Application 1
Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

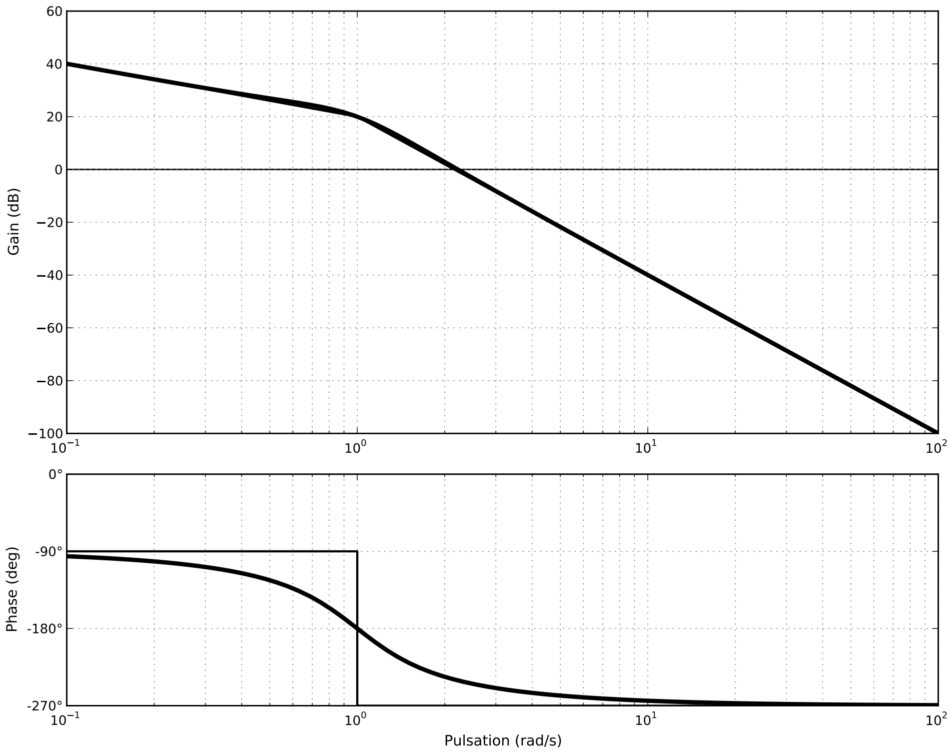
D'après ressources P. Dupas.

C1-02

C2-04

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{10}{p\,(1+p+p^2)}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de 45° et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45°. Vérifier la marge de gain.

Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

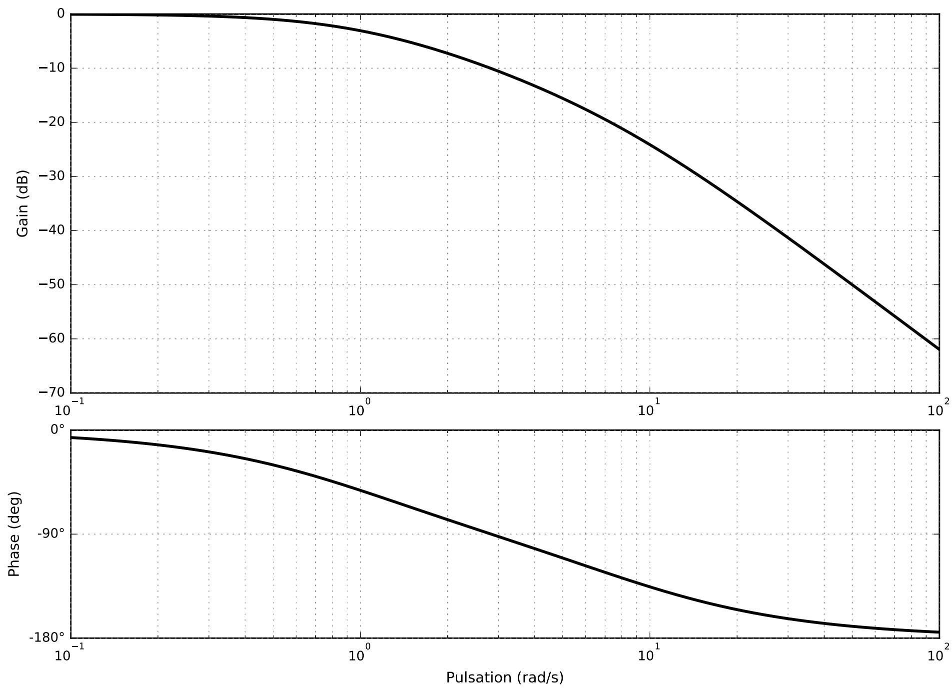
Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{1}{(p+1)\left(\dfrac{p}{8}+1\right)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de 45°en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme $C(p) = K_p \dfrac{1+\tau p}{\tau p}$.

Question 5 Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



Question 6 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45°.

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Application 1
Réglage de correcteurs P et PI – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

C1-02

D'après ressources P. Dupas.

C2-04

Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

Correction

- On cherche ω tel que $G_{\text{dB}}(\omega) = 0\,\text{dB}$: $G_{\text{dB}}(\omega) = -20\log(10) - 20\log\omega - 20\log\left(\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\right)$

On trouve $\omega = 2{,}21\,\text{rad/s}$ et $M_\varphi = -60°$. Le système est instable.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Correction

Pour $\varphi = -180°$, on a $\omega = 1\,\text{rad/s}$ et $M_G = -20\,\text{dB}$. Le système est instable.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45°. Vérifier la marge de gain.

Correction

Pour $\varphi = -135°$ on a $\omega = 0{,}62\,\text{rad/s}$. On trouve un gain proportionnel de 0,054.
La marge de gain est alors de 5,35 dB ce qui est inférieur aux 10 dB demandés.

Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

Correction

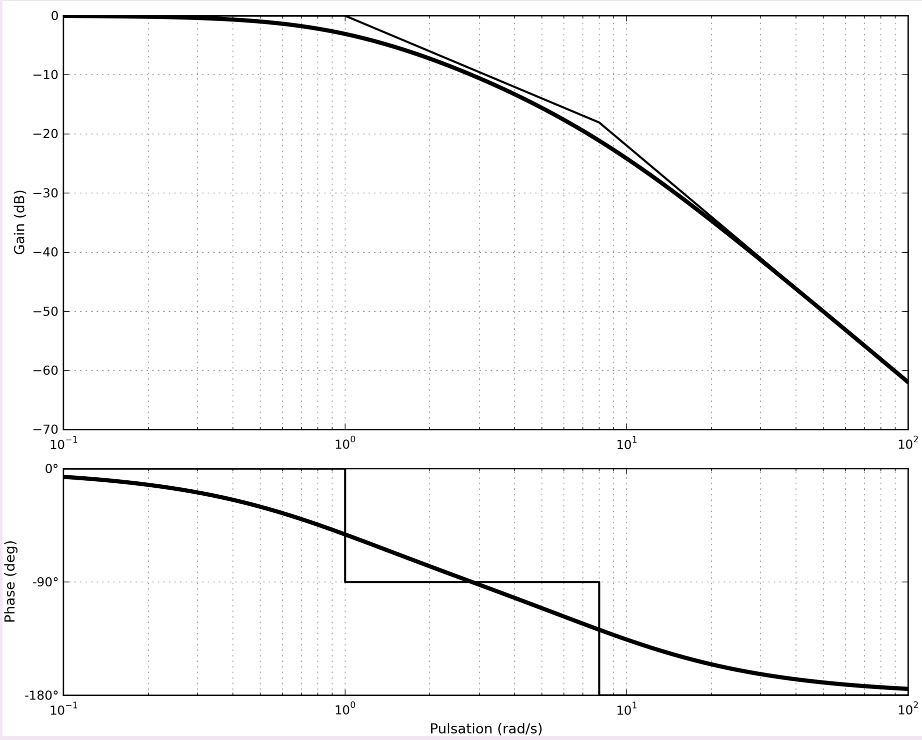
Pour $\varphi = -180°$ on a $\omega = 1\,\text{rad/s}$. On trouve un gain proportionnel de 0,316.
La marge de phase est alors de $70° (\omega = 0{,}0333\,\text{rad/s})$.

Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Question 5 Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

Correction



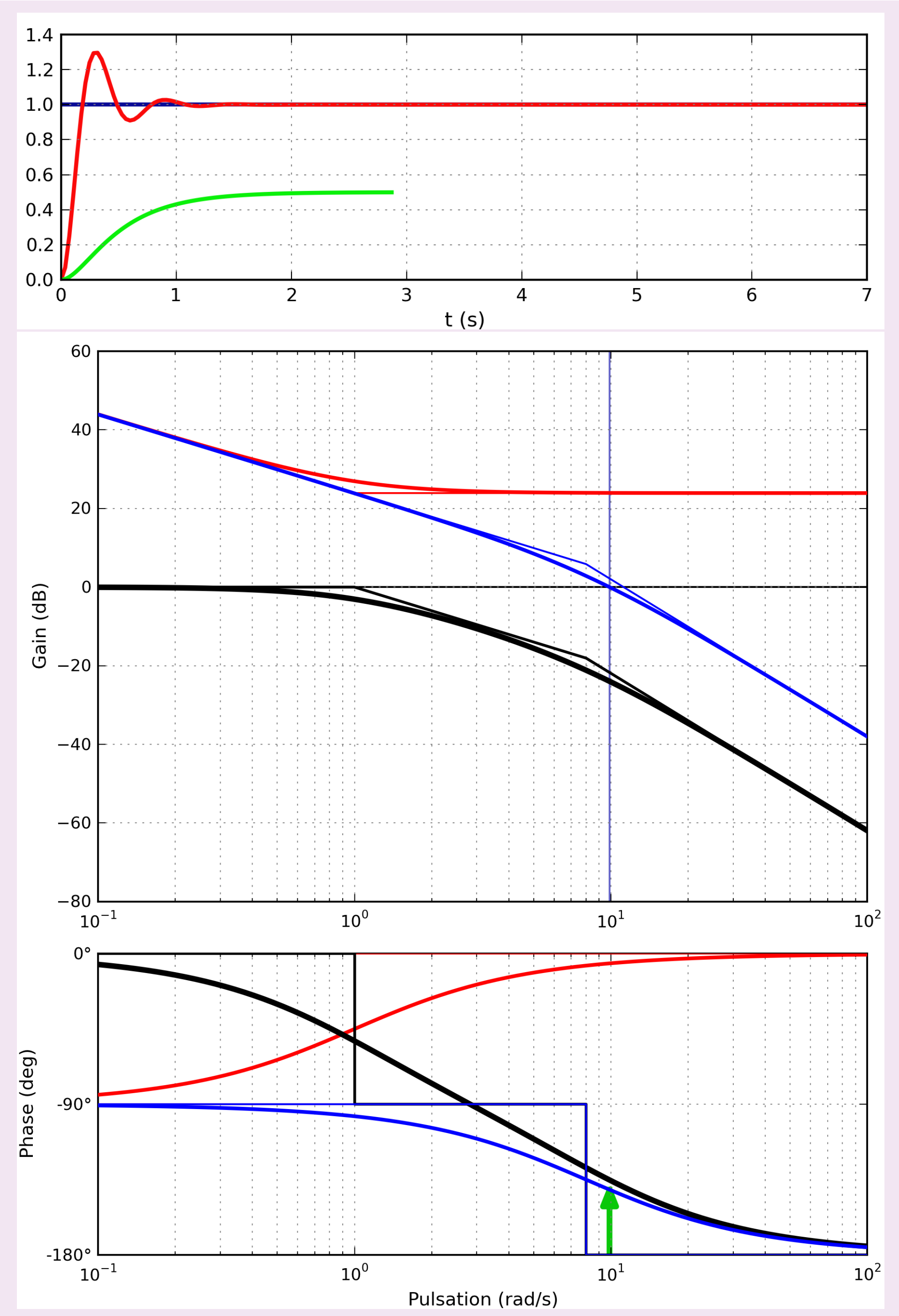
Question 6 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45°.

Correction

- On résout $\varphi(\omega) = -135°$: $\varphi(\omega) = -\arctan\omega - \arctan\omega/8 \Rightarrow \tan 135° = \dfrac{\omega + \omega/8}{1-\omega^2/8}$ $\Leftrightarrow -1+\omega^2/8 - 9\omega/8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 9\omega - 8 = 0$. $\Delta = 81+32 = 10,63^2$. $\omega = \dfrac{9 \pm 10,63}{2} =$ 9,82 rad/s.
- Calculons $G_{\text{dB}}(9,82) = -23{,}9\,\text{dB}$. Il faut donc augmenter le gain de 23,9 dB soit $K_P = 10^{23{,}9/20} = 15,7$.
- On choisit τ pour ne pas modifier la marge de phase. Il faut donc que le déphasage de 0°du correcteur ait lieu avant 9,82 rad/s. De manière usuelle on prend $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{9,82}{10} =$ 0,982 rad/s.
- Au final, on a $C(p) = 15,7\dfrac{1+1,018p}{1,018p}$.

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Correction


t (s)
Gain (dB)
Phase (deg)
Pulsation (rad/s)

Application 2
Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

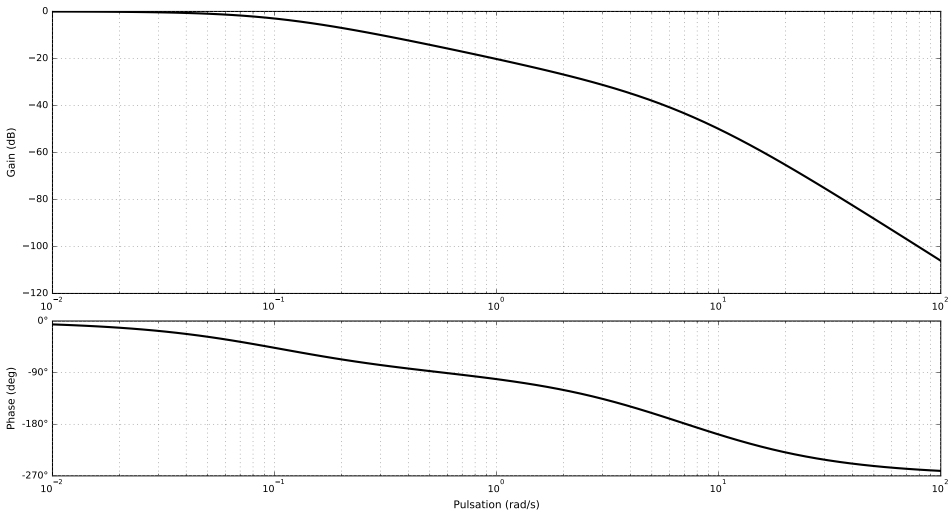
C1-02

C2-04

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

Question 1 Déterminer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

Question 2 Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



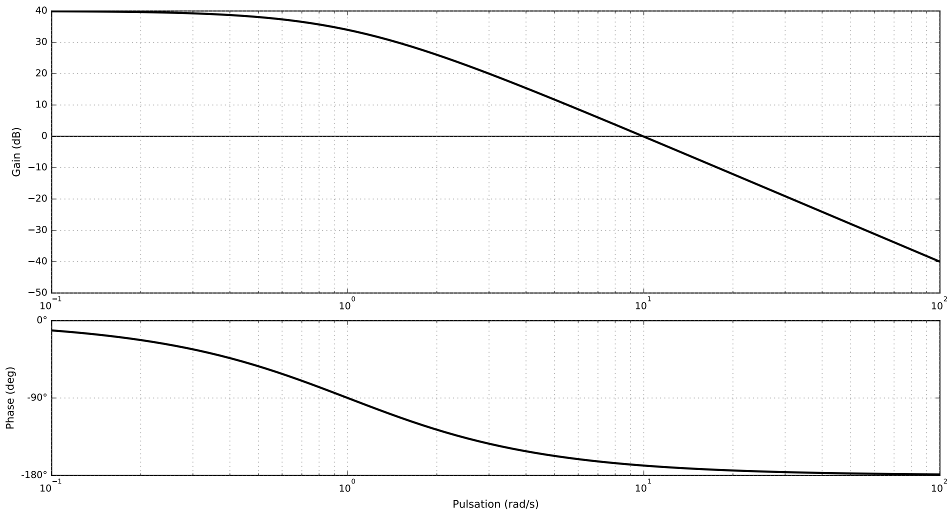
Question 3 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45°. Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Question 4 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

Correcteur à avance de phase

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{100}{(p+1)^2}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corrige ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme $C(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$.

Question 5 Justifier le tracer du diagramme de Bode de $G(p)$.



Question 6 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45°.

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Application 2
Réglage de correcteurs P et AP – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

Correcteur proportionnel

C1-02

C2-04

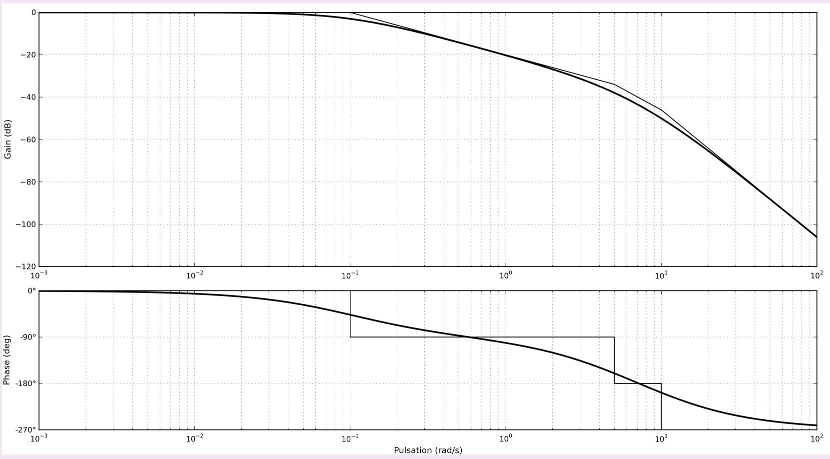
Question 1 Déterminer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

Correction

Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon. $K_{\text{BO}} = 1$. L'écart statique est de $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Question 2 Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

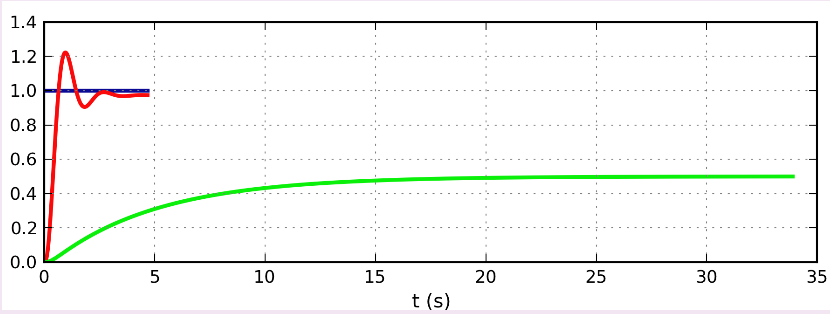
Correction



Question 3 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45°. Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Correction

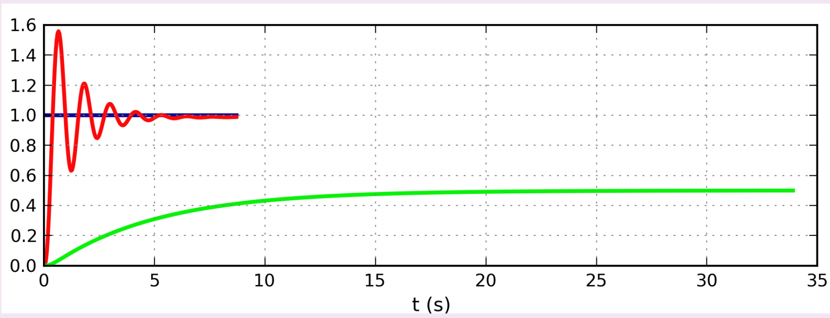
- On résout $\varphi(\omega) = -135°$: $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$.
  $\varphi(\omega) = -135° \Leftrightarrow \omega = 2{,}95\,\text{rad s}^{-1}$ (solveur Excel).
- Calculons $G_{\text{dB}}(\omega) = -20\log\left(\sqrt{1+10^2\omega^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1+0,1^2\omega^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1+0,2^2\omega^2}\right) = -31\,\text{dB}$. Il faut donc augmenter le gain de $31\,\text{dB}$ soit $K_P = 10^{31/20} = 35,48$.
- On a alors un écart statique de $\dfrac{1}{1+35,48} = 0,027$.
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre $\varphi(\omega) = -180°$. On obtient $\omega = 7{,}17\,\text{rad/s}$ et $M_G = 12\,\text{dB}$.



Question 4 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

Correction

- On commence par résoudre $\varphi(\omega) = -180°$. On obtient $\omega = 7{,}17$ rad/s et $M_G = 44$ dB.
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit $20 \log K_P = 38 \Rightarrow K_P = 10^{38/20} = 79$.
- On a alors un écart statique de $\dfrac{1}{1+79} = 0,0125$.
- La marge de phase est alors de 19°.



Correcteur à avance de phase

Question 5 Justifier le tracer du diagramme de Bode de $G(p)$.

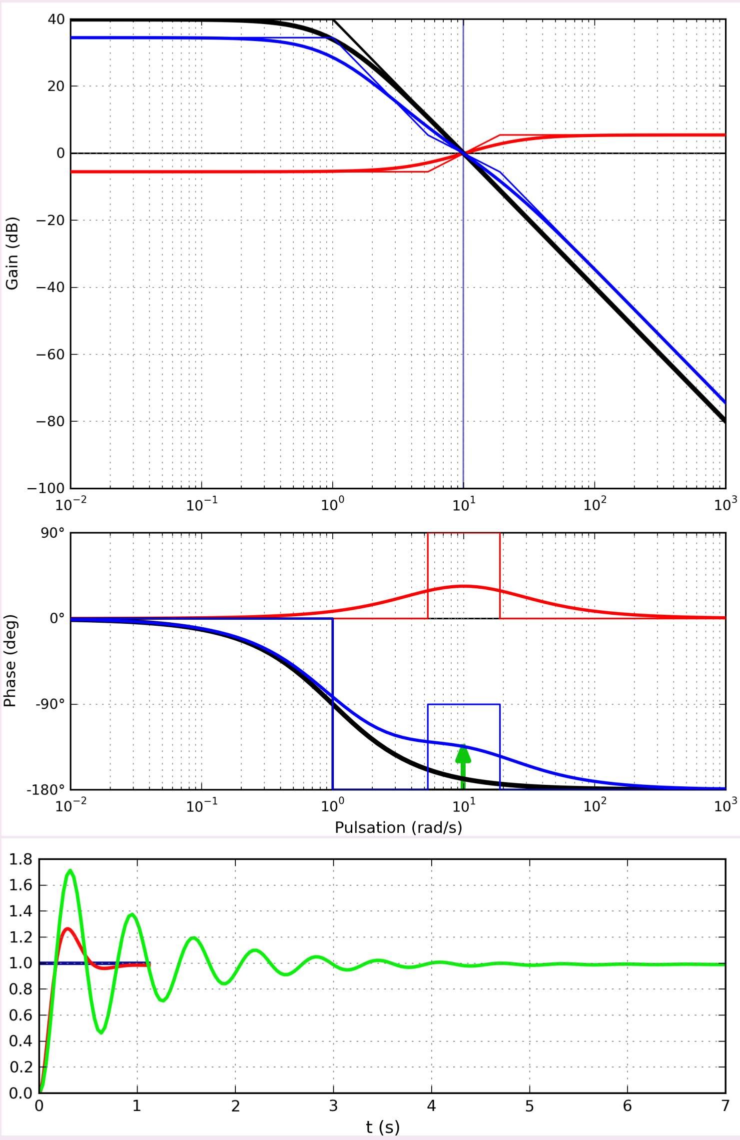
Question 6 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45°.

Correction

- $G_{dB}(\omega) = 20\log(100) - 20\log\left(1+\omega^2\right)$. $G_{dB}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{100}{1+\omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99}$ $\Rightarrow \omega = 9{,}95$ rad/s.
- $\varphi(\omega) = -2\arctan\omega$ et $\varphi(9,95) = -2{,}94$ rad $= -169°$ soit une marge de phase de 11° ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de 34°.
- $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\max}) = \dfrac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = -\dfrac{\sin(\varphi_{\max})+1}{\sin(\varphi_{\max})-1} = 3,54$.
- $\tau = \dfrac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0{,}053$ s.

Question 7 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Correction



Gain (dB)
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Phase (deg)
90°
0°
-90°
-180°
Pulsation (rad/s)
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
5
6
7
t (s)

Application 3
Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

C1-02

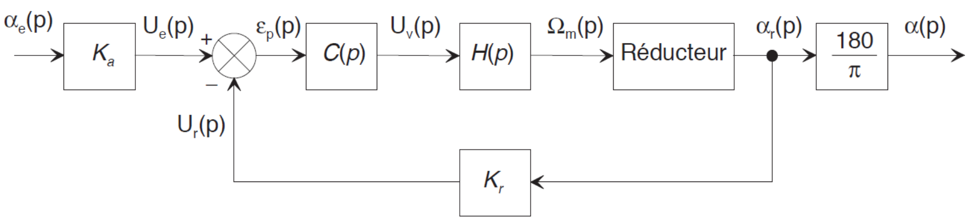
C2-04

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p} = \dfrac{30}{1+5\cdot 10^{-3}p}$;
- $K_r = 4\,\mathrm{V\,rad^{-1}}$: gain du capteur de position ;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degrés ;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c ;
- $N = 200$: rapport de transmission.

Objectif

- On souhaite une marge de phase de 45°.
- On souhaite un écart de traînage inférieur à 1°pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$.



Question 1 Déterminer la fonctionde transfert $R(p) = \dfrac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$ du réducteur.

Question 2 Déterminer le gain K_a de l'adaptateur.

Question 3 Déterminer, en fonction notamment de K'_m et t'_m, la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté K_{BO}.

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 4 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Question 5 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Question 6 Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$.

Question 7 Déterminer l'expression de $\alpha_e(t)$ correspondant à une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s^{-1}}$. En déduire $\alpha_e(p)$.

Question 8 La valeur de K_{BO} définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

Application 3
Réglage de correcteurs P – Corrigé

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

C1-02

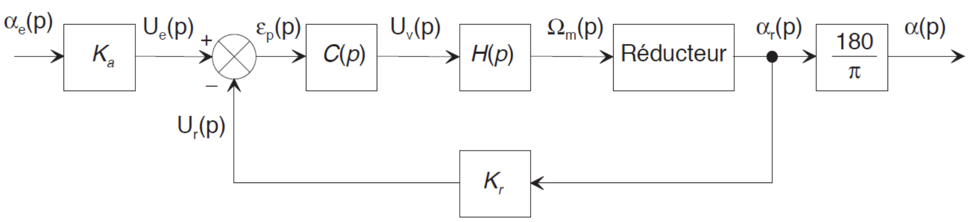
C2-04

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p} = \dfrac{30}{1+5\cdot 10^{-3}p}$;
- $K_r = 4\,\mathrm{V\,rad^{-1}}$: gain du capteur de position ;
- K_a : gain de l'adaptateur du signal de consigne $\alpha_e(t)$;
- le signal de consigne $\alpha_e(t)$ est exprimé en degrés ;
- le correcteur $C(p)$ est à action proportionnelle de gain réglable K_c ;
- $N = 200$: rapport de transmission.

Objectif

- On souhaite une marge de phase de 45°.
- On souhaite un écart de traînage inférieur à 1°pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\mathrm{s}^{-1}$.



Question 1 Déterminer la fonctionde transfert $R(p) = \dfrac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$ du réducteur.

Correction

D'une part le réducteur permet de réduire la vitesse. D'autre part, le schéma-bloc pemet de convertir une vitesse en position. Il joue donc le rôle d'intégrateur. On a donc $R(p) = \dfrac{1}{Np}$

Question 2 Déterminer le gain K_a de l'adaptateur.

Correction

On a $\varepsilon_(p) = K_a\alpha_e(p) - K_r\alpha_r(p) = K_a\alpha_e(p) - K_r\dfrac{\pi}{180}\alpha_(p)$. Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc $K_a = K_r\dfrac{\pi}{180}$.

Question 3 Déterminer, en fonction notamment de K'_m et t'_m, la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté K_{BO}.

Correction

On a $T(p) = C(p)H(p)R(p)K_r = K_c\dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p}\dfrac{1}{Np}K_r$. On a donc $K_{\mathrm{BO}} = \dfrac{K_c K'_m K_r}{N}$

On souhaite une marge de phase de 45°.

Question 4 Déterminer la valeur de K_{BO} permettant de satisfaire cette condition.

Correction

Pour un premier ordre intégré, la phase est de 135°en $\dfrac{1}{\tau'_m}$. Le gain (dB) de la boucle ouverte doit donc être nul pour cette pulsation ou encore que le module soit unitaire.
$|T(p)| = 1 \Rightarrow \left|K_c \dfrac{K'_m}{1+\tau'_m p}\dfrac{1}{Np}K_r\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{K_c K'_m K_r}{N}\left|\dfrac{1}{1+\tau'_m p}\dfrac{1}{p}\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{K_c K'_m K_r}{N\dfrac{1}{\tau'_m}}\dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = 1$

$\Rightarrow K_c = \dfrac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} \Rightarrow K_c = \dfrac{\sqrt{2}}{K_{\text{BO}}}$

Question 5 En déduire la valeur du gain K_c du correcteur.

Correction

$\Rightarrow K_c = \dfrac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r}$

Question 6 Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Correction

La BO du sytème est de classe 1. Pour une entrée échelon, l'écart statique est nul.

On souhaite un écart de traînage inférieur à 1° pour une consigne de vitesse de $105\,°\,\text{s}^{-1}$.

Question 7 Déterminer l'expression de $\alpha_e(t)$ correspondant à une consigne de vitesse de $105\,°\,\text{s}^{-1}$. En déduire $\alpha_e(p)$.

Correction

$\alpha_e(t) = 105t$ et $\alpha_e(p) = \dfrac{105}{p^2}$

Question 8 La valeur de K_{BO} définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

Correction

L'écart de trainage est donné par $\varepsilon_t = \dfrac{105K_a}{K_{\text{BO}}} = \dfrac{105K_r\dfrac{\pi}{180}}{\dfrac{\dfrac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r}K'_m K_r}{N}} = \dfrac{105\pi K_r \tau'_m}{180\sqrt{2}}$.

AN : $\varepsilon_t = \dfrac{105\times\pi\times4\times5\times10^{-3}}{180\sqrt{2}} = 0,02°$. Le CDC est respecté.

Colle 1
Asservissement en température d'un four – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

C1-02

C2-04

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension v(t). Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + 2000\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0,02v(t)$.

Question 1 Calculer la fonction de transfert $G(p)$ du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

On décide de réguler la température $\theta(t)$ dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension $u(t)$. Le capteur est régi par l'équation différentielle : $u(t) + 2\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = 5 \cdot 10^{-3}\theta(t)$. On introduit également un gain K dans la chaîne directe.

Question 2 Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rappeler les conditions de stabilité d'un système.

On donne t_m le temps de montée du système en BF : $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ avec ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 3 On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$. Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour $K = 11,3$.

Question 4 Pour conserver une marge de phase égale à 60° on introduit une correcteur à avance de phase sous la forme $C(p) = K_a\dfrac{1+aTp}{1+Tp}$. Déterminer les constantes du correcteur.

Colle 1
Asservissement en température d'un four – Corrigé

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

C1-02

C2-04

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension v(t). Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + 2000\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0,02v(t)$.

Question 1 Calculer la fonction de transfert $G(p)$ du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

On décide de réguler la température $\theta(t)$ dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension $u(t)$. Le capteur est régi par l'équation différentielle : $u(t) + 2\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = 5 \cdot 10^{-3}\theta(t)$. On introduit également un gain K dans la chaîne directe.

Question 2 Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rappeler les conditions de stabilité d'un système.

On donne t_m le temps de montée du système en BF : $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\mathrm{co}}}$ avec ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 3 On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$. Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour $K = 11,3$.

Question 4 Pour conserver une marge de phase égale à 60° on introduit une correcteur à avance de phase sous la forme $C(p) = K_a\dfrac{1+aTp}{1+Tp}$. Déterminer les constantes du correcteur.

soit : $$H(p) = \frac{0{,}02K\,(1+2p)}{p\,(1+2p)\,(1+2\,000p)+10^{-4}K} = \frac{0{,}02K\,(1+2p)}{4\,000\,p^3+2\,002\,p^2+p+10^{-4}K}$$

Les conditions de stabilité en boucle fermée nous sont données par le critère de Routh :

$$\begin{array}{ccc} 4\,000 & 1 & 0 \\ 2\,002 & 10^{-4}K & 0 \\ \dfrac{2\,002-0{,}4K}{2\,002} & 0 & 0 \\ 10^{-4}K & 0 & 0 \end{array}$$

Le système est stable si et seulement si :

$$2\,002 - 0{,}4K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 5\,005$$

d) La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p)B(p) = \frac{10^{-4}K}{p\,(1+2\,000p)\,(1+2p)}$$

Si on impose une marge de phase de 45°, on a :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\,000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{4}$$

En négligeant le dernier terme, on obtient : $\omega_{c0} = \dfrac{1}{2\,000} = 5\cdot 10^{-4}$ rad/s

d'où : $$t_m = \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5\cdot 10^{-4}} = 6\,000\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 40\ \text{mn}$$

e) Pour déterminer la valeur du signal de consigne, il convient de calculer la valeur du signal délivré par le capteur lorsque la température atteint 1 200 °C : en régime permanent, le capteur se comporte comme un gain de $5\cdot 10^{-3}$ V/°C.

Par conséquent : $$\theta = 1\,200\ °\text{C} \quad \Rightarrow \quad u = 6\ \text{V}$$

Comme la chaîne directe comporte un intégrateur, l'erreur statique sera nulle. Le système ne peut donc se stabiliser à 1 200 °C que si le signal d'entrée est un échelon de hauteur 6 V.
Si le système est réglé pour obtenir une marge de phase de 45°, la réponse du système, en boucle fermée, sera caractérisée par un facteur d'amortissement égal à 0,45. D'après les abaques des réponses indicielles, cela correspond à un dépassement de 20 %. La température maximale atteinte dans le four (temporairement) est donc égale à 1 440 °C.
Ce dépassement est bien évidemment trop important puisque les objets à cuire ne peuvent être soumis à des températures dépassant 1 400 °C.
f) Si on souhaite limiter le dépassement à 10 %, nous devons régler le système de sorte qu'il présente une marge de phase de 60 °. Cette marge de phase correspond à une pulsation ω_{c0} telle que :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\,000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{3}$$

soit : $$\arctan 2\,000\omega_{c0} \approx \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0} \approx \frac{\tan \pi/6}{2\,000} = 0{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{rad/s}$$

Par conséquent : $$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx 3\ \text{h}\ 10\ \text{mn}$$

Dans ces conditions, chaque traitement duerea 4 heures et 50 minutes (temps de montée en temprératurе ajouté à une heure de cuisson et à 24 minutes de manutention et refroidissement). On ne pouura donc en réaliser que 5 par 24 heures. Le nombre maximum d'objets que l'on pourra traiter par jour est donc limité à 50.

Colle 2
Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire : $G(p) = \dfrac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

C1-02

C2-04

- marge de phase : $\Delta\varphi \geq 45°$;
- dépassement $D\% < 10\%$;
- écart statique $\varepsilon_S < 0,08$;
- temps de montée $t_m < 8\,\text{s}$.

Question 1 Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0,08$?

On note t_m le temps de montée du système en BF et $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8\,\text{s}$?

Question 3 Quel choix faire pour la valeur de K ?

Question 4 Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.

Expérimentalement, on constate que $z_{\text{BF}} \simeq \dfrac{\Delta\varphi^o}{100}$ et on rappelle que $D\% = e^{\frac{-\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}}$.

Question 5 Que vaut alors le dépassement D% ?

Question 6 À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

Avec la valeur de $K = 16,1$, on introduit, en amont de $G(p)$, dans la chaîne directe, un correcteur $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

Question 7 Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de 60°.

Colle 2
Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Corrigé

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire : $G(p) = \dfrac{K}{(10p+1)^2\,(p+1)}$

C1-02

C2-04

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

- marge de phase : $\Delta\varphi \geq 45°$;
- dépassement $D\% < 10\%$;
- écart statique $\varepsilon_S < 0,08$;
- temps de montée $t_m < 8\,\text{s}$.

Question 1 Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0,08$?

On note t_m le temps de montée du système en BF et $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8\,\text{s}$?

Question 3 Quel choix faire pour la valeur de K ?

Question 4 Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.

Expérimentalement, on constate que $z_{\text{BF}} \simeq \dfrac{\Delta\varphi^o}{100}$ et on rappelle que $D\% = e^{\frac{-\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}}$.

Question 5 Que vaut alors le dépassement D% ?

Question 6 À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

Avec la valeur de $K = 16,1$, on introduit, en amont de $G(p)$, dans la chaîne directe, un correcteur $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

Question 7 Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de 60°.

CORRECTION

Q1- Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0{,}08$?

Comme la FTBO est : $G(p) = \dfrac{K}{(10\,p+1)^2\,(p+1)}$, et que le retour est unitaire, la FTBF s'écrit :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{(10\,p+1)^2\,(p+1)+K}$$

Par définition l'écart statique s'écrit : $\varepsilon_S = \lim_{p\to 0^+} \{\, 1 - H(p) \,\} = 1 - \dfrac{K}{1+K} = \dfrac{1}{1+K}$

Pour avoir $\varepsilon_S < 0{,}08$ il faut avoir : $\dfrac{1}{1+K} < 0{,}08$ Soit $\boxed{K > 11{,}5}$

Q2- Quelle est la condition sur K pour obtenir tm < 8s ?

Pour avoir tm < 8 s et en considérant la relation approchée $t_m = \dfrac{3}{\omega_{C0}} < 8$ s soit $\omega_{C0} > 0{,}375$ s

Le gain K qui correspond à cette pulsation de coupure à 0 dB est tel que :

$$G(j\omega_{c0}) = \frac{K}{(1+100\,\omega_{c0}{}^2)\,\sqrt{1+\omega_{c0}{}^2}} = 1$$

Soit $\boxed{K = 16{,}1}$

Q3- Déterminer la plus petite valeur de K, permettant d'obtenir à la fois $\varepsilon S < 0{,}08$ et

D'après Q1, pour avoir $\varepsilon_S < 0{,}08$ il faut **K > 11,5**
D'après Q2, pour avoir obtenir tm < 8s il faut **K > 16,1**

La plus petite valeur qui permet de satisfaire aux deux conditions ci-dessus est **K > 16,1**

Q4- Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions. Que vaut alors le dépassement?

La marge de phase obtenue pour cette valeur de K est :

$$\Delta\varphi = \pi - 2\arctan 10\omega_{C0} - \arctan 10\omega_{C0} = 0{,}16 \text{ rad} = 9°$$

La valeur du dépassement en boucle fermée se détermine par les relations :

$$\Delta\varphi° \;\rightarrow\; z_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi°}{100} \;\rightarrow\; D\% = \exp\!\left(-\pi\frac{z_{BF}}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

Soit $\Delta\varphi° = 9° \;\rightarrow\; z_{BF} \approx \dfrac{\Delta\varphi°}{100} = 0{,}09 \;\rightarrow\; D\% = \exp\!\left(-\pi\dfrac{0{,}09}{\sqrt{1-0{,}09^2}}\right)$ = 73%

$$\boxed{\Delta\varphi° = 9° \quad \text{et} \quad D\% = 74}$$

Ces deux valeurs ne sont pas conformes au cahier des charges

Q5- Déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

$$D\% = \exp\!\left(-\pi\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = 0{,}1$$

$$-\pi\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \ln 0{,}1 = -2.3 \qquad \pi^2\frac{z^2}{1-z^2} = 5.3 \qquad z^2 = \frac{5{,}3}{5{,}3+\pi^2}$$

Soit z_{BF} = 0,6 Ainsi : $\Delta\varphi° \approx 100\ z_{BF} = 60°$

Par ailleurs la marge de phase $\Delta\varphi \geq 45°$

Ces deux conditions imposent $\boxed{\Delta\varphi \geq 60°}$

Q6- Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase $C(p) = \dfrac{1 + aT\,p}{1 + T\,p}$ introduit a pour mission de remonter la marge de phase à 60°.

Il faut donc obtenir une remontée de phase de 60- 9 = 51° à la pulsation ω_{C0} = 0,375 rad/s

On $\omega_{c0} = \omega_{max} = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$ = 0,375 rad/s et $\varphi_{max} = \arcsin\dfrac{a-1}{a+1}$ = 51°

Cette dernière condition conduit à : a = 8

La première à T = 0,94 s

$$Ka = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Colle 3
Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

C1-02

C2-04

On considère un système de fonction de transfert est : $G(p) = \dfrac{K}{(p+1)^3}$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite une marge de phase supérieure à 45°.

Question 1 Définir la condition de stabilité théorique du système ?

On note t_m le temps de montée du système en BF avec $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 Calculer la valeur K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

Question 3 Calculer pour cette valeur de K la marge de phase.

Question 4 En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ qu'il faut introduire dans la chaîne directe.

Colle 3
Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Corrigé

Equipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert est : $G(p) = \dfrac{K}{(p+1)^3}$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite une marge de phase supérieure à 45°.

C1-02

C2-04

Question 1 Définir la condition de stabilité théorique du système ?

On note t_m le temps de montée du système en BF avec $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{co}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 Calculer la valeur K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

Question 3 Calculer pour cette valeur de K la marge de phase.

Question 4 En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ qu'il faut introduire dans la chaîne directe.

CORRECTION

Q1- Définir la condition de stabilité théorique du système ?

Tous les poles sont à partie réel négative.

Q2- Calculer la valeur K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

Le temps de montée est défini par : $t_m = \dfrac{3}{\omega_{C0}}$

Si tm = 2,15 s alors la pulsation de coupure à 0 dB est : ω_{C0} = 1,4 rad/s

Or $|G(\omega_{c0})| = \dfrac{K}{(\sqrt{1+\omega_{c0}^2})^3}$ et $\varphi(\omega) = -3 \arctan \omega$

Par définition : $|G(\omega_{c0})| = \dfrac{K}{(\sqrt{1+\omega_{c0}^2})^3} = 1$ on obtient K = 5

Q3- Calculer pour cette valeur de K la marge de phase.

Dans ces conditions la marge de phase vaut : $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{C0}) = \pi - 3 \arctan \omega_{C0} = 17°$

Q4- En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase qu'il faut introduire dan la chaîne directe.

Le correcteur à avance de phase $C(p) = \dfrac{1 + aT\,p}{1 + T\,p}$ introduit a pour mission de remonter la marge de phase à 45 – 17 = 28° à la pulsation ω_{C0} = 1,4 rad/s

$\omega_{c0} = \omega_{max} = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$ = 1,4 rad/s et $\varphi_{max} = \arcsin \dfrac{a-1}{a+1}$ = 28°

Soit a = 2,8 et T = 0,43 s $\qquad Ka = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Colle 4
Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

Correction proportionnelle

C1-02

C2-04

Soit $F(p)$ la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de BODE de $F(p)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.

Question 1 Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.

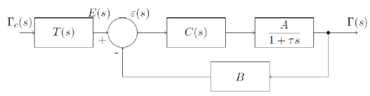
On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note K_p le gain de ce correcteur.

Question 2 Déterminer la valeur de K_p permettant d'obtenir une marge de gain $M_G = 12\,\text{dB}$.

Question 3 Déterminer la nouvelle marge de phase du système.

Question 4 En le justifiant, déterminer l'erreur de position du système corrigé pour une consigne indicielle.

Correction intégrale – Asservissement en accélération



On désire contrôler l'accélération $\gamma(t)$ d'un plateau. Pour cela, un capteur d'accélération, fixé sur le plateau et de sensibilité B, est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert : $H(s) = \dfrac{A}{1+\tau s}$. On modélise le correcteur par la fonction de transfert $C(s)$.

On a $A = 100\,\text{g}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\text{V}^{-1}$, $\tau = 0{,}2\,\text{s}$ et $B = 10^{-2}\,\text{g}^{-1}\text{Vm}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Question 5 Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur $T(s)$ qui traduira l'accélération de consigne $\Gamma_c(s)$ en tension $E(s)$.

On applique à l'entrée du système une consigne d'accélération $\gamma_c = 20g$.

Système asservi sans correction : $C(s) = 1$.

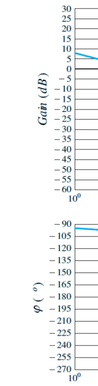
Question 6 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

Question 7 Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

Question 8 Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent.

Question 9 Donner l'allure de la réponse de ce système en précisant les points caractéristiques.

Système asservi avec correction intégrale : $C(s) = \dfrac{1}{s}$.



Question 10 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

Question 11 Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

Question 12 Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent. Pouvait-on prévoir ce résultat.

Question 13 Conclure en comparant le comportement du système avec et sans correction.

Colle 4
Réglage d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur à avance de phase – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

Correction proportionnelle

C1-02

C2-04

Soit $F(p)$ la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de BODE de $F(p)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.

Question 1 Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.

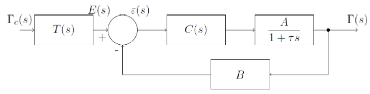
On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note K_p le gain de ce correcteur.

Question 2 Déterminer la valeur de K_p permettant d'obtenir une marge de gain $M_G = 12\,\text{dB}$.

Question 3 Déterminer la nouvelle marge de phase du système.

Question 4 En le justifiant, déterminer l'erreur de position du système corrigé pour une consigne indicielle.

Correction intégrale – Asservissement en accélération



On désire contrôler l'accélération $\gamma(t)$ d'un plateau. Pour cela, un capteur d'accélération, fixé sur le plateau et de sensibilité B, est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert : $H(s) = \dfrac{A}{1+\tau s}$. On modélise le correcteur par la fonction de transfert $C(s)$.

On a $A = 100\,\text{g}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\text{V}^{-1}$, $\tau = 0{,}2\,\text{s}$ et $B = 10^{-2}\,\text{g}^{-1}\text{Vm}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Question 5 Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur $T(s)$ qui traduira l'accélération de consigne $\Gamma_c(s)$ en tension $E(s)$.

On applique à l'entrée du système une consigne d'accélération $\gamma_c = 20g$.

Système asservi sans correction : $C(s) = 1$.

Question 6 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

Question 7 Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

Question 8 Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent.

Question 9 Donner l'allure de la réponse de ce système en précisant les points caractéristiques.

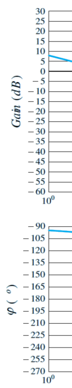
Système asservi avec correction intégrale : $C(s) = \dfrac{1}{s}$.

Question 10 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

Question 11 Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

Question 12 Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent. Pouvait-on prévoir ce résultat.

Question 13 Conclure en comparant le comportement du système avec et sans correction.



1.1. Réglage d'une marge de gain

1. $\boxed{M_\varphi = 78°}$ et $\boxed{M_G = 28\,\text{dB}}$
2. $Kp \approx \boxed{6,3}$
3. $\boxed{M_\varphi = 37°}$
4. L'erreur en régime permanent, vis-à-vis d'une consigne en échelon, est nulle.

2.1. Asservissement en accélération

1. $\boxed{T(s) = B}$
2. $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{A \cdot B / (1 + A \cdot B)}{1 + \dfrac{\tau}{A \cdot B + 1} \cdot s}}$ $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{0,5}{1 + 0,1 \cdot s}}$
3. $t_{5\%} \approx \boxed{0,3\,\text{s}}$
4. $\gamma(+\infty) = \boxed{10 \cdot g \ \ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ $\qquad e_r(+\infty) = \boxed{10 \cdot g \ \ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$
5.
6. $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{A \cdot B} \cdot s + \dfrac{\tau}{A \cdot B} \cdot s^2}}$ $\boxed{H_{BF}(s) = \dfrac{1}{1 + s + 0,2 \cdot s^2}}$ $\boxed{z = 1,12 \ \ \& \ \ \omega_0 = 2,24 \ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}$
7. $\boxed{t_{5\%} = 2,23\,\text{s}}$
8. $\gamma(+\infty) = \gamma_c = \boxed{20 \cdot g \ \ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$. Le système est précis.
9.

TD 1
Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

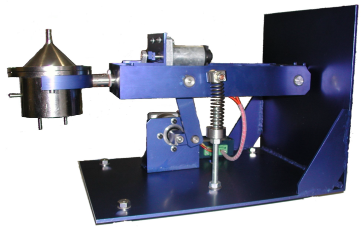
C1-02

C2-04

Objectif

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

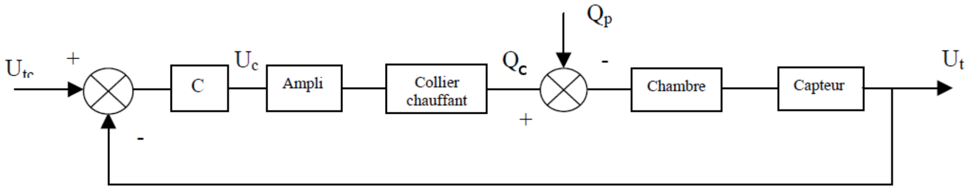
- temps de montée en température : 3 min maxi ;
- précision de la température : ±0,5 ° pour un échelon de 20 °.



Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne ;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que FTBO(p) = $\dfrac{U_t(p)}{U_c(p)} = \dfrac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$.

Analyse des performances

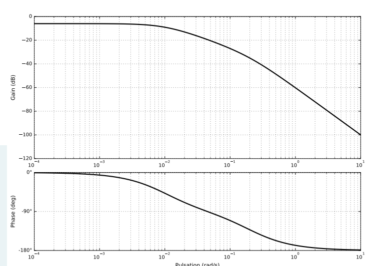
On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

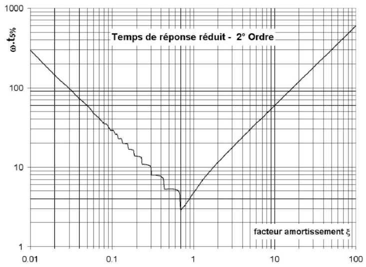
Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.



Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.



Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \dfrac{K}{T_i p}(1 + T_i p)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

TD 1
Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Corrigé

CCP – PSI – 2006.

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

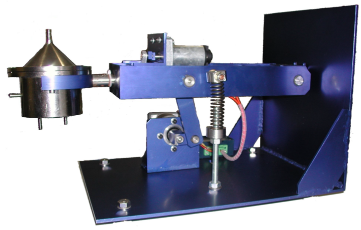
C1-02

C2-04

Objectif

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

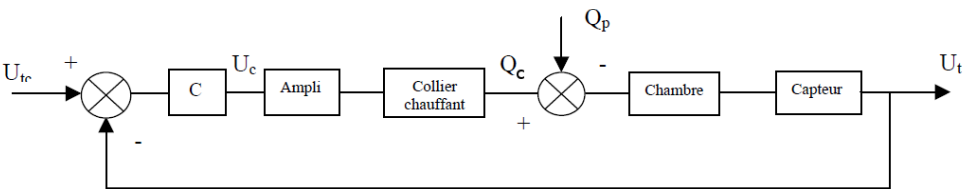
- temps de montée en température : 3 min maxi ;
- précision de la température : ±0,5 ° pour un échelon de 20 °.



Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne ;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que FTBO(p) = $\dfrac{U_t(p)}{U_c(p)} = \dfrac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$.

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

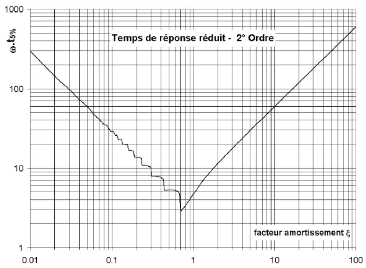
Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.



Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \dfrac{K}{T_i p}(1 + T_i p)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

Q20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1+H_{bo}(p)} \qquad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{1/3}{1+\frac{105}{1,5}\cdot p+\frac{500}{1,5}\cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre ω_n telle que : $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30\cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5\ .\ 10^{-2}\ rd/s$

- le facteur d'amortissement ξ tel que : $\frac{2\cdot\xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92\ \#\ 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n .t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow$ $\underline{t_{5\%} = 218\ s}$ **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : *3 mn* maximum).

Q21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro) $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \dfrac{1}{1+G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

$\underline{\varepsilon_p = 0,66}$ $\underline{66\ \%}$ **Incompatible** avec le cahier des charges.

Q22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition : $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1+j\cdot 5\omega}\cdot\frac{1}{1+j\cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure $\omega_1 = 0,2\ rd/s$; $\omega_2 = 0,01\ rd/s$

Qd $\omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$

$$\boxed{G = -6dB - 10 \cdot Log\left(1 + 25 \cdot \omega^2\right) - 10 \cdot Log\left(1 + 10^4 \cdot \omega^2\right)}$$

$$\boxed{\varphi = -Arc\tan(5 \cdot \omega) - Arc\tan(100 \cdot \omega)}$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	- 9	- 27	- 60
φ (°)	- 48	- 115	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : *Voir le Document Réponse page suivante*

Q23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain : ***M_G = ∝***

Marge de phase : ***M_φ = 180°***

Q 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler K afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à *2,3 dB*, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à *1*, (*0,4* pour un second ordre et le dépassement est environ de *25%)* ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

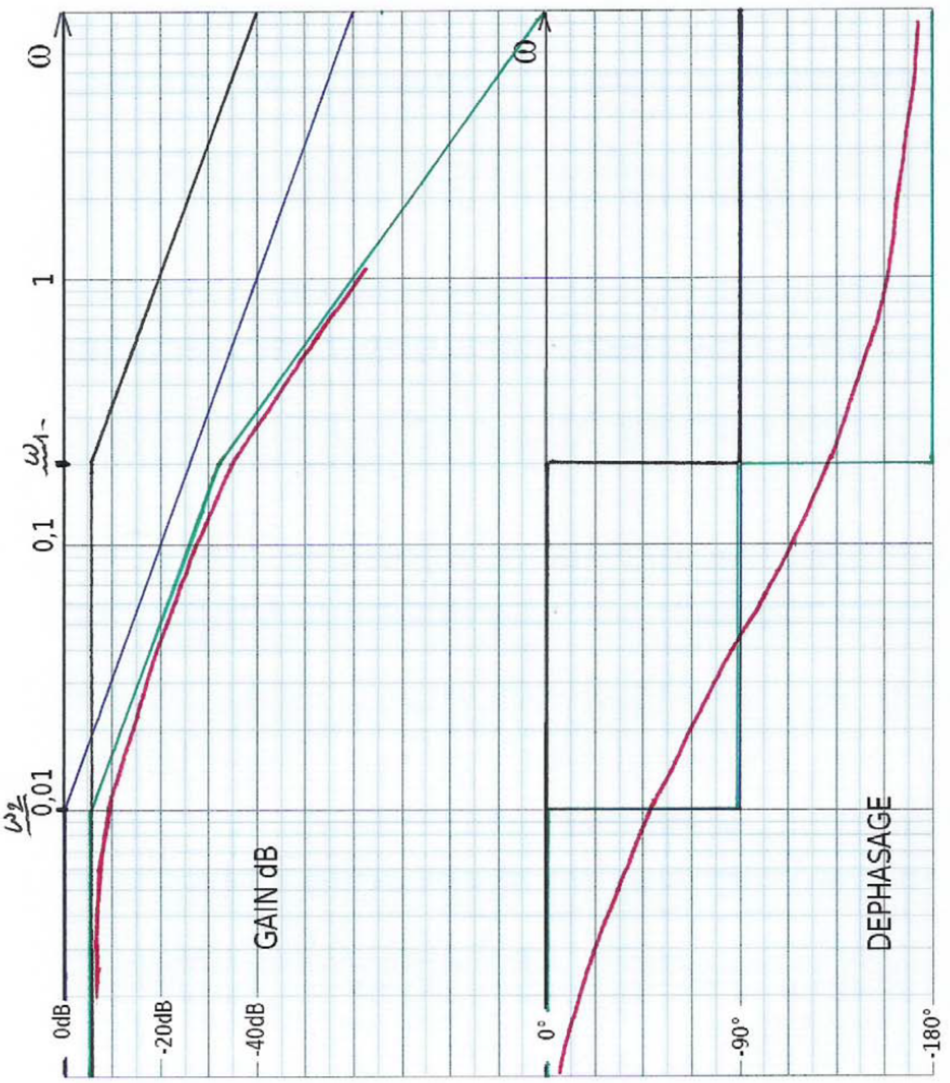
On règle K de telle sorte que $\xi \geq 1$; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0{,}5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$ car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{\dfrac{0{,}5 \cdot K}{1 + 0{,}5 \cdot K}}{1 + \dfrac{105}{1 + 0{,}5 \cdot K} p + \dfrac{500}{1 + 0{,}5 \cdot K} p^2}$$

Question 22 : *Tracé de Bode*



Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{1+0{,}5\cdot K}{500}}$

Facteur d'amortissement, il est tel que : $\dfrac{2\cdot\xi}{\omega_n} = \dfrac{105}{1+0{,}5\cdot K}$,

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2\cdot\sqrt{500}\cdot\sqrt{1+0{,}5\cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** : $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9{,}02$

On choisit $\underline{K = 9}$ alors $\underline{\xi \approx 1}$ la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de *20 Log 9* , c'est-à-dire d'environ ***19 dB*** .

Q 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 % , écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo2})

La marge de gain est inchangée : $\underline{M_G = \infty}$

On relève : $\underline{M_\varphi = 90°}$ **La stabilité est assurée**.

Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{1+0{,}5\cdot 9}{500}} = \sqrt{\dfrac{5{,}5}{500}} \approx 0{,}1 \quad rd/s$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n . t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow \underline{t_{5\%} = 50\ s}$ **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : $3\ mn$ maximum).

Fonction de transfert de classe 0 (zéro) $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \dfrac{1}{1+G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

$\underline{\varepsilon_p = 0{,}55}$ ***55 %*** **Incompatible** avec le cahier des charges.

Q26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U_{tc} est de 5 V

A 17° C correspond $U_c = 0\ V$, donc $U_t = 0\ V$.

Si $U_{tc} = 5\ V \Rightarrow \underline{U_c = 45\ V}$. ($U_c = K.\varepsilon$)

Alors $\underline{U_a = 450\ V}$ Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

Q 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p}(1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait **par compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consis à choisir la constante de temps T_i du correcteur égale **à la constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain K du correcteur afin que **la réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit $\xi = 1$). Le choix de T_i devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : $3\ mn$ maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors : $H_{bo}(\omega) = \dfrac{0{,}5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors : $H_{bf}(\omega) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{T_i}{0{,}5 \cdot K} \cdot p + \dfrac{500}{0{,}5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors : $\omega_n = \dfrac{1}{10} \cdot \sqrt{\dfrac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors : $\xi = \dfrac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit $\boldsymbol{\xi = 1}$ la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors : $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours : $\omega_n . t_{5\%} \approx 5$ puisque $\xi = 1$

Tableau des valeurs de K, ω_n, $t_{5\%}$ en fonction du choix de T_i

T_i	K	ω_n	$t_{5\%}$	*Commentaires*
5 s	25.10^{-3}	5.10^{-3} rd/s	1 000 s	**A rejeter**
100 s	10	0,1 rd/s	**50 s**	**A RETENIR**

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100\omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain : $G = -26\ dB - 20 \cdot Log\omega - 10 \cdot Log(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument : $\varphi = -90° - Arc\tan(5\omega)$

ω (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
φ (°)	- 93	- 117°	- 135	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O. , le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations $\varphi = -90°$ et $\varphi = -180°$.

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo3})

La marge de gain est inchangée : $\underline{M_G = \infty}$

On relève : $\underline{M_\varphi \approx 77°}$ **La stabilité est assurée**.

Q 28 – Nouvel écart de position

Le système est de **classe 1** $\Rightarrow$ $\underline{\varepsilon_p = 0}$

TD 2
Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

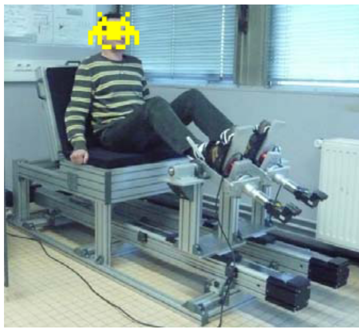
CCP PSI 2013.

Mise en situation

C1-02

C2-04

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

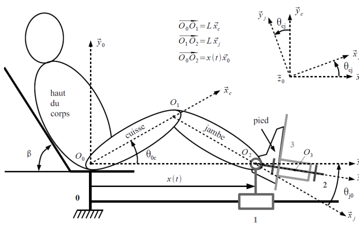


Objectif

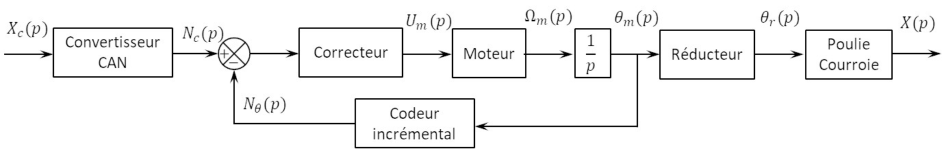
L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0{,}2\,\text{s}$
Pulsation au gain unité	$50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$



La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.

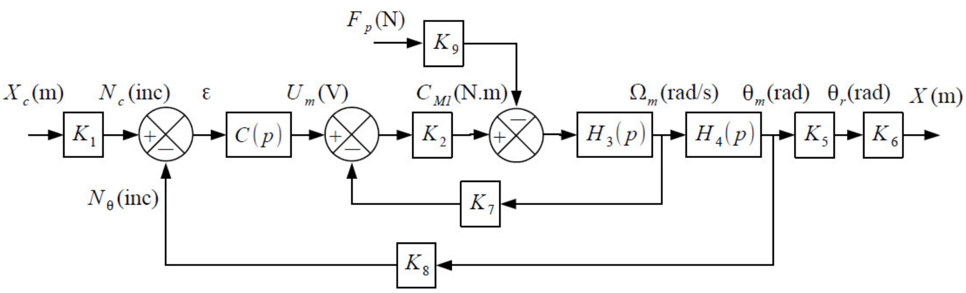


Éléments de modélisation

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$;
- $e(t) = k_e\omega_m(t)$;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.

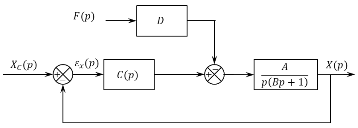


Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)\, r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- M la masse du chariot et m la masse du support de pied ;
- $\rho_1 = \dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur ;
- $r = 46{,}1 \times 10^{-3}$ m le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie ;
- $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D, avec $A = 6700$ m/V, $B = 0{,}01$ s et $D = 6$ V/N.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.

Question 4 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 5 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

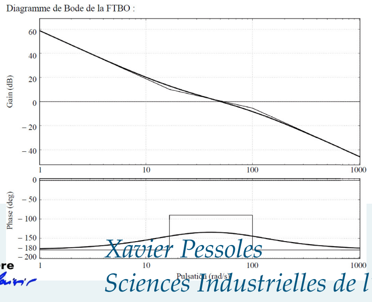
Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / Fp = 0. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

TD 2
Machine de rééducation SysReeduc – Corrigé

CCP PSI 2013.

Mise en situation

Éléments de modélisation

C1-02

C2-04

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.

Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)\, r\rho_1 p \Omega_m(p) = \dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)\, r^2\rho_1^2 p\Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \dfrac{1}{(M+m)\, r^2\rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8\theta_m = K_1 X_C - K_8 \dfrac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \dfrac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.

Correction

On montre $A = \dfrac{K_8}{k_e}$, $B = \dfrac{R\,(m+M)\, r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \dfrac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.

Correction

On a $\varepsilon_x(p) = X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left((C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \dfrac{A}{p\,(Bp+1)} \right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(1 + \dfrac{AC(p)}{p\,(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\,(Bp+1)}$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_x(p) \left(\dfrac{p\,(Bp+1) + AC(p)}{p\,(Bp+1)} \right) \quad = \quad X_C(p) \quad + \quad \dfrac{AF(p)D}{p\,(Bp+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_x(p) \quad =$
$\dfrac{p\,(Bp+1)}{p\,(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\,(Bp+1) + AC(p)}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \dfrac{p\,(Bp+1)}{p\,(Bp+1) + AK_C} X_C(p) + \dfrac{AD}{p\,(Bp+1) + AK_C} F(p)$

Question 4 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

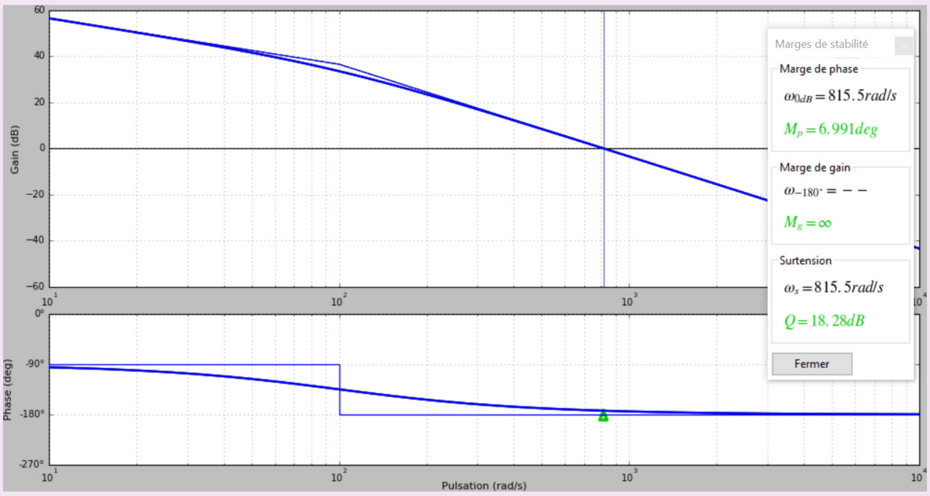
Correction

On a : $\varepsilon_x = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon_x(p) = \lim_{p\to 0} p \left(\dfrac{p\,(Bp+1)}{p\,(Bp+1) + AK_C} \dfrac{X_0}{p} + \dfrac{AD}{p\,(Bp+1) + AK_C} \dfrac{F_p}{p} \right)$
$= \lim_{p\to 0} \dfrac{p\,(Bp+1)}{p\,(Bp+1) + AK_C} X_0 + \dfrac{AD}{p\,(Bp+1) + AK_C} F_p$
$= \dfrac{D}{K_C} F_p$
L'écart en position n'est donc pas nul.

Question 5 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction

On a $\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{A}{p\,(Bp+1)}$.



La marge de phase n'est pas respectée.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.

Correction

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)}F(p)$$

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\varepsilon_x = \lim_{p\to 0} p\left(\frac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)}\frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)}\frac{F_0}{p}\right)$$
$$= \lim_{p\to 0}\frac{pT_ip\left(Bp+1\right)}{pT_ip\left(Bp+1\right)+AK_i\left(T_ip+1\right)}X_0 + \frac{ADT_ip}{T_ipp\left(Bp+1\right)+AK_i\left(T_ip+1\right)}F_0 = 0.$$

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\text{FTBO}(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Correction

$$\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p\left(Bp+1\right)}K_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right) = \frac{A}{p\left(Bp+1\right)}K_i\frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Correction

On souhaite que pour $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, $\varphi(\omega) = -135°$.
$\arg\left(\text{FTBO}(j\omega)\right) = \arg\left(\dfrac{A}{p\left(Bp+1\right)}K_i\dfrac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg\left(\left(Bp+1\right)\right) + \arg\left(1+T_ip\right)$
$= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega$ En $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ on a alors $-180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74$. D'où $T_i = 0{,}05\,\text{s}$.

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

Correction

On souhaite que $|\mathrm{FTBO}(j\omega)| = 1$ pour $\omega = 50\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

$$|\mathrm{FTBO}(j\omega)| = \left|\frac{A}{p\,(Bp+1)}K_i\frac{1+T_ip}{T_ip}\right| = AK_i\frac{1}{\omega\sqrt{B^2\omega^2+1}}\frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2}\frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2+1}}.$$

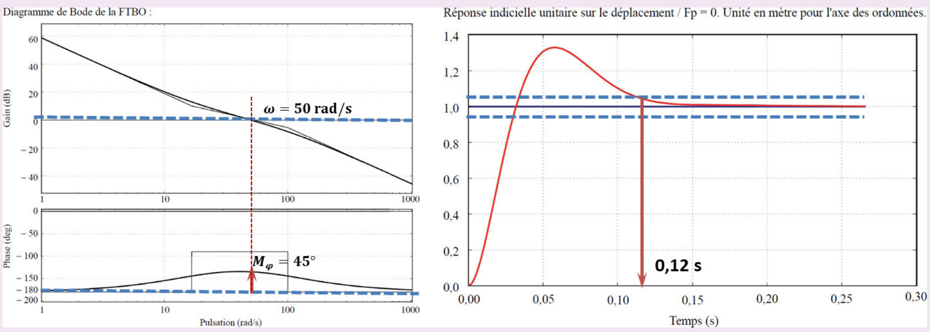
On a donc $K_i = \dfrac{T_i\omega^2\sqrt{B^2\omega^2+1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0{,}0077\,\mathrm{Vm^{-1}}$.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Correction

- Ecart de position : nul $\Rightarrow$ Exigence OK.
- Marge de gain : infine $\Rightarrow$ Exigence OK.
- Marge de phase : $\simeq 45°$ $\Rightarrow$ Exigence OK.



TD 3
Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Sujet

CCP – PSI 2015.

Présentation

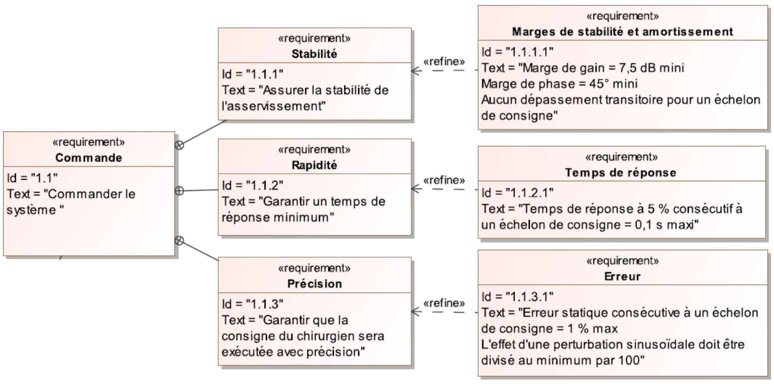
Réalisation de la commande de l'esclave

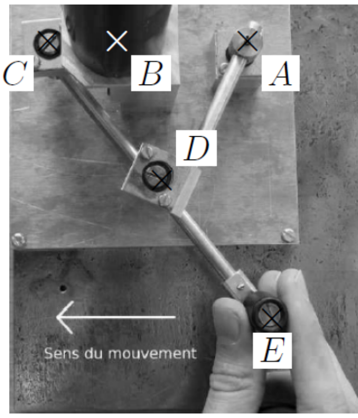
C1-02

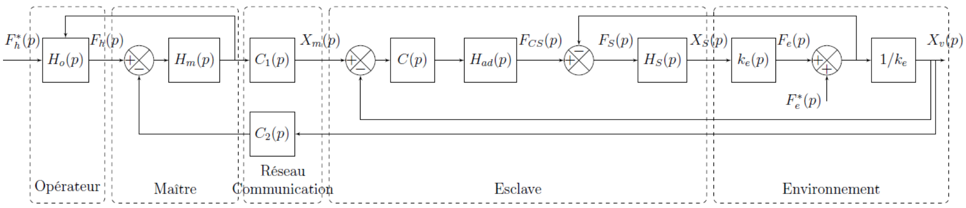
C2-04

Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).





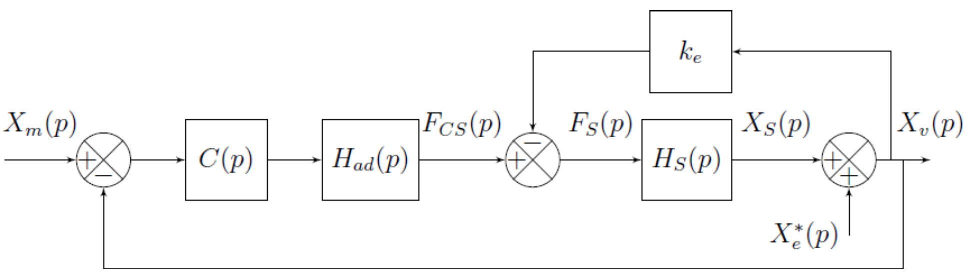


Modélisation et étude des performances du système sans correction

Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

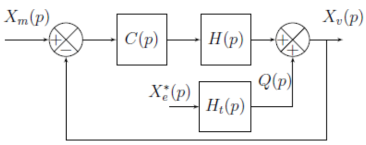
La modélisation permettant de relier la consigne $x_m(t)$ issue du dispositif maître au déplacement $x_v(t)$ de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{\text{ad}}(p) = k_a = 1\,\text{Nm}^{-1}$ permet d'adapter la consigne position en consigne force ;

- $H_S(p) = \dfrac{X_S(p)}{F_S(p)} = \dfrac{k_S}{p\,(m_S p + b_S)}$ avec $k_S = 1\,\mathrm{m\,N^{-1}}$, $m_S = 0{,}152\,\mathrm{kg}$ et $b_S = 1{,}426\,\mathrm{Nsm^{-1}}$;
- $k_e = 200\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Question 1 Simplifier le schéma-blocs précédant pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e, k_a et $H_S(p)$.

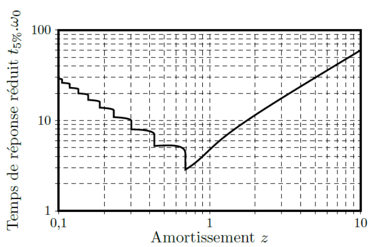


Pour la suite du problème, on prendra : $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

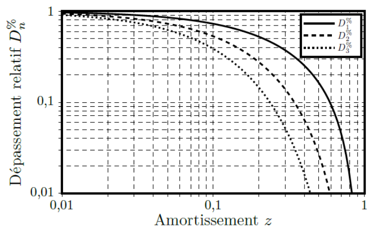
Vérification des exigences sans correction : $C(p) = 1$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_e^*(p) = 0$) : $F_{\mathrm{BF1}}(p) = \dfrac{X_v(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z). Faire l'application numérique.

Question 3 En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$

Objectif

Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

Question 4 Les résultats d'une simulation pour un gain $K_i = 100$ sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

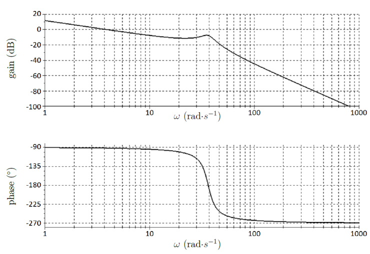
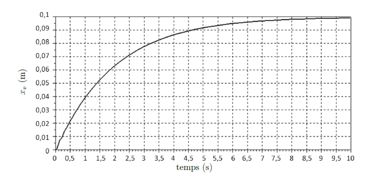


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K_i = 100$



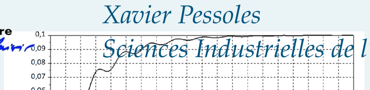
Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et $K_i = 100$

Question 5 Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

Question 6 Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain K_i. Déterminer la valeur K_{imax} du coefficient K_i qui permet de respecter les marges de stabilité.

Question 7 En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».

Question 8 Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction $F_{\mathrm{BF2}}(j\omega) = \dfrac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$ pour $K_i = K_{\mathrm{imax}}$. Quelle sera l'atténuation minimale $|F_{\mathrm{BF2}}(j\omega)|_{\min}$ de la perturbation x_e^* (en %) sur l'intervalle $[1{,}25\,\mathrm{rad\,s^{-1}} ; 12{,}5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}]$. Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

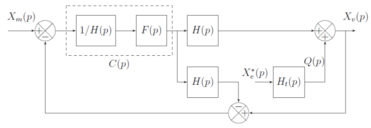


Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

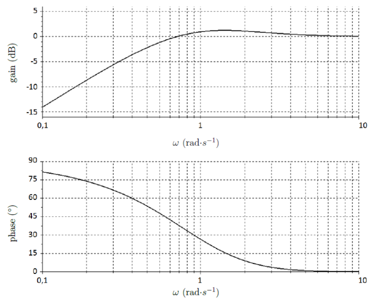


Avec $F(p)$ la fonction de transfert d'un filtre de la forme $F(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

La grandeur de sortie $X_v(p)$ peut s'exprimer par l'équation : $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$ avec $A(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et $B(p) = \dfrac{Tp\,(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Question 9 Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

Question 10 Le diagramme de Bode de $B(j\omega)$ pour $T = 1$ s est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle $[1{,}25\,\mathrm{rad\,s^{-1}}; 12{,}5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}]$. Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



TD 3
Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Corrigé

CCP – PSI 2015.

Présentation

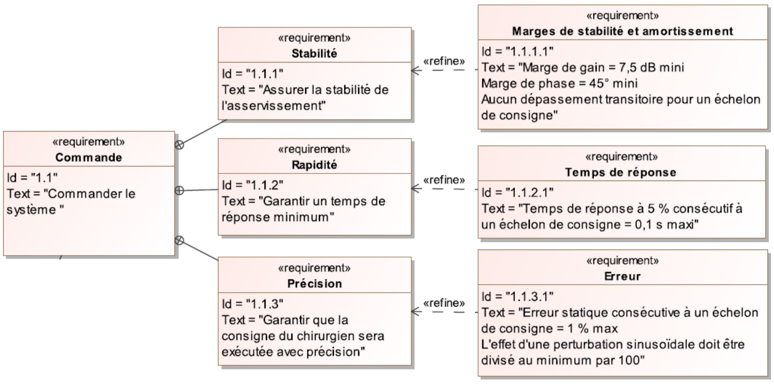
Réalisation de la commande de l'esclave

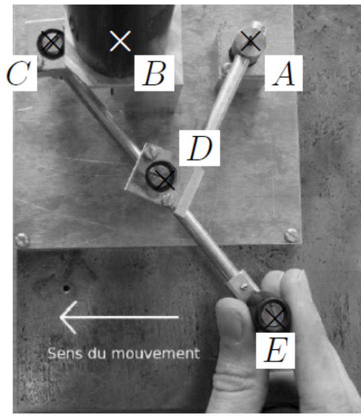
C1-02

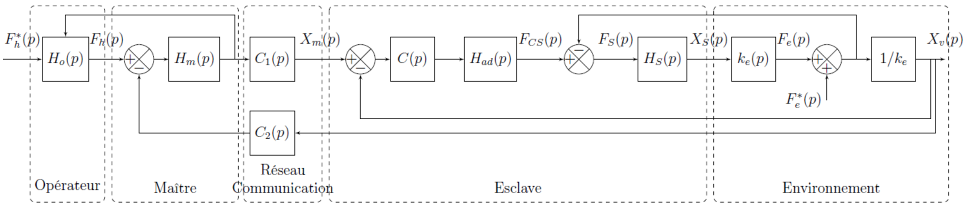
C2-04

Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).





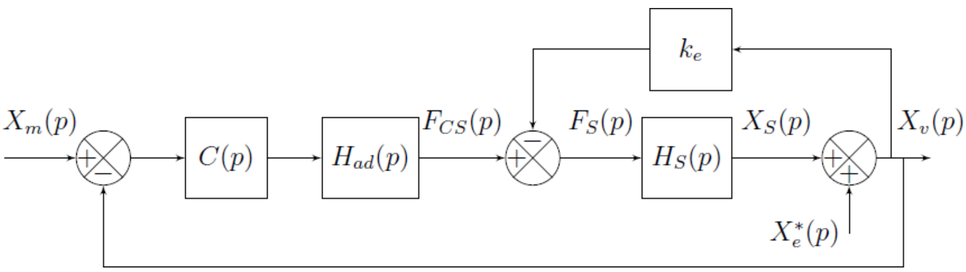


Modélisation et étude des performances du système sans correction

Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

La modélisation permettant de relier la consigne $x_m(t)$ issue du dispositif maître au déplacement $x_v(t)$ de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.



- $H_{\text{ad}}(p) = k_a = 1\,\text{Nm}^{-1}$ permet d'adapter la consigne position en consigne force ;

- $H_S(p) = \dfrac{X_S(p)}{F_S(p)} = \dfrac{k_S}{p\,(m_S p + b_S)}$ avec $k_S = 1\,\mathrm{m\,N^{-1}}$, $m_S = 0{,}152\,\mathrm{kg}$ et $b_S = 1{,}426\,\mathrm{Nsm^{-1}}$;
- $k_e = 200\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Question 1 Simplifier le schéma-blocs précédant pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e, k_a et $H_S(p)$.

Correction

(Il faudrait faire un schéma :)) On commence par décaler le sommateur de droite vers la gauche. Il faut donc ajouter un bloc $\dfrac{1}{H_s(p)}$ dans la perturbation.

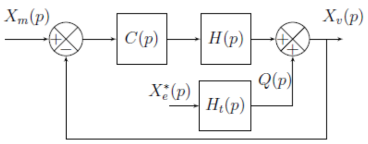
On a alors le bloc $C(p)$, le bloc $H_{\mathrm{ad}}(p)$, le sommateur et une FTBF : $F(p) = \dfrac{H_S(p)}{1 + k_e H_s(p)}$.

On redécale le sommateur vers la gauche.

On a donc $H(p) = H_{\mathrm{ad}}(p)F(p) = \dfrac{H_{\mathrm{ad}}(p)H_S(p)}{1 + k_e H_s(p)}$ et le bloc $\dfrac{1}{H_s(p)H_{\mathrm{ad}}(p)}$ dans la perturbation.

On redécale la perturbation vers la droite et $H_t(p) = \dfrac{H(p)}{H_s(p)H_{\mathrm{ad}}(p)} = \dfrac{1}{1 + k_e H_s(p)}$.

Conclusion : $H(p) = \dfrac{H_{\mathrm{ad}}(p)H_S(p)}{1 + k_e H_s(p)}$ et $H_t(p) = \dfrac{1}{1 + k_e H_s(p)}$.



Pour la suite du problème, on prendra : $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

Vérification des exigences sans correction : $C(p) = 1$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_e^*(p) = 0$) : $F_{\mathrm{BF1}}(p) = \dfrac{X_v(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (z). Faire l'application numérique.

Correction

On a $F_{\mathrm{BF1}}(p) = \dfrac{H(p)}{1 + H(p)} = \dfrac{\dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}}{1 + \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}} = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e + 1} = \dfrac{\dfrac{1}{1 + k_e}}{\dfrac{m_S}{k_e + 1} p^2 + \dfrac{b_S}{k_e + 1} p + 1}$.

On a donc $K = \dfrac{1}{1 + k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_e + 1}{m_S}}$ et $2\xi/\omega_0 = \dfrac{b_S}{k_e + 1}$ soit $\xi = \dfrac{1}{2}\dfrac{b_S}{k_e + 1}\sqrt{\dfrac{k_e + 1}{m_S}} = \dfrac{b_S}{2\sqrt{m_S(k_e + 1)}}$.

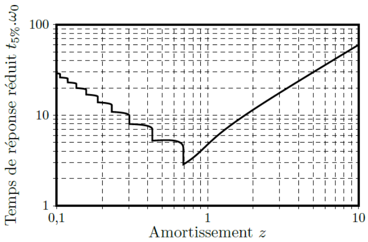
Application numériques : $K = \dfrac{1}{1 + 200} = 0,005$, $\xi = \dfrac{1,426}{2 \times \sqrt{0,152 \times (200 + 1)}} = 0,13$ et $\omega_0 = 36{,}4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Question 3 En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

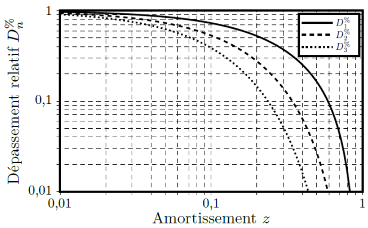
Correction

- Stabilité :
  - Amortissement : pas de dépassement : **Non respecté :** $\xi < 1$.
  - Marge de gain : 7,5 dB mini.
  - Marge de phase : 45 °
- Rapidité : temps de réponse à 5% : inférieur à 0,1 s : $\xi = 0,1 \Rightarrow t_5\omega_0 = 30$ **soit** $t_{5\%} = 30/36,4 = 0,8$ s **Non respecté.**
- Précision : erreur statique inférieur à 1% : **Système de classe 0,** $\varepsilon_S = \dfrac{1}{1+K} = 0,995 \gg$ **0,1, non respecté.**

Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$



(a) Abaque du temps de réponse réduit



(b) Abaque des dépassements relatifs

Objectif

Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

Question 4 Les résultats d'une simulation pour un gain $K_i = 100$ sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

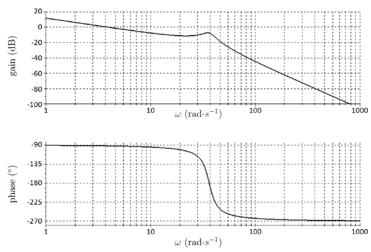
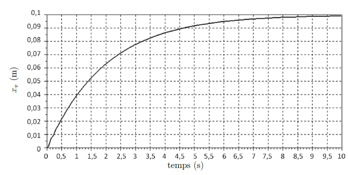


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K_i = 100$



Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm et $K_i = 100$

Correction

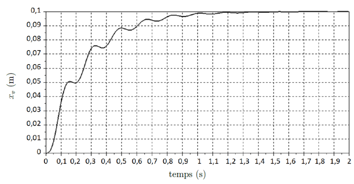
Question 5 Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

Correction

Question 6 Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain K_i. Déterminer la valeur K_{imax} du coefficient K_i qui permet de respecter les marges de stabilité.

Correction

Question 7 En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».



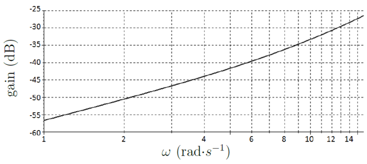
Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm avec le réglage K_{imax}

Correction

Question 8 Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction $F_{BF2}(j\omega) = \dfrac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$ pour $K_i = K_{imax}$. Quelle sera l'atténuation minimale $|F_{BF2}(j\omega)|_{min}$ de la perturbation x_e^* (en %) sur l'intervalle [1,25 rad s^{-1}; 12,5 rad s^{-1}]. Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

Correction

En 1,25 rad s^{-1} l'atténuation est de −55 dB. On a $20 \log K = -55$ soit $K = 0,002$ (inférieur à 1%). En 12,5 rad s^{-1} l'atténuation est de −30 dB. On a $20 \log K = -30$ soit $K = 0,03$ (supérieur à 1%).
Le critère d'atténuation n'est pas vérifié sur l'ensemble de l'intervalle.

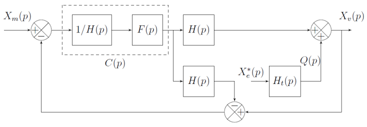


Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.



Avec $F(p)$ la fonction de transfert d'un filtre de la forme $F(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$.

La grandeur de sortie $X_v(p)$ peut s'exprimer par l'équation : $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$ avec $A(p) = \dfrac{1}{(1+Tp)^2}$ et $B(p) = \dfrac{Tp\,(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Question 9 Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

Correction

En utilisant la formulation proposée, on a $X_v(p) = A(p)X_m(p) = \dfrac{X_m(p)}{(1+Tp)^2}$.
Pour améliorer le temps de réponse du système, il faut diminuer T.
Justification On a $G(p) = \dfrac{1}{1+T^2p^2+2Tp}$. On a donc $\dfrac{1}{\omega_0^2} = T^2$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = 2T$. On a donc $\omega_0 = \dfrac{1}{T}$ et $\xi = 1$.
Pour $\xi = 1$, $t_{5\%}\omega_0 = 5$. Ainsi pour réduire le temps de réponse à 5% il faut augmenter ω_0 et donc diminuer T.
Pour un temps de réponse à 5% de 0,1 s, il faut $\omega_0 = \dfrac{5}{0,1} = 50$ rad s^{-1} et $T = 0,02$ s (valeur maximale).

Question 10 Le diagramme de Bode de $B(j\omega)$ pour $T = 1$ s est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle [1,25 rad s^{-1}; 12,5 rad s^{-1}]. Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.

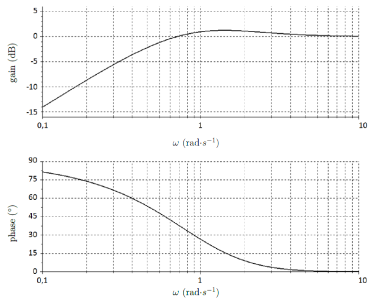
Correction

On a $B(p) = \dfrac{Tp\,(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$.

Pour minimiser l'effet de la perturbation, il faut que décaler la cassure vers la droite. D'après le cahier des charges, l'effet de la perturbation doit être divisé par 100. L'atténuation en dB doit donc être de $20\log\dfrac{1}{100} = -40\,\mathrm{dB}$.

Il faut donc chercher T pour lequel le gain est de $-40\,\mathrm{dB}$. En passant $B(p)$ sous forme canonique et en se plaçant en basse fréquence, on a $B(p) \simeq 2Tp$. On a donc $B_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log(2T\omega)$.

On veut $B_{\mathrm{dB}}(12,5) = 20\log(2T\times 12,5) < -40$ soit $\log(2T\times 12,5) < -2 \Rightarrow 2T\times 12,5 < e^{-2}$ $\Rightarrow T < e^{-2}/25$ et $T < 0{,}005\,\mathrm{s}$.



TD 4
Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

C1-02

C2-04

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	**Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45°$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1\, rd/s$

Modélisation du moteur à courant continu

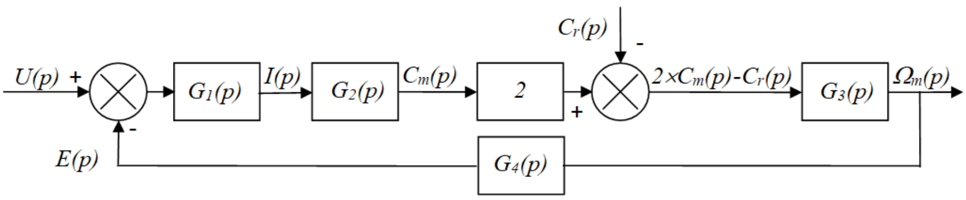
Hypothèses et données :

- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0{,}59\,\mathrm{mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0{,}0386\,\Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6\,\mathrm{N\,m\,s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800\,\mathrm{kg\,m^2}$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5{,}67\,\mathrm{Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_T = 5{,}77\,\mathrm{Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} + f\omega_m(t)$;
- loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

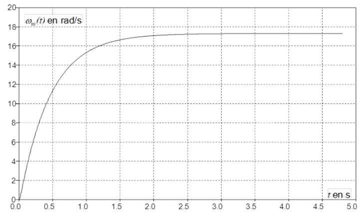
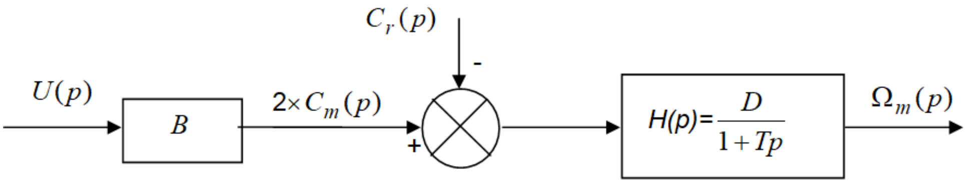


Figure 1.1 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

Question 3 Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



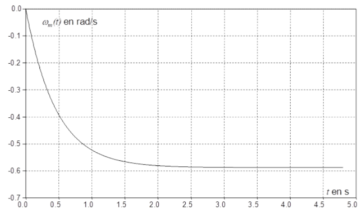
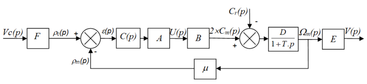


Figure 1.2 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.

Question 4 Donnez la valeur numérique des trois constantes B, D et T.

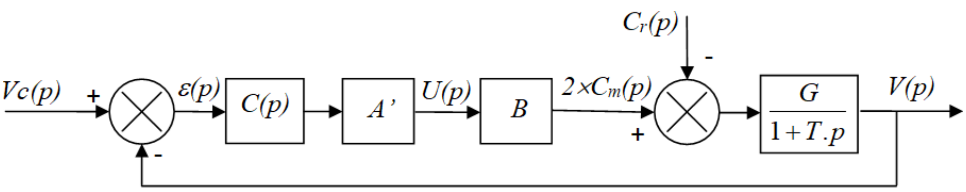
La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.



- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F.
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0{,}716$ V s/rad transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0{,}1$ m (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminez l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G. Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0{,}47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$C(p) = C_0 = 1$.

Question 6 Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculez en fonction de C_0, A', B, G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculez en fonction de C_0, A', B, G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{Nm}$ qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460\,\text{Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \dfrac{C_i}{p}$.

Question 12 Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO(p). Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracez le diagramme asymptotique de Bode de FTBO(p). Tracez également l'allure des courbes.

Question 14 Quelles valeurs numériques de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Ces valeurs numériques de C_i permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.

Question 16 On suppose Cr(p)=0. Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculez numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{N m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Question 18 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifiez.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculez l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p)\dfrac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\left(1+Tp\right)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de $-135°$?

Question 22 Tracez en fonction de a, τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec a>1. Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum $\varphi_{\max}$ ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculez numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

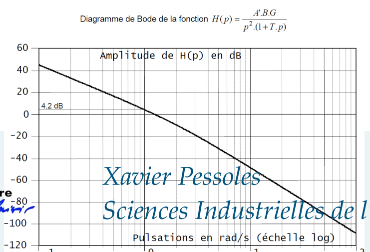
Question 24 Donnez l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que $\varphi_{\max}$ soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculez numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifiez.



Éléments de correction

1. $G_1(p) = \dfrac{1}{R + Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \dfrac{1}{f + Jp}$, $G_1(p) = k_E$.
2. $F_1(p) = \dfrac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \dfrac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.
3. $F_1(p) = \dfrac{0,1725}{1 + 0,47p}$ et $F_2(p) = \dfrac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$.
4. $B = 297{,}4\,\mathrm{N\,m\,V^{-1}}$, $D = 5,8.10^{-4}\,\mathrm{rad.s^{-1}Nm}$ et $T = 0{,}47\,\mathrm{s}$.
5. $F = \dfrac{\mu}{E} = 7{,}16\,\mathrm{V\,s\,m^{-1}}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \dfrac{V_0}{1 + C_0 A'BG} = 4{,}286\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
8. $\varepsilon''_S = -0{,}156\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ – à vérifier.
9. $\varepsilon''_S = 0{,}160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
10. $\varepsilon'_S = 4{,}13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\varepsilon'_S = 4{,}46\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
11. C_0 infini
12. $\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{1,8}{p\,(1 + 0,47p)}$
13.
14. $\omega_{0\,\mathrm{dB}} \leq 2{,}13\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $C_i \leq 1,67$.
15.
16. FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
17. Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
18. CDCF OK.
19. $\varepsilon_v = \dfrac{1}{C_i A'BG}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
22.
23. $a = 32,16$
24. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25. $\tau = 0{,}176\,\mathrm{s}$
26. $K = 0,109$
27.
28.

TD 4
Vanoise Express – Corrigé

E3A – PSI – 2014.

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

C1-02

C2-04

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	**Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45°$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1\,rd/s$

Modélisation du moteur à courant continu

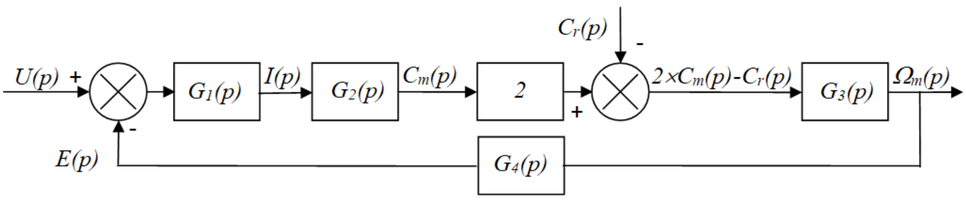
Hypothèses et données :

- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0{,}59\,\text{mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0{,}0386\,\Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6\,\text{N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800\,\text{kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5{,}67\,\text{Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_T = 5{,}77\,\text{Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} + f\omega_m(t)$;
- loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

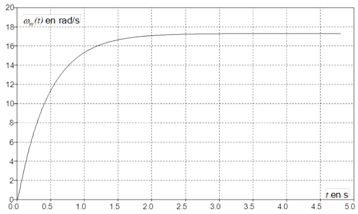


Figure 1.3 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

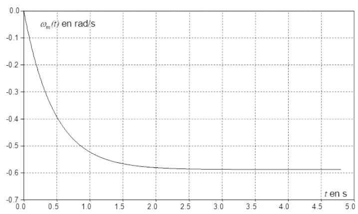
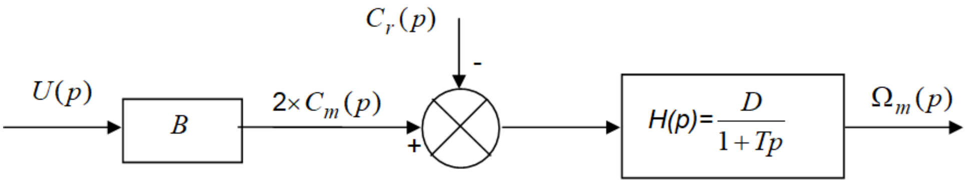


Figure 1.4 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.

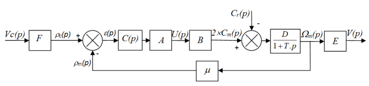
Question 3 Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



Question 4 Donnez la valeur numérique des trois constantes B, D et T.

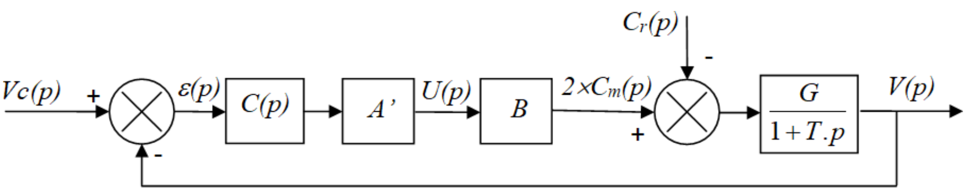
La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.



- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F.
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0{,}716$ V s/rad transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0{,}1$ m (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminez l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G. Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0{,}47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$C(p) = C_0 = 1$.

Question 6 Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculez en fonction de C_0, A', B, G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε_s' engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculez en fonction de C_0, A', B, G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε_s'' engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{Nm}$ qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460\,\text{Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \dfrac{C_i}{p}$.

Question 12 Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO(p). Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracez le diagramme asymptotique de Bode de FTBO(p). Tracez également l'allure des courbes.

Question 14 Quelles valeurs numériques de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Ces valeurs numériques de C_i permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.

Question 16 On suppose Cr(p)=0. Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε_s' engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculez numériquement l'écart statique en régulation ε_s'' engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{N m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Question 18 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifiez.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculez l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p)\dfrac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\,(1+Tp)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de $-135°$?

Question 22 Tracez en fonction de a, τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec a>1. Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum $\varphi_{\max}$ ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculez numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

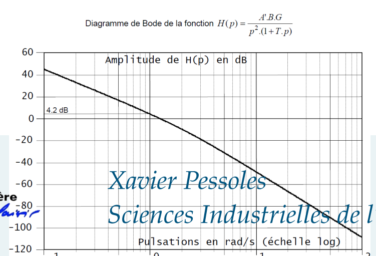
Question 24 Donnez l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que $\varphi_{\max}$ soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculez numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifiez.



Éléments de correction

1. $G_1(p) = \dfrac{1}{R+Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \dfrac{1}{f+Jp}$, $G_1(p) = k_E$.
2. $F_1(p) = \dfrac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \dfrac{G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.
3. $F_1(p) = \dfrac{0,1725}{1+0,47p}$ et $F_2(p) = \dfrac{5,8\cdot 10^{-4}}{1+0,47p}$.
4. $B = 297{,}4\,\mathrm{N\,m\,V^{-1}}$, $D = 5,8.10^{-4}\,\mathrm{rad.s^{-1}Nm}$ et $T = 0{,}47\,\mathrm{s}$.
5. $F = \dfrac{\mu}{E} = 7{,}16\,\mathrm{V\,s\,m^{-1}}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \dfrac{V_0}{1+C_0A'BG} = 4{,}286\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
8. $\varepsilon''_S = -0{,}156\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ – à vérifier.
9. $\varepsilon''_S = 0{,}160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
10. $\varepsilon'_S = 4{,}13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\varepsilon'_S = 4{,}46\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
11. C_0 infini
12. $\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{1,8}{p\,(1+0,47p)}$
13.
14. $\omega_{0\,\mathrm{dB}} \leq 2{,}13\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $C_i \leq 1,67$.
15.
16. FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
17. Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
18. CDCF OK.
19. $\varepsilon_v = \dfrac{1}{C_iA'BG}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
22.
23. $a = 32,16$
24. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25. $\tau = 0{,}176\,\mathrm{s}$
26. $K = 0,109$
27.
28.