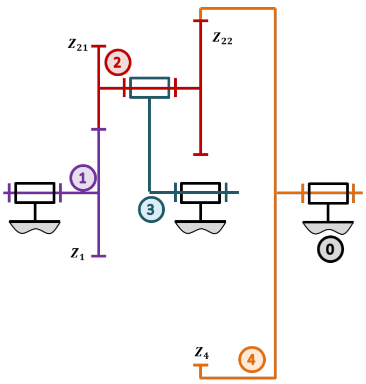


8.1.3 Train d'engrenages à axes fixes

Résultat –

$$\frac{\omega(4/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{\Pi Z_{\text{menantes}}}{\Pi Z_{\text{menées}}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$$

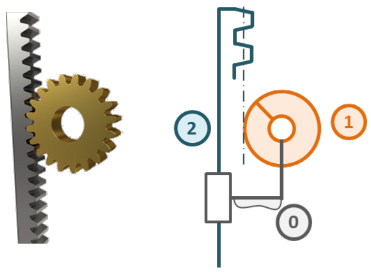
n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 1$.



8.1.4 Train d'engrenages épicycloïdal

Méthode –

1. On identifie le porte-satellite, ici 3.
2. On bloque le porte-satellite. On peut alors se ramener au cas du train simple (voir ci-dessus).
3. On écrit le rapport de vitesse **par rapport au porte-satelltite 3** : $\dfrac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} = K$ (raison du train épicycloïdal).
4. En fonction de la roue bloquée, on réalise une décomposition des vitesses. Par exemple, Si 4 est bloquée, on peut chercher à établir $\dfrac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$.
5. On repart du point 3 et on a : $\dfrac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = K \Leftrightarrow \dfrac{\omega(4/0)+\omega(0/3)}{\omega(1/0)+\omega(0/3)} = K \Leftrightarrow \dfrac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0)-\omega(3/0)} = K \Leftrightarrow \dfrac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \dfrac{K}{K-1}$.

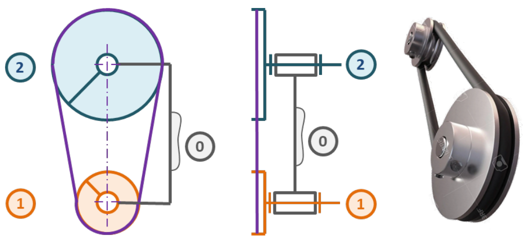


8.1.5 Système pignon – crémaillère

Résultat –

Soit R le rayon primitif du pignon. On a $V(2/0) = \pm R\omega(1/0)$.

8.1.6 Transmission par poulie chaine et par poulie courroie



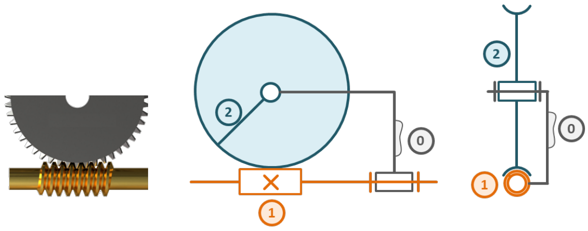
Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \frac{D_1}{D_2}.$$

8.1.7 Roue et vis sans fin

Résultat –

Soit Z le nombre de dents de la roue et n le nombre de filets de la vis, on a $\dfrac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \pm\dfrac{n}{Z}$.



8.1.8 Système vis-écrou

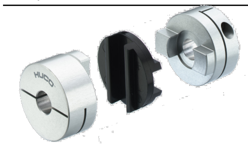
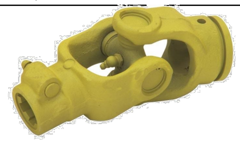
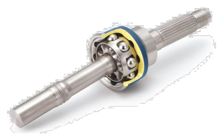
Résultat –

En notant v la vis et e l'écrou, soit p le pas de la vis (ici à droite) on a

$$v(v/e) = \omega(v/e)\frac{\text{pas}}{2\pi}$$

.

8.1.9 Système de transmission Rotation – Rotation

	Joint de Oldham	Joint de cardan	Joint tripode
			
Homcinétique	Oui	Non, Oui si doublé	Quasi
Défaut d'alignement axial	Oui	Non	Non
Défaut d'orientation entre les axes	Non	Oui	Oui
Utilsation	Maxpid :)	Colonne de direction (DAE), manivelle de volet roulant	Automobile